ний комплексной переменной ζ, то

$$V=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f\left\{z+i\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}d\varphi$$

в любой точке некоторой области трехмерного пространства.

Вывести отсюда, что потенциал однородного кругового кольца радиуса c и массы M, лежащего в плоскости XOY и с центром в начале, будет

$$\frac{M}{\pi}\int_0^{\pi}\left[c^2+\left\{z+i\,(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi\right\}^2\right]^{-\frac{1}{2}}d\varphi.$$

2. Пусть V — решение уравнения Лапласа, имеющее вид $e^{mi\varphi}F(\rho, z)$, где (ρ, φ, z) — цилиндрические координаты, и пусть это решение ведет себя, как $\rho^m e^{mi\varphi}f(z)$ вблизи оси z, где $f(\zeta)$ имеет характер, описанный в примере 1. Показать, что

$$V=\frac{m!\,\rho^m e^{mi\varphi}}{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi} f(z+i\rho\cos t)\sin^{2m}t\,dt.$$

(Dougall)

3. Зависимость u от x, y, z определяется уравнением

$$Ax+By+Cz=1,$$

где A, B, C — такие функции от u, что

$$A^2+B^2+C^2=0.$$

Показать, что (при некоторых условиях общего характера) любая функция от u будет решением уравнения Лапласа.

(Forsyth, Messenger, XXVII (1898), 99—118)

4. A, B — две точки вне сферы, центр которой C. Слой притягивающей материи на поверхности сферы таков, что его поверхностная плотность σ_P во всякой точке P пропорциональна величине

$$(AP\cdot BP)^{-1}.$$

Показать, что общее количество материи на сфере не меняется с перемещением точек A и B при условии, что произведение $CA\cdot CB$ и угол ACB остаются без изменения; доказать также эквивалентность этого результата теореме, что поверхностный интеграл от произведения двух гармоник различных степеней, взятый по сфере, равен нулю.

(Sylvester, Phil. Mag. (5), II (1876), 291—307)

5. Пусть функция $V(x, y, z)$ аналитически определяется как потенциал поля, образованного массами $\lambda+i\mu$, $\lambda-i\mu$, помещенными соответственно в точках $(a+ia', b+ib', c+ic')$ и $(a-ia', b-ib', c-ic')$. Показать, что функция $V(x, y, z)$ принимает бесконечные значения во всех точках некоторого вещественного круга и если точка (x, y, z) описывает петлю,

зацепленную один раз за этот круг, то начальное и конечное значения потенциала $V(x, y, z)$ численно равны, но противоположны по знаку.

(Appell, Math. Ann., XXX (1887), 155—156)

6. Найти решение уравнения Лапласа, аналитическое в области, для которой $a < r < A$, если дано, что на сферах $r = a$ и $r = A$ решение приводится соответственно к

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\cos\theta), \qquad \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos\theta).$$

7. Пусть O' имеет координаты $(0, 0, c)$, и пусть

$$\angle POZ = \theta, \quad \angle PO'Z = \theta', \quad PO = r, \quad PO' = r'.$$

Показать, что

$$\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}} = \frac{P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}} + (n+1)\frac{cP_{n+1}(\cos\theta)}{r^{n+2}} + \\ + \frac{(n+1)(n+2)c^2}{2!}\frac{P_{n+2}(\cos\theta)}{r^{n+3}} + \ldots,$$

или

$$\frac{P_n(\cos\theta')}{r'^{n+1}} = (-1)^n\left\{\frac{1}{c^{n+1}} + (n+1)\frac{rP_1(\cos\theta)}{c^{n+2}} + \right. \\ \left. + \frac{(n+1)(n+2)r^2}{2!}\frac{P_2(\cos\theta)}{c^{n+3}} + \ldots\right\},$$

соответственно тому, будет ли $r > c$ или $r < c$.

Получить подобное же разложение для $r'^n P_n'(\cos\theta)$.

(Trinity, 1893)

8. Показать, что потенциал однородного сплющенного сфероида, полуоси которого a, b и плотность которого ρ, во внешней точке (r, θ, φ) равен

$$4\pi\rho a^2 b\left[\frac{1}{3r} - \frac{m^2}{3\cdot 5}\frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + \frac{m^4}{5\cdot 7}\frac{P_4(\cos\theta)}{r^5} - \ldots\right],$$

где $m^2 = a^2 - b^2$, если $r > m$. Получить потенциал в точках, для которых $r < m$.

(St. John's, 1899)

9. Показать, что

$$e^{ir\cos\theta} = \left(\frac{1}{2}\pi\right)^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty} i^n(2n+1)r^{-\frac{1}{2}}P_n(\cos\theta)J_{n+\frac{1}{2}}(r).$$

(Bauer, Journ. für Math., LVI)

10 [1]). Показать, что если $x \pm iy = h \operatorname{ch}(\xi \pm i\eta)$, то волновое уравнение в двумерном пространстве в координатах ξ и η имеет вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2} = \frac{h^2}{c^2}(\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

(Lamé)

11. Пусть

$$x = (c + r\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (c + r\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

Показать, что поверхности, для которых r, θ, φ соответственно постоянны, образуют ортогональную систему. Далее, показать, что уравнение Лапласа в координатах r, θ, φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r(c + r\cos\theta)\frac{\partial V}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{(c + r\cos\theta)\frac{\partial V}{\partial \theta}\right\} + \frac{r}{c + r\cos\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

(W. D. Niven, Messenger, X)

12. Пусть точка P имеет прямоугольные координаты (x, y, z) и сферические координаты (r, θ, φ). Пусть плоскость POZ пересекается с окружностью $x^2 + y^2 = k^2$, $z = 0$ в точках α, γ, и пусть

$$\angle \alpha P \gamma = \omega, \quad \lg\left(\frac{P\alpha}{P\gamma}\right) = \sigma.$$

Показать, что уравнение Лапласа в координатах σ, ω, φ имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\left\{\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\omega}\frac{\partial V}{\partial \sigma}\right\} + \frac{\partial}{\partial \omega}\left\{\frac{\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\omega}\frac{\partial V}{\partial \omega}\right\} + \frac{1}{\operatorname{sh}\sigma(\operatorname{ch}\sigma - \cos\omega)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0$$

и что одним из его решений является функция

$$V = (\operatorname{ch}\sigma - \cos\omega)^{\frac{1}{2}} \cos n\omega \cos m\varphi P^m_{n-\frac{1}{2}}(\operatorname{ch}\sigma).$$

(Hicks, Phil. Trans., CLXXII, 617 и след.)

---

[1]) Примеры 10, 11, 12 и 14 легче всего решаются при помощи теоремы Ламе (L a m é, Journ. de l'École polyt., XIV, cahier 23 (1834), 191—288), заключающейся в том, что если (λ, μ, ν) — ортогональные координаты, для которых линейный элемент дается формулой $(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2 = (H_1 \delta\lambda)^2 + (H_2 \delta\mu)^2 + (H_3 \delta\nu)^2$, то уравнение Лапласа в этих координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial V}{\partial \nu}\right) = 0.$$

Простой способ [принадлежащий Томсону (W. T h o m s o n, Camb. Math. Journ., IV (1845), 33—42)] доказательства этой теоремы, основанной на аргументации физического характера, воспроизводится у Лэмба (Л э м б, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, § 111). Аналитические доказательства, основанные на доказательстве Ламе, даны Бертраном (B e r t r a n d, Traité de Calcul Différentielle (1864), 181—187) и Гурса (Г у р с а, Курс математического анализа, т. I, Физматгиз, 1936). Наиболее краткое доказательство принадлежит Невилю (N e v i l l e, Quarterly Journ., XLIX (1923), 338—352). Другое доказательство дано Гейне (H e i n e, Theorie der Kugelfunktionen, I (1878), 303—306).

13. Показать, что

$$(R^2+\rho^2-2R\rho\cos\varphi+c^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}m\pi i}}{\pi}\int_0^{\infty}dk\int_{-\pi}^{\pi}e^{-ck}J_m(k\rho)\,e^{ikR\cos u}\cos mu\,du,$$

и вывести отсюда выражение потенциала частицы через функции Бесселя.

14. Показать, что если a, b, c — постоянные и λ, μ, ν — эллиптические координаты, определяемые как корни уравнения относительно ε:

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{b^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{c^2+\varepsilon}=1,$$

то уравнение Лапласа может быть записано в виде

$$\Delta_\lambda(\mu-\nu)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\Delta_\lambda\frac{\partial V}{\partial\lambda}\right\}+\Delta_\mu(\nu-\lambda)\frac{\partial}{\partial\mu}\left\{\Delta_\mu\frac{\partial V}{\partial\mu}\right\}+\Delta_\nu(\lambda-\mu)\frac{\partial}{\partial\nu}\left\{\Delta_\nu\frac{\partial V}{\partial\nu}\right\}=0,$$

где $\Delta_\lambda=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$.

(Lamé)

15. Показать, что

$$V=\int_{-\pi}^{\pi}F(x\cos\theta+y\sin\theta+iz,\;\; y+iz\sin\theta+ct\cos\theta,\;\theta)\,d\theta$$

есть общее решение волнового уравнения.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), I (1904), 457)

16. Доказать, что если $U=f(x,\,y,\,z,\,t)$ есть решение уравнения

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2},$$

то другим решением этого уравнения будет функция

$$U=t^{-\frac{3}{2}}f\left(\frac{x}{t},\,\frac{y}{t},\,\frac{z}{t},\,-\frac{1}{t}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2t}\right).$$

17. Показать, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(z+i\rho\cos\theta,\;\; ct+\rho\sin\theta)\,d\theta+$$

$$+\int_0^b\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ar\,sh}\left(\frac{a+z+ct\cos\theta}{\rho\sin\theta}\right)F(a,\,\theta)\,d\theta\,da,$$

где ρ, φ, z — цилиндрические координаты и a, b — произвольные постоянные, есть общее решение волнового уравнения, когда движение не зависит от φ.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), I (1904), 458)

18. Пусть $V = f(x, y, z)$ есть решение уравнения Лапласа. Показать, что

$$V = \frac{1}{(x-iy)^{\frac{1}{2}}} f\left(\frac{r^2-a^2}{2(x-iy)}, \frac{r^2+a^2}{2i(x-iy)}, \frac{az}{x-iy}\right)$$

будет другим решением.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 77)

19. Пусть $U = f(x, y, z, t)$ есть решение волнового уравнения. Показать, что

$$U = \frac{1}{z-ct} f\left(\frac{x}{z-ct}, \frac{y}{z-ct}, \frac{r^2-1}{2(z-ct)}, \frac{r^2+1}{2c(z-ct)}\right)$$

есть другое решение.

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 77)

20. Пусть

$$l = x - iy, \quad m = z + iw, \quad n = x^2 + y^2 + z^2 + w^2,$$
$$\lambda = x + iy, \quad \mu = z - iw, \quad \nu = -1,$$

так что

$$l\lambda + m\mu + n\nu = 0.$$

Показать, что любое решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial w^2} = 0,$$

являющееся однородной функцией нулевой степени, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial l\, \partial \lambda} + \frac{\partial^2 U}{\partial m\, \partial \mu} + \frac{\partial^2 U}{\partial n\, \partial \nu} = 0,$$

и получить решение этого уравнения в виде

$$l^{-\alpha}\lambda^{-\alpha'} m^{-\beta}\mu^{-\beta'} n^{-\gamma}\nu^{-\gamma'} P \left\{ \begin{matrix} a, & b, & c, \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \zeta \\ \alpha', & \beta', & \gamma' \end{matrix} \right\},$$

где

$$l\lambda = (b-c)(\zeta-a), \quad m\mu = (c-a)(\zeta-b), \quad n\nu = (a-b)(\zeta-c).$$

(Bateman, Proc. London Math. Soc. (2), VII (1909), 78—82)

21 [1]). Пусть (r, θ, φ) — сфероидальные координаты, определяемые уравнениями

$$x = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\cos\varphi, \quad y = c(r^2+1)^{\frac{1}{2}} \sin\theta\sin\varphi, \quad z = cr\cos\theta,$$

---

[1]) Функции, введенные в примерах 21 и 22, известны под названием *внутренних и внешних сфероидальных гармонических функций* соответственно.

где x, y, z — прямоугольные координаты, а c — постоянная. Показать, что когда n и m — целые числа, имеют место равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{c}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt\,dt = \\ = 2\pi\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi.$$

(Blades, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII)

22. В обозначениях примера 21 показать, что при $z \neq 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} Q_n\left(\frac{x\cos t + y\sin t + iz}{c}\right)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} mt\,dt = 2\pi\frac{(n-m)!}{(n+m)!}Q_n^m(ir)\,P_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi.$$

(Jeffery, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII)

23. Доказать, что наиболее общее решение уравнения Лапласа, являющееся однородной функцией нулевой степени от x, y, z, может быть представлено в виде

$$V = f\left(\frac{x+iy}{r+z}\right) + F\left(\frac{x-iy}{r+z}\right),$$

где f и F — произвольные функции.
(Donkin, Phil. Trans. (1857); Hobson, Proc. London Math. Soc. (1), XXII, 422)

ГЛАВА 19

ФУНКЦИИ МАТЬЕ

19.1. Дифференциальное уравнение Матье

В предыдущих пяти главах мы занимались изучением функций, относящихся к типу, который может быть назван гипергеометрическим; многие простые свойства этих функций в настоящее время хорошо известны.

В настоящей главе мы вступаем в область Анализа, которая лежит за этими пределами и исследована пока весьма неглубоко.

Функции, встречающиеся в математической физике и следующие в порядке сложности за функциями гипергеометрического типа, — это *функции Матье*; эти функции встречаются в задачах, связанных с *эллиптическим цилиндром*, например, при решении двумерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

К этому дифференциальному уравнению с частными производными приходят в теории распространения электромагнитных волн: если электрический вектор параллелен оси OZ и по величине равен E, а $(H_x, H_y, 0)$ — компоненты магнитного вектора, то основные уравнения Максвелла будут

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{\partial E}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x},$$

где c — скорость света, а эти уравнения приводят непосредственно к уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2}.$$

В случае дифракции волн, распространяющихся параллельно оси OX и падающих на эллиптический цилиндр, для которого оси OX и OY являются осями главного сечения, граничные условия заключаются в том, что E равно нулю на поверхности цилиндра.

