Пример. Показать, что

$$\frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_1^2(z)} = -\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_1'^2}\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} + \frac{\vartheta_3\vartheta_3''}{\vartheta_1'^3},$$

и вывести, что

$$\int_z^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\vartheta_3^2(z)}{\vartheta_1^2(z)}\,dz = \frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_1'^2}\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} + \left(\frac{1}{2}\pi - z\right)\frac{\vartheta_3\vartheta_3''}{\vartheta_1'^3}.$$

21.51. Мнимое преобразование Якоби

Если эллиптическая функция имеет периоды $2\omega_1$, $2\omega_2$ такие, что

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0,$$

то иногда удобно рассматривать вместо них периоды $2\omega_2$, $-2\omega_1$, ибо эти числа являются периодами, и если $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$, то и $\operatorname{Im}\left(\frac{-\omega_1}{\omega_2}\right) > 0$. В эллиптические функции, которые рассматривались до сих пор, периоды входили симметрично, и указанный подход не давал никаких преимуществ. Но в случае тэта-функций, которые являются лишь квазипериодическими, поведение функций по отношению к вещественному периоду π значительно отличается от ее поведения по отношению к комплексному периоду $\pi\tau$. Следовательно, имея в виду результат, полученный в § 21.43, можно ожидать получения преобразований для тэта-функций, в которых отношения периодов двух тэта-функций, связанных преобразованием, будут соответственно τ и $-\frac{1}{\tau}$.

Эти преобразования для четырех тэта-функций впервые были получены Якоби [1]) из теории эллиптических функций; впрочем, Пуассон [2]) ранее получил формулу, тождественную с одной из формул преобразований, из которой при помощи элементарной алгебры могут быть получены и другие три преобразования. Прямое доказательство преобразований принадлежит Ландсбергу, который применил методы интегрирования по контуру [3]).

---

[1]) Jacobi, Journ. für Math., III (1828), 403—404 (Ges. Werke, I (1881), 264—265).

[2]) Poisson, Mém. de l'Acad. des Sci., VI (1827), 592; в частном случае эта формула для $z = 0$ была дана раньше Пуассоном в Journ. de l'École polytechnique, XII (тетрадь XIX), (1823), 420.

[3]) Этот метод указан в примере 17 главы 6, ч. I, стр. 174. См. Landsberg, Journ. für Math., CXI (1893), 234—253.

Вывод формул Якоби, который мы сейчас дадим, основывается на теореме Лиувилля; формула, которую мы докажем, имеет вид

$$\vartheta_3(z\,|\,\tau)=(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{z^2}{\pi i\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right),$$

где значение $(-i\tau)^{-\frac{1}{2}}$ определяется условием $|\arg(-i\tau)|<\frac{1}{2}\pi$.

Для краткости положим

$$-\frac{1}{\tau}\equiv\tau',\quad q'=\exp(\pi i\tau').$$

Единственными нулями функций $\vartheta_3(z\,|\,\tau)$ и $\vartheta_3(\tau' z\,|\,\tau')$ будут простые нули, расположенные в точках, в которых

$$z=m\pi+n\pi\tau+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau,\quad z\tau'=m'\pi+n'\pi\tau'+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau'$$

соответственно, где m, n, m', n' принимают все целые значения; взяв $m'=-n-1$, $n'=m$, видим, что отношение

$$\psi(z)\equiv\exp\left(\frac{z^2}{\pi i\tau}\right)\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau}\,\middle|\,-\frac{1}{\tau}\right):\vartheta_3(z\,|\,\tau)$$

будет целой функцией без нулей.

Кроме того,

$$\psi(z+\pi\tau):\psi(z)=\exp\left(\frac{2z\pi\tau+\pi^2\tau^2}{\pi i\tau}\right):q^{-1}e^{-2iz}=1$$

и

$$\psi(z-\pi):\psi(z)=\exp\left(\frac{-2z\pi+\pi^2}{\pi i\tau}\right)\times q'^{-1}e^{-\frac{2iz}{\tau}}=1.$$

Следовательно, $\psi(z)$ — двоякопериодическая функция без нулей и полюсов; согласно § 20.12 $\psi(z)$ должна быть постоянной, скажем A (не зависящей от z).

Таким образом,

$$A\vartheta_3(z|\tau)=\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\vartheta_3(z\tau'|\tau');$$

а заменяя z последовательно через $z+\frac{1}{2}\pi$, $z+\frac{1}{2}\pi\tau$, $z+\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$, легко получим

$$A\vartheta_4(z|\tau)=\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\vartheta_2(z\tau'|\tau'),$$

$$A\vartheta_2(z|\tau)=\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\vartheta_4(z\tau'|\tau'),$$

$$A\vartheta_1(z|\tau)=-i\exp\left(\frac{i\tau' z^2}{\pi}\right)\vartheta_1(z\tau'|\tau').$$

Остается еще доказать, что $A=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}$. Для этого продифференцируем последнее равенство и положим затем $z=0$; получим

$$A\vartheta_1'(0|\tau)=-i\tau'\vartheta_1'(0|\tau').$$

Но

$$\vartheta_1'(0|\tau)=\vartheta_2(0|\tau)\,\vartheta_3(0|\tau)\,\vartheta_4(0|\tau)$$

и

$$\vartheta_1'(0|\tau')=\vartheta_2(0|\tau')\vartheta_3\ (0\,|\,\tau')\,\vartheta_4(0|\tau');$$

деля последние формулы друг на друга и пользуясь предыдущими, получим непосредственно $A^{-2}=-i\tau'$, и следовательно,

$$A=\pm(-i\tau)^{\frac{1}{2}}.$$

Для определения знака отметим, что

$$A\vartheta_3(0|\tau)=\vartheta_3(0|\tau'),$$

причем обе тэта-функции являются аналитическими функциями от τ при $\operatorname{Im}\tau>0$; таким образом, функция A аналитическая и однозначная в верхней полуплоскости τ.

Так как обе тэта-функции будут положительными, когда τ чисто мнимое, то в этом случае нужно будет взять знак *плюс*. Отсюда, по теории аналитического продолжения, мы *всегда* имеем

$$A=+(-i\tau)^{\frac{1}{2}},$$

что и дает требуемое преобразование.

Таким образом нами показано, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi i\tau+2niz}=\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(z-n\pi)^2/\pi i\tau}.$$

Пример 1. Показать, что

$$\frac{\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau)}=\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau')}{\vartheta_3(0\,|\,\tau')},$$

когда $\tau\tau'=-1$.

Пример 2. Показать, что

$$\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau+1)}{\vartheta_3(0\,|\,\tau+1)}=e^{\frac{1}{4}\pi i}\,\frac{\vartheta_2(0\,|\,\tau)}{\vartheta_4(0\,|\,\tau)}.$$

Пример 3. Показать, что

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)=\pm\,2^{\frac{1}{2}}q'^{\frac{1}{8}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+q'^{2n}}{1+q'^{2n-1}}\right),$$

и показать затем, что следует взять знак плюс.

21.52. Преобразование типа Ландена

Ландену (Landen) принадлежит преобразование (§ 22.42) эллиптических интегралов (§ 22.7), имеющее исторический интерес; это преобразование получается непосредственно из одной формулы, связывающей тэта-функции с параметрами τ и 2τ, а именно:

$$\frac{\vartheta_3(z\,|\,\tau)\,\vartheta_4(z\,|\,\tau)}{\vartheta_4(2z\,|\,2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau)\,\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_4(0\,|\,2\tau)},$$

которую мы и должны теперь доказать.

