## 20.221. Интегральная формула для $\wp(z)$

Рассмотрим равенство

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

определяющее $z$ как функцию от $\zeta$; путь интегрирования может быть любой кривой, которая не проходит через нули выражения

$$4t^3 - g_2 t - g_3.$$

После дифференцирования получим

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 = 4\zeta^3 - g_2\zeta - g_3,$$

и следовательно,

$$\zeta = \wp(z + \alpha),$$

где $\alpha$ — постоянная. Но при $\zeta \to \infty$ имеем $z \to 0$ в силу сходимости интеграла; следовательно, $\alpha$ есть полюс функции $\wp(u)$, т. е. имеет форму $\Omega_{m,n}$; итак, $\zeta = \wp(z + \Omega_{m,n}) = \wp(z)$. Результат, что равенство

$$z = \int_{\zeta}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt$$

эквивалентно равенству $\zeta = P(z)$, записывают иногда в форме

$$z = \int_{\wp(z)}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt.$$

## 20.222. Иллюстрация из теории тригонометрических функций

Теоремы, полученные в §§ 20.2—20.221, могут быть проиллюстрированы аналогичными теоремами для тригонометрических функций. Так, можно вывести свойства функции $\operatorname{cosec}^2 z$ из ряда $\sum_{m=-\infty}^{\infty} (z - m\pi)^{-2}$ следующим образом.

Обозначим этот ряд через $f(z)$. Ряд сходится абсолютно и равномерно[1]) (относительно $z$) всюду, исключая окрестности точек $m\pi$, в которых он имеет, очевидно, двойные полюсы. За исключением этих точек, функция $f(z)$ всюду аналитическая. Результат прибавления к $z$ числа, кратного $\pi$, приводит к ряду, члены которого будут те же, что и у исходного ряда; так как ряд сходится абсолютно, сумма $f(z)$ ряда не изменится и будет, следовательно, *периодической функцией от $z$ с периодом $\pi$*.

---

[1]) Это видно из сравнения с рядом $\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-2}$.

Исследуем теперь поведение $f(z)$ в полосе $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Из периодичности $f(z)$ следует, что значение $f(z)$ в какой-либо точке плоскости равно ее значению в соответствующей точке полосы

$$-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}\pi.$$

В этой полосе $f(z)$ имеет только одну особенность, именно $z=0$, а при $z \to \infty$ и остающемся в полосе $f(z)$ остается ограниченной, как это следует из сравнения членов ряда для $f(z)$ с соответствующими членами ряда $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-2}$.

В окрестности $z=0$ функция $f(z)-z^{-2}$ является аналитической и четной функцией от $z$, и следовательно, ее разложение в ряд Маклорена

$$f(z)-z^{-2}=\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

будет иметь место при $|z|<\pi$. Легко видеть, что

$$a_{2n}=2\pi^{-2n}(2n+1)\sum_{m=1}^{\infty} m^{-2n-2};$$

в частности,

$$a_0=\frac{1}{3}, \quad a_2=6\pi^{-4}\sum_{m=1}^{\infty} m^{-4}=\frac{1}{15}.$$

Отсюда следует для малых значений $|z|$

$$f(z)=z^{-2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}z^2+O(z^4).$$

Дифференцируя это равенство дважды и, с другой стороны, возводя обе его части в квадрат, будем иметь

$$f''(z)=6z^{-4}+\frac{2}{15}+O(z^2),$$

$$[f(z)]^2=z^{-4}+\frac{2}{3}z^{-2}+\frac{11}{45}+O(z^2)$$

и, следовательно,

$$f''(z)-6[f(z)]^2+4f(z)=O(z^2).$$

Это показывает, что функция $f''(z)-6[f(z)]^2+4f(z)$ является аналитической в начале координат и, очевидно, периодической с периодом $\pi$. Поскольку единственными возможными особыми точками этой функции являются точки $m\pi$, из ее периодичности следует, что она является целой функцией. Кроме того, она остается ограниченной при $z \to \infty$ в полосе $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}\pi$, ибо таковой будет $f(z)$, а следовательно, и $f''(z)$ [1]);

---

[1]) Ряд для $f''(z)$ может быть сравнен с $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}{}' m^{-4}$.

поэтому она остается ограниченной во всей этой полосе, а в силу периодичности и во всей плоскости $z$. По теореме Лиувилля (§ 5.63, часть I) она должна быть постоянной. Устремляя $z \to 0$, мы видим, что эта постоянная равна 0.

Итак, функция $\operatorname{cosec}^2 z$ удовлетворяет уравнению

$$f''(z) = 6[f(z)]^2 - 4f(z).$$

Умножая на $2f'(z)$ и интегрируя, получим

$$[f'(z)]^2 = 4[f(z)]^2\{f(z) - 1\} + c,$$

где $c$ — постоянная, которая равна нулю, как это следует из подстановки в это уравнение степенных рядов для $f(z)$ и $f'(z)$ и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях $z$.

Отсюда вытекает, что

$$2z = \int\limits_{f(z)}^{\infty} t^{-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

где интеграл взят по пути, выбранному надлежащим образом.

Пример 1. Пусть $y = \wp(z)$ и штрих обозначает дифференцирование по $z$; доказать, что

$$\frac{3y''^2}{4y'^4} - \frac{y'''}{2y'^3} = \frac{3}{16}\{(y-e_1)^{-2} + (y-e_2)^{-2} + (y-e_3)^{-2}\} - \\ - \frac{3}{8}\,y(y-e_1)^{-1}(y-e_2)^{-1}(y-e_3)^{-1},$$

где $e_1$, $e_2$, $e_3$ — корни уравнения $4t^3 - g_2t - g_3 = 0$.

[Имеем

$$y'^2 = 4y^3 - g_2y - g_3 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3).$$

Взяв здесь логарифмическую производную и деля на $y'$, получаем

$$2\frac{y''}{y'^2} = \sum_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-1}.$$

Дифференцируя еще раз, получим

$$\frac{2y'''}{y'^3} - \frac{4y''^2}{y'^4} = -\sum_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-2}.$$

Складывая это равенство, умноженное на $\frac{1}{4}$, с предыдущим, возведенным в квадрат и умноженным затем на $\frac{1}{16}$, получим требуемый результат.

Следует отметить, что слева в доказанном равенстве стоит половина шварциана[1]) от $z$ по $y$; это показывает, что $z$ есть отношение двух

---

[1]) Cayley, Camb. Phil. Trans., XIII (1885), 5 (Math. Papers, XI, 148).

решений уравнения

$$\frac{d^2v}{dy^2}+\left\{\frac{3}{16}\sum_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-2}-\frac{3}{8}y\prod_{r=1}^{3}(y-e_r)^{-1}\right\}v=0\ ^{1)}.\Bigg]$$

Пример 2. Получить следующие формулы, выражающие однородность функции $\wp(z)$:

$$\wp\left(\lambda z\left|\begin{matrix}\lambda\omega_1\\ \lambda\omega_2\end{matrix}\right.\right)=\lambda^{-2}\wp\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right.\right),\quad \wp(\lambda z;\lambda^{-4}g_2,\lambda^{-6}g_3)=\lambda^{-2}\wp(z;g_2,g_3),$$

где $\wp\left(z\left|\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\end{matrix}\right.\right)$ обозначает функцию $\wp(z)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$, а $\wp(z;g_2,g_3)$ — функцию $\wp(z)$ с инвариантами $g_2$, $g_3$.

[Первая следует из определения $\wp(z)$ двойным рядом; вторая может быть получена из двойных рядов, определяющих инварианты $g$.]

## 20.3. Теорема сложения для функции $\wp(z)$

Функция $\wp(z)$ обладает алгебраической *теоремой сложения*; другими словами, существует формула, выражающая $\wp(z+y)$ как алгебраическую функцию от $\wp(z)$ и $\wp(y)$ для любых значений[2] $z$ и $y$.

Рассмотрим уравнения

$$\wp'(z)=A\wp(z)+B,\quad \wp'(y)=A\wp(y)+B,$$

которые определяют $A$ и $B$ через $z$ и $y$, за исключением случаев, когда $\wp(z)=\wp(y)$, т. е.[3]

$$z\equiv\pm y\,(\mathrm{mod}\,2\omega_1,\ 2\omega_2).$$

Затем рассмотрим выражение

$$\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$$

---

[1]) О свойствах шварциана (производной Шварца) можно прочесть в книге В. В. Голубева «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений», 1950. *Шварцианом* $\{f\}_w$ от $f$ по $w$ называется выражение

$$\{f\}_w=\frac{2f'_wf'''_w-3\left(f''_w\right)^2}{2\left(f'\right)^2}$$

(см. Голубев, стр. 289).

Доказывается, что отношение $z=v_1/v_2$ двух линейно независимых интегралов дифференциального уравнения $\frac{d^2v}{dw^2}+p(w)\frac{dv}{dw}+q(w)v=0$ удовлетворяет уравнению $\{z\}_w=-p'(w)+\frac{p^2(w)}{2}+2q(w)$. (См. Голубев, стр. 299). — *Прим. ред.*

[2]) Частные случаи, когда $y$, или $z$, или $y+z$ — периоды, разумеется, нет необходимости рассматривать.

[3]) Функция $\wp(z)-\wp(y)$, как функция от $z$, имеет двойные полюсы в точках, сравнимых с $z=0$, и не имеет никаких других особых точек; поэтому (§ 20.13) она имеет только два неприводимых нуля; точки, сравнимые с $z=\pm y$, дают поэтому *все* нули функции $\wp(z)-\wp(y)$.

как функцию от $\zeta$. Эта функция имеет тройной полюс при $\zeta=0$ и, следовательно, по § 20.13 имеет три и только три неприводимых нуля; по § 20.14 сумма их равна некоторому периоду, и так как два из этих нулей суть $\zeta=z$, $\zeta=y$, то третий неприводимый нуль должен быть сравним с $-z-y$. Поэтому и $-z-y$ есть нуль выражения $\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$, и следовательно,

$$\wp'(-z-y)=A\wp(-z-y)+B.$$

Исключая $A$ и $B$ из этого уравнения и уравнений, которыми определяются $A$ и $B$, имеем

$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Так как производные, входящие в это соотношение, могут быть выражены алгебраически соответственно через $\wp(z)$, $\wp(y)$, $\wp(z+y)$ (§ 20.22), то оно действительно выражает функцию $\wp(z+y)$ алгебраически через $\wp(z)$ и $\wp(y)$. Это и есть *теорема сложения*.

Другие методы получения теоремы сложения указаны в примерах 1 и 2 § 20.311, а также в § 20.312. Отметим симметричную форму теоремы сложения; если $u+v+w=0$, то

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix}=0.$$

## 20.31. Другая форма теоремы сложения

Сохраняя обозначения § 20.3, видим, что значения $\zeta$, при которых $\wp'(\zeta)-A\wp(\zeta)-B$ равно нулю, сравнимы с одним из значений $z$, $y$, $-z-y$.

Значит, $\wp'^2(\zeta)-\{A\wp(\zeta)+B\}^2$ равняется нулю, когда $\zeta$ сравнимо с каким-либо из значений $z$, $y$, $-z-y$, и следовательно,

$$4\wp^3(\zeta)-A^2\wp^2(\zeta)-(2AB+g_2)\wp(\zeta)-(B^2+g_3)$$

равняется нулю, когда $\wp(\zeta)$ равна какому-либо из значений

$$\wp(z),\quad \wp(y),\quad \wp(z+y).$$

Для общих значений $z$ и $y$ значения $\wp(z)$, $\wp(y)$ и $\wp(z+y)$ различны, и таким образом, они дают все корни уравнения

$$4Z^3-A^2Z^2-(2AB+g_2)Z-(B^2+g_3)=0.$$

Следовательно, по известной формуле для суммы корней кубического уравнения

$$\wp(z)+\wp(y)+\wp(z+y)=\frac{1}{4}A^2,$$

откуда, решив уравнения, которыми определяются $A$ и $B$, получим

$$\wp(z+y)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y).$$

Этот результат выражает $\wp(z+y)$ явно через функции от $z$ и $y$.

## 20.311. Формула удвоения для $\wp(z)$

Формулы сложения, полученные выше, теряют смысл, когда $y=z$. Но результат § 20.31 будет верен при заданном значении $z$ для общих значений $y$.

Переходя к пределу, когда $y$ стремится к $z$, получим

$$\lim_{y\to z}\wp(z+y)=\frac{1}{4}\lim_{y\to z}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\lim_{y\to z}\wp(y).$$

Из этого равенства мы видим, что если $2z$ не есть период, то

$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(z+h)}{\wp(z)-\wp(z+h)}\right\}^2-2\wp(z)=$$
$$=\frac{1}{4}\lim_{h\to 0}\left\{\frac{-h\wp''(z)+O(h^2)}{-h\wp'(z)+O(h^2)}\right\}^2-2\wp(z),$$

если применить теорему Тейлора к $\wp(z+h)$, $\wp'(z+h)$; таким образом,

$$\wp(2z)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right\}^2-2\wp(z),$$

за исключением случая, когда $2z$ есть период. Эта формула называется *формулой удвоения*.

Пример 1. Доказать, что

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(z+y),$$

как функция от $z$, не имеет особенностей в точках, сравнимых с $z=0$, $\pm y$, и, применяя теорему Лиувилля, вывести отсюда теорему сложения.

Пример 2. Применить рассуждение, указанное в примере 1, к функции

$$\begin{vmatrix} \wp(z) & \wp'(z) & 1 \\ \wp(y) & \wp'(y) & 1 \\ \wp(z+y) & -\wp'(z+y) & 1 \end{vmatrix}$$

и вывести отсюда теорему сложения.

Пример 3. Показать, что

$$\wp(z+y)+\wp(z-y)=$$
$$=\{\wp(z)-\wp(y)\}^{-2}\left[\left\{2\wp(z)\wp(y)-\frac{1}{2}g_2\right\}\{\wp(z)+\wp(y)\}-g_3\right].$$

[По теореме сложения мы имеем

$$\wp(z+y)+\wp(z-y)=\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y)+$$
$$+\frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z)+\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)}\right\}^2-\wp(z)-\wp(y)=$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\wp'^2(z)+\wp'^2(y)}{\{\wp(z)-\wp(y)\}^2}-2\{\wp(z)+\wp(y)\}.$$

Заменяя $\wp'^2(z)$ и $\wp'^2(y)$ соответственно через $4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$ и $4\wp^3(y)-g_2\wp(y)-g_3$, после простых преобразований получим требуемый результат.]

Пример 4. Показать, пользуясь теоремой Лиувилля, что

$$\frac{d}{dz}\{\wp(z-a)\wp(z-b)\}=\wp(a-b)\{\wp'(z-a)+\wp'(z-b)\}-$$
$$-\wp'(a-b)\{\wp(z-a)-\wp(z-b)\}.$$

(Trinity, 1905)

## 20.312. Метод Абеля[1]) доказательства теоремы сложения для $\wp(z)$

Поучителен нижеследующий метод доказательства теоремы сложения для $\wp(z)$, хотя вполне строгое доказательство длинно и утомительно.