То же самое уравнение с частными производными встречается в связи с колебаниями однородной плоской мембраны, причем зависимой переменной будет здесь перемещение, перпендикулярное к мембране; если мембрана имеет форму эллипса с закрепленным контуром, то граничное условие будет совпадать с граничным условием в электромагнитной задаче (см. выше).

Это дифференциальное уравнение было рассмотрено Матье[1]) в 1868 г. в связи с задачей о колебаниях эллиптической мембраны следующим образом.

Предположим, что мембрана, находящаяся в плоскости XOY в положении равновесия, колеблется с частотой p. Тогда, если положить $V = u(x, y)\cos(pt + \varepsilon)$, то уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{p^2}{c^2} u = 0.$$

Пусть $(\pm h, 0, 0)$ — фокусы эллиптической мембраны; введем новые вещественные переменные[2]) ξ, η, определяемые комплексным уравнением

$$x + iy = h \operatorname{ch}(\xi + i\eta),$$

так что

$$x = h \operatorname{ch}\xi \cos\eta, \quad y = h \operatorname{sh}\xi \sin\eta.$$

Кривые, на которых ξ или η постоянно, будут, очевидно, эллипсами и гиперболами, конфокальными с границей; если взять $\xi \geqslant 0$ и $-\pi < \eta \leqslant \pi$, то каждой точке $(x, y, 0)$ в плоскости XOY соответствует одна и только одна[3]) пара значений (ξ, η).

Дифференциальное уравнение для u в новых координатах принимает вид[4])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{h^2 p^2}{c^2}(\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta)\, u = 0.$$

Если искать решение этого уравнения в виде

$$u = F(\xi)\, G(\eta),$$

где множители будут соответственно функциями только ξ и только η, то получим

$$\left\{\frac{1}{F(\xi)}\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} + \frac{h^2p^2}{c^2}\operatorname{ch}^2\xi\right\} = -\left\{\frac{1}{G(\eta)}\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2} - \frac{h^2p^2}{c^2}\cos^2\eta\right\}.$$

Так как левая часть содержит только ξ, а правая, наоборот, только η, то $F(\xi)$ и $G(\eta)$ должны быть такими функциями, чтобы

---

[1]) Mathieu, Journ. de Math. (2), XIII (1868), 137.

[2]) Введение этих переменных принадлежит Ламе, который назвал ξ *термометрическим параметром*. Теперь они известны более как *конфокальные координаты*. См. Lamé, Sur les fonctions inverses des transcendantes, 1-ère Leçon.

[3]) Это очень легко увидеть из рассмотрения эллипсов, получаемых при различных положительных значениях ξ. Если проведем такой эллипс через определенную точку (ξ, η) плоскости, то η будет эксцентрическим углом этой точки на этом эллипсе.

[4]) Доказательство этого результата, принадлежащего Ламе, дано во многих учебниках; см. примечание на стр. 253.

обе части уравнения были равны постоянной, скажем A, поскольку ξ и η независимые переменные.

Таким образом, мы приходим к уравнениям

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} + \left(\frac{h^2p^2}{c^2}\operatorname{ch}^2\xi - A\right)F(\xi) = 0,$$

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2} - \left(\frac{h^2p^2}{c^2}\cos^2\eta - A\right)G(\eta) = 0.$$

Несущественной заменой независимой переменной в первом из этих уравнений придем к тому, что *оба эти уравнения станут линейными дифференциальными уравнениями второго порядка вида*

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)u = 0,$$

где a и q — постоянные[1]). Очевидно, что всякая точка (исключая бесконечность) является правильной точкой этого уравнения.

Это уравнение известно под названием *уравнения Матье*, и при известных обстоятельствах (§ 19.2) частные его решения называются *функциями Матье*.

19.11. Форма решения уравнения Матье

В физических задачах, которые привели к уравнению Матье, постоянная a не задана *a priori*, и мы должны рассмотреть вопрос о ее определении. Из физических соображений в задаче о колебаниях мембраны очевидно, что $u(x, y)$ будет *однозначной функцией* точки и, следовательно, остается без изменения при увеличении η на 2π; условия же[2]) $G(\eta + 2\pi) = G(\eta)$ достаточно для определения совокупности значений a при известном q. Позже мы увидим (§§ 19.4, 19.41), что, когда a не принимает ни одного из этих значений, равенство

$$G(\eta + 2\pi) = G(\eta)$$

не имеет места.

Когда a определено указанным образом, то q (а вместе с тем и p) определяется условием, что $F(\xi) = 0$ на границе; таким образом, определяются периоды свободных колебаний мембраны.

---

[1]) Их значения будут $a = A - h^2p^2/2c^2$, $q = h^2p^2/(32c^2)$. Множитель 16 вводится для того, чтобы избегнуть степеней 2 в решениях.

[2]) Элементарным аналогом этого результата является то, что решение уравнения $\frac{d^2u}{dz^2} + au = 0$ имеет период 2π тогда и только тогда, когда a есть квадрат целого числа.

Другие задачи математической физики, приводящие к функциям Матье, следующие: (I) приливные волны в цилиндрическом сосуде с эллиптической границей, (II) определенные формы установившегося вихревого движения в эллиптическом цилиндре, (III) ослабление магнитной силы в металлическом цилиндре [1]). Уравнение Матье встречается также в одной задаче динамики твердого тела, имеющей общий интерес [2]).

19.12. Уравнение Хилла

Дифференциальное уравнение, подобное уравнению Матье, но более общего характера, возникает при определении движения лунного перигея по способу Хилла [3]) и при определении движения лунного узла по Адамсу [4]).

Это уравнение, называемое *уравнением Хилла*, имеет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\left(\theta_0+2\sum_{n=1}^{\infty}\theta_n\cos 2nz\right)u=0.$$

Теория уравнения Хилла весьма похожа на теорию уравнения Матье (несмотря на наличие бесконечного ряда), так что оба уравнения будут, в известной мере, рассматриваться одновременно.

В приложениях к астрономии θ_0, θ_1, ... — *известные* постоянные, так что задача выбора их с таким расчетом, чтобы решение могло быть периодическим, не возникает. И в самом деле, решение уравнения Хилла в теории Луны не периодическое.

19.2. Периодические решения уравнения Матье

Мы видели, что в физических задачах (в отличие от астрономических) постоянную a в уравнении Матье надо выбрать в виде такой функции от q, чтобы уравнение имело периодическое решение.

Пусть $G(z)$ — это решение; тогда $G(z)$ будет не только периодической, но, сверх того, целой функцией от z. При этом возможны три случая: (I) $G(z)$ может быть *четной* функцией от z, (II) $G(z)$ может быть *нечетной* функцией от z, (III) $G(z)$ может не быть ни четной, ни нечетной.

В случае (III)

$$\frac{1}{2}\{G(z)+G(-z)\}$$

будет *четным* периодическим решением, а

$$\frac{1}{2}\{G(z)-G(-z)\}$$

---

[1]) R. C. Maclaurin. Trans. Camb. Phil. Soc., XVII, 41.

[2]) A. W. Young, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII, 81.

[3]) G. W. Hill, Acta. Math., VIII (1886). Мемуар Хилла первоначально был опубликован в 1877 г. в Кэмбридже, США.

[4]) Adams, Monthly Notices R. A. S., XXXVIII, 43.

— *нечетным* периодическим решением уравнения Матье; эти два решения образуют фундаментальную систему. Поэтому достаточно сосредоточить наше внимание лишь на тех периодических решениях уравнения Матье, которые будут или четными, или нечетными. Эти решения, *и только они*, будут называться *функциями Матье*.

Заметим, что так как корни определяющего уравнения при $z = 0$ равны 0 и 1, то два нечетных (или два четных) решения уравнения Матье не могут образовывать фундаментальной системы. Могло бы показаться, однако, что ничто не препятствует уравнению Матье иметь, при специальных значениях a и q, *два* периодических решения — одно *четное* и одно *нечетное*; для сравнительно малых значений $|q|$ можно показать (§ 19.3, пример 2, (II) и (III)), что уравнение Матье имеет два периодических решения только в тривиальном случае, когда $q = 0$; заключение же, что для больших значений $|q|$ никогда не существует двух периодических решений, является частным случаем теоремы, данной Хиллом (Proc. London Math. Soc. (2), XXIII (1924), 224; см. также Ince, Proc. Camb. Phil. Soc., XXI (1922), 117).

19.21. Интегральное уравнение, которому удовлетворяют четные функции Матье[1])

Покажем теперь, что если $G(\eta)$ — какая-нибудь четная функция Матье, то $G(\eta)$ *удовлетворяет однородному интегральному уравнению*

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k \cos \eta \cos \theta} G(\theta)\, d\theta,$$

где $k = \sqrt{32q}$. Этот результат подсказывается решением уравнения Лапласа, данным в § 18.3.

Ибо если $x + iy = h \operatorname{ch}(\xi + i\eta)$ и если $F(\xi)$ и $G(\eta)$ суть решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2F(\xi)}{d\xi^2} - (A + m^2h^2 \operatorname{ch}^2 \xi) F(\xi) = 0,$$

$$\frac{d^2G(\eta)}{d\eta^2} + (A + m^2h^2 \cos^2 \eta) G(\eta) = 0,$$

то по § 19.1 $F(\xi) G(\eta) e^{miz}$ будет частным решением уравнения Лапласа. Если это решение содержится в общем решении

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(h \operatorname{ch} \xi \cos \eta \cos \theta + h \operatorname{sh} \xi \sin \eta \sin \theta + iz,\ \theta)\, d\theta,$$

---

[1]) Это интегральное уравнение и разложения § 19.3 были опубликованы Уиттекером (Whittaker, Proc. Int. Congress of Math., 1912). Интегральное уравнение было известно ему еще в 1904 г.; см. Trans. Camb. Phil. Soc., XXI (1912), 193.

данном в § 18.3, то естественно ожидать, что[1])

$$f(v,\ \theta) \equiv F(0)\, e^{mv}\, \varphi(\theta),$$

где $\varphi(\theta)$ — функция от θ, подлежащая определению. Таким образом,

$$F(\xi)\, G(\eta)\, e^{miz} = \int_{-\pi}^{\pi} F(0)\, \varphi(\theta) \exp\{mh \operatorname{ch} \xi \cos\eta \cos\theta + mh \operatorname{sh} \xi \sin\eta \sin\theta + miz\}\, d\theta.$$

Так как ξ и η — независимые переменные, то мы можем положить $\xi = 0$; таким образом, мы приходим к рассмотрению возможности того, что уравнение Матье имеет решение вида

$$G(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{mh \cos\eta \cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta.$$

19.22. Доказательство того, что четные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

Легко убедиться (§ 5.31, часть I) в том, что если $\varphi(\theta)$ — аналитическая функция в промежутке $(-\pi, \pi)$ и если $G(\eta)$ *определяется* равенством

$$G(\eta) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{mh \cos\eta \cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta,$$

то $G(\eta)$ будет четной периодической целой функцией от η, и что

$$\frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} + (A + m^2 h^2 \cos^2\eta)\, G(\eta) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \{m^2 h^2 (\sin^2\eta \cos^2\theta + \cos^2\eta) - mh \cos\eta \cos\theta + A\}\, e^{mh \cos\eta \cos\theta} \varphi(\theta)\, d\theta =$$

$$= -\left[\{mh \sin\theta \cos\eta \varphi(\theta) + \varphi'(\theta)\}\, e^{mh \cos\eta \cos\theta}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \{\varphi''(\theta) + (A + m^2 h^2 \cos^2\theta)\, \varphi(\theta)\}\, e^{mh \cos\eta \cos\theta}\, d\theta,$$

если проинтегрируем по частям.

Но если $\varphi(\theta)$ — *такая периодическая функция* (*с периодом* 2π), *что*

$$\varphi''(\theta) + (A + m^2 h^2 \cos^2\theta)\, \varphi(\theta) = 0,$$

---

[1]) Постоянная $F(0)$ введена для упрощения алгебраических действий.

то как интеграл, так и проинтегрированный член равны нулю; другими словами, $G(\eta)$, определяемая интегралом, будет периодическим решением уравнения Матье.

Следовательно, $G(\eta)$ есть четное периодическое решение Матье, если $\varphi(\theta)$ — периодическое решение уравнения Матье с теми же самыми постоянными; поэтому функция $\varphi(\theta)$ отличается лишь постоянным множителем от $G(\theta)$; пусть $\varphi(\theta)$ равна $\lambda G(\theta)$.

[В случае, когда уравнение Матье имеет два периодических решения, если только такой случай существует, мы имеем $\varphi(\theta) = \lambda G(\theta) + G_1(\theta)$, где $G_1(\theta)$ — нечетная периодическая функция; но

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{mh\cos\eta\cos\theta} G_1(\theta)\, d\theta$$

обращается в нуль, и дальнейшие рассуждения не меняются.]

Если взять a и q в качестве параметров уравнения Матье вместо A и mh, то очевидно, что $mh = \sqrt{32q} = k$.

Таким образом, мы показали, что если $G(\eta)$ — четное периодическое решение уравнения Матье, то

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\eta\cos\theta} G(\theta)\, d\theta$$

— результат, высказанный в § 19.21.

Из § 11.23 части I известно, что это интегральное уравнение имеет решение только тогда, когда λ — одно из характеристических значений. В § 19.3 будет показано, что для таких значений λ интегральное уравнение дает простой способ для построения четных функций Матье.