Нулями выражения $\vartheta_3(z|\tau)\,\vartheta_4(z|\tau)$ будут простые нули в точках

$$z=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau$$

и в точках

$$z=m\pi+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\tau,$$

где m и n принимают все целые значения; в тех же точках $2z=m\pi+$ $+\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\cdot 2\tau$, т. е. эти точки будут нулями и функции $\vartheta_4(2z|2\tau)$. Следовательно, отношение

$$\frac{\vartheta_3(z\,|\,\tau)\,\vartheta_4(z\,|\,\tau)}{\vartheta_4(2z\,|\,2\tau)}$$

не имеет ни нулей, ни полюсов. Кроме того, по отношению к периодам π и $\pi\tau$ оно имеет множители: 1 и

$$(q^{-1}e^{-2iz})(-q^{-1}e^{-2iz}):(-q^{-2}e^{-4iz})=1;$$

поэтому оно будет двоякопериодической функцией и, следовательно (§ 20.12), постоянным. Значение этой константы можно найти, положив $z=0$, тогда мы получим высказанный выше результат.

Если заменим z на $z+\frac{1}{2}\pi\tau$, то получим соответствующую формулу для других тэта-функций, а именно:

$$\frac{\vartheta_2(z\,|\,\tau)\,\vartheta_1(z\,|\,\tau)}{\vartheta_1(2z\,|\,2\tau)}=\frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau)\,\vartheta_4(0\,|\,\tau)}{\vartheta_4(0\,|\,2\tau)}.$$

21.6. Дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют отношения тэта-функций

Из примера 3 § 21.11 видно, что функция

$$\vartheta_1(z):\vartheta_4(z)$$

имеет множители периодичности -1, $+1$, соответствующие периодам π, $\pi\tau$; поэтому и ее производная

$$\{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)\}:\vartheta_4^2(z)$$

имеет те же самые множители периодичности.

С другой стороны, легко убедиться, что и $\frac{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)}{\vartheta_4^2(z)}$ имеет множители периодичности -1, $+1$; следовательно, если обозначим через $\varphi(z)$ отношение

$$\{\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)\}:\{\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\},$$

то $\varphi(z)$ будет двоякопериодической функцией с периодами π и $\pi\tau$; единственно возможными полюсами функции $\varphi(z)$ будут простые полюсы в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi$ и $\frac{1}{2}\pi+\frac{1}{2}\pi\tau$.

Теперь рассмотрим $\varphi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)$; из соотношений § 21.11, а именно:

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_4(z),\qquad \vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=iq^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_1(z),$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_3(z),\qquad \vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=q^{-\frac{1}{4}}e^{-iz}\vartheta_2(z),$$

легко видеть, что

$$\varphi\left(z+\frac{1}{2}\pi\tau\right)=\{-\vartheta_4'(z)\,\vartheta_1(z)+\vartheta_1'(z)\,\vartheta_4(z)\}:\{\vartheta_3(z)\,\vartheta_2(z)\}.$$

Следовательно, $\varphi(z)$ — двоякопериодическая функция с периодами π и $\frac{1}{2}\pi\tau$. Поэтому *единственно возможными полюсами функции $\varphi(z)$ являются простые полюсы в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi$ по этим периодам.*

Поэтому (§ 20.12) $\varphi(z)$ — постоянная; заставляя $z\to 0$, видим, что значение этой постоянной равно

$$\{\vartheta_1'\vartheta_4\}:\{\vartheta_2\vartheta_3\}=\vartheta_4^2.$$

Таким образом, мы установили важный результат, а именно:

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=\vartheta_4^2\,\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\,\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)};$$

положив $\xi\equiv\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$ и применяя результаты § 21.2, видим, что

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi^2\vartheta_2^2).$$

Это дифференциальное уравнение имеет решение $\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}$. Нетрудно видеть, что общим решением будет $\pm\frac{\vartheta_1(z+\alpha)}{\vartheta_4(z+\alpha)}$, где α — постоянная интегрирования; так как это отношение изменяет знак, когда α

возрастает на π, то отрицательный знак можно отбросить, не нарушая общности решения.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=-\vartheta_3^2\,\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\,\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}.$$

Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)}\right\}=-\vartheta_2^2\,\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\,\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)}.$$

21.61. Генезис эллиптической функции Якоби sn u [1])

Дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d\xi}{dz}\right)^2=(\vartheta_2^2-\xi^2\vartheta_3^2)(\vartheta_3^2-\xi^2\vartheta_2^2),$$

полученное в § 21.6, может быть приведено к каноническому виду при помощи несущественной замены переменных.

Положим [2])

$$\frac{\xi\vartheta_3}{\vartheta_2}=y,\quad z\vartheta_3^2=u;$$

тогда, если написать $k^{\frac{1}{2}}$ вместо $\frac{\vartheta_2}{\vartheta_3}$, уравнение, определяющее y как функцию от u, будет

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Это дифференциальное уравнение имеет частное решение

$$y=\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}\,\frac{\vartheta_1(u\vartheta_3^{-2})}{\vartheta_4(u\vartheta_3^{-2})}.$$

Функция от u справа имеет множители периодичности -1, $+1$, соответствующие периодам $\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$; она будет поэтому двоякопериодической функцией с периодами $2\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$. В любой ячейке она имеет два простых полюса в точках, сравнимых с $\frac{1}{2}\pi\tau\vartheta_3^2$ и $\pi\vartheta_3^2+\frac{1}{2}\pi\tau\vartheta_3^2$; принимая же во внимание характер квазипериодичности переменной y, видим, что вычеты в этих точках будут равны и про-

---

[1]) Якоби и другие ранние авторы пользовались обозначением sin am вместо sn.

[2]) Отметим, что из формул § 21.3 видно, что $\vartheta_2\neq0$, $\vartheta_3\neq0$, когда $|q|<1$, исключая случай, когда $q=0$; в последнем случае тэта-функции вырождаются; подстановки поэтому законны.

тивоположны по знаку; нулями функции являются точки, сравнимые с 0 и $\pi\vartheta_3^2$.

Принято рассматривать y как функцию, зависящую от k, а не от q; чтобы представить y как функцию от u и k, пишут

$$y = \operatorname{sn}(u, k)$$

или, проще,

$$y = \operatorname{sn} u.$$

Очевидно, что $\operatorname{sn}(u, k)$ — эллиптическая функция второго из типов, указанных в § 20.13; далее, при $q \to 0$ (так что $k \to 0$) легко видеть, что

$$\operatorname{sn}(u, k) \to \sin u.$$

Постоянная k называется *модулем*; если $k'^{\frac{1}{2}} = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}$, так что $k^2 + k'^2 = 1$, то k' называется *дополнительным модулем*. Квазипериоды $\pi\vartheta_3^2$, $\pi\tau\vartheta_3^2$ обычно обозначаются через $2K$, $2iK'$, так что $\operatorname{sn}(u, k)$ имеет периоды $4K$, $2iK'$.

Из § 21.51 видим, что $2K' = \pi\vartheta_3^2(0|\tau')$, так что K' будет той же самой функцией от τ', как функция K от τ, если $\tau\tau' = -1$.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_3^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)},$$

и вывести отсюда, что если

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)} \quad \text{и} \quad u = z\vartheta_3^2,$$

то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - u^2)(k'^2 + k^2u^2).$$

Пример 2. Показать, что

$$\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} = -\vartheta_2^2\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_4(z)},$$

и вывести отсюда, что если

$$y = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3}\frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)} \quad \text{и} \quad u = z\vartheta_3^2,$$

то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - u^2)(u^2 - k'^2).$$

Пример 3. Получить следующие формулы:

$$\left(\frac{2kK}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_2 = 2q^{\frac{1}{4}}(1 + q^2 + q^6 + q^{12} + q^{20} + \ldots),$$

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_3 = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots,$$

$$\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = \vartheta_4 = 1 - 2q + 2q^4 + 2q^9 - \ldots,$$

$$K' = K\pi^{-1}\lg\left(\frac{1}{q}\right).$$

[Эти формулы удобны для вычисления k, k', K, K', когда q дано.]