Пусть $g_2$, $g_3$ — инварианты функции $\wp(z)$; возьмем в плоскости перпендикулярные оси $OX$, $OY$ и рассмотрим пересечения кубической кривой

$$y^2=4x^3-g_2x-g_3$$

с подвижной прямой $y=mx+n$.

Если $(x_1, y_1)$ — какая-нибудь точка на кубической кривой, то уравнение относительно $z$

$$\wp(z)-x_1=0$$

имеет два решения $+z_1$, $-z_1$ (§ 20.13) и все другие решения сравнимы с этими двумя. Так как $\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3$, то имеем $\wp'^2(z)=y_1^2$; пусть $z_1$ — то решение, для которого $\wp'(z_1)=+y_1$, а не $-y_1$.

Число $z_1$, выбранное таким образом, называется *параметром* для $(x_1, y_1)$ на кубической кривой.

Абсциссы $x_1$, $x_2$, $x_3$ пересечений кубической кривой с подвижной прямой являются корнями уравнения

$$\varphi(x)\equiv 4x^3-g_2x-g_3-(mx+n)^2=0,$$

и следовательно,

$$\varphi(x)\equiv 4(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Изменение $\delta x_r$ одной из этих абсцисс, вызванное перемещением секущей прямой при малом изменении $\delta m$, $\delta n$ коэффициентов $m$, $n$, опреде-

---

[1]) Abel, Journ. für Math., II (1827), 101—181; III (1828), 160—190 [Oeuvres, I (Christiania, 1839), 141—252].

ляется уравнением

$$\varphi'(x_r)\,\delta x_r + \frac{\partial\varphi}{\partial m}\,\delta m + \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\delta n = 0$$

или

$$\varphi'(x_r)\,\delta x_r = 2(mx_r + n)(x_r\,\delta m + \delta n),$$

откуда получим

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{\delta x_r}{mx_r + n} = 2\sum_{r=1}^{3} \frac{x_r\,\delta m + \delta n}{\varphi'(x_r)},$$

предполагая, что $x_1$, $x_2$, $x_3$ не равны, так что $\varphi'(x_r) \neq 0$.

Теперь, если разложим $\dfrac{x(x\,\delta m + \delta n)}{\varphi(x)}$, как функцию от $x$, на простейшие дроби, то это выражение примет вид

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{A_r}{x - x_r},$$

где

$$A_r = \lim_{x \to x_r} x(x\,\delta m + \delta n)\frac{x - x_r}{\varphi(x)} = x_r(x_r\,\delta m + \delta n)\lim_{x \to x_r}\frac{x - x_r}{\varphi(x)} = \frac{x_r(x_r\,\delta m + \delta n)}{\varphi'(x_r)}$$

по теореме Тейлора.

Положив $x = 0$, получим

$$\sum_{r=1}^{3} \frac{\delta x_r}{y_r} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{r=1}^{3} \delta z_r = 0.$$

Другими словами, *сумма параметров точек пересечений есть постоянная, не зависящая от положения прямой.*

Если прямая изменяет свое положение так, что все точки пересечения удаляются в бесконечность (и притом так, что две точки никогда не сливаются), то очевидно, что $z_1 + z_2 + z_3$ будет равна сумме параметров, когда прямая есть бесконечно удаленная прямая; но когда прямая находится на бесконечности, каждый параметр является периодом функции $\wp(z)$ и поэтому $z_1 + z_2 + z_3$ будет периодом функции $\wp(z)$.

Таким образом, сумма параметров трех коллинеарных точек на кубической кривой сравнима с нулем. После этого детерминантную форму теоремы сложения можно получить, как в § 20.3.

## 20.32. Постоянные $e_1$, $e_2$, $e_3$

Покажем теперь, что величины $\wp(\omega_1)$, $\wp(\omega_2)$, $\wp(\omega_3)$ (где $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$) не равны друг другу и если их значения обозначить $e_1$, $e_2$, $e_3$, то $e_1$, $e_2$, $e_3$ будут корнями уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

Рассмотрим сначала $\wp'(\omega_1)$. Так как $\wp'(z)$ — нечетная периодическая функция, то мы имеем

$$\wp'(\omega_1) = -\wp'(-\omega_1) = -\wp'(2\omega_1 - \omega_1) = -\wp'(\omega_1),$$

и следовательно,

$$\wp'(\omega_1) = 0.$$

Подобным же образом

$$\wp'(\omega_2) = \wp'(\omega_3) = 0.$$

Так как $\wp'(z)$ — эллиптическая функция, единственными особыми точками которой являются тройные полюсы в точках, сравнимых с началом координат, то $\wp'(z)$ имеет три и только три (§ 20.13) неприводимых нуля. Поэтому единственными нулями функции $\wp'(z)$ являются точки, сравнимые с $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$.

Рассмотрим теперь $\wp(z) - e_1$. Эта функция равна нулю при $z = \omega_1$, и так как $\wp'(\omega_1) = 0$, то она имеет в $\omega_1$ двойной корень. Так как, далее, $\wp(z)$ имеет только два неприводимых полюса, то из § 20.13 вытекает, что все нули функции $\wp(z) - e_1$ сравнимы с $\omega_1$. Подобным же образом единственными нулями функций $\wp(z) - e_2$, $\wp(z) - e_3$ являются двойные нули в точках, сравнимых с $\omega_2$, $\omega_3$.

Отсюда $e_1 \neq e_2 \neq e_3$, так как, если бы, например $e_1 = e_2$, то $\wp(z) - e_1$ имела бы нуль в $\omega_2$, т. е. в точке, не сравнимой с $\omega_1$.

Так как

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$$

и $\wp'(z)$ равна нулю в точках $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$, то отсюда следует, что $4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3$ равна нулю, когда $\wp(z) = e_1$, $e_2$ или $e_3$.

Другими словами, $e_1$, $e_2$, $e_3$ являются корнями уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

По хорошо известным формулам, связывающим корни уравнений с их коэффициентами, получаем, что

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0,$$

$$e_2e_3 + e_3e_1 + e_1e_2 = -\frac{1}{4}g_2,$$

$$e_1e_2e_3 = \frac{1}{4}g_3.$$

Пример 1. Показать, что если $g_2$ и $g_3$ вещественны и дискриминант $g_2^3 - 27g_3^2$ положителен, то все три числа $e_1$, $e_2$, $e_3$ вещественны;

расположив их так, что $e_1 > e_2 > e_3$, показать, что

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} (4t^3 - g_2 t - g_3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

$$\omega_3 = -i \int_{-\infty}^{e_3} (g_3 + g_2 t - 4t^3)^{-\frac{1}{2}}\, dt,$$

так что $\omega_1$ — вещественное, а $\omega_3$ — чисто мнимое.

Пример 2. Показать, что при условиях примера 1 функция $\wp(z)$ вещественна на периметре прямоугольника, вершины которого 0, $\omega_3$, $\omega_1 + \omega_3$, $\omega_1$.

## 20.33. Прибавление полупериода к аргументу функции $\wp(z)$

По теореме сложения в форме, данной в § 20.31, имеем

$$\wp(z + \omega_1) + \wp(z) + \wp(\omega_1) = \frac{1}{4}\left\{\frac{\wp'(z) - \wp'(\omega_1)}{\wp(z) - \wp(\omega_1)}\right\}^2,$$

и следовательно, так как

$$\wp'^2(z) = 4 \prod_{r=1}^{3} \{\wp(z) - e_r\},$$

имеем

$$\wp(z + \omega_1) = \frac{\{\wp(z) - e_2\}\{\wp(z) - e_3\}}{\wp(z) - e_1} - \wp(z) - e_1,$$

т. е., замечая, что $\sum_{r=1}^{3} e_r = 0$,

$$\wp(z + \omega_1) = e_1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{\wp(z) - e_1};$$

эта формула выражает функцию $\wp(z + \omega_1)$ через функцию $\wp(z)$.

Пример 1. Показать, что

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) = e_1 \pm \{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Пример 2. Из формулы для $\wp(z + \omega_2)$ и из примера 1 вывести, что

$$\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1 + \omega_2\right) = e_1 \mp \{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1913)

Пример 3. Показать, что произведение

$$\wp'(z)\,\wp'(z + \omega_1)\,\wp'(z + \omega_2)\,\wp'(z + \omega_3)$$

равно дискриминанту уравнения

$$4t^3 - g_2 t - g_3 = 0.$$

[Дифференцируя результат, полученный в этом параграфе, имеем

$$\wp'(z + \omega_1) = -(e_1 - e_2)(e_1 - e_2)\,\wp'(z)\,\{\wp(z) - e_1\}^{-2};$$

из этого и аналогичных равенств имеем

$$\wp'(z)\wp'(z+\omega_1)\wp'(z+\omega_2)\wp'(z+\omega_3)=$$
$$=(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2\wp'^4(z)\prod_{r=1}^{3}\{\wp(z)-e_r\}^{-2}=$$
$$=16(e_1-e_2)^2(e_2-e_3)^2(e_3-e_1)^2,$$

что представляет собой искомый дискриминант $g_2^3-27g_3^2$.]

Пример 4. Показать, что при надлежащем выборе радикалов

$$\wp'\left(\frac{1}{2}\omega_1\right)=-2\{(e_1-e_2)(e_1-e_3)\}^{\frac{1}{2}}\left\{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}+(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

(Math. Trip., 1913)

Пример 5. Показать, что при надлежащем выборе радикалов

$$\{\wp(2z)-e_2\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_3\}^{\frac{1}{2}}+\{\wp(2z)-e_3\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_1\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\{\wp(2z)-e_1\}^{\frac{1}{2}}\{\wp(2z)-e_2\}^{\frac{1}{2}}=\wp(z)-\wp(2z).$$

## 20.4. Квазипериодические функции. Функция [1]) $\zeta(z)$

Введем теперь функцию $\zeta(z)$, определяемую уравнением

$$\frac{d\zeta(z)}{dz}=-\wp(z)$$

и условием

$$\lim_{z\to 0}\{\zeta(z)-z^{-1}\}=0.$$

Так как ряд для $\wp(z)-z^{-2}$ равномерно сходится во всякой области, из которой исключены окрестности точек [2]) $\Omega'_{m,n}$, то мы можем интегрировать его почленно (§ 4.7, часть I) и получим

$$\zeta(z)-z^{-1}=-\int_0^z\{\wp(z)-z^{-2}\}\,dz=-\sum_{m,n}{}'\int_0^z\{(z-\Omega_{m,n})^{-2}-\Omega_{m,n}^{-2}\}\,dz,$$

что дает

$$\zeta(z)=\frac{1}{\zeta}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{z-\Omega_{m,n}}+\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right\}.$$

Легко видеть, что общий член этого ряда будет

$$O\left(|\Omega_{m,n}|^{-3}\right)\ \text{при}\ |\Omega_{m,n}|\to\infty;$$

---

[1]) Эту функцию, конечно, не следует смешивать с дзета-функцией Римана, рассмотренной в главе 13.

[2]) Символ $\Omega'_{m,n}$ применяется для обозначения всех точек $\Omega_{m,n}$, за исключением начала координат (ср. § 20.2).

отсюда следует (§ 20.2), что $\zeta(z)$ будет аналитической функцией от $z$ во всей плоскости $z$, за исключением простых полюсов во всех точках $\Omega_{m,n}$ (причем вычеты во всех полюсах равны $+1$).

Очевидно, что

$$-\zeta(-z)=\frac{1}{z}+\sum_{m,n}{}'\left\{\frac{1}{z+\Omega_{m,n}}-\frac{1}{\Omega_{m,n}}+\frac{z}{\Omega_{m,n}^2}\right\},$$

и так как этот ряд состоит из тех же членов, что и ряд для $\zeta(z)$, но расположенных, как в соответствующем ряде § 20.21, то имеем согласно § 2.52 части I

$$\zeta(-z)=-\zeta(z);$$

другими словами, $\zeta(z)$ — *нечетная функция от* $z$.

Следуя аналогии § 20.222, можно сравнить $\zeta(z)$ с функцией $\operatorname{ctg} z$, определяемой рядом $z^{-1}+\sum_{m=-\infty}^{\infty}{}'\{(z-m\pi)^{-1}+(m\pi)^{-1}\}$, уравнение $\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z=$ $=-\operatorname{cosec}^2 z$ соответствует уравнению $\frac{d}{dz}\zeta(z)=-\wp(z)$.

## 20.41. Квазипериодичность функции $\zeta(z)$

Название § 20.4 предвосхищало результат, который будет доказан теперь, а именно, что функция $\zeta(z)$ не будет двоякопериодической функцией от $z$; рассмотрим, как влияет на $\zeta(z)$ прибавление $2\omega_1$ или $2\omega_2$ к $z$. Из § 20.12 (III) очевидно, что $\zeta(z)$ не может быть эллиптической функцией ввиду того, что вычет функции $\zeta(z)$ в каждом полюсе равен $+1$.

Если проинтегрировать уравнение

$$\wp(z+2\omega_1)=\wp(z),$$

то получим

$$\zeta(z+2\omega_1)=\zeta(z)+2\eta_1,$$

где $2\eta_1$ — постоянная интегрирования; положив $z=-\omega_1$ и принимая во внимание, что $\zeta(z)$ — нечетная функция, имеем

$$\eta_1=\zeta(\omega_1).$$

Подобным же образом

$$\zeta(z+2\omega_2)=\zeta(z)+2\eta_2,$$

где

$$\eta_2=\zeta(\omega_2).$$

Пример 1. Доказать с помощью теоремы Лиувилля, что при $x+y+z=0$

$$\{\zeta(x)+\zeta(y)+\zeta(z)\}^2+\zeta'(x)+\zeta'(y)+\zeta'(z)=0.$$

(Frobenius и Stickelberger, Journ. für Math., LXXXVIII)

[Этот результат представляет собой псевдотеорему сложения. Он не является настоящей теоремой сложения, так как $\zeta'(x)$, $\zeta'(y)$, $\zeta'(z)$ не представляют собой алгебраических функций от $\zeta(x)$, $\zeta(y)$, $\zeta(z)$.]

Пример 2. Доказать с помощью теоремы Лиувилля, что

$$2\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp^2(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp^2(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp^2(z)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp'(z)\end{vmatrix} = \zeta(x+y+z)-\zeta(x)-\zeta(y)-\zeta(z).$$

Получить обобщение этой теоремы, содержащее $n$ переменных.

(Math. Trip., 1894)

## 20.411. Соотношение между $\eta_1$ и $\eta_2$

Покажем теперь, что

$$\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1=\frac{1}{2}\pi i.$$

Для получения этого результата рассмотрим интеграл $\int\limits_C \zeta(z)\,dz$, взятый вдоль границы ячейки.

Внутри ячейки имеется только один полюс функции $\zeta(z)$, вычет в котором равен $+1$. Отсюда $\int\limits_C \zeta(z)\,dz=2\pi i$.