Пример 1. Показать, что нечетные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \sin(k\sin\eta\sin\theta)\, G(\theta)\, d\theta\ ^{1}).$$

Пример 2. Показать, что как четная, так и нечетная функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} G(\theta)\, d\theta.$$

---

[1]) Утверждения примеров 1 и 2 ошибочны. Уравнению примера 1 не удовлетворяют функции se_{2n}, а уравнению примера 2 не удовлетворяют

Пример 3. Показать, что, когда эксцентриситет основного эллипса стремится к нулю, интегральное уравнение для четных функций Матье в пределе принимает вид

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix\cos\theta} \cos n\theta \, d\theta.$$

19.3. Построение функций Матье

Теперь мы воспользуемся интегральным уравнением § 19.21 для построения функций Матье; за каноническую форму уравнения Матье примем

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)\, u = 0.$$

В частном случае, когда q равно нулю, периодические решения получаются при $a = n^2$, где n — любое целое число; этими решениями тогда будут

$$\begin{array}{llll} 1, & \cos z, & \cos 2z, & \ldots, \\ & \sin z, & \sin 2z, & \ldots \end{array}$$

Функции Матье, приводящиеся к этим функциям, когда $q \to 0$, обозначим через [1])

$$\begin{array}{lll} ce_0(z, q), & ce_1(z, q), & ce_2(z, q), \ldots, \\ & se_1(z, q), & se_2(z, q), \ldots \end{array}$$

функции se_{2n} и ce_{2n+1}. В этом легко убедиться, заметив, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} ce_{2n+1}(\theta)\, d\theta = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\sin\eta\sin\theta} se_{2n}(\theta)\, d\theta = 0.$$

Для функции $ce_{2n+1}(\eta)$ мы имеем доказанное выше интегральное уравнение

$$ce_{2n+1}(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\eta\cos\theta} ce_{2n+1}(\theta)\, d\theta.$$

Для функции $se_{2n}(\eta)$ имеет место следующее уравнение:

$$se_{2n}(\eta) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos\eta\cos\theta \,\mathrm{sh}\,(k\sin\eta\sin\theta)\, se_{2n}(\theta)\, d\theta$$

[см Boole, On Certain Classes of Mathieu Functions, Proc. London Math, Soc., XX (1921) и В. Купрадзе, О функциях Mathieu — Hankel'я, Труды Матем. ин-та АН СССР, V (1933), № 6]. — *Прим. ред.*

[1]) Обозначения Уиттекера — косинус и синус эллиптического цилиндра. — *Прим. ред.*

Чтобы вполне определить эти функции, возьмем коэффициенты при $\cos nz$ и $\sin nz$ в рядах Фурье для $ce_n(z, q)$ и $se_n(z, q)$ равными единице.

Функции $ce_n(z, q)$, $se_n(z, q)$ будем называть *функциями Матье порядка n*.

Приступим теперь к нахождению $ce_0(z, q)$.

Так как $ce_0(z, 0) = 1$, то видим, что $\lambda \to (2\pi)^{-1}$, когда $q \to 0$. Соответственно этому предположим, что для любого значения q характеристическое значение величины λ, соответствующее функции $ce_0(z, q)$, может быть разложено в ряд

$$(2\pi\lambda)^{-1} = 1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots$$

и что

$$ce_0(z, q) = 1 + q\beta_1(z) + q^2\beta_2(z) + \ldots,$$

где α_1, α_2, ... — числовые постоянные, а $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$, ... — периодические функции от z, не зависящие от q и не содержащие свободных членов.

Подставляя в интегральное уравнение, найдем, что

$$(1 + \alpha_1 q + \alpha_2 q^2 + \ldots)\{1 + q\beta_1(z) + q^2\beta_2(z) + \ldots\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{1 + \sqrt{32q}\cos z\cos\theta + 16q\cos^2 z\cos^2\theta + \ldots\} \times$$

$$\times \{1 + q\beta_1(\theta) + q^2\beta_2(\theta) + \ldots\}\, d\theta.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях q в этом равенстве и используя то обстоятельство, что $\beta_1(z)$, $\beta_2(z)$, ... не содержат свободных членов, найдем последовательно

$$\alpha_1 = 4, \quad \beta_1(z) = 4\cos 2z,$$
$$\alpha_2 = 14, \quad \beta_2(z) = 2\cos 4z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и получим таким путем следующее разложение:

$$ce_0(z, q) = 1 + \left(4q - 28q^3 + \frac{2^7 \cdot 29}{9}q^5 - \ldots\right)\cos 2z +$$
$$+ \left(2q^2 - \frac{160}{9}q^4 + \ldots\right)\cos 4z + \left(\frac{4}{9}q^3 - \frac{13}{3}q^5 + \ldots\right)\cos 6z +$$
$$+ \left(\frac{1}{18}q^4 - \ldots\right)\cos 8z + \left(\frac{1}{225}q^5 - \ldots\right)\cos 10z + \ldots;$$

невыписанные члены будут порядка $O(q^6)$, когда $q \to 0$.

Значение a будет $-32q^2 + 224q^4 - \frac{2^{10} \cdot 29}{9}q^6 + O(q^8)$; отметим, что коэффициент при $\cos 2z$ в ряде для $ce_0(z, q)$ равен $-\frac{a}{8q}$.

Функции Матье высшего порядка могут быть получены подобным же образом из того же интегрального уравнения и из инте-

грального уравнения примера 1 § 19.22. Исследование сходимости полученного ряда отложим до § 19.61.

Пример 1. Получить следующие разложения [1]):

(I) $ce_0(z, q) =$

$$= 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{r+1} q^r}{r!\, r!} - \frac{2^{r+3} r\,(3r+4)\, q^{r+2}}{(r+1)!\,(r+1)!} + O(q^{r+4}) \right\} \cos 2rz,$$

(II) $ce_1(z, q) =$

$$= \cos z + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^r q^r}{(r+1)!\, r!} - \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)!\,(r+2)!} + O(q^{r+3}) \right\} \cos(2r+1)z,$$

(III) $se_1(z, q) =$

$$= \sin z + \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^r q^r}{(r+1)!\, r!} + \frac{2^{r+1} r q^{r+1}}{(r+1)!\,(r+1)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^r q^{r+2}}{(r-1)!\,(r+2)!} + O(q^{r+3}) \right\} \sin(2r+1)z,$$

(IV) $ce_2(z, q) = \left\{ -2q + \frac{40}{3} q^3 + O(q^5) \right\} \cos 2z +$

$$+ \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ \frac{2^{r+1} q^r}{r!\,(r+2)!} + \frac{2^{r+1} r\,(47r^2 + 222r + 247)\, q^{r+2}}{3^2\,(r+2)!\,(r+3)!} + O(q^{r+4}) \right\} \cos(2r+2)z,$$

где в каждом случае постоянная, включенная в символ O, зависит от r, но не от z.

(Whittaker)

Пример 2. Показать, что значения a, соответствующие функциям (I) $ce_0(z, q)$, (II) $ce_1(z, q)$, (III) $se_1(z, q)$, (IV) $ce_2(z, q)$, будут соответственно:

(I) $$-32q^2 + 224q^4 - \frac{2^{10} \cdot 29}{9} q^6 + O(q^8),$$

(II) $$1 - 8q - 8q^2 + 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + O(q^5),$$

(III) $$1 + 8q - 8q^2 - 8q^3 - \frac{8}{3} q^4 + O(q^5),$$

(IV) $$4 + \frac{80}{3} q^2 - \frac{6104}{27} q^4 + O(q^6).$$

(Mathieu)

Пример 3. Показать, что если n — целое число, то

$$ce_{2n+1}(z, q) = (-1)^n\, se_{2n+1}\left(z + \frac{1}{2}\pi, -q\right).$$

---

[1]) Главные члены этих рядов, данные в примере 4 в конце главы (стр. 287), были получены Матье.

19.31. Интегральные формулы для функций Матье

Так как функции Матье удовлетворяют однородному интегральному уравнению с симметричным ядром (§ 19.22, пример 3), то заключаем (§ 11.61, часть I), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(z, q)\, ce_n(z, q)\, dz = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} se_m(z, q)\, se_n(z, q)\, dz = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} ce_m(z, q)\, se_n(z, q)\, dz = 0.$$

Пример 1. Получить разложения вида:

(I) $$e^{k\cos z\cos\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n ce_n(z, q)\, ce_n(\theta, q),$$

(II) $$\cos(k\sin z\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n ce_n(z, q)\, ce_n(\theta, q),$$

(III) $$\sin(k\sin z\sin\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n se_n(z, q)\, se_n(\theta, q),$$

где

$$k = \sqrt{32q}.$$

Пример 2. Получить разложение

$$e^{iz\sin\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, e^{ni\varphi}$$

как предельный случай разложений (II) и (III) примера 1.

19.4. Характер решения общего уравнения Матье; теория Флоке

Рассмотрим теперь характер решения уравнения Матье, когда на параметр a не наложено ограничений, необходимых для того, чтобы уравнение имело периодические решения; этот случай — важный в астрономических задачах, в отличие от других физических приложений.

Метод этот применим к любому линейному уравнению с *периодическими* коэффициентами, являющимися однозначными функциями независимой переменной; характер общих решений некоторых частных уравнений этого типа давно был подмечен астрономами, исхо-

дившими из обстоятельств, при которых возникают эти уравнения. Их заключения подтвердились следующим аналитическим исследованием, опубликованным Флоке в 1883 г. [1]).

Пусть $g(z)$, $h(z)$ — фундаментальная система решений уравнения Матье (или, в более общем случае, любого линейного уравнения, у которого коэффициенты имеют период 2π); тогда, если $F(z)$ — любой другой интеграл такого уравнения, то будем иметь

$$F(z) = Ag(z) + Bh(z),$$

где A и B — определенные постоянные.

Так как $g(z+2\pi)$, $h(z+2\pi)$, очевидно, решения уравнения [2]), то они могут быть представлены линейными комбинациями от $g(z)$ и $h(z)$ в виде

$$g(z+2\pi) = \alpha_1 g(z) + \alpha_2 h(z), \quad h(z+2\pi) = \beta_1 g(z) + \beta_2 h(z),$$

где α_1, α_2, β_1, β_2 — определенные постоянные; а тогда

$$F(z+2\pi) = (A\alpha_1 + B\beta_1)\, g(z) + (A\alpha_2 + B\beta_2)\, h(z).$$

Если A и B взяты так, что они удовлетворяют уравнениям

$$A\alpha_1 + B\beta_1 = kA, \quad A\alpha_2 + B\beta_2 = kB,$$

то будем иметь

$$F(z+2\pi) = kF(z),$$

где k — постоянная [3]).

Эти уравнения имеют ненулевые решения тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - k \end{vmatrix} = 0.$$

---

[1]) Floquet, Ann. de l'École norm. sup. (2), XII (1883), 47. Анализ Флоке является естественным продолжением теории Пикара о дифференциальных уравнениях с двоякопериодическими коэффициентами (§ 20.1) и теории фундаментального уравнения, принадлежащей Фуксу и Гамбургеру.

[2]) Эти решения могут и не совпадать соответственно с $g(z)$, $h(z)$, так как решение уравнения с периодическими коэффициентами не обязано быть периодическим. Возьмем, например, простой случай: $u = e^z \sin z$ является решением уравнения

$$\frac{du}{dz} - (1 + \operatorname{ctg} z)\, u = 0.$$

[3]) Буква k применена в этом частном смысле только в этом параграфе. Ее не следует смешивать с постоянной k § 19.21, которая соответствует параметру q уравнения Матье.

Если k — какой-либо корень этого уравнения, то может быть построена функция $F(z)$, являющаяся решением данного дифференциального уравнения и такая, что

$$F(z+2\pi) = kF(z).$$

Определяя μ уравнением $k = e^{2\pi\mu}$ и написав $\varphi(z)$ вместо $e^{-\mu z}F(z)$, мы видим, что

$$\varphi(z+2\pi) = e^{-\mu(z+2\pi)}F(z+2\pi) = \varphi(z).$$

Таким образом, дифференциальное уравнение имеет частное решение вида $e^{\mu z}\varphi(z)$, где $\varphi(z)$ — периодическая функция с периодом 2π.

Мы видели, что в физических задачах параметры, входящие в дифференциальное уравнение, должны быть выбраны так, чтобы $k = 1$ было корнем квадратного уравнения, и тогда некоторое решение будет периодическим. Однако в астрономических проблемах, в которых параметры являются данными, вообще говоря, $k \neq 1$ и периодического решения не существует.

В частном случае общего уравнения Матье или уравнения Хилла фундаментальной системой решений[1]) будет система $e^{\mu z}\varphi(z)$, $e^{-\mu z}\varphi(-z)$, так как уравнение не изменяется при замене $-z$ на z; полное же решение общего уравнения Матье имеет вид

$$u = c_1 e^{\mu z}\varphi(z) + c_2 e^{-\mu z}\varphi(-z),$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а μ — определенная функция от a и q.

Пример. Показать, что корни уравнения

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - k & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 - k \end{vmatrix} = 0$$

не зависят от выбора системы решений $g(z)$ и $h(z)$.

19.41. Метод решения Хилла

После того как общий функциональный характер решения уравнений с периодическими коэффициентами найден по теории Флоке, можно было бы ожидать, что и нахождение самих решений уравнений Матье и Хилла будет сравнительно просто; однако на самом деле это не так. Например, в случае общего уравнения Матье нужно получить решение вида

$$y = e^{\mu z}\varphi(z),$$

[1]) Отношение этих решений не будет даже периодичным, тем более оно не будет постоянным.

где $\varphi(z)$ — периодическая функция, а μ — функция параметров a и q. Трудность задачи заключается в определении μ; когда же это сделано, то определение самой функции $\varphi(z)$ представляет сравнительно меньшую трудность.

Первый успешный метод подхода к этой задаче был опубликован Хиллом в мемуаре, указанном в § 19.12; так как этот метод для уравнения Хилла не представляет большей трудности, чем для частного случая общего уравнения Матье, то рассмотрим прямо уравнение Хилла, т. е.

$$\frac{d^2u}{dz^2} + J(z)\,u = 0,$$

где $J(z)$ — четная функция от z с периодом π.

Большой интерес представляют два следующих случая; рассуждения в каждом из них будут одинаковы.