21.62. Более ранние обозначения Якоби[1]). Тэта-функция $\Theta(u)$ и эта-функция $\mathrm{H}(u)$

Наличие множителей ϑ_3^{-2} в выражении для $\mathrm{sn}(u, k)$ делает иногда желательным использовать обозначения, которые Якоби употреблял в «Fundamenta Nova» и впоследствии оставил. Функция, имеющая первостепенную важность в этой системе обозначений, есть функция $\Theta(u)$, определяемая равенством

$$\Theta(u) = \vartheta_4\left(u\vartheta_3^{-2} \mid \tau\right),$$

так что периоды для $\Theta(u)$ будут $2K$ и $2iK'$.

Функция $\vartheta_3(z)$ тогда заменяется функцией $\Theta(u+K)$; вместо функции $\vartheta_1(z)$ имеем функцию $\mathrm{H}(u)$, определяемую равенством

$$\mathrm{H}(u) = -iq^{-\frac{1}{4}}e^{\frac{i\pi u}{2K}}\Theta(u+iK') = \vartheta_1\left(u\vartheta_3^{-2} \mid \tau\right);$$

$\vartheta_2(z)$ заменяется функцией $\mathrm{H}(u+K)$.

Читатель не встретит затруднений в переводе содержания этой главы в ранние обозначения Якоби.

Пример 1. Показать, что особыми точками функции $\frac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$, где $\Theta'(u) = \frac{d\Theta(u)}{du}$, являются простые полюсы в точках, сравнимых с iK' $(\mathrm{mod}\, 2K, 2iK')$, и что вычет в каждой особой точке равен 1.

Пример 2. Показать, что

$$\mathrm{H}'(0) = \frac{1}{2}\pi K^{-1}\mathrm{H}(K)\,\Theta(0)\,\Theta(K).$$

---

[1]) Эти обозначения применялись в «Fundamenta Nova».

21.7. Задача обращения

До сего времени эллиптическая функция Якоби $\operatorname{sn}(u, k)$ неявно рассматривалась как зависящая скорее от параметра q, чем от модуля k, и было показано, что она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{d \operatorname{sn} u}{du}\right)^2 = (1 - \operatorname{sn}^2 u)(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u),$$

где

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4(0, q)}{\vartheta_3^4(0, q)}.$$

Но в тех задачах прикладной математики, в которых встречаются эллиптические функции, мы имеем дело с решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - k^2 y^2),$$

в котором *модуль* k задан, и мы *a priori* не знаем значения q; для того чтобы доказать существование аналитической функции $\operatorname{sn}(u, k)$, удовлетворяющей этому уравнению, мы должны показать, что существует такое число τ[1]), что

$$k^2 = \frac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}.$$

Если уже показано, что такое число τ существует, то можно построить, как отношение тэта-функций, функцию $\operatorname{sn}(u, k)$, которая будет удовлетворять дифференциальному уравнению, будет аналитической, исключая простые полюсы, и будет обладать свойством двоякой периодичности и, кроме того, свойством

$$\lim_{u \to 0} \frac{\operatorname{sn}(u, k)}{u} = 1.$$

Иными словами, мы можем *обратить* интеграл

$$u = \int_0^y \frac{dt}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

и в результате получим уравнение $y = \operatorname{sn}(u, k)$.

---

[1]) Существование числа τ, для которого $\operatorname{Im} \tau > 0$, влечет за собою существование такого числа q, что $|q| < 1$. Другим способом было бы непосредственное изучение дифференциального уравнения по методу главы 10.

Трудность, конечно, заключается в том, чтобы показать, что уравнение

$$c = \frac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}$$

(в котором c написано вместо k^2) имеет решение.

Если $0 < c < 1$ [1]), то легко видеть, что решение существует. Из тождества, данного в следствии § 21.2, ясно, что достаточно доказать существование решения уравнения

$$1 - c = \frac{\vartheta_4^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)},$$

которое можно переписать в виде

$$1 - c = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}} \right)^8.$$

Но при возрастании q от 0 до 1 произведение справа остается непрерывным и монотонно уменьшается от 1 до 0; таким образом (§ 3.63, часть I), оно пройдет через значение $1 - c$ один и только один раз. Следовательно, решение уравнения относительно τ существует и задачу обращения можно считать решенной.

21.71. Задача обращения для комплексных значений c. Модулярные функции $f(\tau)$, $g(\tau)$, $h(\tau)$

Задачу обращения можно рассматривать как задачу интегрального исчисления и при помощи несколько длинных алгебраических рассуждений, состоящих в изучении поведения интеграла

$$\int_0^y (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} \, dt;$$

когда y лежит на «римановой поверхности», можно доказать, что задача обращения имеет решение. Для исчерпывающего изучения этого вопроса отсылаем читателя к книге Хэнкока (Hancock, Elliptic Functions, I (New York, 1910)).

Однако в соответствии с общим характером этой книги лучше будет доказать при помощи метода Коши (§ 6.31, часть I), что уравнение $c = \frac{\vartheta_2^4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3^4(0 \mid \tau)}$ имеет один корень, лежащий в определенной области плоскости τ, и что этот корень (подчиненный определенным ограничениям) будет аналитической функцией от c, когда c рассматривается как переменная. Мы видели, что существование этого корня дает решение задачи обращения;

[1]) Это практически наиболее важный случай.

будет, таким образом, доказано и существование эллиптической функции Якоби с данным модулем k.

Только что указанный метод имеет то преимущество, что он раскрывает возможности так называемых *модулярных функций*.

Общая теория этих функций (которые имеют большое значение в теории преобразования эллиптических функций) рассмотрена в трактате Клейна и Фрике [1]).

Пусть

$$f(\tau)=16e^{\pi i\tau}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+e^{2n\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}}\right\}^8=\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)},$$

$$g(\tau)=\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-e^{(2n-1)\pi i\tau}}{1+e^{(2n-1)\pi i\tau}}\right\}^8=\frac{\vartheta_4^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)},$$

$$h(\tau)=-\frac{f(\tau)}{g(\tau)}.$$

Тогда, если $\tau\tau'=-1$, введенные функции, по следствию § 21.2 и примеру 1 § 21.51, обладают следующими свойствами;

$$f(\tau+2)=f(\tau),\quad g(\tau+2)=g(\tau),\quad f(\tau)+g(\tau)=1,$$
$$f(\tau+1)=h(\tau),\quad f(\tau')=g(\tau),\quad g(\tau')=f(\tau).$$

Легко видеть, что при $\operatorname{Im}\tau\to+\infty$ функции $\frac{1}{16}e^{-\pi i\tau}f(\tau)=f_1(\tau)$ и $g(\tau)$ стремятся к единице равномерно относительно $\operatorname{Re}\tau$, когда

$$-1\leqslant\operatorname{Re}\tau\leqslant 1;$$

производные же их по τ стремятся при этом равномерно к нулю [2]).

21.711. Главное решение уравнения $f(\tau)-c=0$

Мы видели в § 6.31 части I, что если функция $f(\tau)$ аналитическая на каком-нибудь контуре и внутри его, то число корней уравнения $f(\tau)-c=0$ внутри контура, помноженное на $2\pi i$, равно интегралу

$$\int\frac{1}{f(t)-c}\,\frac{df(\tau)}{d\tau}\,d\tau,$$

взятому по рассматриваемому контуру.

Возьмем контур $ABCDEFE'D'C'B'A$, показанный на чертеже; временно предположим [3]), что $f(\tau)-c$ не имеет нулей на контуре.

Контур составлен следующим образом:

FE параллельна вещественной оси и лежит на большом расстоянии от нее;

AB получается из FE инверсией относительно окружности $|\tau|=1$;

---

[1]) F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke) (Leipzig, 1890.)

[2]) Это вытекает из выражений для тэта-функций в виде степенных рядов относительно q, если заметим, что $|q|\to 0$, когда $\operatorname{Im}\tau\to+\infty$.