Преобразуя контурный интеграл по способу § 20.12, получим

$$2\pi i=\int\limits_t^{t+2\omega_1}\{\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_2)\}\,dz-\int\limits_t^{t+2\omega_2}\{\zeta(z)-\zeta(z+2\omega_1)\}\,dz=$$

$$=-2\eta_2\int\limits_t^{t+2\omega_1}dt+2\eta_1\int\limits_t^{t+2\omega_2}dt,$$

и следовательно,

$$2\pi i=-4\eta_2\omega_1+4\eta_1\omega_2,$$

что и представляет собой требуемый результат.

## 20.42. Функция $\sigma(z)$

Введем теперь функцию $\sigma(z)$, определяемую уравнением

$$\frac{d}{dz}\lg\sigma(z)=\zeta(z) \text{ и условием } \lim_{z\to 0}\left\{\frac{\sigma(z)}{z}\right\}=1.$$

Ввиду равномерной сходимости ряда для $\zeta(z)$ всюду, кроме окрестностей полюсов функции $\zeta(z)$, мы можем интегрировать ряд почленно. Поступая так и потенцируя, находим

$$\sigma(z) = z \prod_{m,\,n}{}' \left\{ \left(1 - \frac{z}{\Omega_{m,\,n}}\right) \exp\left(\frac{z}{\Omega_{m,\,n}} + \frac{z^2}{2\Omega_{m,\,n}^2}\right) \right\},$$

где постоянная интегрирования определена из добавочного условия.

Методами, примененными в §§ 20.2, 20.21, 20.4, читатель легко получит следующие результаты:

(I) Произведение для $\sigma(z)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области значений $z$.

(II) Функция $\sigma(z)$ — нечетная целая функция от $z$ с простыми нулями в точках $\Omega_{m,\,n}$.

Функцию $\sigma(z)$ можно сравнить с функцией $\sin z$, определяемой произведением

$$z \prod_{m=-\infty}^{\infty}{}' \left\{ \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right) e^{\frac{z}{m\pi}} \right\},$$

причем соотношению $\frac{d}{dz} \lg \sin z = \operatorname{ctg} z$ соответствует $\frac{d}{dz} \lg \sigma(z) = \zeta(z)$.

## 20.421. Квазипериодичность функции $\sigma(z)$

Интегрируя равенство

$$\zeta(z + 2\omega_1) = \zeta(z) + 2\eta_1,$$

получим

$$\sigma(z + 2\omega_1) = c e^{2\eta_1 z} \sigma(z),$$

где $c$ — постоянная интегрирования; для определения $c$ положим $z = -\omega_1$; тогда

$$\sigma(\omega_1) = -c e^{-2\eta_1 \omega_1} \sigma(\omega_1).$$

Следовательно, $c = -e^{2\eta_1 \omega_1}$ и

$$\sigma(z + 2\omega_1) = -e^{2\eta_1 (z + \omega_1)} \sigma(z).$$

Подобным же образом

$$\sigma(z + 2\omega_2) = -e^{2\eta_2 (z + \omega_2)} \sigma(z).$$

Эти результаты описывают поведение функции $\sigma(z)$, когда к $z$ прибавляется период функции $\wp(z)$.

Если, как в § 20.32, положить $\omega_3 = -\omega_1 - \omega_2$, то три другие сигма-функции определятся равенствами

$$\sigma_r(z) = \frac{e^{-\eta_r z} \sigma(z + \omega_r)}{\sigma(\omega_r)} \qquad (r = 1,\ 2,\ 3).$$

Четыре определенные таким образом сигма-функции аналогичны четырем тэта-функциям, рассматриваемым в главе 21 (см. § 21.9).

Пример 1. Показать, что если $m$ и $n$ — любые целые числа, то

$$\sigma(z+2m\omega_1+2n\omega_2)=(-1)^{m+n}\sigma(z)\times$$
$$\times\exp\{(2m\eta_1+2n\eta_2)z+2m^2\eta_1\omega_1+4mn\eta_1\omega_2+2n^2\eta_2\omega_2\},$$

и вывести отсюда, что $\eta_1\omega_2-\eta_2\omega_1$ — целое, кратное $\frac{1}{2}\pi i$.

Пример 2. Показать, что если $q=\exp(\pi i\omega_2/\omega_1)$, так что $|q|<1$, и если

$$F(z)=\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{\omega_1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}+q^{4n}\right\},$$

то $F(z)$ — целая функция с теми же самыми нулями, как у функции $\sigma(z)$, и, следовательно, $\frac{F(z)}{\sigma(z)}$ — двоякопериодическая функция от $z$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$.

Пример 3. Пользуясь теоремой Лиувилля, вывести из примера 2, что

$$\sigma(z)=\frac{2\omega_1}{\pi}\exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right)\sin\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right)\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n}\cos(\pi z/\omega_1)+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}\right\}.$$

Пример 4. Получить результат примера 3, выражая каждый множитель справа через однократное бесконечное произведение.

## 20.5. Формулы, выражающие любую эллиптическую функцию через функции Вейерштрасса с теми же периодами

Существуют различные формулы, аналогичные выражениям любой рациональной функции: (I) в виде отношения двух произведений линейных множителей, (II) в виде суммы простейших дробей; имеются две формулы первого типа, содержащие соответственно сигма-функции и эллиптические функции Вейерштрасса; второго же типа имеется формула, содержащая производные дзета-функции. Перейдем к получению этих формул.

### 20.51. Выражение любой эллиптической функции через функции $\wp(z)$ и $\wp'(z)$

Пусть $f(z)$ — произвольная эллиптическая функция и $\wp(z)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с теми же периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Положим сначала

$$f(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(-z)]+\frac{1}{2}\left[\{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1}\right]\wp'(z).$$

Обе функции

$$f(z)+f(-z),\quad \{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1}$$

будут *четными* и, очевидно, эллиптическими, когда $f(z)$ — эллиптическая функция.

Задача, стоящая перед нами, будет решена, *если мы сможем выразить любую четную эллиптическую функцию* $\varphi(z)$ *через функцию* $\wp(z)$.

Пусть $a$ — нуль функции $\varphi(z)$ в какой-нибудь ячейке; тогда точка той же ячейки, сравнимая с $-a$, будет также нулем.

Неприводимые нули функции $\varphi(z)$ могут быть поэтому разбиты на две группы: скажем, точки $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и точки, сравнимые с $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$.

Подобным же образом неприводимые полюсы могут быть разбиты на две группы: скажем, точки $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и точки, сравнимые с $-b_1, -b_2, \ldots, -b_n$.

Рассмотрим теперь функцию [1])

$$\frac{1}{\varphi(z)}\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}\right\}.$$

Она является эллиптической функцией от $z$ и, очевидно, не имеет полюсов, ибо нули функции $\varphi(z)$ являются нулями числителя произведения, а нули знаменателя произведения являются полюсами $\varphi(z)$ [2]). Следовательно, по теореме Лиувилля она равна постоянной, скажем $A_1$, и мы будем иметь

$$\varphi(z)=A_1\prod_{r=1}^{n}\left\{\frac{\wp(z)-\wp(a_r)}{\wp(z)-\wp(b_r)}\right\};$$

таким образом, функция $\varphi(z)$ выражена как рациональная функция от $\wp(z)$.

Выполняя эту процедуру с каждой из функций

$$f(z)+f(-z),\quad \{f(z)-f(-z)\}\{\wp'(z)\}^{-1},$$

получим теорему: *любая функция* $f(z)$ *может быть выражена через эллиптические функции Вейерштрасса* $\wp(z)$ *и* $\wp'(z)$ *с теми же периодами; выражение рационально относительно* $\wp(z)$ *и линейно относительно* $\wp'(z)$.

---

[1]) Если какая-нибудь из точек $a_r$ или $b_r$ сравнима с началом координат, то соответствующий множитель $\wp(z)-\wp(a_r)$ или $\wp(z)-\wp(b_r)$ опускается. Нуль (или полюс) произведения и нуль (или полюс) функции $\varphi(z)$ в начале координат будут тогда одинаковой кратности. В этом произведении и в произведении § 20.53 множители, соответствующие кратным нулям и полюсам, повторяются соответственно их кратности.

[2]) Той же самой кратности.

## 20.52. Выражение любой эллиптической функции через линейную комбинацию от дзета-функции и ее производных

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — совокупность неприводимых полюсов функции $f(z)$, а главная часть (§ 5.61, часть I) функции $f(z)$ вблизи полюса $a_k$ равна

$$\frac{c_{k,1}}{z-a_k}+\frac{c_{k,2}}{(z-a_k)^2}+\ldots+\frac{c_{k,r_k}}{(z-a_k)^{r_k}}.$$

Тогда можно показать, что

$$f(z)=A_2+\sum_{k=1}^{n}\left\{c_{k,1}\zeta(z-a_k)-c_{k,2}\zeta'(z-a_k)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{(-1)^{r_k-1}c_{k,r_k}}{(r_k-1)!}\zeta^{(r_k-1)}(z-a_k)\right\},$$

где $A_2$ — постоянная, а $\zeta^{(s)}(z)$ обозначает $\frac{d^s}{dz^s}\zeta(z)$.

Обозначая сумму, стоящую справа, через $F(z)$, видим, что

$$F(z+2\omega_1)-F(z)=\sum_{k=1}^{n}2\eta_1 c_{k,1}$$

согласно § 20.41, так как все производные дзета-функции периодичны.

Но сумма $\sum_{k=1}^{n}c_{k,1}$ равна сумме вычетов функции во всех ее полюсах, лежащих в ячейке, и, следовательно (§ 20.12), равна нулю. Поэтому $F(z)$ имеет период $2\omega_1$ и таким же образом можно показать, что она будет иметь и период $2\omega_2$; следовательно, $f(z)-F(z)$ — эллиптическая функция. Кроме того, $F(z)$ образована так, что $f(z)-F(z)$ не имеет полюсов в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$; следовательно, она не имеет полюсов в некоторой ячейке и по теореме Лиувилля приводится к постоянной, скажем $A_2$.

*Таким образом, функция $f(z)$ может быть представлена в виде*

$$A_2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}c_{k,s}\zeta^{(s-1)}(z-a_k).$$

Этот результат имеет большое значение в задаче интегрирования эллиптической функции $f(z)$, когда главная часть ее разложения

в каждом из ее полюсов известна; очевидно, имеем

$$\int^{z} f(z)\,dz = A_2 z + \sum_{k=1}^{n}\left[c_{k,1}\lg\sigma(z-a_k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=2}^{r_k}\frac{(-1)^{s-1}}{(s-1)!}\,c_{k,s}\zeta^{(s-2)}(z-a_k)\right] + C,$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

Пример. Показать вышеизложенным методом, что

$$\wp^2(z) = \frac{1}{6}\wp''(z) + \frac{1}{12}g_2,$$

и вывести отсюда, что

$$\int^{z}\wp^2(z)\,dz = \frac{1}{6}\wp'(z) + \frac{1}{12}g_2 z + C,$$

где $C$ — постоянная интегрирования.

## 20.53. Выражение любой эллиптической функции в виде отношения сигма-функций

Пусть $f(z)$ — какая-нибудь эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$ и $2\omega_2$, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — совокупность неприводимых нулей функции $f(z)$. Тогда (§ 20.14) можно выбрать такую совокупность полюсов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что всякий полюс функции $f(z)$ будет сравним с одним из них и, сверх того [1]),

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\prod_{r=1}^{n}\frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

Это произведение, очевидно, имеет те же самые полюсы и нули, что и функция $f(z)$; далее, результат прибавления $2\omega_1$ к $z$ выра-

[1]) Кратные нули или полюсы, конечно, подсчитываются соответственно их кратности; для определения $b_1, b_2, \ldots, b_n$ возьмем $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n'$ так, чтобы они представляли совокупность полюсов в ячейке, в которой лежат $a_1, a_2, \ldots, a_n$, и выберем затем точку $b_n$, сравнимую с $b_n'$, таким образом, чтобы удовлетворялось требуемое равенство.

жается в умножении функции на

$$\prod_{r=1}^{n} \frac{\exp\{2\eta_1(z-a_r)\}}{\exp\{2\eta_1(z-b_r)\}} = 1.$$

Эта функция имеет поэтому период $2\omega_1$; подобным же образом покажем, что она имеет и период $2\omega_2$; следовательно, отношение

$$f(z) : \prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}$$

будет эллиптической функцией без нулей и полюсов. По теореме Лиувилля она должна быть равна постоянной, скажем $A_3$.

Таким образом, функция $f(z)$ может быть представлена в виде

$$f(z) = A_3 \prod_{r=1}^{n} \frac{\sigma(z-a_r)}{\sigma(z-b_r)}.$$

Эллиптическая функция, следовательно, определена (с точностью до постоянного множителя), когда известны ее периоды и совокупности неприводимых нулей и полюсов.

Пример 1. Показать, что

$$\wp(z) - \wp(y) = -\frac{\sigma(z+y)\,\sigma(z-y)}{\sigma^2(z)\,\sigma^2(y)}.$$

Пример 2. Вывести из примера 1 при помощи дифференцирования, что

$$\frac{1}{2}\,\frac{\wp'(z)-\wp'(y)}{\wp(z)-\wp(y)} = \zeta(z+y) - \zeta(z) - \zeta(y),$$

и при помощи дальнейшего дифференцирования получить теорему сложения для $\wp(z)$.

Пример 3. Пусть $\sum_{r=1}^{n} a_r = \sum_{r=1}^{n} b_r$; показать, что

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{\sigma(a_r-b_1)\,\sigma(a_r-b_2)\ldots\sigma(a_r-b_n)}{\sigma(a_r-a_1)\,\sigma(a_r-a_2)\ldots{}^{*}\ldots\sigma(a_r-a_n)} = 0,$$

где знак * обозначает, что множитель $\sigma(a_r-a_r)$, равный нулю, опущен.

Пример 4. Показать, что

$$\wp(z) - e_r = \frac{\sigma_r^2(z)}{\sigma^2(z)} \qquad (r = 1, 2, 3).$$

[Под $\{\wp(r) - e_r\}^{\frac{1}{2}}$ обыкновенно *принято понимать* $\frac{\sigma_r(z)}{\sigma(z)}$, а не $\frac{-\sigma_r(z)}{\sigma(z)}$.]

Пример 5. Установить при помощи примера 1 «трехчленное уравнение», а именно:

$$\sigma(z+a)\sigma(z-a)\sigma(b+c)\sigma(b-c)+\sigma(z+b)\sigma(z-b)\sigma(c+a)\sigma(c-a)+$$
$$+\sigma(z+c)\sigma(z-c)\sigma(a+b)\sigma(a-b)=0.$$

[Этот результат принадлежит Вейерштрассу, см. стр. 47 его лекций, изданных Шварцем.]