(I) Астрономический случай, когда z вещественно и для вещественных значений z функция $J(z)$ может быть разложена в ряд

$$J(z) = \theta_0 + 2\theta_1 \cos 2z + 2\theta_2 \cos 4z + \ldots,$$

где коэффициенты θ_n — заданные постоянные и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ абсолютно сходится.

(II) Случай, когда z — комплексная переменная, а $J(z)$ — аналитическая функция в полосе плоскости (содержащей вещественную ось), ограниченной прямыми, параллельными вещественной оси. Разложение функции $J(z)$ в ряд Фурье $\theta_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \cos 2nz$ тогда имеет место (§ 9.11, часть I) внутри полосы, и, как и выше, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n$ абсолютно сходится.

Положив $\theta_{-n} = \theta_n$, ищем решение уравнения Хилла в виде

$$u = e^{\mu z} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{2niz}.$$

[В случае (II) оно будет решением, аналитическим в указанной полосе (§§ 10.2, часть I, 19.4); в случае (I) нужно будет доказать в заключение (см. примечание в конце § 19.42), что коэффициенты b_n таковы, что ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 b_n$ абсолютно сходится, чтобы оправдать операции, которые мы сейчас будем производить.]

После подстановки в уравнение найдем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mu + 2ni)^2 b_n e^{(\mu+2ni)z} + \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n e^{2niz}\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{(\mu+2ni)z}\right) = 0.$$

Перемножая абсолютно сходящиеся ряды и приравнивая нулю коэффициенты при степенях e^{2iz} (§§ 9.6—9.632, часть I), получим систему уравнений

$$(\mu + 2ni)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \theta_m b_{n-m} = 0 \qquad (n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots).$$

Если исключить коэффициенты b_n с помощью определителей (после деления n-го уравнения на $\theta_0 - 4n^2$ для обеспечения сходимости), то получим [1]) уравнение Хилла:

$$\begin{vmatrix}
\cdots & \dfrac{(i\mu+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\theta_2}{0^2-\theta} & \dfrac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu)^2-\theta_0}{0^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{0^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{0^2-\theta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\theta_3}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{2^2-\theta_0} & \cdots \\
\cdots & \dfrac{-\theta_4}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_3}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_2}{4^2-\theta_0} & \dfrac{-\theta_1}{4^2-\theta_0} & \dfrac{(i\mu-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0} & \cdots
\end{vmatrix} = 0.$$

Обозначим через $\Delta(i\mu)$ стоящий слева определитель, который будем называть определителем Хилла; тогда уравнение, определяющее μ, будет

$$\Delta(i\mu) = 0.$$

19.42. Вычисление определителя Хилла

Мы найдем теперь чрезвычайно простое выражение для определителя Хилла, а именно:

$$\Delta(i\mu) \equiv \Delta(0) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)\operatorname{cosec}^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Принимая обозначение § 2.8 части I, можем написать

$$\Delta(i\mu) \equiv [A_{m,n}],$$

где

$$A_{m,m} = \frac{(i\mu - 2m)^2 - \theta_0}{4m^2 - \theta_0}, \qquad A_{m,n} = \frac{-\theta_{m-n}}{4m^2 - \theta_0} \qquad (m \neq n).$$

[1]) Так как не все коэффициенты b_n равны нулю, то мы можем получить этот бесконечный определитель как результат исключения неизвестных (элиминант) из системы линейных уравнений, умножая уравнения системы на надлежаще выбранные алгебраические дополнения определителя и складывая их.

Определитель $[A_{m,n}]$ будет только *условно* сходящимся, так как произведение элементов главной диагонали не является абсолютно сходящимся (§§ 2.81, 2.7, часть I).

Можно, однако, получить *абсолютно* сходящийся определитель, $\Delta_1(i\mu)$ делением n-го линейного уравнения § 19.41 на $\theta_0-(i\mu-2n)^2$ вместо деления на θ_0-4n^2. Напишем этот определитель $\Delta_1(i\mu)$ в виде $[B_{m,n}]$, где

$$B_{m,m}=1, \quad B_{m,n}=\frac{-\theta_{m-n}}{(2m-i\mu)^2-\theta_0} \qquad (m\neq n).$$

Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\theta_n$ обеспечивает сходимость определителя $[B_{m,n}]$, за исключением случая, когда μ имеет такое значение, что знаменатель одного из выражений $B_{m,n}$ равен нулю.

Из определения бесконечного определителя (§ 2.8, часть I) следует, что

$$\Delta(i\mu)=\Delta_1(i\mu)\lim_{p\to\infty}\prod_{n=-p}^{p}\left\{\frac{\theta_0-(i\mu-2n)^2}{\theta_0-4n^2}\right\},$$

и таким образом,

$$\Delta(i\mu)=-\Delta_1(i\mu)\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\theta_0})\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)}.$$

Если выписать теперь определитель $\Delta_1(i\mu)$ в развернутом виде, то легко видеть, что: (I) $\Delta_1(i\mu)$ — четная периодическая функция от μ с периодом $2i$, (II) $\Delta_1(i\mu)$ — аналитическая функция (§§ 2.81, 3.34, 5.3, часть I) от μ (если не считать очевидных простых полюсов), которая стремится к единице, когда вещественная часть μ стремится к $\pm\infty$.

Если взять теперь постоянную K так, чтобы функция $D(\mu)$, определяемая равенством

$$D(\mu)\equiv\Delta_1(i\mu)-K\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi(i\mu+\sqrt{\theta_0})-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi(i\mu-\sqrt{\theta_0})\right\},$$

не имела полюса в точке $\mu=i\sqrt{\theta_0}$, то вследствие того, что $D(\mu)$ — четная периодическая функция от μ, $D(\mu)$ не будет иметь полюсов ни в одной из точек

$$2ni\pm i\sqrt{\theta_0},$$

где n — любое целое число.

Поэтому функция $D(\mu)$ — периодическая функция от μ (с периодом $2i$), не имеющая полюсов и, очевидно, ограниченная, когда $R(\mu)\to\pm\infty$. Условия теоремы Лиувилля (§ 5.63, часть I) удовле-

творяются, и следовательно, $D(\mu)$ равна постоянной; заставляя $\mu \to +\infty$, видим, что эта постоянная равна единице.

Поэтому

$$\Delta_1(i\mu) = 1 + K\left\{\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi(i\mu + \sqrt{\theta_0}) - \operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi(i\mu - \sqrt{\theta_0})\right\},$$

и следовательно,

$$\Delta(i\mu) = -\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu - \sqrt{\theta_0})\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu + \sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)} + 2K\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Для определения K положим $\mu = 0$; тогда

$$\Delta(0) = 1 + 2K\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Отсюда после вычитания найдем

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)},$$

что и является требуемым результатом.

Корни определителя Хилла являются поэтому корнями уравнения

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) = \Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right).$$

Когда μ таким образом определено, то коэффициенты b_n могут быть выражены через b_0 и миноры определителя $\Delta(i\mu)$, и решение дифференциального уравнения Хилла на этом заканчивается.

[В случае (I) § 19.41 сходимость ряда $\sum n^2 |b_n|$ вытекает из теоремы § 2.82 части I об изменении элементов в сходящихся бесконечных определителях, ибо $\sum n^2 |b_n|$ равна $|b_0| \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_{m,0}| : |C_{0,0}|$, где $C_{m,n}$ — минор элемента $B_{m,n}$ в определителе $\Delta_1(i\mu)$, а $\sum |C_{m,0}|$ есть определитель, получаемый заменой элементов строки, проходящей через начало, числами, модули которых ограничены.]

Хиллом было показано, что для его астрономической задачи можно получить весьма хорошее приближение для значения μ, беря только три центральных строки и столбца его определителя.

19.5. Теория Линдемана — Стилтьеса, относящаяся к общему уравнению Матье

До сих пор уравнение Матье рассматривалось как линейное дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами. Несколько чрезвычайно интересных свойств уравнения Матье было получено Линдеманом [1]) подстановкой $\zeta = \cos^2 z$, которая преобразует первоначальное уравнение в уравнение с рациональными коэффициентами, а именно:

$$4\zeta(1-\zeta)\frac{d^2u}{d\zeta^2} + 2(1-2\zeta)\frac{du}{d\zeta} + (a - 16q + 32q\zeta)u = 0.$$

Хотя это уравнение и походит несколько на гипергеометрическое уравнение, однако оно более высокого типа, чем уравнения, рассмотренные в главах 14 и 16, так как оно имеет две правильные особые точки в 0 и 1 и неправильную особую точку на ∞, между тем как все три особые точки гипергеометрического уравнения правильные, а уравнение для $W_{k,m}(z)$ имеет одну неправильную особую точку и только одну правильную особую точку.

Дадим краткое изложение анализа Линдемана с некоторыми видоизменениями, принадлежащими Стилтьесу [2]).

19.51. Форма Линдемана теоремы Флоке

Так как уравнение Матье (в форме Линдемана) имеет особые точки при $\zeta = 0$ и $\zeta = 1$, причем показатели в каждой равны $0, \frac{1}{2}$, то существуют решения вида

$$y_{00} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n, \qquad y_{01} = \zeta^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n,$$

$$y_{10} = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (1-\zeta)^n, \quad y_{11} = (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} b'_n (1-\zeta)^n;$$

первые два ряда сходятся, когда $|\zeta| < 1$, последние — когда $|1-\zeta| < 1$.

Если плоскость ζ разрезана вдоль вещественной оси от 1 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$, то четыре функции, определяемые этими рядами, будут однозначными в разрезанной плоскости; соотношения вида

$$y_{10} = \alpha y_{00} + \beta y_{01}, \quad y_{11} = \gamma y_{00} + \delta y_{01}$$

будут существовать во всех точках разрезанной плоскости.

---

[1]) Lindemann, Math. Ann., XXII (1883), 117.

[2]) Stieltjes, Astr. Nach., CIX (1884), столбцы 145—152, 261—266. Анализ весьма похож на примененный Эрмитом (Hermite) в его лекциях в École Polytechnique в 1872—1873 г. [Oeuvres, III (Paris, 1912), 118—122)] в связи с уравнением Ламе; см. § 23.7.

Теперь предположим, что ζ описывает петлю вокруг начала координат, так что эта петля пересекает разрез от $-\infty$ до 0; аналитическим продолжением y_{10} будет $\alpha y_{00} - \beta y_{01}$ (так как y_{00} не изменится при обходе этой петли, а y_{01} изменит знак), а продолжением y_{11} будет $\gamma y_{00} - \delta y_{01}$; *таким образом, обход петли не окажет влияния на* $Ay_{10}^2 + By_{11}^2$, *если*

$$A(\alpha y_{00} + \beta y_{01})^2 + B(\gamma y_{00} + \delta y_{01})^2 \equiv A(\alpha y_{00} - \beta y_{01})^2 + B(\gamma y_{00} - \delta y_{01})^2,$$

т. е. если

$$A\alpha\beta + B\gamma\delta = 0.$$

Кроме того, $Ay_{10}^2 + By_{11}^2$, очевидно, не имеет точки ветвления также в $\zeta = 1$, и таким образом, при $A\alpha\beta + B\gamma\delta = 0$ эта функция не имеет точек ветвления ни в 0, ни в 1; так как она не имеет других возможных особых точек в конечной части плоскости, то *она должна быть целой функцией от* ζ. Два выражения

$$A^{\frac{1}{2}} y_{10} + iB^{\frac{1}{2}} y_{11}, \quad A^{\frac{1}{2}} y_{10} - iB^{\frac{1}{2}} y_{11}$$

являются, следовательно, двумя решениями уравнения Матье, произведение которых — целая функция от ζ.

[Это равносильно тому (§ 19.4), что произведение выражений $e^{\mu z}\varphi(z)$ и $e^{-\mu z}\varphi(-z)$ является *периодической целой* функцией от z.]

19.52. Определение целой функции, связанной с общим уравнением Матье

Только что введенная целая функция $F(z) \equiv Ay_{10}^2 + By_{11}^2$ может быть легко определена; ибо, если y_{10} и y_{11} — какие-либо решения уравнения

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + P(\zeta)\frac{du}{d\zeta} + Q(\zeta)u = 0,$$

то их квадраты (а следовательно, и любая линейная комбинация их квадратов) удовлетворяют уравнению [1])

$$\frac{d^3y}{d\zeta^3} + 3P(\zeta)\frac{d^2y}{d\zeta^2} + [P'(\zeta) + 4Q(\zeta) + 2[P(\zeta)]^2]\frac{dy}{d\zeta} + \\ + 2[Q'(\zeta) + 2P(\zeta)Q(\zeta)]y = 0;$$

[1]) Appel, Comptes Rendus, XCI, (1880), 211—214; ср. пример 10 в конце главы 14 (стр. 102).

в рассматриваемом случае это уравнение приводится к

$$\zeta(1-\zeta)\frac{d^3F(\zeta)}{d\zeta^3}+\frac{3}{2}(1-2\zeta)\frac{d^2F(\zeta)}{d\zeta^2}+$$
$$+(a-1-16q+32q\zeta)\frac{dF(\zeta)}{d\zeta}+16qF(\zeta)=0.$$

Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ — ряд Маклорена для $F(\zeta)$; после подстановки легко получим рекуррентную формулу для коэффициентов c_n, а именно:

$$v_{n+1}c_{n+2}=u_nc_{n+1}+c_n,$$

где

$$u_n=\frac{(n+1)\{(n+1)^2-a+16q\}}{16q(2n+1)},\quad v_n=-\frac{n(n+1)(2n+1)}{32q(2n-1)}.$$

На первый взгляд рекуррентная формула как будто указывает, что c_0 и c_1 могут быть взяты произвольно, а оставшиеся коэффициенты c_2, c_3, ... вычислены в зависимости от них; но уравнение третьего порядка имеет особую точку при $\zeta=1$ и полученный таким образом ряд будет иметь только единичный радиус сходимости. Необходимо взять такое значение отношения $\frac{c_1}{c_0}$, чтобы ряд сходился для всех значений ζ.