[3]) Значения функции $f(\tau)$ в точках на контуре будут рассмотрены в § 21.712.

BC получается из ED инверсией относительно окружности $|\tau| = 1$, причем D берется так, что $DI = AO$.

Из элементарных геометрических соображений следует, что так как точки C и D в инверсии соответствуют друг другу и точка I соответствует сама себе, то окружность, построенная на DI как на диаметре, проходит через C; таким образом, дуга CD этой окружности есть отражение дуги AB относительно прямой $\operatorname{Re}\tau = \frac{1}{2}$.

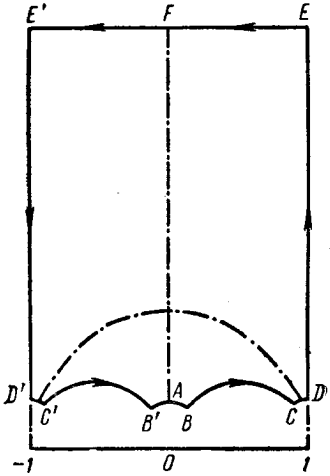

Рис. 5.

Левая половина чертежа есть отражение правой половины относительно прямой $\operatorname{Re}\tau = 0$.

Предполагая, что FE достаточно удалено от вещественной оси, покажем теперь, что уравнение $f(\tau) - c = 0$ имеет один и только один корень внутри начерченного контура, если исключить случаи $c \geqslant 1$ и $c \leqslant 0$[1]). Этот корень называется *главным корнем* уравнения.

Чтобы установить существование корня, рассмотрим интеграл $\int \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau$, взятый по различным частям контура.

Так как $f(\tau + 2) = f(\tau)$, то имеем

$$\left\{ \int\limits_{DE} + \int\limits_{E'D'} \right\} \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = 0.$$

Далее, если τ описывает BC и $B'C'$, то $\tau'\left(= -\frac{1}{\tau}\right)$ описывает соответственно $E'D'$ и ED и, следовательно,

$$\left\{ \int\limits_{BC} + \int\limits_{C'B'} \right\} \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = \left\{ \int\limits_{BC} + \int\limits_{C'B'} \right\} \frac{1}{g(\tau') - c} \frac{dg(\tau')}{d\tau} d\tau =$$

$$= \left\{ \int\limits_{E'D'} + \int\limits_{DE} \right\} \frac{1}{g(\tau') - c} \frac{dg(\tau')}{d\tau'} d\tau' = 0,$$

ибо $g(\tau' + 2) = g(\tau')$ и соответствующие элементы интеграла сокращаются.

Наконец, так как $f(\tau \pm 1) = h(\tau)$, то имеем

$$\left\{ \int\limits_{D'C'} + \int\limits_{CD} \right\} \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau = \int\limits_{B'AB} \frac{1}{h(\tau) - c} \frac{dh(\tau)}{d\tau} d\tau;$$

но если τ' описывает $B'AB$, то τ описывает EE'; таким образом, интеграл по всему контуру приводится к интегралу

$$\int\limits_{EE'} \left\{ \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{h(\tau') - c} \frac{dh(\tau')}{d\tau} + \frac{1}{f(\tau') - c} \frac{df(\tau')}{d\tau} \right\} d\tau =$$

$$= \int\limits_{EE'} \left\{ \frac{1}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} - \frac{1}{h(\tau)\{1 - c \cdot h(\tau)\}} \frac{dh(\tau)}{d\tau} + \frac{1}{g(\tau) - c} \frac{dg(\tau)}{d\tau} \right\} d\tau.$$

---

[1]) В § 21.712 будет показано, что если $c \geqslant 1$ или $c \leqslant 0$, то $f(\tau) - c$ имеет нуль на контуре.

Далее, когда EE' уходит в бесконечность[1]), $f(\tau)-c \to -c \neq 0$, $g(\tau)-c \to 1-c \neq 0$, и предел этого интеграла будет

$$-\lim \int\limits_{EE'} \frac{1}{1-c\cdot h(\tau)} \frac{d}{d\tau}\{\lg h(\tau)\}\, d\tau =$$

$$= \lim \int\limits_{E'E} \frac{1}{1-c\cdot h(\tau)} \left\{\pi i + \frac{d\lg f_1(\tau)}{d\tau} - \frac{d\lg g(\tau)}{d\tau}\right\} d\tau.$$

Но

$$1-c\cdot h(\tau)\to 1,\quad f_1(\tau)\to 1,\quad g_1(\tau)\to 1,\quad \frac{df_1(\tau)}{d\tau}\to 0,\quad \frac{dg(\tau)}{d\tau}\to 0,$$

и таким образом, предел интеграла будет

$$\int\limits_{E'E} \pi i\, d\tau = 2\pi i.$$

Далее, если мы с самого начала возьмем EE' настолько далеко от вещественной оси, что $f(\tau)-c$, $1-c\cdot h(\tau)$, $g(\tau)-c$ не имеют нулей, когда точка τ находится выше EE', то контур не пройдет ни через один нуль выражения $f(\tau)-c$, когда EE' уходит в бесконечность и радиусы дуг CD, $D'C'$, $B'AB$ уменьшаются до нуля; от такого изменения контура интеграл не меняется, и таким образом, исходный контурный интеграл равен $2\pi i$, а число нулей выражения $f(\tau)-c$ внутри исходного контура будет в точности равно единице.

21.712. Значения модулярной функции $f(\tau)$ на рассмотренном выше контуре

Рассмотрим теперь вопрос, упомянутый в начале § 21.711, о нулях функции $f(\tau)-c$ на полупрямых[2]), соединяющих точки ± 1 и $\pm 1+\infty i$, и на полуокружностях $OBC1$ и $(-1)\,C'B'O$.

Когда τ движется от $+1$ до $+1+\infty i$ или от -1 до $-1+\infty i$, функция $f(\tau)$ изменяется от $-\infty$ до 0, оставаясь в области действительных отрицательных значений. Таким образом, при c отрицательном мы делаем надлежащий полукруговой вырез на DE и соответствующий вырез на $D'E'$, с помощью которых выделяем точки, в которых $f(\tau)-c=0$; при этом интегралы предыдущего параграфа по сделанным вырезам взаимно сократятся в силу соотношения $f(\tau+2)=f(\tau)$.

Пусть теперь τ описывает полуокружность $OBC1$; тогда τ' изменяется от $-1+\infty i$ до -1, а функция $f(\tau)=g(\tau')=1-f(\tau')$ изменяется от 1 до $+\infty$, оставаясь действительной. Аналогичным образом и здесь при c положительном, большем 1, делаем надлежащие вырезы на BC и $B'C'$ для избежания встречающейся трудности; подробнее на этом не останавливаемся; аналогичное будет и с $B'C'O$. Исследуем теперь поведение τ как функции от c, именно, как должно изменяться c в своей плоскости, чтобы τ изменялось в вышерассмотренной области, оставаясь однозначным и непрерывным.

---

[1]) Временно предполагается, что $c\neq 0$ и $c\neq 1$.

[2]) Мы видели, что EE' может быть взято таким образом, что $f(\tau)-c$ не будет иметь нулей ни на EE', ни на малых дугах контура.

Для этого будем c изменять вблизи вещественной оси и отметим, что при переходе ее знак вещественной части τ изменяется. Если теперь $0 < \operatorname{Re} c < 1$, то τ при таком переходе изменяется непрерывно, и если $\operatorname{Re} c < 0$, то τ переходит от точки, близкой к DE, к точке, близкой к $D'E'$ (или обратно), и в этом случае значение q изменяется непрерывно; наконец, если $\operatorname{Re} c > 1$, то τ переходит от точек, близких к BC, к точкам, близким к $B'C'$, и в этом случае $q = e^{\pi i \tau}$ терпит разрыв, пока нет разреза в плоскости c от $+1$ к $+\infty$; но в разрезанной плоскости q будет уже однозначной и непрерывной функцией от c через посредство τ, лежащего в рассмотренной области; эту функцию обозначим через $q(c)$; она определяется по формуле $q(c) = e^{\pi i \tau(c)}$, где

$$\tau(c) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\tau}{f(\tau) - c} \frac{df(\tau)}{d\tau} d\tau,$$

как это следует из § 6.3 части I.