Это уравнение является характеристическим для сигма-функции; Альфан (Halphen, Fonctions Elliptiques, I (Paris, 1886), 187) доказал, что нет функции, существенно отличной от сигма-функции, которая бы удовлетворяла уравнению этого типа, см. стр. 333, пример 38.

## 20.54. Связь между любыми двумя эллиптическими функциями с одинаковыми периодами

Докажем теперь важную теорему, что *между любыми двумя эллиптическими функциями $f(z)$ и $\varphi(z)$ с одинаковыми периодами существует алгебраическое соотношение.*

Действительно, можно выразить (§ 20.51) $f(z)$ и $\varphi(z)$ как рациональные функции от функций $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ Вейерштрасса с теми же периодами, так что

$$f(z)=R_1\{\wp(z),\ \wp'(z)\},\quad \varphi(z)=R_2\{\wp(z),\ \wp'(z)\},$$

где $R_1$ и $R_2$ обозначают рациональные функции двух переменных.

Исключая $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ алгебраически из этих двух уравнений и уравнения

$$\wp'^2(z)=4\wp^3(z)-g_2\wp(z)-g_3,$$

получим алгебраическое соотношение, связывающее $f(z)$ с $\varphi(z)$; теорема, таким образом, доказана.

В частности, всякая эллиптическая функция связана алгебраическим соотношением со своей производной.

Если теперь взять порядки эллиптических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$ равными соответственно $m$ и $n$, то любому заданному значению функции $f(z)$ соответствует (§ 20.13) совокупность $m$ неприводимых значений $z$ и, следовательно, $m$ значений (вообще говоря, различных) функции $\varphi(z)$.

Следовательно, каждому значению $f$ соответствует $m$ значений $\varphi$ и, подобным же образом, каждому значению $\varphi$ соответствует $n$ значений $f$.

Соотношение между $f(z)$ и $\varphi(z)$ будет поэтому (в общем случае) степени $m$ относительно $\varphi$ и степени $n$ относительно $f$.

Это соотношение *может* быть и более низкой степени. Так, если функция $f(z)=\wp(z)$ — порядка 2, а функция $\varphi(z)=\wp^2(z)$ — порядка 4, соотношение между ними будет $f^2=\varphi$.

В качестве иллюстрации доказанной теоремы возьмем функцию $f(z)=\wp(z)$ второго порядка и функцию $\varphi(z)=\wp'(z)$ третьего

порядка. Соотношение между функциями должно быть степени 2 относительно $\varphi$ и степени 3 относительно $f$; это и есть на самом деле, ибо этим соотношением будет

$$\varphi^2=4f^3-g_2f-g_3.$$

Пример. Пусть $u$, $v$, $w$ — три эллиптические функции второго порядка с равными периодами; показать, что в общем случае существует два различных соотношения, линейных относительно каждой функции $u$, $v$, $w$, а именно:

$$Auvw+Bvw+Cwu+Duv+Eu+Fv+Gw+H=0,$$
$$A'uvw+B'vw+C'wu+D'uv+E'u+F'v+G'w+H'=0,$$

где $A$, $B$, ..., $H'$ — постоянные.

## 20.6. Об интегрировании функции $\{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4\}^{-\frac{1}{2}}$

Покажем теперь, что некоторые интегралы, которые не берутся при помощи элементарных функций, могут быть взяты введением функции $\wp(z)$.

Пусть

$$a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4\equiv f(x)$$

— какой-нибудь полином четвертой степени, не имеющий равных линейных множителей; пусть его инварианты[1]) будут

$$g_2\equiv a_0a_4-4a_1a_3+3a_2^2,$$
$$g_3\equiv a_0a_2a_4+2a_1a_2a_3-a_2^3-a_0a_3^2-a_1^2a_4.$$

Пусть $z=\int\limits_{x_0}^{x}\{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt$, где $x_0$ — какой-нибудь корень уравнения $f(x)=0$; тогда, если функция $\wp(z)$ построена[2]) по инвариантам $g_2$ и $g_3$, переменную $x$ можно представить в виде рациональной функции от $\wp(z;\ g_2,\ g_3)$.

[Примечание. Мы считаем, что $f(x)$ не имеет равных линейных множителей, потому что если $f(x)$ имеет равные множители, то интегрирование выполняется с помощью одних круговых или логарифмических функций. По той же причине не нужно рассматривать и случай, когда $a_0=a_1=0$.]

---

[1]) Burnside and Panton, Theory of Equations, II, 113. (См. также А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры, Гостехиздат, М., 1941, 203, 336. — *Прим. ред.*).

[2]) См. § 21.73.

По теореме Тейлора имеем

$$f(t)=4A_3(t-x_0)+6A_2(t-x_0)^2+4A_1(t-x_0)^3+A_0(t-x_0)^4$$

(так как $f(x_0)=0$), где

$$A_0=a_0,\quad A_1=a_0x_0+a_1,$$
$$A_2=a_0x_0^2+2a_1x_0+a_2,$$
$$A_3=a_0x_0^3+3a_1x_0^2+3a_2x_0+a_3.$$

Положив $(t-x_0)^{-1}=\tau$, $(x-x_0)^{-1}=\xi$, имеем

$$z=\int_{\xi}^{\infty}\{4A_3\tau^3+6A_2\tau^2+4A_1\tau+A_0\}^{-\frac{1}{2}}\,d\tau.$$

Для того чтобы освободиться от второго члена, входящего в кубический полином, положим[1])

$$\tau=A_3^{-1}\left(\sigma-\frac{1}{2}A_2\right),\quad \xi=A_3^{-1}\left(s-\frac{1}{2}A_2\right);$$

тогда получим

$$z=\int_{s}^{\infty}\left\{4\sigma^3-\left(3A_2^2-4A_1A_3\right)\sigma-\left(2A_1A_2A_3-A_2^3-A_0A_3^2\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}d\sigma.$$

Легко убедиться, что

$$3A_2^2-4A_1A_3 \quad \text{и} \quad 2A_1A_2A_3-A_2^3-A_0A_3^2$$

соответственно равны $g_2$ и $g_3$ — инвариантам исходного полинома четвертой степени, и следовательно,

$$s=\wp(z;\ g_2,\ g_3).$$

Далее,

$$x=x_0+A_3\left\{s-\frac{1}{2}A_2\right\}^{-1},$$

так что

$$x=x_0+\frac{1}{4}f'(x_0)\left\{\wp(z;\ g_2,\ g_3)-\frac{1}{24}f''(x_0)\right\}^{-1};$$

таким образом, $x$ выражено в виде рациональной функции от $\wp(z;\ g_2,\ g_3)$.

Эту формулу для $x$ следует рассматривать как интегральный эквивалент соотношения

$$z=\int_{x_0}^{x}\{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

---

[1]) Такая подстановка законна, так как $A_3\neq 0$; ибо если $A_3=0$, уравнение $f(x)=0$ имеет $x=x_0$ кратным корнем.

Пример 1. Используя обозначения этого параграфа, показать, что

$$\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}=\frac{-f'(x_0)\wp'(z)}{4\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(x_0)\right\}^2}.$$

Пример 2. Показать, что если

$$z=\int_a^x\{f(t)\}^{-\frac{1}{2}}dt,$$

где $a$ — *какая-нибудь* постоянная, не обязательно являющаяся нулем функции $f(x)$, а $f(x)$ — полином четвертой степени, не имеющий кратных корней, то

$$x=a+\frac{\{f(a)\}^{\frac{1}{2}}\wp'(z)+\frac{1}{2}f'(a)\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(a)\right\}+\frac{1}{24}f(a)f'''(a)}{2\left\{\wp(z)-\frac{1}{24}f''(a)\right\}^2-\frac{1}{48}f(a)f^{\mathrm{IV}}(a)},$$

причем функция $\wp(z)$ составлена по инвариантам полинома $f(x)$.

(Weierstrass)

[Этот результат впервые был опубликован в 1865 г. в Берлинской диссертации Бирмана (Bierman, Inaugural-dissertation), который приписывает его Вейерштрассу. Несколько отличный результат, принадлежащий Морделлу (Mordell, Messenger, XLIV (1915), 138—141), заключается в том, что если

$$z=\int_{a,\,b}^{x,\,y}\frac{y\,dx-x\,dy}{\sqrt{f(x,\,y)}},$$

где $f(x,\,y)$ — однородный полином четвертой степени с гессианом $h(x,\,y)$, то можно положить

$$x=a\wp'(z)\sqrt{f}+\frac{1}{2}\wp(z)f_b+\frac{1}{2}h_b,$$

$$y=b\wp'(z)\sqrt{f}-\frac{1}{2}\wp(z)f_a-\frac{1}{2}h_a,$$

где $f$ и $h$ стоят вместо $f(a,\,b)$ и $h(a,\,b)$, а индексы $a$, $b$ обозначают частные производные.]

Пример 3. Показать, что в обозначениях примера 2

$$\wp(z)=\frac{\{f(x)f(a)\}^{\frac{1}{2}}+f(a)}{2(x-a)^2}+\frac{f'(a)}{4(x-a)}+\frac{f''(a)}{24},$$

$$\wp'(z)=-\left\{\frac{f(x)}{(x-a)^3}-\frac{f'(x)}{4(x-a)^2}\right\}\{f(a)\}^{\frac{1}{2}}-\left\{\frac{f(a)}{(x-a)^3}+\frac{f'(a)}{4(x-a)^2}\right\}\{f(x)\}^{\frac{1}{2}}.$$

## 20.7. Униформизация[1]) кривых рода единица

Теорему § 20.6 можно сформулировать несколько иным образом: *Если переменные $x$ и $y$ связаны уравнением вида*

$$y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4,$$

*то они могут быть выражены как однозначные функции переменной $z$ при помощи уравнений*

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{1}{4} f'(x_0)\left\{\wp(z) - \frac{1}{24} f''(x_0)\right\}^{-1}, \\ y &= -\frac{1}{4} f'(x_0)\wp'(z)\left\{\wp(z) - \frac{1}{24} f''(x_0)\right\}^{-2}, \end{aligned}\right\}$$

*где $f(x) = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4$, $x_0$ — какой-нибудь нуль функции $f(x)$ и функция $\wp(x)$ составлена по инвариантам $f(x)$, причем $z = \int\limits_{x_0}^{x} \{f(t)\}^{-\frac{1}{2}} dt$.*

Очевидно, что $y$ является двузначной функцией от $x$, а $x$ — четырехзначной функцией от $y$; то обстоятельство, что $x$ и $y$ могут быть выражены как *однозначные* функции переменной $z$, делает эту переменную $z$ весьма важной в теории алгебраических уравнений рассматриваемого типа; $z$ называется *униформизующей переменной* уравнения

$$y^2 = a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4.$$

Читатель, знакомый с теорией плоских алгебраических кривых, знает, что они классифицируются по родам[2]); при этом *родом* кривой называется разность между максимальным числом двойных точек, которые могут иметь кривые того же порядка, что и данная, и числом двойных точек, которыми обладает данная кривая.

Кривые, род которых равен нулю, называются *уникурсальными кривыми*. Если $f(x, y) = 0$ — уравнение уникурсальной кривой, то известно[3]), что координаты $x$ и $y$ точек рассматриваемой кривой могут быть выражены как *рациональные функции некоторого параметра*. Поскольку рациональные функции однозначны, этот параметр является *униформизующей переменной* для уникурсальной кривой.

Здесь мы рассмотрим кривые рода единица; пусть $f(x, y) = 0$ — такая кривая; Клебш[4]) показал, что в этом случае $x$ и $y$ могут быть выражены

---

[1]) Униформизация происходит от слова «uniform», одно из значений которого — «однозначный».

[2]) По-французски «genre», по-немецки «Geschlecht», по-английски «genus».

[3]) См. Salmon, Higher Plane Curves, Dublin, 1873, Ch. II. (См. также А. А. Савелов, Плоские кривые, Физматгиз, 1960, стр. 22—23. — *Прим. ред.*).

[4]) Clebsch, Journ. für Math., LXIV (1865), 210—270. Доказательство результата Клебша дано Форсайтом (Forsyth, Theory of Functions, 1918, § 248). См. также Cayley, Proc. London Math. Soc., IV (1873), 347—352 (Math. Papers, VIII, 181—187).

как рациональные функции от $\xi$ и $\eta$, где $\eta^2$ — полином относительно $\xi$ третьей или четвертой степени. Отсюда, согласно § 20.6, следует, что $\xi$ и $\eta$ могут быть выражены как рациональные функции от $\wp(z)$ и $\wp'(z)$ (причем эти функции составляются по соответствующим инвариантам), и таким образом, $x$ и $y$ могут быть выражены как однозначные (эллиптические) функции от $z$; переменная $z$ является поэтому униформизующей переменной для рассматриваемого уравнения.

Когда род алгебраической кривой $f(x, y) = 0$ больше единицы, униформизацию можно осуществить при помощи так называемых *автоморфных функций*. Были построены два класса таких функций рода, большего единицы, первый — Вебером (Weber, Göttinger Nachr. (1886), 359—370), другой — Уиттекером (Whittaker, Phil. Trans., CXCII (1898), 1—32). Аналог параллелограмма периодов называется «фундаментальным многоугольником».

В случае функции Вебера этот многоугольник многосвязный, т. е. он содержит дыры, которые следует рассматривать как не принадлежащие к нему, между тем как в случае второго класса функций многоугольник будет односвязным, т. е. без дыр. Последний класс функций можно рассматривать поэтому как более непосредственное обобщение эллиптических функций. См. Форд, Введение в теорию автоморфных функций, М. — Л., 1936.

## ЛИТЕРАТУРА

K. Weierstrass, Werke, I (1894), 1—49; II (1895), 245—255, 257—309.
C. Briot et J. C. Bouquet, Théorie des fonctions elliptiques (Paris, 1875)
H. A. Shwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Funktionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn Prof. K. Weierstrass (Berlin, 1893).
A. L. Daniels, Notes on Weierstrass' methods, American Journal of Math., VI (1884), 177—182, 253—269; VII (1885), 82—99.
J. Liouville (Лекции, опубликованные Борхардтом (Borchardt, C. W.)), Journ. für Math., LXXXVIII (1880), 277—310.
A. Enneper, Elliptische Funktionen (zweite Auflage von F. Müller, Halle, 1890).
J. Tannery et J. Molk, Fonctions elliptiques (Paris, 1893—1902).
Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, 1948.
А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, ГТТИ, 1933.

## Примеры

1. Показать, что

$$\wp(z+y) - \wp(z-y) = -\wp'(z)\wp'(y)\{\wp(z) - \wp(y)\}^{-2}.$$

2. Доказать, что

$$\wp(z) - \wp(z+y+w) = 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\sum \wp^2(z)\{\wp(y) - \wp(w)\}}{\sum \wp'(z)\{\wp(y) - \wp(w)\}},$$

где дифференцируемое выражение в правой части симметрично относительно $z$, $y$ и $w$.