Рекуррентная формула, написанная в виде

$$\frac{c_n}{c_{n+1}}=u_n+\frac{v_{n+1}}{\frac{c_{n+1}}{c_{n+2}}},$$

приводит к исследованию бесконечной непрерывной дроби

$$u_n+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}+\frac{v_{n+2}}{u_{n+2}}+\ldots=\lim_{m\to\infty}\left\{u_n+\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}}+\ldots+\frac{v_{n+m}}{u_{n+m}}\right\}.$$

Непрерывная дробь в правой части может быть написана [1]) в виде

$$\frac{u_nK(n,\,n+m)}{K(n+1,\,n+m)},$$

где

$$K(n,\,n+m)=\begin{vmatrix} 1 & \frac{v_{n+1}}{u_n} & 0 & \ldots \\ -u_{n+1}^{-1} & 1 & \frac{v_{n+2}}{u_{n+1}} & \ldots \\ 0 & -u_{n+2}^{-1} & 1 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & -u_{n+m}^{-1}, & 1 \end{vmatrix}.$$

[1]) Sylvester, Phil. Mag. (4), V (1853), 446 [Math. Papers, I, 609].

Предел этого определителя при $m \to \infty$ есть сходящийся определитель типа Коха (согласно примеру § 2.82 части I); а так как

$$\sum_{r=n}^{\infty} \left| \frac{v_{r+1}}{u_r u_{r+1}} \right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то легко видеть, что $K(n, \infty) \to 1$ при $n \to \infty$.

Поэтому, если

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{u_n K(n, \infty)}{K(n+1, \infty)},$$

то c_n удовлетворяет рекуррентной формуле, и так как $\frac{c_{n+1}}{c_n} \to 0$ при $n \to \infty$, то получающийся ряд для $F(\zeta)$ будет целой функцией. Из рекуррентной формулы очевидно, что все коэффициенты c_n будут конечными, так как они конечны, когда n достаточно велико. Построение целой функции $F(\zeta)$ поэтому выполнено.

19.53. Решение уравнения Матье с помощью функции $F(\zeta)$

Если w_1 и w_2 — два частных решения уравнения

$$\frac{d^2u}{d\zeta^2} + P(\zeta)\frac{du}{d\zeta} + Q(\zeta)u = 0,$$

то[1])

$$w_2 w_1' - w_1 w_2' = C \exp\left\{ -\int_0^{\zeta} P(\zeta)\, d\zeta \right\},$$

где C — определенная постоянная. Принимая за w_1 и w_2 те два решения общего уравнения Матье, произведение которых равно $F(\zeta)$, имеем

$$\frac{w_1'}{w_1} - \frac{w_2'}{w_2} = \frac{C}{\zeta^{\frac{1}{2}}(1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}, \qquad \frac{w_1'}{w_1} + \frac{w_2'}{w_2} = \frac{F'(\zeta)}{F(\zeta)},$$

причем второе уравнение вытекает непосредственно из равенства

$$w_1 w_2 = F(\zeta).$$

---

[1]) A b e l, Journ. für Math., II (1927), 22. Штрихи обозначают дифференцирование относительно ζ.

Решая эти уравнения относительно $\frac{w_1'}{w_1}$ и $\frac{w_2'}{w_2}$ и затем интегрируя, получим

$$w_1 = \gamma_1 \{F(\zeta)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2} C \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}\right\},$$

$$w_2 = \gamma_2 \{F(\zeta)\}^{\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} C \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{\frac{1}{2}} (1-\zeta)^{\frac{1}{2}} F(\zeta)}\right\},$$

где γ_1, γ_2 — постоянные интегрирования; очевидно, ничего не теряется в общности, если взять $c_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = 1$.

Из первой формулы находим для малых значений $|\zeta|$

$$w_1 = 1 + C\zeta^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(c_1 + C^2)\zeta + O\left(\zeta^{\frac{3}{2}}\right);$$

с другой стороны, в обозначениях § 19.51 мы имеем

$$\frac{a_1}{a_0} = -\frac{1}{2} a + 8q.$$

Отсюда

$$C^2 = 16q - a - c_1.$$

Этим равенством определяется C в зависимости от a, q и c_1, причем значение c_1 равно

$$K(1, \infty)/\{u_0 K(0, \infty)\}.$$

Пример 1. Показать, что для числа μ в решениях уравнения Матье $e^{\pm \mu z}\varphi(\pm z)$, где $\varphi(z)$ — периодическая функция, имеем соотношение

$$\pi\mu = \pm C \int_0^{\pi} \frac{dz}{F(\cos^2 z)}.$$

Пример 2. Показать, что все нули функции $F(\zeta)$ простые, если только $C \neq 0$.

(Stieltjes)

[Если бы $F(\zeta)$ имела кратный нуль, то w_1 и w_2 имели бы тогда существенно особую точку.]

19.6. Второй метод построения функции Матье

До сих пор принималось, что все ряды § 19.3, дающие выражения для $ce_N(z, q)$ и $se_N(z, q)$, сходятся.

Теперь будет доказано, что $ce_N(z, q)$ и $se_N(z, q)$ — целые функции от z и что коэффициенты их разложений в ряды

Фурье являются степенными рядами относительно q, которые сходятся абсолютно, когда $|q|$ достаточно мал[1]).

Чтобы получить этот результат для функций $ce_N(z, q)$, покажем, как определяется частный интеграл уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + 16q\cos 2z)\,u = \psi(a, q)\cos Nz$$

в виде ряда Фурье, сходящегося во всей плоскости z; $\psi(a, q)$ — функция параметров a и q. Уравнение $\psi(a, q) = 0$ определяет тогда соотношение между a и q, которое приводит к функции Матье. Читатель, знакомый с методом Фробениуса[2]) для разыскания решений линейных дифференциальных уравнений в виде степенных рядов, заметит сходство нижеследующего анализа с его методом.

Положим $a = N^2 + 8p$, где N — нуль или положительное или отрицательное целое число. Уравнение Матье примет вид

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = -8(p + 2q\cos 2z)\,u.$$

Если пренебречь p и q, то одним из решений этого уравнения будет

$$u = \cos Nz = U_0(z).$$

Чтобы получить более точное приближение, представим

$$-8(p + 2q\cos 2z)\,U_0(z)$$

в виде суммы косинусов, т. е. в виде

$$-8\{q\cos(N-2)z + p\cos Nz + q\cos(N+2)z\} = V_1(z).$$

Затем, вместо того чтобы решать уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = V_1(z),$$

отбросим члены[3]) в $V_1(z)$, которые содержат $\cos Nz$, т. е. рассмотрим функцию $W_1(z)$, где

$$W_1(z) = V_1(z) + 8p\cos Nz.$$

---

[1]) Существенной частью этой теоремы является *доказательство сходимости рядов, которые встречаются в коэффициентах*; уже известно (§§ 10.2, 10.21, часть I), что решения уравнения Матье будут целыми функциями от z, а существование разложения Фурье (в случае *периодических* решений) вытекает из § 9.11 части I.

[2]) Frobenius, Journ. für Math., LXXVI (1873), 214—224.

[3]) Основанием для такого отбрасывания служит то обстоятельство, что частный интеграл уравнения $\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = \cos Nz$ содержит непериодические члены.

Одним из интегралов уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = W_1(z)$$

будет

$$u = 2\left\{\frac{q}{1(1-N)}\cos(N-2)z + \frac{q}{1(1+N)}\cos(N+2)z\right\} = U_1(z).$$

Представим теперь $-8(p+2q\cos 2z)U_1(z)$ как сумму косинусов; обозначив эту сумму через $V_2(z)$, возьмем α_2 в виде такой функции от p и q, что $V_2(z)+\alpha_2\cos Nz$ не содержит члена с $\cos Nz$, и положим

$$V_2(z)+\alpha_2\cos Nz = W_2(z).$$

Решим уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + N^2u = W_2(z)$$

и будем продолжать тот же процесс. Таким путем мы получим три совокупности функций $U_m(z)$, $V_m(z)$, $W_m(z)$, которые определены так, что $U_m(z)$ и $W_m(z)$ не содержат члена с $\cos Nz$, когда $m \neq 0$, и

$$W_m(z) = V_m(z) + \alpha_m\cos Nz,$$
$$V_m(z) = -8(p+2q\cos 2z)U_{m-1}(z),$$
$$\frac{d^2U_m(z)}{dz^2} + N^2U_m(z) = W_m(z),$$

где α_m — функция от p и q, но не от z.

Тогда

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + N^2\right\}\sum_{m=0}^{n} U_m(z) = \sum_{m=1}^{n} W_m(z) = \sum_{m=1}^{n} V_m(z) + \left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\right)\cos Nz =$$
$$= -8(p+2q\cos 2z)\sum_{m=0}^{n-1} U_{m-1}(z) + \left(\sum_{m=1}^{n}\alpha_m\right)\cos Nz.$$

Поэтому, если $U(z) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m(z)$ — равномерно сходящийся ряд аналитических функций в некоторой двумерной области плоскости z, то мы имеем (§ 5.3, часть I)

$$\frac{d^2U(z)}{dz^2} + (a+16q\cos 2z)U(z) = \psi(a, q)\cos Nz,$$

где

$$\psi(a, q) = \sum_{m=1}^{\infty}\alpha_m.$$

Очевидно, что если a взято так, что $\psi(a, q) = 0$, то $U(z)$ приводится к $ce_N(z)$.

Подобный же процесс, очевидно, может быть выполнен для функций $se_N(z, q)$, если применим синусы аргументов, кратных z.

19.61. Сходимость рядов, определяющих функции Матье

Рассмотрим теперь разложения § 19.6 более подробно с целью исследовать сходимость содержащихся в них рядов.

Когда $n \geqslant 1$, очевидно, можно положить

$$U_n(z) = \sum_{r=1}^{n}{}^{*} \beta_{n,r} \cos(N-2r)z + \sum_{r=1}^{n} \alpha_{n,r} \cos(N+2r)z,$$

причем звездочка обозначает, что первое суммирование распространяется до наибольшего значения r, для которого $r \leqslant \frac{1}{2}N$.

Так как

$$\left\{\frac{d^2}{dz^2} + N^2\right\} U_{n+1}(z) = \alpha_{n+1} \cos Nz - 8(p + 2q\cos 2z)\, U_n(z),$$

то из сравнения коэффициентов при $\cos(N \pm 2r)z$ в обеих частях уравнения [1]) находим

$$\alpha_{n+1} = 8q(\alpha_{n,1} + \beta_{n,1}),$$

$$r(r+N)\alpha_{n+1,r} = 2\{p\alpha_{n,r} + q(\alpha_{n,r-1} + \alpha_{n,r+1})\} \qquad (r = 1, 2, \ldots),$$

$$r(r-N)\beta_{n+1,r} = 2\{p\beta_{n,r} + q(\beta_{n,r-1} + \beta_{n,r+1})\} \qquad \left(r \leqslant \frac{1}{2}N\right).$$

Эти формулы будут справедливы при всех значениях индексов, если принять следующие соглашения [2]):

(I) $\alpha_{n,0} = \beta_{n,0} = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots), \quad \alpha_{n,r} = \beta_{n,r} = 0, \qquad (r > n),$

(II) $\beta_{n,\frac{1}{2}N+1} = \beta_{n,\frac{1}{2}N-1}$, когда N четное и $r = \frac{1}{2}N$,

(III) $\beta_{n,\frac{1}{2}(N+1)} = \beta_{n,\frac{1}{2}(N-1)}$, когда N нечетное и $r = \frac{1}{2}(N-1)$.

Легко получить следующие частные формулы:

(I′) $\alpha_1 = 8p \qquad (N \neq 1), \quad \alpha_1 = 8(p+q) \qquad (N = 1),$

(II′) $\alpha_{n,n} = \dfrac{(2q)^n N!}{n!(N+n)!} \qquad (N \neq 0), \quad \alpha_{n,n} = \dfrac{2^{n+1}q^n}{(n!)^2} \qquad (N = 0),$

(III′) $\alpha_{n,r}$ и $\beta_{n,r}$ — однородные полиномы n-й степени относительно p и q.

---

[1]) Когда $N = 0$ или 1, эти уравнения должны быть видоизменены отбрасыванием всех коэффициентов $\beta_{n,r}$.

[2]) Соглашения (II) и (III) возникают благодаря тому, что

$$\cos z = \cos(-z), \quad \cos 2z = \cos(-2z).$$

Если $\sum_{n=r}^{\infty} \alpha_{n,r} = A_r$, $\sum_{n=r}^{\infty} \beta_{n,r} = B_r$, то мы имеем:

$$\psi(a, q) = 8p + 8q(A_1 + B_1) \qquad (N \neq 1)$$

$$r(r+N)A_r = 2\{pA_r + q(A_{r-1} + A_{r+1})\}, \tag{A}$$

$$r(r-N)B_r = 2\{pB_r + q(B_{r-1} + B_{r+1})\}, \tag{B}$$

где $A_0 = B_0 = 1$ и B_r подчиняется условиям, вытекающим из (II) и (III). Положим теперь

$$w_r = -q\{r(r+N) - 2p\}^{-1}, \quad w_r' = -q\{r(r-N) - 2p\}^{-1}.$$

Результат исключения $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}, A_{r+1}, \ldots$ из совокупности уравнений (A) выразится так:

$$A_r\Delta_0 = (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r,$$

где Δ_r — бесконечный определитель типа Коха (§ 2.82, часть I):

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} 1 & w_{r+1} & 0 & 0 & \ldots \\ w_{r+2} & 1 & w_{r+2} & 0 & \ldots \\ 0 & w_{r+3} & 1 & w_{r+3} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Этот определитель сходится абсолютно (пример § 2.82, часть I), если знаменатели у всех w_r отличны от нуля; $\Delta_r \to 1$, когда $r \to \infty$ (§ 19.52). Далее, если p и q заданы так, что $\Delta_0 \neq 0$, $2p \neq r(r+N)$[1]), где $r = 1, 2, 3, \ldots$, то ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r \Delta_0^{-1} \cos(N+2r)z$$

представляет целую функцию от z.