Из сказанного легко заключаем, что если c описывает замкнутый контур, не окружающий точки $c = 1$, то $q(c)$ возвратится к исходному значению; для того же, чтобы $\tau(c)$ возвращалось к прежнему значению, необходимо, чтобы контур не окружал и точку $c = 0$.

21.72. Периоды, рассматриваемые как функции модуля

Так как $K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0, q)$, то мы видим по § 21.712, что K будет однозначной аналитической функцией от $c\,(= k^2)$, когда в плоскости c сделан разрез от 1 до $+\infty$; но так как $K' = -i\tau K$, то мы видим, что K' будет однозначной функцией от c только после того, как будет сделан добавочный разрез от 0 до $-\infty$; ниже (§ 22.32) мы покажем, что разрез от 1 до $+\infty$, который необходим для однозначности K, не необходим для K'.

21.73. Задача обращения, связанная с эллиптическими функциями Вейерштрасса

Покажем теперь, что если заданы инварианты g_2 и g_3 такие, что $g_2^3 \neq 27g_3^2$, то можно построить эллиптическую функцию Вейерштрасса с этими инвариантами; иными словами, покажем, что *можно построить*[1]) *периоды* $2\omega_1$, $2\omega_2$ *такие, чтобы функция* $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$ *имела инварианты* g_2 *и* g_3. Задача будет решена, если мы сможем получить решение дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3$$

в виде

$$y = \wp(z \mid \omega_1, \omega_2).$$

Получим решение уравнения с помощью тэта-функций.

Пусть $\nu = Az$, где A — постоянная, которую сейчас определим.

С помощью методов § 21.6 легко видеть, что

$$\vartheta_2'(\nu)\,\vartheta_1(\nu) - \vartheta_1'(\nu)\,\vartheta_2(\nu) = -\vartheta_3(\nu)\,\vartheta_4(\nu)\,\vartheta_2^2,$$

---

[1]) Относительно действительного вычисления периодов см. R. T. A. Innes, Edinburgh Royal Sos., XXVII (1907), 357—368.

а отсюда, воспользовавшись результатами § 21.2, найдем

$$\left\{\frac{d}{dz}\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2\right\}^2 =$$

$$= 4A^2\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2\right)\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2+\vartheta_4^4\right)\left(\frac{\vartheta_2^2(\nu)}{\vartheta_1^2(\nu)}\vartheta_3^2\vartheta_4^2+\vartheta_3^4\right).$$

Пусть теперь e_1, e_2, e_3 — корни уравнения $4y^3 - g_2y - g_3 = 0$, взятые в таком порядке, что $\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3}$ не будет [1]) вещественным числом, отрицательным или бо́льшим единицы.

При этих условиях уравнение

$$\frac{e_1-e_2}{e_1-e_3} = \frac{\vartheta_4^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}$$

имеет решение (§ 21.712) такое, что $\operatorname{Im}\tau > 0$; это уравнение определяет параметр τ тэта-функций, который был до сих пор в нашем распоряжении.

Выбрав τ таким образом, возьмем затем A такое, что [2])

$$A^2\vartheta_4^4 = e_1 - e_2.$$

Тогда функция

$$y = A^2\frac{\vartheta_2^2(\nu\mid\tau)}{\vartheta_1^2(\nu\mid\tau)}\vartheta_3^2(0\mid\tau)\vartheta_4^2(0\mid\tau) + e_1$$

удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^2 = 4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3).$$

Периоды y, *как функции от* z, будут πA, $\frac{\pi\tau}{A}$; обозначив их через $2\omega_1$, $2\omega_2$, имеем

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0.$$

По этим периодам можно построить функцию $\wp(z\mid\omega_1, \omega_2)$, и легко видеть, что

$$\wp(z) - A^2\frac{\vartheta_2^2(\nu\mid\tau)}{\vartheta_1^2(\nu\mid\tau)}\vartheta_3^2(0\mid\tau)\vartheta_4^2(0\mid\tau) - e_1$$

---

[1]) Если $\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k} > 1$, то $0 < \frac{e_i-e_k}{e_i-e_j} < 1$; а если $\frac{e_i-e_j}{e_i-e_k} < 0$, то

$$1 - \frac{e_i-e_j}{e_i-e_k} > 1 \quad\text{и}\quad \frac{e_j-e_i}{e_j-e_k} = \left\{1 - \frac{e_i-e_k}{e_i-e_j}\right\}^{-1} < 1.$$

Значения 0, 1, ∞ для выражения $(e_1-e_2)/(e_1-e_3)$ исключаются, так как $g_2^3 \neq 27g_3^2$.

[2]) Знак, приписываемый A, совершенно безразличен, так как мы имеем дело исключительно с *четными* функциями от ν и z.

будет эллиптической функцией без полюса в начале координат[1]); она будет поэтому постоянной, скажем C.

Если G_2, G_3 — инварианты функции $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$, то имеем

$$4\wp^3(z) - G_2\wp(z) - G_3 = \wp'^2(z) = \\ = 4\{\wp(z) - C - e_1\}\{\wp(z) - C - e_2\}\{\wp(z) - C - e_3\},$$

и таким образом, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\wp(z)$, находим

$$0 = 12C, \quad G_2 = g_2 - 12C^2, \quad G_3 = g_3 - g_2C + 4C^3.$$

Отсюда

$$C = 0, \quad G_2 = g_2, \quad G_3 = g_3,$$

и таким образом, функция $\wp(z \mid \omega_1, \omega_2)$ с требуемыми инвариантами построена.

21.8. Вычисление эллиптических функций

Ряды, расположенные по возрастающим степеням, удобны для вычисления тэта-функций даже тогда, когда $|q|$ довольно большой, например 0,9. Но обычно на практике случается, что бывает задан модуль k и необходимо вычислить величины K, K' и q. Ниже увидим (§§ 22.301, 22.32), что K, K' могут быть выражены через гипергеометрические функции при помощи равенств

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right); \quad K' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k'^2\right);$$

но эти ряды сходятся медленно, за исключением случая, когда $|k|$ и $|k'|$ соответственно весьма малы, так что эти ряды никогда одновременно не пригодны для численных вычислений.

Для того чтобы получить более пригодные для этого ряды, вычислим сначала q как корень уравнения $k = \frac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}$ и затем получим K по формуле $K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0, q)$ и K' по формуле

$$K' = \pi^{-1}K \lg\left(\frac{1}{q}\right).$$

Уравнение $k = \frac{\vartheta_2^2(0, q)}{\vartheta_3^2(0, q)}$ эквивалентно уравнению[2])

$$\sqrt{k'} = \frac{\vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q)}.$$

---

[1]) Члены с z^{-2} взаимно уничтожаются, а членов с z^{-1} вообще нет, так как функция четная.

[2]) При вычислениях обычно бывает $0 < k < 1$, и таким образом, q положительно и $0 < \sqrt{k'} < 1$.