(Math. Trip., 1897)

3. Показать, что

$$\begin{vmatrix} \wp'''(z-y) & \wp'''(y-w) & \wp'''(w-z) \\ \wp''(z-y) & \wp''(y-w) & \wp''(w-z) \\ \wp(z-y) & \wp(y-w) & \wp(w-z) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}g_2 \begin{vmatrix} \wp'''(z-y) & \wp'''(y-w) & \wp'''(w-z) \\ \wp(z-y) & \wp(y-w) & \wp(w-z) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

(Trinity, 1898)

4. Пусть

$$y = \wp(z) - e_1, \qquad y' = \frac{dy}{dz};$$

показать, что $y$ есть одно из значений выражения

$$\left\{ y' \left( y - \frac{1}{4} \frac{d^2}{dz^2} \lg y' \right)^{\frac{1}{2}} + (e_1 - e_2)(e_1 - e_3) \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1897)

5. Доказать, что

$$\sum \{\wp(z) - e\} \{\wp(y) - \wp(w)\}^2 \{\wp(y+w) - e\}^{\frac{1}{2}} \{\wp(y-w) - e\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

где знак суммирования относится к трем аргументам $z$, $y$, $w$, а $e$ — любой из корней $e_1$, $e_2$, $e_3$.

(Math. Trip., 1896)

6. Показать, что

$$\frac{\wp'(z+\omega_1)}{\wp'(z)} = -\left\{ \frac{\wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) - \wp(\omega_1)}{\wp(z) - \wp(\omega_1)} \right\}^2.$$

(Math. Trip., 1894)

7. Доказать, что.

$$\wp(2z) - \wp(\omega_1) = \{\wp'(z)\}^{-2} \left\{ \wp(z) - \wp\left(\frac{1}{2}\omega_1\right) \right\}^2 \left\{ \wp(z) - \wp\left(\omega_2 + \frac{1}{2}\omega_1\right) \right\}^2.$$

(Math. Trip., 1894)

8. Показать, что

$$\wp(u+v)\wp(u-v) = \frac{\left\{ \wp(u)\wp(v) + \frac{1}{4} g_2 \right\}^2 + g_3 \{\wp(u) + \wp(v)\}}{\{\wp(u) - \wp(v)\}^2}.$$

(Trinity, 1908)

9. Пусть $\wp(u)$ имеет основные периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ и $f(u) = \{\wp(u) - \wp(\omega_2)\}^{\frac{1}{2}}$, а функции $\wp_1(u)$ и $f_1(u)$ подобным же образом построены по периодам $\frac{2\omega_1}{n}$ и $2\omega_2$; доказать, что

$$\wp_1(u) = \wp(u) + \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ \wp\left(u + 2m\frac{\omega_1}{n}\right) - \wp\left(2m\frac{\omega_1}{n}\right) \right\}$$

$$f_1(u) = \frac{\prod_{m=0}^{n-1} f\left(u + 2m\frac{\omega_1}{n}\right)}{\prod_{m=1}^{n-1} f\left(2m\frac{\omega_1}{n}\right)}.$$

(Math. Trip., 1914; первая из этих формул принадлежит Киперту (Kiepert, Journ, für Math., LXXVI (1873), 39)).

**10.** Пусть $x = \wp(u+\alpha)$, $y = \wp(u-\alpha)$, где $\alpha$ — постоянная; показать, что кривая, на которой лежит $(x, y)$, будет

$$\left(xy + cx + cy + \frac{1}{4}g_2\right)^2 = 4(x+y+c)\left(cxy - \frac{1}{4}g_3\right),$$

где $c = \wp(2\alpha)$.

(Burnside, Messenger, XXI)

**11.** Показать, что

$$2\wp'''^3(u) - 3g_2\wp''^2(u) + g_2^3 = 27\left\{\wp'^2(u) + g_3\right\}^2.$$

(Trinity, 1909)

**12.** Пусть

$$z = \int_{-\infty}^{x} (x^4 + 6cx^2 + e^2)^{-\frac{1}{2}}\, dx;$$

проверить, что

$$x = \frac{\frac{1}{2}\wp'(z)}{\wp(z) + c},$$

где эллиптическая функция составлена по корням $-c$, $\frac{1}{2}(c+e)$, $\frac{1}{2}(c-e)$.

(Trinity, 1905)

**13.** Пусть $m$ — произвольная постоянная; доказать, что

$$\frac{1}{\wp'(y)}\int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\wp'^2(z)\,dz}{\wp(z)-\wp(y)} + \wp'(z)\int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\,dy}{\wp(z)-\wp(y)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_r \int\int \frac{e^{m\{\wp(z)-\wp(y)\}}\wp'^2(z)\,dz\,dy}{\{\wp(z)-e_r\}\{\wp(y)-e_r\}},$$

где суммирование по $r$ производится от 1 до 3, а интегралы неопределенные.

(Math. Trip., 1897)

**14.** Пусть

$$R(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E,$$

и пусть $\xi = \varphi(x)$ — функция, определяемая уравнением

$$x = \int^{\xi} \{R(\xi)\}^{-\frac{1}{2}}\, d\xi,$$

где нижний предел интеграла произволен. Показать, что

$$\frac{2\varphi'(a)}{\varphi(x+y)-\varphi(a)} = \frac{\varphi'(a+y)+\varphi'(a)}{\varphi(a+y)-\varphi(a)} + \frac{\varphi'(a-y)+\varphi'(a)}{\varphi(a-y)-\varphi(a)} -$$

$$-\frac{\varphi'(a+y)-\varphi'(x)}{\varphi(a+y)-\varphi(x)} - \frac{\varphi'(a-y)-\varphi'(x)}{\varphi(a-y)-\varphi(x)}.$$

(Hermite, Proc. Math. Congress (Chicago, 1896), 105. Эта формула является формулой сложения, которой удовлетворяет всякая эллиптическая функция порядка 2.)

**15.** Показать, что замена переменных

$$\xi' = \frac{\xi}{\eta}, \quad \eta' = \frac{\xi^3}{\eta^2}$$

преобразует уравнения

$$\eta^2 + \eta(1 + p\xi) + \xi^3 = 0, \quad du - \frac{d\xi}{2\eta + 1 + p\xi} = 0$$

в подобные же уравнения

$$\eta'^2 + \eta'(1 + p\xi') + \xi'^3 = 0, \quad du - \frac{d\xi'}{2\eta' + 1 + p\xi'} = 0.$$

Показать, что, выполняя эту замену переменных последовательно три раза, возвратимся к начальным переменным $\xi$, $\eta$; отсюда, далее, получить, что если $\xi$ и $\eta$ рассматривать как функции от $u$: $\xi = E(u)$, $\eta = F(u)$, то

$$E(u + A) = \frac{E(u)}{F(u)}, \quad F(u + A) = \frac{E^3(u)}{F^2(u)},$$

где $A$ — треть периода функций $E(u)$ и $F(u)$.

Показать, что

$$E(u) = \frac{p^2}{12} - \wp(u;\ g_2,\ g_3),$$

где

$$g_2 = 2p + \frac{1}{12}p^4, \quad g_3 = -1 - \frac{1}{6}p^3 - \frac{1}{216}p^6.$$

(De Brun, Öfversigt af K. Vet. Akad., Stockholm, LIV)

**16.** Показать, что

$$\wp'(z) = \frac{2\sigma(z + \omega_1)\sigma(z + \omega_2)\sigma(z - \omega_1 - \omega_2)}{\sigma^3(z)\sigma(\omega_1)\sigma(\omega_2)\sigma(\omega_1 + \omega_2)},$$

$$\wp''(z) = \frac{6\sigma(z + a)\sigma(z - a)\sigma(z + c)\sigma(z - c)}{\sigma^4(z)\sigma^2(a)\sigma^2(c)},$$

где

$$\wp(a) = \left(\frac{1}{12}g_2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \wp(c) = -\left(\frac{1}{12}g_2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(Math. Trip., 1913)

**17.** Доказать, что

$$\wp(z - a)\wp(z - b) = \wp(a - b)\{\wp(z - a) + \wp(z - b) - \wp(a) - \wp(b)\} + \\ + \wp'(a - b)\{\zeta(z - a) - \zeta(z - b) + \zeta(a) - \zeta(b)\} + \wp(a)\wp(b)$$

(Math. Trip., 1895)

**18.** Показать, что

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\wp'(u) + \wp'(w)}{\wp(u) - \wp(w)} - \frac{\wp'(v) + \wp'(w)}{\wp(v) - \wp(w)}\right\} = \\ = -\zeta(w - u) + \zeta(w - v) + \zeta(v) - \zeta(u).$$

(Math. Trip., 1910)

**19.** Показать, что

$$\zeta(u_1)+\zeta(u_2)+\zeta(u_3)-\zeta(u_1+u_2+u_3)=$$
$$=\frac{2\{\wp(u_1)-\wp(u_2)\}\{\wp(u_2)-\wp(u_3)\}\{\wp(u_3)-\wp(u_1)\}}{\wp'(u_1)\{\wp(u_2)-\wp(u_3)\}+\wp'(u_2)\{\wp(u_3)-\wp(u_1)\}+\wp'(u_3)\{\wp(u_1)-\wp(u_2)\}}.$$

(Math. Trip., 1912)

**20.** Показать, что

$$\frac{\sigma(x+y+z)\,\sigma(x-y)\,\sigma(y-z)\,\sigma(z-x)}{\sigma^3(x)\,\sigma^3(y)\,\sigma^3(z)}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp'(z)\end{vmatrix}.$$

Пользуясь этой формулой, получить теорему сложения для функции $\wp(z)$.

**21.** Показать по индукции или другим путем, что

$$\begin{vmatrix}1 & \wp(z_0) & \wp'(z_0) & \dots & \wp^{(n-1)}(z_0)\\ 1 & \wp(z_1) & \wp'(z_1) & \dots & \wp^{(n-1)}(z_1)\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 1 & \wp(z_n) & \wp'(z_n) & \dots & \wp^{(n-1)}(z_n)\end{vmatrix}=$$
$$=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}\,1!\,2!\dots n!\,\frac{\sigma(z_0+z_1+\dots+z_n)\prod\sigma(z_\lambda-z_\mu)}{\sigma^{n+1}(z_0)\dots\sigma^{n+1}(z_n)},$$

где произведение берется по всем парам целых значений $\lambda$ и $\mu$ от 0 до $n$, таким, что $\lambda<\mu$.

(Frobenius и Stickelberger [1]) Journ. für Math., LXXXIII (1877), 179)

**22.** Выразить

$$\begin{vmatrix}1 & \wp(x) & \wp^2(x) & \wp'(x)\\ 1 & \wp(y) & \wp^2(y) & \wp'(y)\\ 1 & \wp(z) & \wp^2(z) & \wp'(z)\\ 1 & \wp(u) & \wp^2(u) & \wp'(u)\end{vmatrix}$$

в виде дроби, числитель и знаменатель которой являются произведениями сигма-функций.

Отсюда получить, что если $\alpha=\wp(x)$, $\beta=\wp(y)$, $\gamma=\wp(z)$, $\delta=\wp(u)$, где $x+y+z+u=0$, то

$$(e_2-e_3)\{(\alpha-e_1)(\beta-e_1)(\gamma-e_1)(\delta-e_1)\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(e_3-e_1)\{(\alpha-e_2)(\beta-e_2)(\gamma-e_2)(\delta-e_2)\}^{\frac{1}{2}}+$$
$$+(e_1-e_2)\{(\alpha-e_3)(\beta-e_3)(\gamma-e_3)(\delta-e_3)\}^{\frac{1}{2}}=(e_2-e_3)(e_3-e_1)(e_1-e_2).$$

(Math. Trip., 1911)

---

[1]) См. также Kiepert, Journ. für Math., LXXVI (1873), 21—33; Hermite, Journ. für Math., LXXXII (1877), 346.

**23.** Показать, что

$$2\zeta(2u) - 4\zeta(u) = \frac{\wp''(u)}{\wp'(u)},$$

$$3\zeta(3u) - 9\zeta(u) = \frac{\wp'^3(u)}{\wp^4(u) - \frac{1}{2}g_2\wp^2(u) - g_3\wp(u) - \frac{1}{48}g_2^2}.$$

(Math. Trip., 1905)

**24.** Показать, что

$$\frac{\sigma(2u)}{\sigma^4(u)} = -\wp'(u), \quad \frac{\sigma(3u)}{\sigma^9(u)} = 3\wp(u)\wp'^2(u) - \frac{1}{4}\wp''^2(u),$$

и доказать, что $\frac{\sigma(nu)}{\{\sigma(u)\}^{n^2}}$ есть двоякопериодическая функция от $u$.

(Math. Trip., 1912)

**25.** Доказать, что

$$\zeta(z-a) - \zeta(z-b) - \zeta(a-b) + \zeta(2a-2b) = \frac{\sigma(z-2a+b)\,\sigma(z-2b+a)}{\sigma(2b-2a)\,\sigma(z-a)\,\sigma(z-b)}.$$

(Math. Trip., 1895)

**26.** Показать, что если $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$, то

$$\left\{\sum \zeta(z_r)\right\}^3 = 3\left\{\sum \zeta(z_r)\right\}\left\{\sum \wp(z_r)\right\} + \sum \wp'(z_r),$$

где суммирование производится по $r = 1, 2, 3, 4$.

(Math. Trip., 1897)

**27.** Показать, что всякая эллиптическая функция порядка $n$ может быть представлена как отношение двух выражений вида

$$a_1\wp(z+b) + a_2\wp'(z+b) + \ldots + a_n\wp^{(n-1)}(z+b),$$

где $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — постоянные.

(Painlevé, Bulletin de la Soc. Math., XXVII)

**28.** Взяв $e_1 > e_2 > e_3$, $\wp(\omega) = e_1$, $\wp(\omega') = e_3$, рассмотреть значения, принимаемые выражением $\zeta(u) - \frac{u\zeta(\omega')}{\omega'}$, когда $u$ движется вдоль периметра прямоугольника с вершинами $-\omega, \omega, \omega+\omega', -\omega+\omega'$.

(Math. Trip., 1914)

**29.** Получить интеграл уравнения $\frac{1}{\omega}\frac{d^2\omega}{dz^2} = 6\wp(z) + 3b$ в виде

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{\sigma(z+c)}{\sigma(z)\,\sigma(c)}\exp\left\{\frac{z\wp'(c)}{b-2\wp(c)} - z\zeta(c)\right\}\right],$$

где $c$ определяется уравнением

$$(b^2 - 3g_2)\wp(c) = 3(b^3 + g_3);$$

получить также другой интеграл в виде

$$\frac{\sigma(z+a_1)\,\sigma(z+a_2)}{\sigma^2(z)}\exp\{-z\zeta(a_1) - z\zeta(a_2)\},$$

где

$$\wp(a_1)+\wp(a_2)=b, \quad \wp'(a_1)+\wp'(a_2)=0$$

и ни $a_1+a_2$, ни $a_1-a_2$ не сравнимы с нулем.