Подобным же образом $B_r D_0 = (-1)^r w_1' w_2' \ldots w_r' D_r$, где D_r — определитель конечного порядка:

$$\begin{vmatrix} 1 & w_{r+1}' & 0 & \ldots \\ w_{r+2}' & 1 & w_{r+2}' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

---

[1]) Действительно, если $|q| < 1$, можно показать, что $\Delta_0 \neq 0$ и $2p \neq r(r+N)$ при всяком N.

Для этого необходимо принять во внимание взаимное расположение характеристических чисел $a = N^2 + 8p$ и асимптотический характер их распределения, вытекающий из вариационного принципа для собственных значений уравнения типа Штурма — Лиувилля, каковым является уравнение Матье.

Подробно см. В. Д. Купрадзе, Специальные задачи дифракции в теории упругости (Труды Математического ин-та Академии наук СССР, 1933, № 6). — *Прим. ред.*

Последняя строка в этом определителе будет $0, 0, \ldots, 0, 2w'_{\frac{1}{2}N}$, 1 или $0, 0, \ldots, 0, w'_{\frac{1}{2}(N-1)}$, $1 + w'_{\frac{1}{2}(N-1)}$, смотря по тому, будет ли N четным или нечетным. Поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} U_n(z)$ имеет вид

$$\cos Nz + \Delta_0^{-1} \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r w_1 w_2 \ldots w_r \Delta_r \cos(N+2r)z + \\ + D_0^{-1} \sum_{r=1}^{r \leqslant \frac{1}{2}N} (-1)^r w'_1 w'_2 \ldots w'_r D_r \cos(N-2r)z.$$

Входящие в это выражение ряды сходятся равномерно в любой ограниченной области значений z, так что допустимо почленное дифференцирование.

Далее, условие $\psi(a, q) = 0$ эквивалентно условию

$$p = q\left(\frac{w_1\Delta_1}{\Delta_0} + \frac{w'_1 D_1}{D_0}\right),$$

т. е.

$$p\Delta_0 D_0 - q\left(w_1\Delta_1 D_0 + w'_1 D_1 \Delta_0\right) = 0.$$

Если мы обе части этого уравнения помножим на

$$\prod_{r=1}^{\infty}\left\{1 - \frac{2p}{r(r+N)}\right\} \prod_{r=1}^{r \leqslant \frac{1}{2}N}\left\{1 - \frac{2p}{r(r-N)}\right\},$$

то слева получим целую функцию $\Psi(a, q)$ от p, q; члены функции $\Psi(a, q)$ с наименьшими степенями относительно p и q будут соответственно

$$p \text{ и } q^2\left\{\frac{1}{N-1} - \frac{1}{N+1}\right\}.$$

Разложим теперь интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{p}{\Psi(N^2+8p, q)} \frac{\partial\Psi(N^2+8p, q)}{\partial p}\, dp$$

по возрастающим степеням q (§ 7.31, часть I), принимая за контур интегрирования малую окружность в плоскости p с центром в начале координат и предполагая $|q|$ настолько малым, что $\Psi(N^2+8p, q)$ имеет только один нуль внутри этого контура. Тогда, как в § 7.31, найдем, что для достаточно малых значений $|q|$ мы можем разложить p в степенной ряд по q, начинающийся [1]) с члена q^2; и если $|q|$ достаточно мал, то D_0 и Δ_0 не будут равны нулю, так как они оба равны 1 при $q = 0$.

---

[1]) Если $N = 1$, этот результат видоизменится, так как тогда имеется добавочный член q в правой части, а член $\frac{q^2}{N-1}$ выпадет.

Подставив вместо p его выражение через q в ряд для $U(z)$, видим, что ряды, фигурирующие в $ce_N(z, q)$, абсолютно сходятся при $|q|$ достаточно малом.

Ряды, фигурирующие в $se_N(z, q)$, очевидно, могут быть исследованы подобным же образом.

19.7. Метод замены параметра [1])

Методы Хилла и Линдемана — Стилтьеса позволяют определить μ, но лишь после сложного анализа. Такой анализ неизбежен, так как μ отнюдь не простая функция от q; это можно видеть, давая q определенное вещественное значение и изменяя a от $-\infty$ до $+\infty$; тогда μ поочередно принимает вещественные и комплексные значения; переход от одних значений к другим происходит, когда в обозначениях Хилла — Матье функция $\Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{a}\right)$ проходит через значения 0 и 1; сложный характер этого поведения объясняется тем, что $\Delta(0)$ есть сложное выражение, содержащее как a, так и q.

Тем не менее удается выразить μ и a через q и новый параметр σ; получаемые результаты весьма хорошо приспособлены для числовых вычислений, когда $|q|$ мал [2]).

Введение параметра σ подсказывается рядами для $ce_1(z, q)$ и $se_1(z, q)$, данными в примере 1 § 19.3; рассмотрение этих рядов приводит к исследованию возможностей решения общего уравнения Матье в виде $y = e^{\mu z}\varphi(z)$, где

$$\varphi(z) = \sin(z-\sigma) + a_3\cos(3z-\sigma) + b_3\sin(3z-\sigma) + a_5\cos(5z-\sigma) + \\ + b_5\sin(5z-\sigma) + \ldots,$$

причем параметр σ определяется вследствие того, что в $\varphi(z)$ должен отсутствовать член с $\cos(z-\sigma)$; функции $se_1(z, q)$, $ce_1(z, q)$ являются частными случаями такого решения, когда σ равно 0 или $\frac{1}{2}\pi$.

Подставив это выражение в уравнение Матье, читатель легко получит следующие приближения, годные для [3]) малых значений q и вещественных значений σ:

$$\mu = 4q\sin 2\sigma - 12q^3\sin 2\sigma - 12q^4\sin 4\sigma + O(q^5),$$

$$a = 1 + 8q\cos 2\sigma + (-16 + 8\cos 4\sigma)q^2 - 8q^3\cos 2\sigma + \\ + \left(\frac{256}{3} - 88\cos 4\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_3 = 3q^2\sin 2\sigma + 3q^3\sin 4\sigma + \left(-\frac{274}{9}\sin 2\sigma + 9\sin 6\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$b_3 = q + q^2\cos 2\sigma + \left(-\frac{14}{3} + 5\cos 4\sigma\right)q^3 + \left(-\frac{74}{9}\cos 2\sigma + 7\cos 6\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_5 = \frac{14}{9}q^3\sin 2\sigma + \frac{44}{27}q^4\sin 4\sigma + O(q^5),$$

---

[1]) Whittaker, Proc. Edinburgh, Math. Soc., XXXII (1914), 75—80.

[2]) Они были применены к задаче Хилла Айнсом (Ince, Monthly Notice of the R. A. S., LXXV (1915), 436—448).

[3]) В этом анализе следует рассматривать как основные параметры q и σ вместо a и q, как это было до сих пор.

$$b_5 = \frac{1}{3}q^2 + \frac{4}{9}q^3\cos 2\sigma + \left(-\frac{155}{54} + \frac{82}{27}\cos 4\sigma\right)q^4 + O(q^5),$$

$$a_7 = \frac{35}{108}q^4\sin 2\sigma + O(q^5), \quad b_7 = \frac{1}{18}q^3 + \frac{1}{12}q^4\cos 2\sigma + O(q^5),$$

$$a_9 = O(q^5), \quad b_9 = \frac{1}{180}q^4 + O(q^5),$$

причем постоянные, входящие в $O(q^5)$, зависят от σ.

Область значений q и σ, при которых эти ряды сходятся, пока еще не определена [1]).

Если полученное таким образом решение обозначить $\Lambda(z, \sigma, q)$, то $\Lambda(z, \sigma, q)$ и $\Lambda(z, -\sigma, q)$ образуют фундаментальную систему решений общего уравнения Матье при $\mu \neq 0$.

Пример 1. Показать, что при $\sigma = i \times 0{,}5$ и $q = 0{,}01$

$$a = 1{,}1248414\ldots$$
$$\mu = i \times 0{,}0469935\ldots;$$

показать также, что при $\sigma = i$ и $q = 0{,}01$

$$a = 1{,}3211693\ldots$$
$$\mu = i \times 0{,}1450276\ldots$$

Пример 2. Получить уравнения

$$\mu = 4q\sin 2\sigma - 4qa_3,$$
$$a = 1 + 8q\cos 2\sigma - \mu^2 - 8qb_3,$$

выражающие μ и a в конечном виде как функции от q, σ, a_3 и b_3.

Пример 3. Получить рекуррентные формулы

$$\{-4n(n+1) + 8q\cos 2\sigma - 8qb_3 \pm$$
$$\pm 8qi(2n+1)(a_3 - \sin 2\sigma)\}z_{2n+1} + 8q(z_{2n-1} + z_{2n+3}) = 0,$$

где z_{2n+1} обозначает $b_{2n+1} + ia_{2n+1}$ или $b_{2n+1} - ia_{2n+1}$, смотря по тому, берется ли верхний или нижний знак.

19.8. Асимптотическое решение уравнения Матье

Если в уравнении Матье

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(a + \frac{1}{2}k^2\cos 2z\right)u = 0$$

положить $k\sin z = \xi$, то получим

$$(\xi^2 - k^2)\frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi\frac{du}{d\xi} + (\xi^2 - M^2)u = 0,$$

где

$$M^2 \equiv a + \frac{1}{2}k^2.$$

---

[1]) Весьма вероятно, что если $|q|$ достаточно мал, то ряды сходятся для всех вещественных значений σ и также для комплексных значений σ, для которых $|\operatorname{Im}\sigma|$ достаточно мал. Отметим, что если q вещественно, то вещественные и чисто мнимые значения σ соответствуют вещественным и чисто мнимым значениям μ.

Это уравнение имеет неправильную особую точку в бесконечности. По его сходству с уравнением Бесселя положим $u = e^{i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}v$ и будем искать v в виде

$$v = 1 + \frac{\alpha_1}{\xi} + \frac{\alpha_2}{\xi^2} + \ldots;$$

тогда найдем, что

$$\alpha_1 = -\frac{1}{2}i\left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4} - M^2 + k^2\right)\left(\frac{9}{4} - M^2 + k^2\right) + \frac{1}{4}k^2,$$

причем дальнейшие коэффициенты определяются рекуррентной формулой

$$2i(r+1)\alpha_{r+1} = \left\{\frac{1}{4} - M^2 + k^2 + r(r+1)\right\} + (2r-1)ik^2\alpha_{r-1} - \left(r^2 - 2r + \frac{3}{4}\right)k^2\alpha_{r-2}.$$

Два ряда

$$e^{i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{\alpha_1}{\xi} + \frac{\alpha_2}{\xi^2} + \ldots\right), \quad e^{-i\xi}\xi^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\alpha_1}{\xi} + \frac{\alpha_2}{\xi^2} - \ldots\right)$$

являются формальными решениями уравнения Матье, приводящимися к известным асимптотическим решениям уравнения Бесселя (§ 17.5), когда $k \to 0$. Окончательные формулы, связывающие их с решениями $e^{\pm\mu z}\varphi(\pm z)$, еще неизвестны, хотя некоторые шаги к получению их и сделаны Дауголлом (Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIV, 176—196).

ЛИТЕРАТУРА [1])

E. L. Mathieu, Journ. de Math. (2), XIII (1868), 137—203.
G. W. Hill, Acta Mathematica, VIII (1886), 1—36.
G. Floquet, Ann. de l'École norm. sup. (2), XII (1883), 47—88.
C. L. F. Lindemann, Math. Ann., XXII (1883), 117—123.
T. J. Stieltjes, Astr. Nach., CIX (1884), столбцы 145—152, 261—266.
A. Lindstedt, Astr. Nach., CIII (1882), столбцы 211—220, 257—268; CIV (1883), столбцы 145—150; CV (1883), столбцы 97—112.
H. Bruns, Astr. Nach., CVI (1883), столбцы 193—204; CVII (1884), столбцы 129—132.
R. C. Maclaurin, Trans. Camb. Phil. Soc., XVII (1899), 41—108.
K. Aichi, Proc. Tōkyō Math. and Phys. Soc. (2), IV (1908), 266—278.
E. T. Whittaker, Proc. International Congress of Mathematicians, Cambridge, 1912, I, 366—371.
E. T., Whittaker, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 75—80.
G. N. Watson, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 25—30.
A. W. Young, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXII (1914), 81—90.
E. Lindsay Ince, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 2—15.
J. Dougall, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIV (1916), 176—196.
М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ — ДНТВУ, Харьков — Киев, 1935.
Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, ИЛ, М., 1953.

[1]) Полная литература указана Эмбером (Humbert, Fonctions de Mathieu et fonctions de Lamé, Paris, 1926).

Примеры

1. Показать, что при $k = \sqrt{32q}$

$$2\pi ce_0(z, q) = ce_0(0, q) \int_{-\pi}^{\pi} \cos(k \sin z \sin \theta)\, ce_0(\theta, q)\, d\theta.$$

2. Показать, что четные функции Матье удовлетворяют интегральному уравнению

$$G(z) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} J_0\{ik(\cos z + \cos\theta)\}\, G(\theta)\, d\theta.$$

3. Показать, что уравнению

$$(az^2 + c)\frac{d^2u}{dz^2} + 2az\frac{du}{dz} + (\lambda^2 cz^2 + m)u = 0$$

(где a, c, λ, m — постоянные) удовлетворяет интеграл

$$u = \int e^{\lambda zs} v(s)\, ds,$$

взятый вдоль надлежащего контура, если только $v(s)$ удовлетворяет уравнению

$$(as^2 + c)\frac{d^2v(s)}{ds^2} + 2as\frac{dv(s)}{ds} + (\lambda^2 cs^2 + m)v(s) = 0,$$

тождественному с уравнением для u.

Получить интегральные уравнения, которым удовлетворяют функции Матье, как частные случаи этого результата.