Положив $2\varepsilon = \frac{1-\sqrt{k'}}{1+\sqrt{k'}}$ $\left(\text{так что } 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}, \text{ когда } 0 < k < 1\right)$, получим

$$2\varepsilon = \frac{\vartheta_3(0, q) - \vartheta_4(0, q)}{\vartheta_3(0, q) + \vartheta_4(0, q)} = \frac{\vartheta_2(0, q^4)}{\vartheta_3(0, q^4)}.$$

Мы видели (§§ 21.71—21.712), что это уравнение относительно q^4 имеет решение, которое является аналитической функцией от ε^4, когда $|\varepsilon| < \frac{1}{2}$; таким образом, q можно разложить в ряд Маклорена по степеням ε в этой области[1]). Остается определить коэффициенты в этом разложении из уравнения

$$\varepsilon = \frac{q + q^9 + q^{25} + \ldots}{1 + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots},$$

которое может быть переписано в виде

$$q = \varepsilon + 2q^4\varepsilon - q^9 + 2q^{16}\varepsilon - q^{25} + \ldots;$$

легко убедиться последовательной подстановкой $\varepsilon + 2q^4\varepsilon - q^9 + \ldots$ [2]) вместо q в правую часть, что четыре первых члена даются рядом

$$q = \varepsilon + 2\varepsilon^5 + 15\varepsilon^9 + 150\varepsilon^{13} + O(\varepsilon^{17}).$$

Только что было показано, что этот ряд сходится, когда

$$|\varepsilon| < \frac{1}{2}.$$

[Примечание. Обычно достаточно двух первых членов этого разложения; даже когда k равно, например, $\sqrt{0{,}8704} = 0{,}933\ldots$, $\varepsilon = \frac{1}{8}$, $2\varepsilon^5 = 0{,}0000609$, $15\varepsilon^9 = 0{,}0000002$.]

Пример. При данных $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ вычислить q, K, K' при помощи только что полученного разложения, а также на основании того, что $\tau = i$, так что $q = e^{-\pi}$.

[$q = 0{,}0432139$, $K = K' = 1{,}854075$.]

---

[1]) Тэта-функции не обращаются в нуль нигде в области $|q| < 1$, кроме точки $q = 0$; таким образом, эта последняя есть единственная возможная точка ветвления.

[2]) Это разложение дано Вейерштрассом (Weierstrass, Werke, II (1895), 276).

21.9. Обозначения, применяемые для тэта-функций

Следующая схема указывает главные системы обозначений, применяемые различными авторами; символы в каком-либо одном столбце обозначают одну и ту же функцию.

$\vartheta_1(\pi z)$	$\vartheta_2(\pi z)$	$\vartheta_3(\pi z)$	$\vartheta(\pi z)$	Якоби (Jacobi)
$\vartheta_1(z)$	$\vartheta_2(z)$	$\vartheta_3(z)$	$\vartheta_4(z)$	Таннери и Мольк (Tannery, Molk)
$\theta_1(\omega z)$	$\theta_2(\omega z)$	$\theta_3(\omega z)$	$\theta(\omega z)$	Брио и Буке (Briot, Bouquet)
$\theta_1(z)$	$\theta_2(z)$	$\theta_3(z)$	$\theta_0(z)$	Вейерштрасс, Альфан, Хенкок (Weierstrass, Halphen, Hancock)
$\theta(z)$	$\theta_1(z)$	$\theta_3(z)$	$\theta_2(z)$	Жордан, Харкнесс, Морли (Jordan, Harkness, Morley)

Эрмит, Смит (H. J. S. Smith) и некоторые другие математики применяют обозначения, выражаемые равенством

$$\theta_{\mu,\nu}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n\nu} q^{\frac{1}{4}(2n+\mu)^2} e^{i\pi(2n+\mu)\frac{x}{a}} \qquad (\mu = 0,\ 1;\quad \nu = 0,\ 1).$$

При этом обозначения формулы примера 3 § 21.11 принимают весьма сжатую форму:

$$\theta_{\mu,\nu}(x+a) = (-1)^{\mu}\theta_{\mu,\nu}(x), \quad \theta_{\mu,\nu}(x+a\tau) = (-1)^{\nu} q^{-1} e^{-\frac{2i\pi x}{a}} \theta_{\mu,\nu}(x).$$

Кэли применяет ранние обозначения Якоби (§ 21.62). Преимущество обозначений Вейерштрасса заключается в том, что единица (а не π) является вещественным периодом функций $\theta_3(z)$ и $\theta_0(z)$.

Обозначения Жордана показывают аналогию между тэта-функциями и тремя сигма-функциями, определенными в § 20.421. Легко получить соотношения, подобные соотношениям § 21.43, связывающие $\theta_r(z)$ с $\sigma_r(2\omega_1 z)$, когда $r = 1, 2, 3$.

ЛИТЕРАТУРА

L. Euler, Opera Omnia (1), XX (Leipzig, 1912).
C. G. J. Jacobi, Fundamenta Nova [1]) (Königsberg, 1829); Ges. Math. Werke, I, 497—538.
C. Hermite, Oeuvres Mathématiques (Paris, 1905—1917).
F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (ausgearbeitet und vervollständigt von R. Fricke) (Leipzig, 1890).
H. Weber, Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen (Brunswick, 1891).
J. Tannery et J. Molk, Functions elliptiques (Paris, 1893—1902).

[1]) Напечатано в его Ges. Math. Werke, I (1881), 49—239.

А. Гурвиц, Теория аналитических и эллиптических функций, Ленинград, ГТТИ, 1933.
Н. И. Ахиезер, Элементы теории эллиптических функций, Гостехиздат, М. — Л., 1948.

Примеры

1. Получить формулы сложения

$$\vartheta_1(y+z)\vartheta_1(y-z)\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\vartheta_2^2(z)-\vartheta_2^2(y)\vartheta_3^2(z)=\vartheta_1^2(y)\vartheta_4^2(z)-\vartheta_4^2(y)\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_2(y+z)\vartheta_2(y-z)\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(y)\vartheta_2^2(z)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_3^2(z)=\vartheta_2^2(y)\vartheta_4^2(z)-\vartheta_3^2(y)\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_3(y+z)\vartheta_3(y-z)\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(y)\vartheta_3^2(z)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_2^2(z)=\vartheta_3^2(y)\vartheta_4^2(z)-\vartheta_2^2(y)\vartheta_1^2(z),$$
$$\vartheta_4(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\vartheta_3^2(z)-\vartheta_2^2(y)\vartheta_2^2(z)=\vartheta_4^2(y)\vartheta_4^2(z)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_1^2(z).$$

(Jacobi)

2. Получить формулы сложения

$$\vartheta_4(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_2^2=\vartheta_4^2(y)\vartheta_2^2(z)+\vartheta_3^2(y)\vartheta_1^2(z)=\vartheta_2^2(y)\vartheta_4^2(z)+\vartheta_1^2(y)\vartheta_3^2(z),$$
$$\vartheta_4(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_3^2=\vartheta_4^2(y)\vartheta_3^2(z)+\vartheta_2^2(y)\vartheta_1^2(z)=\vartheta_3^2(y)\vartheta_4^2(z)+\vartheta_1^2(y)\vartheta_2^2(z)$$

и увеличением y на полупериоды получить соответствующие формулы для

$$\vartheta_r(y+z)\vartheta_r(y-z)\vartheta_2^2 \quad \text{и} \quad \vartheta_r(y+z)\vartheta_r(y-z)\vartheta_3^2,$$

где $r=1, 2, 3$.