(Math. Trip., 1912)

**30.** Доказать, что

$$g(z)=\frac{\sigma(z+z_1)\,\sigma(z+z_2)\,\sigma(z+z_3)\,\sigma(z+z_4)}{\sigma\left\{2z+\frac{1}{2}(z_1+z_2+z_3+z_4)\right\}}$$

является двоякопериодической функцией от $z$ и

$$g(z)+g(z+\omega_1)+g(z+\omega_2)+g(z+\omega_1+\omega_2)=$$
$$=-2\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_2+z_3-z_1-z_4)\right\}\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_3+z_1-z_2-z_4)\right\}\times$$
$$\times\sigma\left\{\frac{1}{2}(z_1+z_2-z_3-z_4)\right\}.$$

(Math. Trip., 1893)

**31.** Пусть $f(z)$ — двоякопериодическая функция третьего порядка с полюсами в $z=c_1$, $z=c_2$, $z=c_3$, и пусть $\varphi(z)$ — двоякопериодическая функция второго порядка с теми же периодами и полюсами в точках $z=\alpha$, $z=\beta$, причем ее значение вблизи $z=\alpha$ равно

$$\varphi(z)=\frac{\lambda}{z-\alpha}+\lambda_1(z-\alpha)+\lambda_2(z-\alpha)^2+\ldots;$$

доказать, что

$$\frac{1}{2}\lambda^2\{f''(\alpha)-f''(\beta)\}-\lambda\{f'(\alpha)+f'(\beta)\}\sum_1^3\varphi(c_1)+$$
$$+\{f(a)-f(\beta)\}\left\{3\lambda\lambda_1+\sum_1^3\varphi(c_2)\,\varphi(c_3)\right\}=0.$$

(Math. Trip., 1894)

**32.** Пусть $\lambda(z)$ — эллиптическая функция с двумя полюсами $a_1$, $a_2$, и пусть $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ суть $2n$ постоянных, подчиненных только условию

$$z_1+z_2+\ldots+z_{2n}=n(a_1+a_2);$$

показать, что определитель, $i$-я строка которого есть

$$1,\ \lambda(z_i),\ \lambda^2(z_i),\ \ldots,\ \lambda^n(z_i),\ \lambda_1(z_i),\ \lambda(z_i)\lambda_1(z_i),\ \lambda^2(z_i)\lambda_1(z_i),\ \ldots,\ \lambda^{n-2}(z_i)\lambda_1(z_i)$$

[где $\lambda_1(z_i)$ обозначает результат замены $z$ на $z_i$ в производной от $\lambda(z)$], тождественно равен нулю.

(Math. Trip., 1893)

**33.** Вывести из примера 21 переходом к пределу или другим путем, что

$$\begin{vmatrix} \wp'(z) & \wp''(z) & \dots & \wp^{(n-1)}(z) \\ \wp''(z) & \wp'''(z) & \dots & \wp^{(n)}(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \wp^{(n-1)}(z) & \wp^{(n)}(z) & \dots & \wp^{(2n-3)}(z) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\{1!\,2!\dots(n-1)!\}^2\,\sigma(nu)/\{\sigma(u)\}^{n^2}.$$

(Kiepert, Journ. für Math., LXXVI)

**34.** Показать, что при определенных условиях в виде неравенств имеем

$$\frac{\sigma(z+y)}{\sigma(z)\,\sigma(y)}\,e^{-\frac{\eta_1 zy}{\omega_1}} = \frac{\pi}{2\omega_1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi z}{2\omega_1} + \operatorname{ctg}\frac{\pi y}{2\omega_1}\right) + \frac{2\pi}{\omega_1}\sum q^{2mn}\sin\frac{\pi}{\omega_1}(mz+ny),$$

где суммирование распространяется на все положительные целые значения $m$ и $n$, а $q = \exp\left(\frac{\pi i\omega_2}{\omega_1}\right)$.

(Math. Trip., 1895)

**35.** Предполагая известной формулу

$$\sigma(z) = e^{\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}}\,\frac{2\omega_1}{\pi}\sin\frac{\pi z}{2\omega_1}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi z}{\omega_1}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2},$$

доказать, что

$$\wp(z) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2\operatorname{cosec}^2\frac{\pi z}{2\omega_1} - 2\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nq^{2n}}{1-q^{2n}}\cos\frac{n\pi z}{\omega_1},$$

когда $z$ удовлетворяет неравенствам

$$-2\operatorname{Re}\left(\frac{\omega_2}{i\omega_1}\right) < \operatorname{Re}\left(\frac{z}{i\omega_1}\right) < 2\operatorname{Re}\left(\frac{\omega_2}{i\omega_1}\right).$$

(Math. Trip., 1896)

**36.** Показать, что если $2\tilde{\omega}$ — какая-нибудь из точек вида $2m\omega_1 + 2n\omega_2$ и если

$$x = \wp\left(\frac{2}{5}\tilde{\omega}\right) + \wp\left(\frac{4}{5}\tilde{\omega}\right),$$

то $x$ будет корнем уравнения шестой степени

$$x^6 - 5g_2x^4 - 40g_3x^3 - 5g_2^2x^2 - 8g_2g_3x - 5g_3^2 = 0,$$

и получить все корни этого уравнения.

(Trinity, 1898)

**37.** Показать, что

$$\int\{(x^2-a)(x^2-b)\}^{-\frac{1}{4}}\,dx = -\frac{1}{2}\lg\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \frac{i}{2}\lg\frac{\sigma(z-iz_0)}{\sigma(z+iz_0)},$$

где

$$x^2 = a + \frac{1}{6}\,\frac{1}{\wp^2(z)-\wp^2(z_0)},\quad g_2 = \frac{2b}{3a(a-b)},\quad g_3 = 0,\quad \wp^2(z_0) = \frac{1}{6(a-b)}.$$

(Долбня, Darboux, Bulletin (2), XIX)

38. Доказать, что всякая аналитическая функция, которая удовлетворяет трехчленному уравнению

$$\sum_{a,b,c} f(z+a)f(z-a)f(b+c)f(b-c)=0$$

для общих значений $a$, $b$, $c$ и $z$, выражается через элементарные функции и сигма-функцию (которая в вырожденных случаях заменяется тригонометрической или алгебраической функцией).

(Hermite, Fonctions elliptiques, I, 187)

[Положив $z=a=b=c=0$, найдем $f(0)=0$; положив $b=c$, найдем $f(a-b)+f(b-a)=0$, так что $f(z)$ — нечетная функция.

Если $F(z)$ — логарифмическая производная от $f(z)$, то, дифференцируя данное соотношение по $b$ и полагая затем $b=c$, получим

$$\frac{f(z+a)f(z-a)f(2b)f'(0)}{f(z+b)f(z-b)f(a+b)f(a-b)}=$$
$$=F(z+b)-F(z-b)+F(a-b)-F(a+b).$$

Продифференцировав это равенство по $b$ и положив $b=0$, получим, далее,

$$\frac{f(z+a)f(z-a)\{f'(0)\}^2}{\{f(z)f(a)\}^2}=F'(z)-F'(a).$$

Если бы $f'(0)$ было нулем, то $F'(z)$ была бы постоянной и, интегрируя, мы получили бы, что функция $f(z)$ имеет вид $A\exp(Bz+Cz^2)$, а это выражение будет нечетной функцией только в тривиальном случае, когда оно равно нулю.

Если $f'(0)\neq 0$ и мы положим $F'(z)=-\Phi(z)$, то найдем, что коэффициент при $a^4$ в разложении выражения

$$\frac{12f(z+a)f(z-a)}{\{f(z)\}^2}$$

равен $6\{\Phi(z)\}^2-\Phi''(z)$, а коэффициент при $a^4$ в выражении

$$12\{f(a)\}^2\{\Phi(a)-\Phi(z)\}$$

будет линейной функцией от $\Phi(z)$. Отсюда $\Phi''(z)$ будет функцией второй степени от $\Phi(z)$; если же мы умножим эту функцию на $\Phi'(z)$ и проинтегрируем, то найдем, что

$$\{\Phi'(z)\}^2=4\{\Phi(z)\}^3+12A\{\Phi(z)\}^2+12B\Phi(z)+4C,$$

где $A$, $B$, $C$ — постоянные. Если кубический полином справа не имеет равных линейных множителей, то (§ 20.6) $\Phi(z)=\wp(z+\alpha)+A$, где $\alpha$ — постоянная; интегрируя, отсюда получаем

$$f(z)=\sigma(z+\alpha)\exp\left(-\frac{1}{2}Az^2-Kz-L\right),$$

где $K$ и $L$ — постоянные; так как $f(z)$ — нечетная функция, то $\alpha=K=0$ и

$$f(z)=\sigma(z)\exp\left\{-\frac{1}{2}Az^2-L\right\}.$$

Если тот же полином имеет кратный линейный множитель, то сигма-функция заменяется (§ 20.222) синусом аргумента, кратного $z$, а если он полный куб, то сигма-функция заменяется кратным $z$.]

ГЛАВА 21

# ТЭТА-ФУНКЦИИ

## 21.1. Определение тэта-функции

Когда в задачах, связанных с эллиптическими функциями, желательно получить определенный численный результат, то вычисления легче всего выполняются при помощи вспомогательных функций, известных под названием *тэта-функций*.

Эти функции представляют значительный самостоятельный интерес и вне связи их с эллиптическими функциями, и мы изложим теперь их основные свойства.

Тэта-функции впервые были изучены систематически Якоби [1]), который получил ряд их свойств чисто алгебраическими методами; его анализ был настолько исчерпывающим, что, по существу, все результаты, содержащиеся в этой главе (за исключением способа рассмотрения задачи обращения в § 21.7 и след.), имеются в его работах.

В соответствии с общим планом этой книги мы не будем пользоваться методами Якоби, а воспользуемся более сильными методами, основанными на применении теоремы Коши. Эти методы впервые были применены в теории эллиптических и родственных им функций Лиувиллем в его лекциях и после этого применялись в нескольких других трактатах по эллиптическим функциям; наиболее ранним из них был трактат Брио и Буке.

[Примечание. Первой функцией типа тэта-функций, появившейся в анализе, была *функция разбиения* (Partition function) [2])

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n z)^{-1}$$

---

[1]) Jacobi, Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum (Königsberg, 1829) и Ges. Werke, I, 497—538.

[2]) Эта и аналогичные функции были изучены Гауссом (Gauss, Comm. Soc. reg. sci. Göttingensis, rec. I (1811), 7—12, Werke, II, 16—21 и Werke, III, 433—480) и Коши (Cauchy, Comptes Rendus, X (1840), 178—181). Об исследовании свойств различных функций, связанных с так называемыми основ-

Эйлера (Введение в анализ бесконечных, I, § 304, М., 1961); при помощи результатов, данных в § 21.3, легко выразить тэта-функции через функции разбиения. Эйлер получил также некоторые свойства произведений типа

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^n), \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^{2n}), \quad \prod_{n=1}^{\infty}(1 \pm x^{2n-1}).$$

Соответствующие ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{1}{2}n(n+3)}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{\frac{1}{2}n(n+1)} \quad \text{и} \quad \sum_{n=0}^{\infty} m^{n^2}$$

встречаются еще ранее в посмертной работе Якова Бернулли (Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713, 55).

Тэта-функции также встречаются у Фурье (Fourier, La Théorie Analytique de la Chaleur (Paris, 1822), 265).

Теория тэта-функций была развита из теории эллиптических функций Якоби в его «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum» (1829), помещенной также в его Ges. Werke, I, 49—239; обозначения, примененные там, приводятся в § 21.62. В последующих лекциях он ввел функции, рассмотренные в этой главе; изложение этих лекций (1838) дано Борхардтом (Borchardt) в собрании сочинений Якоби (Jacobi, Ges. Werke, I, 497-538). Наиболее важные результаты, содержащиеся в них, по-видимому, были открыты в 1835 г.; см. Kronecker, Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin (1891), 653—659.]

Пусть $\tau$ — (постоянное) комплексное число, мнимая часть которого *положительна*; положим $q = e^{\pi i \tau}$, так что $|q| < 1$.

Рассмотрим функцию $\vartheta(z, q)$, определяемую рядом

$$\vartheta(z, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz},$$

как функцию переменной $z$.

Если $A$ — любая положительная постоянная, то при $|z| \leqslant A$ имеем

$$\left|q^{n^2} e^{\pm 2niz}\right| \leqslant |q|^{n^2} e^{2nA}$$

при всяком целом положительном $n$.

Деламберово отношение (§ 2.36, часть I) двух последовательных членов ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |q|^{n^2} e^{2nA}$ равно $|q|^{2n+1} e^{2A}$ и стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому ряд для $\vartheta(z, q)$ есть ряд аналитических функций, равномерно сходящийся (§ 3.34, часть I) в любой ограниченной

---

ными числами (которые тесно связаны с функциями разбиения), см. Jackson, Proc. Royal Soc., LXXIV (1905), 64—72; Proc. London Math. Soc. (1), XXVIII (1897), 475—486, (2), I (1904), 63—88, II (1904), 192—220 и Watson, Camb. Phil. Trans., XXI (1912), 281—299. Основная формула в теории основных чисел была дана Гейне (Heine, Kugelfunktionen (Berlin, 1878), I, 107).

области значений $z$, и следовательно, он представляет целую функцию (§§ 5.3, 5.64, часть I).

Очевидно, что

$$\vartheta(z, q) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nz$$

и

$$\vartheta(z+\pi, q) = \vartheta(z, q);$$

далее,

$$\vartheta(z+\pi\tau, q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}q^{2n}e^{2niz} =$$

$$= -q^{-1}e^{-2iz}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^{n+1}q^{(n+1)^2}e^{2(n+1)iz},$$

и следовательно,

$$\vartheta(z+\pi\tau, q) = -q^{-1}e^{-2iz}\vartheta(z, q).$$

В соответствии с этими формулами $\vartheta(z, q)$ называется *квазидвоякопериодической функцией от* $z$. При прибавлении $\pi$ или $\pi\tau$ к $z$ функция $\vartheta(z, q)$ умножается на 1 или $-q^{-1}e^{-2iz}$; соответственно этому 1 и $-q^{-1}e^{-2iz}$ называются *мультипликаторами* или *множителями периодичности*, соответствующими периодам $\pi$ и $\pi\tau$.

## 21.11. Четыре типа тэта-функций

Обычно пишут $\vartheta_4(z, q)$ вместо $\vartheta(z, q)$; остальные три тэта-функции определяются следующим образом.

Функция $\vartheta_3(z, q)$ определяется равенством

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}q^{n^2}\cos 2nz;$$

затем $\vartheta_1(z, q)$ определяется через $\vartheta_4(z, q)$ равенством

$$\vartheta_1(z, q) = -ie^{iz+\frac{1}{4}\pi i\tau}\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau, q\right) =$$

$$= -i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)iz},$$

откуда [1])

$$\vartheta_1(z, q) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin(2n+1)z.$$

---

[1]) По всей этой главе многозначную функцию $q^\lambda$ следует понимать как $\exp(\lambda\pi i\tau)$.