4. Показать, что если пренебречь степенями q выше четвертой, то

$$ce_1(z, q) = \cos z + q\cos 3z + q^2\left(\frac{1}{3}\cos 5z - \cos 3z\right) + q^3\left(\frac{1}{18}\cos 7z - \frac{4}{9}\cos 5z + \frac{1}{3}\cos 3z\right) + q^4\left(\frac{1}{180}\cos 9z - \frac{1}{12}\cos 7z + \frac{1}{6}\cos 5z + \frac{11}{9}\cos 3z\right),$$

$$se_1(z, q) = \sin z + q\sin 3z + q^2\left(\frac{1}{3}\sin 5z + \sin 3z\right) + q^3\left(\frac{1}{18}\sin 7z + \frac{4}{9}\sin 5z + \frac{1}{3}\sin 3z\right) + q^4\left(\frac{1}{180}\sin 9z + \frac{1}{12}\sin 7z + \frac{1}{6}\sin 5z - \frac{11}{9}\sin 3z\right),$$

$$ce_2(z, q) = \cos 2z + q\left(\frac{2}{3}\cos 4z - 2\right) + \frac{1}{6}q^2\cos 6z + q^3\left(\frac{1}{45}\cos 8z + \frac{43}{27}\cos 4z + \frac{40}{3}\right) + q^4\left(\frac{1}{540}\cos 10z + \frac{293}{540}\cos 6z\right).$$

(Mathieu)

5. Показать, что

$$ce_3(z, q) = \cos 3z + q\left(-\cos z + \frac{1}{2}\cos 5z\right) +$$
$$+ q^2\left(\cos z + \frac{1}{10}\cos 7z\right) + q^3\left(-\frac{1}{2}\cos z + \frac{7}{40}\cos 5z + \frac{1}{90}\cos 9z\right) + O(q^4)$$

и что в этом случае

$$a = 9 + 4q^2 - 8q^3 + O(q^4).$$

(Mathieu)

6. Показать, что если $y(z)$ — функция Матье, то второе решение соответствующего дифференциального уравнения будет

$$y(z)\int^z \{y(t)\}^{-2}\,dt.$$

Показать, что второе решение [1]) уравнения для $ce_0(z, q)$ будет

$$zce_0(z, q) - 4q\sin 2z - 3q^2\sin 4z - \ldots$$

7. Показать, что если $y(z)$ — решение общего уравнения Матье, то отношение

$$\frac{\{y(z+2\pi) + y(z-2\pi)\}}{y(z)}$$

постоянно.

8. Выразить функции Матье как ряды по функциям Бесселя, в которых коэффициенты пропорциональны коэффициентам в рядах Фурье для функций Матье.

[Подставить ряд Фурье под знак интеграла в интегральные уравнения § 19.22.]

9. Показать, что предельной формой уравнений для $ce_n(z, q)$ и $se_n(z, q)$, когда эксцентриситет основного эллипса стремится к нулю, будет уравнение, которому удовлетворяет функция $J_n(ik\cos z)$.

10. Получить функции параболического цилиндра главы 16 как предельные формы функций Матье, заставляя эксцентриситет основного эллипса стремиться к единице.

11. Показать, что $ce_n(z, q)$ может быть разложен в ряд вида

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos^{2m} z \quad \text{или} \quad \sum_{m=0}^{\infty} B_m \cos^{2m+1} z,$$

смотря по тому, будет ли n четным или нечетным; показать также, что эти ряды сходятся, когда $|\cos z| < 1$.

12. При обозначениях примера 11 показать, что если

$$ce_n(z, q) = \lambda_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos z\cos\theta} ce_n(\theta, q)\,d\theta,$$

---

[1]) Это решение обозначается через $in_0(z, q)$; вторые решения уравнений, которым удовлетворяют функции Матье, исследованы Айнсом (Ince, Proc. Edinburgh Math. Soc., XXXIII (1915), 2—15). См. также § 19.2.

то λ_n дается одним из рядов

$$A_0 = 2\pi\lambda_n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m}{2^{2m}(m!)^2} A_m, \quad B_0 = 2\pi\lambda_n k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)!}{2^{2m+1} m!\,(m+1)!} B_m,$$

если эти ряды сходятся.

13. Показать, что дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет произведение каких-либо двух решений уравнения Бесселя порядка n, будет

$$\vartheta(\vartheta - 2n)(\vartheta + 2n)u + 4z^2(\vartheta + 1)u = 0,$$

где ϑ обозначает $z\dfrac{d}{dz}$.

Показать, что одно из решений этого уравнения есть целая функция от z; получить затем по методам §§ 19.5—19.53 функции Бесселя, разобрав специально частный случай целого n.

14. Показать, что уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (A + k^2 \operatorname{sh}^2 z)u = 0$$

имеет приближенное решение

$$u = C(\operatorname{cosech} z)^{\frac{1}{2}} \sin(k \operatorname{ch} z + \varepsilon),$$

где C и ε — постоянные интегрирования; предполагается, что k велико, A не слишком велико и z не мало.

ГЛАВА 20

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ И ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

20.1. Двоякопериодические функции

Наиболее важное свойство тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, ... заключается в том, что если $f(z)$ обозначает какую-нибудь из них, то

$$f(z+2\pi)=f(z),$$

а отсюда $f(z+2n\pi)=f(z)$ для всех целых значений n. На основании этого свойства тригонометрические функции часто описывают как *периодические функции* с периодом 2π. Чтобы отличать их от функций, которые рассматриваются в этой и двух последующих главах, их называют *однопериодическими функциями*.

Пусть ω_1, ω_2 — какие-нибудь два числа (вещественные или комплексные), *отношение* [1]) *которых не чисто вещественно*.

Функция, удовлетворяющая уравнениям

$$f(z+2\omega_1)=f(z), \quad f(z+2\omega_2)=f(z)$$

для всех значений z, для которых $f(z)$ существует, называется *двоякопериодической* функцией от z с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Двоякопериодическая функция, если она аналитическая и не имеет никаких особых точек, кроме полюсов в конечной части плоскости, называется *эллиптической функцией*.

[Примечание. Выражение, называемое теперь *эллиптическим интегралом* [2]), встречается в исследованиях Якова Бернулли по теории

---

[1]) Если $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ вещественно, то параллелограммы, определяемые в § 20.11, сплющиваются, и функция приводится к однопериодической функции, если $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ рационально; если же $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ иррационально, то, как было показано Якоби (Jacobi, Journ. für Math., XIII (1835), 55—56. [Ges. Werke, II (1882), 25—26]), функция приводится к постоянной.

[2]) Краткое изложение эллиптических интегралов читатель найдет в §§ 22.7—22.741.

упругости. Маклорен, Фаньяно (Fagnano), Лежандр и другие рассматривали такие интегралы в связи с задачей спрямления дуги эллипса; идея «обращения» эллиптического интеграла (§ 21.7) для получения эллиптической функции принадлежит Абелю, Якоби и Гауссу.]

Периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ играют примерно ту же роль в теории эллиптических функций, какую один период играет в случае тригонометрических функций.

Прежде чем фактически построить какие-нибудь эллиптические функции и даже до установления существования таких функций, удобно будет привести доказательство некоторых общих теорем (§§ 20.11—20.14) о свойствах, присущих всем эллиптическим функциям; такой способ изложения, не будучи строго логичным, удобен тем, что весьма многие свойства специальных эллиптических функций могут быть получены простой ссылкой на эти теоремы.

Пример. Производная эллиптической функции сама является эллиптической функцией.

20.11. Параллелограммы периодов

Изучение эллиптических функций значительно облегчается геометрическим представлением на комплексной плоскости.

Предположим, что в плоскости переменной z мы отметили точки 0, $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_1+2\omega_2$ и вообще все точки, комплексные координаты которых имеют вид $2m\omega_1+2n\omega_2$, где m и n — целые числа.

Соединив последовательно точки 0, $2\omega_1$, $2\omega_1+2\omega_2$, $2\omega_2$, 0, мы получим параллелограмм. Если внутри или на границе этого параллелограмма (исключая вершины) нет точки ω такой, что

$$f(z+\omega)=f(z)$$

для всех значений z, то этот параллелограмм называется *основным параллелограммом периодов* для эллиптической функции с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Ясно, что плоскость z можно покрыть сетью параллелограммов, равных основному параллелограмму периодов и одинаково с ним расположенных, причем каждая из точек $2m\omega_1+2n\omega_2$ является вершиной четырех таких параллелограммов.

Эти параллелограммы называются *параллелограммами периодов*; для всех значений z точки

$$z,\ z+2\omega_1,\ \ldots,\ z+2m\omega_1+2n\omega_2,\ \ldots,$$

очевидно, занимают сходственные положения в параллелограммах периодов; любые две такие точки называются *сравнимыми*. Сравнимость двух точек z, z' обозначается так:

$$z'\equiv z\ (\mathrm{mod}\ 2\omega_1,\ 2\omega_2).$$

Из основного свойства эллиптических функций вытекает, что эллиптическая функция принимает одно и то же значение в сравнимых точках; таким образом, *ее значения в любом параллелограмме периодов являются простым повторением ее значений в любом другом параллелограмме периодов.*

Иногда при интегрировании неудобно пользоваться параллелограммом периодов, если он имеет особые точки подинтегральной функции на своей границе; принимая во внимание периодичность эллиптических функций, можно вместо параллелограмма периодов в качестве контура взять параллелограмм, полученный таким переносом первого (без вращения), чтобы ни один из полюсов рассматриваемой подинтегральной функции не лежал на сторонах нового параллелограмма. Такой параллелограмм называется *ячейкой.*

Очевидно, что значения, принимаемые эллиптической функцией в ячейке, являются просто повторением ее значений в каком-либо параллелограмме периодов.

Совокупность полюсов (или нулей) эллиптической функции в какой-нибудь данной ячейке называется *неприводимой*; все другие полюсы (или нули) функции сравнимы с каким-нибудь из них.

20.12. Простые свойства эллиптических функций

(I) *Число полюсов эллиптических функций в любой ячейке конечно.* Ибо в противном случае полюсы имели бы предельную точку в силу двумерного аналога теоремы § 2.21 (часть I). Эта точка была бы (§ 5.61, часть I) существенно особой точкой функции; таким образом, по определению, функция не была бы эллиптической.

(II) *Число нулей в эллиптической функции $f(z)$ в любой ячейке конечно.* Ибо в противном случае функция $1/f(z)$ имела бы бесконечное число полюсов в ячейке и поэтому имела бы существенно особую точку; эта точка была бы также существенно особой точкой первоначальной функции, которая поэтому не была бы эллиптической. [Доказательство предполагает, что функция не равна тождественно нулю.]

(III) *Сумма вычетов эллиптической функции $f(z)$ в ее полюсах в любой ячейке равна нулю.*

Пусть C — контур, образованный сторонами ячейки, и пусть вершинами ячейки будут t, $t+2\omega_1$, $t+2\omega_1+2\omega_2$, $t+2\omega_2$.

[Примечание. В дальнейшем периоды эллиптической функции обозначаются через $2\omega_1$, $2\omega_2$ не в произвольном порядке, а в таком, чтобы отношение $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ *имело положительную мнимую часть*, и тогда направление обхода C, указанное порядком вершин, данным выше, будет *против часовой стрелки.*

Во всей этой главе мы обозначаем символом C контур, составленный сторонами ячейки.]

Сумма вычетов функции $f(z)$ в ее полюсах внутри контура C равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\right\} f(z)\,dz.$$

Во втором и третьем интегралах заменим $z+2\omega_1$, $z+2\omega_2$ соответственно через z; тогда правая часть примет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}\{f(z)-f(z+2\omega_2)\}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}\{f(z)-f(z+2\omega_1)\}\,dz,$$

и каждый из интегралов равняется нулю в силу периодичности функции $f(z)$; итак, $\int_C f(z)\,dz = 0$, и теорема доказана.

(IV) *Теорема Лиувилля* [1]. *Эллиптическая функция $f(z)$, не имеющая полюсов в ячейке, есть постоянная.* Если $f(z)$ не имеет полюсов внутри ячейки, то она аналитическая (а следовательно, ограниченная) внутри и на границах ячейки (следствие II § 3.61, часть I); другими словами, имеется такое число K, что $|f(z)| < K$, когда z находится внутри или на границе ячейки.

Из периодических свойств функции $f(z)$ вытекает, что $f(z)$ аналитическая и $|f(z)| < K$ для всех значений z; следовательно, по § 5.63 части I $f(z)$ — постоянная.

Ниже увидим, что очень большое число теорем, относящихся к эллиптическим функциям, может быть доказано при помощи этого результата.

20.13. Порядок эллиптической функции

Покажем теперь, что если $f(z)$ — эллиптическая функция и c — какая-нибудь постоянная, то *число корней уравнения*

$$f(z) = c,$$

лежащих в ячейке, зависит только от $f(z)$, но не от c; это число называется *порядком эллиптической функции* и равняется числу полюсов функции $f(z)$ в ячейке.

---

[1]) Эта модификация теоремы § 5.63 части I и является тем результатом, на котором Лиувилль основал свой курс лекций по эллиптическим функциям.

В силу § 6.31 части I разность между числами нулей и полюсов функции $f(z)-c$, лежащих в ячейке C, равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)-c}\,dz.$$

Так как $f'(z+2\omega_1)=f'(z+2\omega_2)=f'(z)$, то делением контура на четыре части, как в § 20.12 (III), найдем, что этот интеграл равен нулю.

Поэтому число нулей функции $f(z)-c$ равняется числу полюсов функции $f(z)-c$; но любой полюс функции $f(z)-c$, очевидно, будет полюсом функции $f(z)$, и наоборот; отсюда число нулей функции $f(z)-c$ равняется числу полюсов функции $f(z)$, которое не зависит от c; теорема, таким образом, доказана.

[Примечание. При определении порядка эллиптической функции числом ее неприводимых полюсов следует каждый полюс считать соответственно его кратности, как это ясно из § 6.31 части I.]

Порядок эллиптической функции *не может быть меньше* 2, ибо эллиптическая функция порядка 1 должна иметь единственный неприводимый полюс, и притом простой; но если бы эта точка действительно была полюсом, а не обыкновенной точкой, то вычет в ней был бы отличен от нуля, что противоречит результату § 20.12 (III).