(Jacobi)

3. Получить формулы

$$\vartheta_1(y\pm z)\vartheta_2(y\mp z)\vartheta_3\vartheta_4=\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(z)\vartheta_4(z)\pm\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z),$$
$$\vartheta_1(y\pm z)\vartheta_3(y\mp z)\vartheta_2\vartheta_4=\vartheta_1(y)\vartheta_3(y)\vartheta_2(z)\vartheta_4(z)\pm\vartheta_2(y)\vartheta_4(y)\vartheta_1(z)\vartheta_3(z),$$
$$\vartheta_1(y\pm z)\vartheta_4(y\mp z)\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_1(y)\vartheta_4(y)\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)\pm\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_1(z)\vartheta_4(z),$$
$$\vartheta_2(y\pm z)\vartheta_3(y\mp z)\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)\mp\vartheta_1(y)\vartheta_4(y)\vartheta_1(z)\vartheta_4(z),$$
$$\vartheta_2(y\pm z)\vartheta_4(y\mp z)\vartheta_2\vartheta_4=\vartheta_2(y)\vartheta_4(y)\vartheta_2(z)\vartheta_4(z)\mp\vartheta_1(y)\vartheta_3(y)\vartheta_1(z)\vartheta_3(z),$$
$$\vartheta_3(y\pm z)\vartheta_4(y\mp z)\vartheta_3\vartheta_4=\vartheta_3(y)\vartheta_4(y)\vartheta_3(z)\vartheta_4(z)\mp\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_1(z)\vartheta_2(z).$$

(Jacobi)

4. Получить формулы удвоения

$$\vartheta_2(2y)\vartheta_2\vartheta_4^2=\vartheta_2^2(y)\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_3^2(y),$$
$$\vartheta_3(2y)\vartheta_3\vartheta_4^2=\vartheta_3^2(y)\vartheta_4^2(y)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_2^2(y),$$
$$\vartheta_4(2y)\vartheta_4^3=\vartheta_3^4(y)-\vartheta_2^4(y)=\vartheta_4^4(y)-\vartheta_1^4(y).$$

(Jacobi)

5. Получить формулу удвоения

$$\vartheta_1(2y)\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_4=2\vartheta_1(y)\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_4(y).$$

(Jacobi)

6. Получить формулы удвоения из результатов, указанных в примере 2.
7. Показать, что при обозначениях § 21.22

$$[1]-[2]=[4]'-[3]', \quad [1]-[3]=[1]'-[3]', \quad [1]-[4]=[2]'-[3]',$$
$$[2]-[3]=[1]'-[4]', \quad [2]-[4]=[2]'-[4]', \quad [3]-[4]=[2]'-[1]'.$$

8. Показать, что

$$\begin{aligned}
2[1122] &= [1122]' + [2211]' - [4433]' + [3344]',\\
2[1133] &= [1133]' + [3311]' - [4422]' + [2244]',\\
2[1144] &= [1144]' + [4411]' - [3322]' + [2233]',\\
2[2233] &= [2233]' + [3322]' - [4411]' + [1144]',\\
2[2244] &= [2244]' + [4422]' - [3311]' + [1133]',\\
2[3344] &= [3344]' + [4433]' - [2211]' + [1122]'.
\end{aligned}$$

(Jacobi)

9. Получить формулы

$$2\pi^{-1}Kk^{\frac{1}{2}} = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1-q^{2n})^2(1-q^{2n-1})^{-2}\},$$

$$k^{\frac{1}{2}}k'^{-\frac{1}{2}} = 2q^{\frac{1}{4}}\prod_{n=1}^{\infty}\{(1+q^{2n})^2(1-q^{2n-1})^{-2}\}.$$

10. Вывести из примера 9 следующие результаты:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^6 = 2q^{\frac{1}{4}}k'k^{-\frac{1}{2}}, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n-1})^6 = 2q^{\frac{1}{4}}(kk')^{-\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})^6 = 2\pi^{-3}q^{-\frac{1}{2}}kk'K^3, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{2n})^6 = \frac{1}{4}q^{-\frac{1}{2}}kk'^{-\frac{1}{2}},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{n})^6 = 4\pi^{-3}q^{-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}k'^2K^3, \qquad \prod_{n=1}^{\infty}(1+q^{n})^6 = \frac{1}{2}q^{-\frac{1}{4}}k^{\frac{1}{2}}k'^{-1}.$$

(Jacobi)

11. Рассматривая интеграл $\int \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} e^{2niz}\,dz$, взятый по контуру, образованному параллелограммом с вершинами $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi+\pi\tau$, $-\frac{1}{2}\pi+\pi\tau$, показать, что когда n — положительное целое число,

$$(1-q^{2n})\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)}e^{2niz}\,dz = 2\pi i q^n,$$

и вывести отсюда, что при $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi\tau)$

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n\sin 2nz}{1-q^{2n}}.$$

12. Получить следующие разложения:

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} = \operatorname{ctg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

$$\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} = -\operatorname{tg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{2n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

$$\frac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n}\sin 2nz}{1-q^{2n}},$$

каждое из которых имеет место в полосе плоскости z, в которой соответствующий ряд абсолютно сходится.

13. Показать, что если $|\operatorname{Im} y| < \operatorname{Im}(\pi\tau)$ и $|\operatorname{Im} z| < \operatorname{Im}(\pi\tau)$, то

$$\frac{\vartheta_1(y+z)\,\vartheta_1'}{\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)} = \operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z + 4\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} q^{2mn}\sin(2my+2nz).$$

(Math. Trip., 1908)

14. Показать, что при $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi\tau)$

$$\frac{Kk^{\frac{1}{2}}}{\pi}\,\frac{\vartheta_4}{\vartheta_4(z)} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos 2nz,$$

где

$$a_n = 2\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m q^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(2n+m+\frac{1}{2}\right)}.$$

(Math. Trip., 1903)

[Получить формулу приведения для a_n, рассматривая интеграл

$$\int \{\vartheta_4(z)\}^{-1} e^{2niz}\,dz,$$

взятый по контуру примера 11.]

15. Показать, что выражение

$$\frac{\vartheta_1'(z)}{\vartheta_1(z)} - \left[\operatorname{ctg} z + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}\sin 2z}{1-2q^{2n}\cos 2z+q^{4n}}\right]$$

будет двоякопериодической функцией от z без особых точек, и вывести отсюда, что оно будет равно нулю.

Доказать подобным же образом, что

$$\frac{\vartheta_2'(z)}{\vartheta_2(z)} = -\operatorname{tg} z - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}\sin 2z}{1+2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}},$$

$$\frac{\vartheta_3'(z)}{\vartheta_3(z)} = -4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}\sin 2z}{1+2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}},$$

$$\frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n-1}\sin 2z}{1-2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2}}.$$

16. Получить значения k, k', K, K' с точностью до шести десятичных знаков при $q = \frac{1}{10}$.

[$k = 0{,}895769$, $k' = 0{,}444518$,
$K = 2{,}262700$, $K' = 1{,}658414$.]

17. Показать, что если $w + x + y + z = 0$, то в обозначениях § 21.22

$$[3] + [1] = [2] + [4],$$
$$[1234] + [3412] + [2143] + [4321] = 0.$$

18. Показать, что

$$\frac{\vartheta_4'(y)}{\vartheta_4(y)} + \frac{\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)} - \frac{\vartheta_4'(y+z)}{\vartheta_4(y+z)} = \vartheta_2\vartheta_3 \frac{\vartheta_1(y)\,\vartheta_1(z)\,\vartheta_1(y+z)}{\vartheta_4(y)\,\vartheta_4(z)\,\vartheta_4(y+z)}.$$

19. Положив $x = y = z$, $w = 3x$ в основных формулах Якоби, получить следующие формулы:

$$\vartheta_1^3(x)\,\vartheta_1(3x) + \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x) = \vartheta_4^3(2x)\,\vartheta_4,$$
$$\vartheta_3^3(x)\,\vartheta_3(3x) - \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x) = \vartheta_2^3(2x)\,\vartheta_2,$$
$$\vartheta_2^3(x)\,\vartheta_2(3x) + \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x) = \vartheta_3^3(2x)\,\vartheta_3.$$

20. Показать, исходя из примера 19, что

$$\left\{\vartheta_1^3(x)\,\vartheta_1(3x)\,\vartheta_4^2 + \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_4^2\right\}^{\frac{2}{3}} + \left\{\vartheta_3^3(x)\,\vartheta_3(3x)\,\vartheta_2^2 - \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_2^2\right\}^{\frac{2}{3}} =$$
$$= \left\{\vartheta_2^3(x)\,\vartheta_2(3x)\,\vartheta_3^2 + \vartheta_4^3(x)\,\vartheta_4(3x)\,\vartheta_3^2\right\}^{\frac{2}{3}}.$$

(Trinity, 1882)

21. Показать с помощью теоремы Лиувилля, что

$$\frac{2\vartheta_1(z)\,\vartheta_2(z)\,\vartheta_3(z)\,\vartheta_4(z)}{\vartheta_1(2z)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0)}$$

— постоянная, и затем, заставляя $z \to 0$, что эта постоянная равна 1.