Наконец, $\vartheta_2(z, q)$ определяется равенством

$$\vartheta_2(z, q) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi, q\right) = 2\sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n+1)z.$$

Если представим ряды в развернутом виде, то получим

$$\vartheta_1(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \sin z - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5z - \ldots,$$
$$\vartheta_2(z, q) = 2q^{\frac{1}{4}} \cos z + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3z + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5z + \ldots,$$
$$\vartheta_3(z, q) = 1 + 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z + 2q^9 \cos 6z + \ldots,$$
$$\vartheta_4(z, q) = 1 - 2q \cos 2z + 2q^4 \cos 4z - 2q^9 \cos 6z + \ldots$$

Очевидно, что $\vartheta_1(z, q)$ — *нечетная* функция от $z$, а остальные тэта-функции — *четные*.

Обозначения, введенные сейчас, являются видоизменением обозначений, примененных в трактате Таннери и Молька (Tannery, Molk); единственное различие между этими обозначениями и обозначением Якоби заключается в том, что $\vartheta_4(z, q)$ пишется там, где Якоби писал бы $\vartheta(z, q)$. К сожалению, различные авторы употребляют различные обозначения; схема, сопоставляющая их между собой, приводится в § 21.9.

Для краткости параметр $q$ обычно опускается, так что мы будем писать $\vartheta_1(z), \ldots$ вместо $\vartheta_1(z, q), \ldots$ Если желательно представить зависимость тэта-функции от параметра $\tau$, то будем писать $\vartheta(z|\tau)$. Далее, вместо $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$, $\vartheta_4(0)$ будем писать соответственно $\vartheta_2$, $\vartheta_3$, $\vartheta_4$ и под $\vartheta_1'$ будем понимать значение производной от $\vartheta_1(z)$ при $z = 0$.

Пример 1. Показать, что

$$\vartheta_3(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) + \vartheta_2(2z, q^4),$$
$$\vartheta_4(z, q) = \vartheta_3(2z, q^4) - \vartheta_2(2z, q^4).$$

Пример 2. Получить соотношения

$$\vartheta_1(z) = -\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = -iM\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = -iM\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_2(z) = M\vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = \vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$
$$\vartheta_3(z) = \vartheta_4\left(z + \frac{1}{2}\pi\right) = M\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = M\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right),$$
$$\vartheta_4(z) = -iM\vartheta_1\left(z + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = iM\vartheta_2\left(z + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi\tau\right) = \vartheta_3\left(z + \frac{1}{2}\pi\right),$$

где

$$M = q^{\frac{1}{4}} e^{iz}.$$

Пример 3. Показать, что множители тэта-функций, соответствующие периодам $\pi$ и $\pi\tau$, даются схемой

| | $\vartheta_1(z)$ | $\vartheta_2(z)$ | $\vartheta_3(z)$ | $\vartheta_4(z)$ |
|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | $-1$ | $-1$ | $1$ | $1$ |
| $\pi\tau$ | $-N$ | $N$ | $N$ | $-N$ |

где $N = q^{-1}e^{-2iz}$.

Пример 4. Пусть $\vartheta(z)$ — какая-нибудь одна из четырех тэта-функций и $\vartheta'(z)$ — ее производная по $z$; показать, что

$$\frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)} = \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}, \quad \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)} = -2i + \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}.$$

## 21.12. Нули тэта-функций

Из квазипериодических свойств тэта-функций очевидно, что если $\vartheta(z)$ — одна из них и $z_0$ — какой-нибудь нуль функции $\vartheta(z)$, то

$$z_0 + m\pi + n\pi\tau$$

будет также нулем функции $\vartheta(z)$ при любых целых значениях $m$ и $n$.

Покажем теперь, что *если $C$ — какая-нибудь ячейка с вершинами*

$$t,\ t+\pi,\ t+\pi+\pi\tau,\ t+\pi\tau,$$

*то $\vartheta(z)$ имеет один и только один нуль внутри $C$.*

Так как $\vartheta(z)$ — аналитическая функция во всей конечной части плоскости $z$, то из § 6.31 части I следует, что число ее нулей внутри $C$ равно

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz.$$

Поступая с контуром по образцу § 20.12, видим, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi}\left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi\tau)}{\vartheta(z+\pi\tau)}\right\}dz -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi\tau}\left\{\frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)} - \frac{\vartheta'(z+\pi)}{\vartheta(z+\pi)}\right\}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_t^{t+\pi} 2i\,dz$$

согласно примеру 4 § 21.11. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\vartheta'(z)}{\vartheta(z)}\,dz = 1;$$

таким образом, $\vartheta(z)$ имеет только один простой нуль внутри $C$, что и требовалось доказать.

Так как $z=0$ является, очевидно, нулем функции $\vartheta_1(z)$, то отсюда вытекает, что нулями функций $\vartheta_1(z)$, $\vartheta_2(z)$, $\vartheta_3(z)$, $\vartheta_4(z)$ будут точки, сравнимые с 0, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, $\frac{1}{2}\pi\tau$. Читатель заметит, что эти четыре точки представляют собой последовательные вершины параллелограмма, обходимого против часовой стрелки.

## 21.2. Соотношения между квадратами тета-функций

Очевидно, что если тэта-функции рассматривать как функции только переменной $z$, то эта переменная может быть исключена из уравнений, определяющих любую пару тэта-функций; в результате получится соотношение[1]) между тэта-функциями, которое, как можно ожидать по общим соображениям, будет не алгебраическим; имеются, однако, чрезвычайно простые соотношения между любыми *тремя* тэта-функциями, которые мы теперь и получим.

Каждая из четырех функций $\vartheta_1^2(z)$, $\vartheta_2^2(z)$, $\vartheta_3^2(z)$, $\vartheta_4^2(z)$ — аналитическая для всех значений $z$ и имеет множители периодичности 1, $q^{-2}e^{-4iz}$, соответствующие периодам $\pi$, $\pi\tau$; каждая из них имеет двойной нуль (и никаких других нулей) в любой ячейке.

Отсюда заключаем, что если $a$, $b$, $a'$ и $b'$ — надлежащим образом выбранные постоянные, то каждая из функций

$$\frac{a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}, \qquad \frac{a'\vartheta_1^2(z)+b'\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_3^2(z)}$$

будет *двоякопериодической функцией* (с периодами $\pi$, $\pi\tau$), имеющей самое большее только один простой полюс в каждой ячейке. По § 20.13 такая функция будет равна постоянной, и, очевидно, можно так выбрать $a$, $b$, $a'$, $b'$, чтобы постоянные в каждом из рассматриваемых случаев равнялись единице.

Поэтому существуют соотношения вида

$$\vartheta_2^2(z)=a\vartheta_1^2(z)+b\vartheta_4^2(z), \quad \vartheta_3^2(z)=a'\vartheta_1^2(z)+b'\vartheta_4^2(z).$$

---

[1]) Аналогичным соотношением для функций $\sin z$ и $\cos z$ является, конечно, $(\sin z)^2+(\cos z)^2=1$.

Чтобы определить $a$, $b$, $a'$, $b'$, дадим $z$ частные значения $\frac{1}{2}\pi\tau$ и 0; так как

$$\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_3,\quad \vartheta_4\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=0,\quad \vartheta_1\left(\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}\vartheta_4,$$

то имеем

$$\vartheta_3^2=-a\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2=b\vartheta_4^2,\quad \vartheta_2^2=-a'\vartheta_4^2,\quad \vartheta_3^2=b'\vartheta_4^2.$$

Таким образом, мы получили следующие соотношения:

$$\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_2^2-\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_3^2,\quad \vartheta_3^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(z)\,\vartheta_3^2-\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_2^2.$$

Если заменим $z$ на $z+\frac{1}{2}\pi$, то получим еще два соотношения:

$$\vartheta_1^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_2^2-\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_3^2,\quad \vartheta_4^2(z)\,\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(z)\,\vartheta_3^2-\vartheta_2^2(z)\,\vartheta_2^2.$$

С помощью этих результатов можно выразить любую тэта-функцию через любую пару других тэта-функций.

Следствие. Положив $z=0$ в последнем соотношении, имеем

$$\vartheta_2^4+\vartheta_4^4=\vartheta_3^4,$$

т. е.

$$16q\,(1+q^{1\cdot 2}+q^{2\cdot 3}+q^{3\cdot 4}+\ldots)^4+(1-2q+2q^4-2q^9+\ldots)^4=$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)^4.$$

## 21.21. Формулы сложения для тэта-функций

Результаты, полученные только что, являются частными случаями формул, содержащих две переменные; эти формулы не являются теоремами сложения в прямом смысле, так как они не выражают алгебраически тэта-функций от $z+y$ через тэта-функции от $z$ и $y$; но они содержат тэта-функции от $z-y$ наряду с тэта-функциями от $z+y$, $z$ и $y$.

Для того чтобы получить одну из этих формул, рассмотрим $\theta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)$ как функцию от $z$. Множители периодичности этой функции, соответствующие периодам $\pi$ и $\pi\tau$, будут 1 и $q^{-1}e^{-2i(z+y)}\cdot q^{-1}e^{-2i(z-y)}=q^{-2}e^{-4iz}$. Но функция $a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)$ имеет те же множители периодичности, и мы можем, очевидно, выбрать отношение $a:b$ так, чтобы *двоякопериодическая функция*

$$\frac{a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)}{\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)}$$

*не имела полюсов в нулях функции* $\vartheta_3(z-y)$; тогда указанная функция будет иметь самое большее один простой полюс в любой ячейке, а именно нуль функции $\vartheta_3(z+y)$ в этой ячейке, и, следовательно (§ 20.13), будет постоянной, т. е. не зависящей от $z$; поскольку до сих пор было фиксировано только отношение $a:b$, мы можем далее выбрать $a$ и $b$ так, чтобы эта постоянная была равна единице.

Теперь нам надо определить $a$ и $b$ из тождества относительно $z$:

$$a\vartheta_3^2(z)+b\vartheta_1^2(z)\equiv\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y).$$

Чтобы сделать это, положим $z$ последовательно равным 0 и $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$; тогда получим

$$a\vartheta_3^2=\vartheta_3^2(y),\quad b\vartheta_1^2\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=$$
$$=\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau+y\right)\vartheta_3\left(\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau-y\right);$$

и следовательно,

$$a=\frac{\vartheta_3^2(y)}{\vartheta_3^2},\quad b=\frac{\vartheta_1^2(y)}{\vartheta_3^2}.$$

Итак, мы получили формулу сложения, а именно:

$$\vartheta_3(z+y)\,\vartheta_3(z-y)\,\vartheta_3^2=\vartheta_3^2(y)\,\vartheta_3^2(z)+\vartheta_1^2(y)\,\vartheta_1^2(z).$$

Совокупность формул, к типу которых относится последняя формула, будет приведена в примерах 1 и 2 в конце этой главы.

## 21.22. Основные формулы Якоби [1])

Полученные выше формулы сложения являются частными случаями ряда тождеств, впервые данных Якоби, который получил их чисто алгебраическими методами; каждое тождество содержит целых четыре независимых переменных: $w$, $x$, $y$, $z$.

Пусть $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ выражаются через $w$, $x$, $y$, $z$ формулами

$$\begin{aligned}2w'&=-w+x+y+z,\\2x'&=\phantom{-}w-x+y+z,\\2y'&=\phantom{-}w+x-y+z,\\2z'&=\phantom{-}w+x+y-z.\end{aligned}$$

Легко убедиться, что $w$, $x$, $y$, $z$ выражаются через $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ теми же формулами [2]).

---

[1]) Jacobi, Ges. Werke, I, 505.

[2]) В работе Якоби знаки при $w'$, $x'$, $y'$, $z'$ всюду обратные, что нарушает полную симметрию соотношений; симметричные формулы, данные здесь, принадлежат Смиту (H. J. S. Smith, Proc. London Math. Soc., I (май 21, 1866), 1—12).

Для краткости[1]) будем писать $[r]$ вместо $\vartheta_r(w)\vartheta_r(x)\vartheta_r(y)\vartheta_r(z)$ и $[r]'$ вместо $\vartheta_r(w')\vartheta_r(x')\vartheta_r(y')\vartheta_r(z')$.

Рассмотрим $[3]$, $[1]'$, $[2]'$, $[3]'$, $[4]'$ как функции от $z$. При прибавлении $\pi$ или $\pi\tau$ к $z$ функции первой строки следующей таблицы переходят соответственно в функции второй и третьей строки.

| | $[3]$ | $[1]'$ | $[2]'$ | $[3]'$ | $[4]'$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\pi$ | $[3]$ | $-[2]'$ | $-[1]'$ | $[4]'$ | $[3]'$ |
| $\pi\tau$ | $N[3]$ | $-N[4]'$ | $N[3]'$ | $N[2]'$ | $-N[1]'$ |

Для краткости через $N$ обозначено $q^{-1}e^{-2iz}$.

Отсюда как $-[1]'+[2]'+[3]'+[4]'$, так и $[3]$ имеют множителями периодичности 1 и $N$, и следовательно, их отношение будет двоякопериодической функцией самое большее с одним простым полюсом в любой ячейке, каковым может быть лишь нуль функции $\vartheta_3(z)$ в этой ячейке.

Это отношение (§ 20.13) будет просто постоянным, т. е. не зависящим от $z$; соображения симметрии показывают, что оно будет также не зависящим от $w$, $x$ и $y$.

Таким образом, получаем

$$A[3] = -[1]'+[2]'+[3]'+[4]',$$

где $A$ не зависит от $w, x, y, z$; для определения $A$ положим $w=x=y=z=0$, получим

$$A\vartheta_3^4 = \vartheta_2^4+\vartheta_3^4+\vartheta_4^4,$$

отсюда, согласно следствию § 21.2, видим, что $A=2$.

Итак,

$$2[3] = -[1]'+[2]'+[3]'+[4]'. \tag{I}$$

Это и есть одна из формул Якоби; чтобы получить другую, прибавим к $w, x, y, z$ (и тем самым к $w', x', y', z'$) по $\frac{1}{2}\pi$; тогда получим

$$2[4] = [1]'-[2]'+[3]'+[4]'. \tag{II}$$

Прибавляя ко всем переменным в (I) и (II) по $\frac{1}{2}\pi\tau$, получим дальнейшие формулы

$$2[2] = [1]'+[2]'+[3]'-[4]', \tag{III}$$

$$2[1] = [1]'+[2]'-[3]'+[4]'. \tag{IV}$$

[Примечание. Имеется 256 выражений вида $\vartheta_p(w)\vartheta_q(x)\vartheta_r(y)\vartheta_s(z)$, которые могут быть получены из $\vartheta_3(w)\vartheta_3(x)\vartheta_3(y)\vartheta_3(z)$ прибавлением

[1]) Идею этого сокращенного обозначения можно усмотреть в мемуаре Смита. Однако, по-видимому, оно никем не употреблялось до Кронекера (Kronecker, Journ. für Math., CII (1887), 260—272).