Простейшими по числу особых точек эллиптическими функциями являются функции второго порядка. Такие функции могут быть разделены на два класса: (I) функции, имеющие только один неприводимый двойной полюс, в котором вычет равен нулю в соответствии с § 20.12 (III); (II) функции, имеющие два простых полюса, в которых по § 20.12 (III) вычеты численно равны, но противоположны по знаку.

Функции, относящиеся к этим двум классам, рассматриваются в этой главе и в главе 22 соответственно под названием эллиптических функций Вейерштрасса и Якоби; будет показано, что любая эллиптическая функция может быть выражена через функции любого из этих типов.

20.14. Соотношение между нулями и полюсами эллиптической функции

Покажем теперь, что *сумма аффиксов совокупности неприводимых нулей эллиптической функции сравнима с суммой аффиксов совокупности неприводимых полюсов.* Из § 6.31 части I, во введенных нами обозначениях, следует, что разность между

рассматриваемыми суммами равна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_t^{t+2\omega_1} + \int_{t+2\omega_1}^{t+2\omega_1+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_1+2\omega_2}^{t+2\omega_2} + \int_{t+2\omega_2}^{t}\right\}\frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_1}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{(z+2\omega_2)f'(z+2\omega_2)}{f(z+2\omega_2)}\right\}dz -$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+2\omega_2}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - \frac{(z+2\omega_1)f'(z+2\omega_1)}{f(z+2\omega_1)}\right\}dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{-2\omega_2\int_t^{t+2\omega_1}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + 2\omega_1\int_t^{t+2\omega_2}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left\{-2\omega_2\left[\lg f(z)\right]_t^{t+2\omega_1} + 2\omega_1\left[\lg f(z)\right]_t^{t+2\omega_2}\right\},$$

если воспользоваться подстановками, примененными в § 20.12 (III), и периодичностью функций $f(z)$ и $f'(z)$. Но $f(z)$ имеет в точках $t+2\omega_1$, $t+2\omega_2$ те же самые значения, что и в t, так что значения функции $\lg f(z)$ в этих точках могут отличаться от значения функции $\lg f(z)$ в t только на целые кратные числа $2\pi i$, скажем на $-2n\pi i$, $2m\pi i$; таким образом, мы получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{zf'(z)}{f(z)}\,dz = 2m\omega_1 + 2n\omega_2,$$

и следовательно, сумма аффиксов нулей минус сумма аффиксов полюсов равна периоду; а это и есть тот результат, который надо было установить.

20.2. Построение эллиптической функции. Определение функции $\wp(z)$

Как мы видели в § 20.1, можно ожидать, что эллиптические функции обладают некоторыми свойствами, аналогичными свойствам тригонометрических функций. Поэтому естественно ввести эллиптические функции в анализ с помощью определения, аналогичного одному из тех, которые могут быть положены в основу теории тригонометрических функций.

Один из способов построения теории тригонометрических функций заключается в том, что исходят из ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty}(z-m\pi)^{-2}$;

обозначив сумму этого ряда через $(\sin z)^{-2}$, можно вывести все известные свойства функции $\sin z$; как это сделать, вкратце указано в § 20.222.

Аналогичный метод обоснования теории эллиптических функций заключается в определении функции $\wp(z)$ равенством [1])

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n}{}' \left\{ \frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\},$$

где ω_1, ω_2 удовлетворяют условиям, приведенным в § 20.1, 20.12 (III); суммирование распространяется по всем целым значениям (положительным, отрицательным и нулевым) m и n, за исключением одновременных нулевых значений m и n.

Для краткости напишем $\Omega_{m,n}$ вместо $2m\omega_1 + 2n\omega_2$, так что

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{m,n}{}' \left\{ (z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2} \right\}.$$

Если m и n таковы, что $|\Omega_{m,n}|$ велик, то общий член ряда, определяющего функцию $\wp(z)$, будет $O\left(|\Omega_{m,n}|^{-3}\right)$ и, таким образом (§ 3.4, часть I), ряд сходится абсолютно и равномерно (относительно z) всюду, за исключением окрестностей его полюсов, т. е. точек $\Omega_{m,n}$.

Поэтому (§ 5.3, часть I) $\wp(z)$ — функция, аналитическая во всей плоскости z, за исключением точек $\Omega_{m,n}$, в которых она имеет двойные полюсы.

Введение этой функции $\wp(z)$ принадлежит Вейерштрассу [2]). Приступим теперь к изучению свойств функции $\wp(z)$; мы увидим, что функция $\wp(z)$ — эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Для числовых вычислений указанный ряд для $\wp(z)$ непригоден ввиду медленности его сходимости. Эллиптические функции, свободные от этого недостатка, будут получены в главе 21.

---

[1]) Во всей этой главе символ $\sum_{m,n}$ употребляется для обозначения суммирования по всем целым значениям m и n, причем значок $'$ $\left(\sum_{m,n}{}'\right)$ означает, что при суммировании опускается член, для которого $m = n = 0$. С другой стороны, через $\wp'(z)$ обозначаем обычно производную функции $\wp(z)$. Применение значка $'$ в разных смыслах не вызовет путаницы.

[2]) Weierstrass, Werke, II (1895), 245—255. Содержание большей части этой главы принадлежит Вейерштрассу и содержится в его лекциях, которые были опубликованы Шварцем (Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen, Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass (Berlin, 1893)). См. также Cayley, Journ. de Math. X (1845), 385—420. (Math. Papers, I, 156—182) и Eisenstein, Journ. für Math., XXXV (1847), 137—184, 185—274.

Пример. Доказать, что

$$\wp(z)=\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\left[-\frac{1}{3}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\operatorname{cosec}^2\left(\frac{z-2n\omega_2}{2\omega_1}\pi\right)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}{}'\operatorname{cosec}^2\frac{n\omega_2}{\omega_1}\pi\right].$$

20.21. Периодичность и другие свойства функции $\wp(z)$

Так как ряд для функции $\wp(z)$ есть равномерно сходящийся ряд аналитических функций, то почленное дифференцирование законно (§ 5.3, часть I) и, следовательно,

$$\wp'(z)=\frac{d}{dz}\wp(z)=-2\sum_{m,\,n}\frac{1}{(z-\Omega_{m,\,n})^3}.$$

Функция $\wp'(z)$ — нечетная функция от z; в самом деле, из определения функции $\wp'(z)$ получаем непосредственно

$$\wp'(-z)=2\sum_{m,\,n}(z+\Omega_{m,\,n})^{-3}.$$

Но совокупность точек $-\Omega_{m,\,n}$ совпадает с совокупностью $\Omega_{m,\,n}$, и следовательно, члены ряда для функции $\wp'(-z)$ те же самые, что и для функции $-\wp'(z)$, но расположены в другом порядке. Ряд для $\wp'(z)$ абсолютно сходится (§ 3.4, часть I), и следовательно, перестановка его членов не оказывает влияния на его сумму; поэтому

$$\wp'(-z)=-\wp'(z).$$

Таким же образом члены абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_{m,\,n}{}'\left\{(z+\Omega_{m,\,n})^{-2}-\Omega_{m,\,n}^{-2}\right\}$$

являются членами ряда

$$\sum_{m,\,n}{}'\left\{(z-\Omega_{m,\,n})^{-2}-\Omega_{m,\,n}^{-2}\right\},$$

расположенными в другом порядке; отсюда

$$\wp(-z)=\wp(z),$$

иначе говоря, *функция $\wp(z)$ — четная функция от z.*

Далее,

$$\wp'(z+2\omega_1)=-2\sum_{m,\,n}(z-\Omega_{m,\,n}+2\omega_1)^{-3},$$

но совокупность точек $\Omega_{m,\,n}-2\omega_1$ та же самая, что и совокупность $\Omega_{m,\,n}$; таким образом, ряд для $\wp'(z+2\omega_1)$ получается перестановкой членов в ряде для $\wp'(z)$, и в силу абсолютной сходимости находим, что

$$\wp'(z+2\omega_1)=\wp'(z);$$

другими словами, *функция* $\wp'(z)$ *имеет период* $2\omega_1$; так же можно показать, что она имеет и период $2\omega_2$.

Так как $\wp'(z)$ — аналитическая функция, имеющая только полюсы, то из последнего результата вытекает, что $\wp'(z)$ — *эллиптическая функция*.

Если теперь проинтегрируем уравнение

$$\wp'(z+2\omega_1)=\wp'(z),$$

то получим

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z)+A,$$

где A — постоянная. Положив $z=-\omega_1$ и принимая во внимание, что $\wp(z)$ — четная функция, получим $A=0$, так что

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z);$$

таким же образом

$$\wp(z+2\omega_2)=\wp(z).$$

Так как $\wp(z)$ не имеет других особых точек, кроме полюсов, то из этих двух равенств вытекает, что $\wp(z)$ — *также эллиптическая функция*.

Существуют другие методы введения в анализ как тригонометрических, так и эллиптических функций; так, для тригонометрических функций можно отметить следующие:

(1) Геометрическое определение, по которому $\sin z$ является отношением катета, противолежащего углу z, к гипотенузе в прямоугольном треугольнике, в котором один из углов есть z. Такое определение дается в элементарных учебниках по тригонометрии; с нашей точки зрения, такое определение страдает многими недостатками, некоторые из которых приведены в Приложении (часть I).

(2) Определение при помощи ряда

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

(3) Определение при помощи бесконечного произведения

$$\sin z = z\left(1-\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{z^2}{3^2\pi^2}\right)\dots$$

(4) Определение при помощи «обращения» интеграла

$$z=\int_0^{\sin z}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Свойства периодичности легко получить из (4), взяв соответствующие пути интегрирования (Forsyth, Theory of Functions, 1918, § 104), но чрезвычайно трудно доказать, что $\sin z$, определяемый таким образом, будет аналитической функцией.

Мы увидим позже (§§ 22.82, 22.1, 20.42, 20.22 и пример 4 § 20.53), что эллиптические функции могут быть введены при помощи определений, ана-

логичных каждому из приведенных, с соответственными недостатками в случаях первом и четвертом.

Пример. Вывести периодичность функции $\wp(z)$ непосредственно из ее определения в виде двойного ряда. [Нетрудно обосновать необходимую перестановку.]

20.22. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$

Выведем теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\wp(z)$ и которое имеет, как увидим далее, большое значение в теории этой функции.

Функция $\wp(z) - z^{-2}$, равная $\sum_{m,n}{}' \{(z - \Omega_{m,n})^{-2} - \Omega_{m,n}^{-2}\}$, будет аналитической в окрестности начала координат и четной функцией от z. Следовательно, по теореме Тейлора имеем разложение вида

$$\wp(z) - z^{-2} = \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + O(z^6),$$

годное для достаточно малых значений $|z|$. Легко видеть, что

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}.$$

Таким образом,

$$\wp(z) = z^{-2} + \frac{1}{20} g_2 z^2 + \frac{1}{28} g_3 z^4 + O(z^6);$$

дифференцируя это равенство, получим

$$\wp'(z) = -2z^{-3} + \frac{1}{10} g_2 z + \frac{1}{7} g_3 z^3 + O(z^5).$$

Возводя в куб обе части первого из двух последних равенств и в квадрат обе части второго, получим

$$\wp^3(z) = z^{-6} + \frac{3}{20} g_2 z^{-2} + \frac{3}{28} g_3 + O(z^2),$$

$$\wp'^2(z) = 4z^{-6} - \frac{2}{5} g_2 z^{-2} - \frac{4}{7} g_3 + O(z^2).$$

Отсюда

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) = -g_2 z^{-2} - g_3 + O(z^2),$$

и следовательно,

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2 \wp(z) + g_3 = O(z^2).$$

Таким образом, функция

$$\wp'^2(z) - 4\wp^3(z) + g_2 \wp(z) + g_3,$$

которая, очевидно, является эллиптической функцией, будет аналитической в начале координат и, следовательно, также аналитической

во всех сравнимых точках. Но эти точки являются единственно возможными особыми точками рассматриваемой функции; *итак, она будет эллиптической функцией без особых точек и, следовательно, будет равна постоянной* (§ 20.12 (IV)).

Заставив $z \to 0$, видим, что эта постоянная равна нулю.

Итак, функция $\wp(z)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3,$$

где g_2 и g_3 (называемые *инвариантами*) даются равенствами

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6}.$$

Обратно, если дано уравнение

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

и если можно определить [1]) *такие числа* ω_1, ω_2, *что*

$$g_2 = 60 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-4}, \quad g_3 = 140 \sum_{m,n}{}' \Omega_{m,n}^{-6},$$

то общим решением дифференциального уравнения будет

$$y = \wp(\pm z + \alpha),$$

где α — постоянная интегрирования. Это легко видеть, введя новую зависимую переменную u, определяемую уравнением [2]) $y = \wp(u)$, что приводит дифференциальное уравнение к виду $\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = 1$.

Так как $\wp(z)$ — четная функция от z, то имеем $y = \wp(z \pm \alpha)$, и следовательно, не теряя общности, решение уравнения можно написать в виде

$$y = \wp(z + \alpha).$$

Пример. Вывести из дифференциального уравнения, что если

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} z^{2n},$$

то

$$c_2 = \frac{g_2^3}{2^2 \cdot 5}, \quad c_4 = \frac{g_3}{2^2 \cdot 7}, \quad c_6 = \frac{g_2^2}{2^4 \cdot 3 \cdot 5^2}, \quad c_8 = \frac{3 g_2 g_3}{2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11},$$

$$c_{10} = \frac{g_2^3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 13} + \frac{g_3^2}{2^4 \cdot 7^2 \cdot 13}, \quad c_{12} = \frac{g_2^2 g_3}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}.$$

---

[1]) Трудная задача установления существования таких чисел ω_1 и ω_2, когда g_2 и g_3 даны, решается в § 21.73.

[2]) Это уравнение относительно u согласно § 20.13 всегда имеет решения.