к $w$, $x$, $y$, $z$ надлежащих полупериодов; но только те из них, в которых значки $p$, $q$, $r$, $s$ или попарно равны, или все различны, приводят к формулам, не содержащим четвертей периодов в правой части.]

Пример 1. Показать, что

$$[1]+[2]=[1]'+[2]', \quad [2]+[3]=[2]'+[3]', \quad [1]+[4]=[1]'+[4]',$$
$$[3]+[4]=[3]'+[4]', \quad [1]+[3]=[2]'+[4]', \quad [2]+[4]=[1]'+[3]'.$$

Пример 2. Заменив $w$, $x$ на $w+\frac{1}{2}\pi$, $x+\frac{1}{2}\pi$ (а следовательно, $y'$, $z'$ на $y'+\frac{1}{2}\pi$, $z'+\frac{1}{2}\pi$), показать, что

$$[3344]+[2211]=[4433]'+[1122]',$$

где $[3344]$ обозначает $\vartheta_3(w)\,\vartheta_3(x)\,\vartheta_4(y)\,\vartheta_4(z)$ и т. д.

Пример 3. Показать, что

$$2\,[1234]=[3412]'+[2143]'-[1234]'+[4321]'.$$

Пример 4. Показать, что

$$\vartheta_1^4(z)+\vartheta_3^4(z)=\vartheta_2^4(z)+\vartheta_4^4(z).$$

## 21.3. Выражения Якоби для тэта-функций через бесконечные произведения[1])

Докажем теперь формулу

$$\vartheta_4(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2})$$

(где $G$ не зависит от $z$) и три формулы, ей аналогичные.

Пусть

$$f(z)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1}e^{-2iz});$$

вследствие абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}q^{2n-1}$ оба произведения сходятся абсолютно и равномерно в любой ограниченной области значений $z$ (§ 3.341, часть I); следовательно, $f(z)$ будет аналитической функцией во всей конечной части плоскости $z$; таким образом, она будет целой функцией.

Нулями функции $f(z)$ будут простые нули в тех точках, где

$$e^{2iz}=e^{(2n+1)\pi i\tau} \qquad (n=\ldots,-2,-1,0,1,2\ldots),$$

т. е. где

$$2iz=(2n+1)\pi i\tau+2m\pi i,$$

так что $f(z)$ и $\vartheta_4(z)$ имеют одни и те же нули; следовательно, отношение $\frac{\vartheta_4(z)}{f(z)}$ не имеет ни нулей, ни полюсов в конечной части плоскости.

---

[1]) Jacobi, Fundamenta Nova, 145.

Далее, очевидно, что $f(z+\pi)=f(z)$ и

$$f(z+\pi\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n+1}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-3}e^{-2iz})=$$
$$=\frac{f(z)(1-q^{-1}e^{-2iz})}{1-qe^{2iz}}=-q^{-1}e^{-2iz}f(z).$$

*Другими словами, $f(z)$ и $\vartheta_4(z)$ имеют одинаковые множители периодичности* (§ 21.11, пример 3). Поэтому $\frac{\vartheta_4(z)}{f(z)}$ будет двоякопериодической функцией без нулей и полюсов и, следовательно (§ 20.12), будет постоянной, которую обозначим через $G$, поэтому

$$\vartheta_4(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}).$$

[В § 21.42 мы покажем, что $G=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$.]

Заменяя в этом тождестве $z$ на $z+\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\vartheta_3(z)=G\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n-1}\cos 2z+q^{4n-2}).$$

Далее,

$$\vartheta_1(z)=-iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=$$
$$=-iq^{\frac{1}{4}}e^{iz}G\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-2}e^{-2iz})=$$
$$=2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{2iz})\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n}e^{-2iz}),$$

так что

$$\vartheta_1(z)=2Gq^{\frac{1}{4}}\sin z\prod_{n=1}^{\infty}(1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n});$$

наконец,

$$\vartheta_2(z)=\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\right)=2Gq^{\frac{1}{4}}\cos z\prod_{n=1}^{\infty}(1+2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}).$$

Пример. Показать, что [1])

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})\right\}^8+16q\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})\right\}^8=\left\{\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})\right\}^8.$$

(Jacobi)

## 21.4. Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют тэта-функции

Можно рассматривать $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ как функцию двух независимых переменных $z$ и $\tau$, и можно дифференцировать ряд для $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ любое число раз по $z$ и $\tau$ вследствие равномерной сходимости получаемых после этого рядов (следствие § 4.7, часть I); в частности,

$$\frac{\partial^2\vartheta_3(z\,|\,\tau)}{\partial z^2}=-4\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2\exp(n^2\pi i\tau+2niz)=-\frac{4}{\pi i}\frac{\partial\vartheta_3(z\,|\,\tau)}{\partial\tau}.$$

*Следовательно, функция $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с частными производными*

$$\frac{1}{4}\pi i\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+\frac{\partial y}{\partial\tau}=0.$$

Читатель легко докажет, что три другие тэта-функции также удовлетворяют этому уравнению.

## 21.41. Соотношение между тэта-функциями нулевого аргумента

Установим теперь замечательное соотношение

$$\vartheta_1'(0)=\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)\ ^{2)}.$$

Сначала надо получить некоторые формулы для производных всех тэта-функций.

Так как получаемые при дифференцировании ряды сходятся равномерно по исключении окрестностей нулей соответствующих тэта-функций, то можно дифференцировать формулы для логарифмов тэта-функций, которые следуют из § 21.3, сколько угодно раз.

---

[1]) Якоби называет это соотношение (Fundamenta Nova, 90) «aequatio identica satis abstrusa» — «достаточно хорошо скрытое тождество».

[2]) Было дано несколько доказательств этого важного предложения, но ни одно из них не является простым. Доказательство самого Якоби (Ges. Werke, I, 515—517), хотя несколько труднее данного здесь, однако весьма заслуживает изучения. По поводу иных способов доказательства этого предложения см. стр. 372—373, пример 21.

Обозначая дифференцирование по $z$ значком $'$, получим этим путем

$$\vartheta_3'(z)=\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\right],$$

$$\vartheta_3''(z)=\vartheta_3'(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{2iz}}{1+q^{2n-1}e^{2iz}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2iq^{2n-1}e^{-2iz}}{1+q^{2n-1}e^{-2iz}}\right]+$$

$$+\vartheta_3(z)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{2iz})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2i)^2q^{2n-1}e^{-2iz}}{(1+q^{2n-1}e^{-2iz})^2}\right].$$

Заставляя $z\to 0$, получим

$$\vartheta_3'(0)=0,\quad \vartheta_3''(0)=-8\vartheta_3(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$$

Подобным же образом

$$\vartheta_4'(0)=0,\quad \vartheta_4''(0)=8\vartheta_4(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2},$$

$$\vartheta_2'(0)=0,\quad \vartheta_2''(0)=\vartheta_2(0)\left[-1-8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}\right],$$

и если положим $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\varphi(z)$, то получим

$$\varphi'(0)=0,\quad \varphi''(0)=8\varphi(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

Если же продифференцируем равенство $\vartheta_1(z)=\sin z\cdot\varphi(z)$ три раза, то получим

$$\vartheta_1'(0)=\varphi(0),\quad \vartheta_1'''(0)=3\varphi''(0)-\varphi(0).$$

Отсюда находим

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}-1,$$

а из предыдущих формул

$$1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}=$$

$$=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}\right]=$$

$$=8\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1+q^{n})^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{n}}{(1-q^{n})^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}\right],$$

если объединим первые два ряда и представим третий как разность двух рядов. Складывая соответствующие члены первых двух рядов в последней строке, немедленно получим

$$1+\frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)}+\frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)}+\frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}=24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2}=1+\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)}.$$

Пользуясь дифференциальными уравнениями § 21.4, можем переписать эту формулу в виде

$$\frac{1}{\vartheta_1'(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_1'(0\mid\tau)}{d\tau}=$$

$$=\frac{1}{\vartheta_2(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_2(0\mid\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_3(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_3(0\mid\tau)}{d\tau}+\frac{1}{\vartheta_4(0\mid\tau)}\frac{d\vartheta_4(0\mid\tau)}{d\tau}.$$

Интегрируя по $\tau$, найдем

$$\vartheta_1'(0,\ q)=C\vartheta_2(0,\ q)\vartheta_3(0,\ q)\vartheta_4(0,\ q),$$

где $C$ — постоянная (не зависящая от $q$). Для определения $C$ заставим $q\to 0$; так как

$$\lim_{q\to 0}q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_1'=2,\quad \lim_{q\to 0}q^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2=2,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_3=1,\quad \lim_{q\to 0}\vartheta_4=1,$$

мы видим, что $C=1$ и, следовательно,

$$\vartheta_1'=\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4,$$

что и представляет собой требуемый результат.

## 21.42. Значение постоянной G

Из только что полученного результата мы можем найти значение постоянной $G$, введенной в § 21.3.

По формулам этого параграфа

$$\vartheta_1' = \varphi(0) = 2q^{\frac{1}{4}} G \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2, \quad \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}} G \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n})^2,$$

$$\vartheta_3 = G \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})^2, \quad \vartheta_4 = G \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2,$$

и следовательно (§ 21.41), имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2 = G^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1})^2 \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1})^2.$$

Далее, все произведения сходятся абсолютно, так как $|q| < 1$, и следовательно, допустимы следующие преобразования:

$$\left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})\right\}\left\{\prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n-1}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{2n})\right\} =$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{n}) \prod_{n=1}^{\infty} (1+q^{n}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}),$$

из коих первое следует из того, что все положительные целые числа имеют один из видов $2n-1$, $2n$.

Отсюда находим, что уравнение, определяющее $G$, будет

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n})^2 = G^2,$$

и следовательно,

$$G = \pm \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}).$$

Для определения знака заметим, что $G$ — аналитическая (и следовательно, однозначная) функция от $q$ во всей области $|q| < 1$, и из произведения для $\vartheta_3(z)$ мы видим, что $G \to 1$ при $q \to 0$. Отсюда следует, что всегда нужно брать знак плюс, и следовательно, мы получаем окончательно

$$G = \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^{2n}).$$

Пример 1. Показать, что

$$\vartheta_1' = 2q^{\frac{1}{4}} G^3.$$

Пример 2. Показать, что

$$\vartheta_4 = \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - q^{2n-1})(1 - q^n)\}.$$

Пример 3. Показать, что

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \{(1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2\}.$$

## 21.43. Связь сигма-функции с тэта-функциями

Было показано (§ 20.421, пример 3), что функция $\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2)$ с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$ может быть представлена в виде

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\pi} \exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right) \times$$
$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \left\{\left(1 - 2q^{2n} \cos\frac{\pi z}{\omega_1} + q^{4n}\right)(1 - q^{2n})^{-2}\right\},$$

где $q = \exp\left(\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}\right)$.

Если сравнить этот результат с произведением § 21.3 для $\vartheta_1(z \mid \tau)$, то видим непосредственно, что

$$\sigma(z) = \frac{2\omega_1}{\pi} \exp\left(\frac{\eta_1 z^2}{2\omega_1}\right) \cdot \frac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n})^{-3} \vartheta_1\left(\frac{\pi z}{2\omega_1} \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right).$$

Чтобы выразить $\eta_1$ через тэта-функции, прологарифмируем и дважды продифференцируем это равенство; получим

$$-\wp(z) = \frac{\eta_1}{\omega_1} - \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \operatorname{cosec}^2\left(\frac{\pi z}{2\omega_1}\right) + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \left[\frac{\varphi''(\nu)}{\varphi(\nu)} - \left\{\frac{\varphi'(\nu)}{\varphi(\nu)}\right\}^2\right],$$

где $\nu = \frac{1}{2}\frac{\pi z}{\omega_1}$ и функция $\varphi$ та же, что в § 21.41.

Разлагая по возрастающим степеням $z$ и сравнивая между собою члены, не зависящие от $z$, получим

$$0 = \frac{\eta_1}{\omega_1} - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\omega_1}\right)^2 \frac{\varphi''(0)}{\varphi(0)}$$

и, следовательно,

$$\eta_1 = -\frac{\pi^2}{12\omega_1} \frac{\vartheta_1'''}{\vartheta_1'}.$$

Следовательно, $\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2)$ может быть выражена через тэта-функции при помощи формулы

$$\sigma(z \mid \omega_1, \omega_2) = \frac{2\omega_1}{\pi\vartheta_1'} \exp\left(-\frac{\nu^2 \vartheta_1'''}{6\vartheta_1'}\right) \vartheta_1\left(\nu \,\middle|\, \frac{\omega_2}{\omega_1}\right),$$

где $\nu = \frac{1}{2}\frac{\pi z}{\omega_1}$.

Пример. Доказать, что

$$\eta_2 = -\left(\frac{\pi^2\omega_2\vartheta_1'''}{12\omega_1^2\vartheta_1'} + \frac{\pi i}{2\omega_1}\right).$$

## 21.5. Выражение эллиптических функций при помощи тэта-функций

Мы только что видели, что тэта-функции, по существу, эквивалентны сигма-функциям, и таким образом, будут существовать выражения для эллиптических функций через тэта-функции, соответствующие формулам §§ 20.5—20.53. С теоретической точки зрения формулы §§ 20.5—20.53 важнее вследствие их симметрии относительно периодов, но с точки зрения практики выражения через тэта-функции имеют два преимущества: (I) тэта-функции легче вычисляются, чем сигма-функции; (II) тэта-функции ведут себя особенно просто по отношению к вещественному периоду, который, как правило, и имеет значение в применениях эллиптических функций в прикладной математике.

Пусть $f(z)$ — эллиптическая функция с периодами $2\omega_1$, $2\omega_2$; пусть выбрана такая основная совокупность нулей $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и полюсов $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, что

$$\sum_{r=1}^{n} (\alpha_r - \beta_r) = 0,$$

как в § 20.53.

Тогда по методам § 20.53 читатель легко проверит, что

$$f(z) = A_3 \prod_{r=1}^{n} \left\{ \vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\alpha_r}{2\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) : \vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\beta_r}{2\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right\},$$

где $A_3$ — постоянная; точно так же, если

$$\sum_{m_r=1}^{m_r} A_{r,m} (z - \beta_r)^{-m}$$

есть главная часть функции $f(z)$ в ее полюсе $\beta_r$, найдем по методам § 20.52

$$f(z) = A_2 + \sum_{r=1}^{n} \left\{ \sum_{m=1}^{m_r} \frac{(-1)^{m-1} A_{r,m}}{(m-1)!} \frac{d^m}{dz^m} \lg \vartheta_1\left(\frac{\pi z - \pi\beta_r}{2\omega_1} \middle| \frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \right\},$$

где $A_2$ — постоянная.

Эта формула важна при интегрировании эллиптических функций. В § 22.741 помещен пример применения этой формулы к одной динамической задаче.