Отсюда сравнением коэффициентов при z^2 в разложениях выражений

$$\lg \frac{\vartheta_1(2z)}{2\vartheta_1(z)} \quad \text{и} \quad \lg \frac{\vartheta_2(z)}{\vartheta_2(0)} + \lg \frac{\vartheta_3(z)}{\vartheta_3(0)} + \lg \frac{\vartheta_4(z)}{\vartheta_4(0)}$$

по формуле Маклорена вывести, что

$$\frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} = \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} + \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} + \frac{\vartheta_4''(0)}{\vartheta_4(0)}.$$

Отсюда, далее, по способу § 21.41 вывести, что

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)\,\vartheta_4(0).$$

[На этот способ вывода предварительной формулы § 21.41 указал авторам Стюарт (C. A. Stewart).]

ГЛАВА 22

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ЯКОБИ

22.1. Эллиптические функции с двумя простыми полюсами

При доказательстве общих теорем об эллиптических функциях, изложенных в начале главы 20, было указано, что наиболее простыми являются два класса эллиптических функций, а именно классы эллиптических функций второго порядка. Функции первого класса имеют двойной полюс (с нулевым вычетом) в каждой ячейке, функции второго — два простых полюса, причем сумма вычетов в этих полюсах равна нулю.

Пример функции первого класса, а именно функция $\wp(z)$, был рассмотрен подробно в главе 20; в настоящей главе мы рассмотрим различные примеры функций второго класса, известных под названием *эллиптических функций Якоби*[1]).

Мы увидим (§ 22.122, примечание), что при известных условиях функции Якоби вырождаются в обыкновенные круговые функции; соответственно этому будут применяться обозначения (выведенные Якоби и видоизмененные Гудерманом и Глешером), которые подчеркивают аналогию между функциями Якоби и круговыми функциями.

С теоретической точки зрения проще всего рассматривать функции Якоби как отношения тэта-функций (§ 21.61). Но так как многие из их основных свойств могут быть получены при помощи совсем элементарных методов, без обращения к теории тэта-функций, мы будем изучать функции Якоби, не пользуясь главой 21, за исключением случаев, когда желательно к этому прибегнуть ради краткости или простоты.

---

[1]) Эти функции были введены Якоби, но многие из их свойств были получены независимо от него Абелем, который применял иные обозначения. См. примечание на стр. 404.

22.11. Эллиптические функции Якоби sn u, cn u, dn u

В § 21.61 было показано, что если

$$y=\frac{\vartheta_3\vartheta_1\left(u/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_2\vartheta_4\left(u/\vartheta_3^2\right)},$$

где тэта-функции составляются с параметром τ, то

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2),$$

где $k^{\frac{1}{2}}=\vartheta_2(0|\tau)/\vartheta_3(0|\tau)$. Обратно, если задана постоянная k (называемая *модулем*[1]), то, кроме случаев, когда $k^2\geqslant 1$ или $k^2\leqslant 0$, всегда может быть найдено значение τ (§§ 21.7—21.712), для которого

$$\frac{\vartheta_2^4(0\mid\tau)}{\vartheta_3^4(0\mid\tau)}=k^2;$$

тогда решением дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2=(1-y^2)(1-k^2y^2),$$

подчиненным условию $\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=y=0}=1$, будет

$$y=\frac{\vartheta_3\vartheta_1\left(u/\vartheta_3^2\right)}{\vartheta_2\vartheta_4\left(u/\vartheta_3^2\right)},$$

причем тэта-функции имеют в качестве параметра найденное значение τ.

Дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$u=\int_0^y(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

и по методам § 21.73 можно показать, что если y и u связаны между собой этой интегральной зависимостью, то y можно выразить через u как отношение двух тэта-функций по только что указанной формуле.

Таким образом, если

$$u=\int_0^y(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

то y можно рассматривать как функцию от u, определяемую отно-

---

[1]) Если $0<k<1$ и θ — острый угол, такой, что $\sin\theta=k$, то θ называется *модулярным углом*.

шением тэта-функций; таким образом, y является аналитической функцией от u, исключая особые точки, которые будут простыми полюсами; для того чтобы выразить эту функциональную зависимость, положим

$$y = \operatorname{sn}(u, k)$$

или просто $y = \operatorname{sn} u$, когда нет необходимости указывать модуль [1]).

Функция $\operatorname{sn} u$ есть одна из *эллиптических функций Якоби* от u, и мы имеем

$$\operatorname{sn} u = \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_1(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}. \tag{A}$$

[Если теория тэта-функций не предполагается известной, то чрезвычайно трудно показать, что интегральная формула определяет y как функцию от u, аналитическую всюду, за исключением простых полюсов. См. Hancock, Elliptic Functions, I (New York, 1910).]

Теперь положим

$$\operatorname{cn}(u, k) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_2} \frac{\vartheta_2(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}, \tag{B}$$

$$\operatorname{dn}(u, k) = \frac{\vartheta_4}{\vartheta_3} \frac{\vartheta_3(u/\vartheta_3^2)}{\vartheta_4(u/\vartheta_3^2)}. \tag{C}$$

Тогда из соотношения § 21.6 находим

$$\frac{d}{du} \operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, \tag{I}$$

а из соотношений § 21.2 найдем

$$\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1, \tag{II}$$

$$k^2 \operatorname{sn}^2 u + \operatorname{dn}^2 u = 1 \tag{III}$$

и, очевидно,

$$\operatorname{cn} 0 = \operatorname{dn} 0 = 1. \tag{IV}$$

Мы будем теперь изучать свойства функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, определенных равенствами (A), (B), (C), пользуясь четырьмя соотношениями (I), (II), (III), (IV); эти четыре соотношения достаточны для того, чтобы сделать $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ определенными функциями от u.

Мы будем считать известным, что $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ — однозначные функции от u, аналитические всюду, за исключением их полюсов; также будем считать известным, что они являются однозначными функциями от k^2, когда в плоскости комплексной переменной k^2 сделаны разрезы от 1 до $+\infty$ и от 0 до $-\infty$.

---

[1]) Модуль будет всегда указываться, когда он не равен k.

22.12. Простые свойства функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Из формулы

$$u = \int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

ясно, что при изменении знака у y изменяется также знак у u: для доказательства достаточно заменить t на $-t$.

Отсюда следует, что $\operatorname{sn} u$ — *нечетная функция от* u.

Так как $\operatorname{sn}(-u) = -\operatorname{sn} u$, то из (II) вытекает, что $\operatorname{cn}(-u) = \pm \operatorname{cn} u$; вследствие однозначности $\operatorname{cn} u$ из теории аналитического продолжения вытекает, что всегда следует брать один и тот же знак, верхний или нижний. В частном случае, когда $u = 0$, следует взять верхний знак, и таким образом он берется всегда; отсюда $\operatorname{cn}(-u) = \operatorname{cn} u$, и следовательно, $\operatorname{cn} u$ будет *четной функцией от* u. Подобным же образом $\operatorname{dn} u$ является четной функцией от u. Эти результаты ясны также из определений (A), (B) и (C) § 22.11.

Продифференцируем теперь равенство $\operatorname{sn}^2 u + \operatorname{cn}^2 u = 1$ и используем равенство (I); тогда получим

$$\frac{d \operatorname{cn} u}{du} = -\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u;$$

подобным же образом из соотношений (III) и (I) находим

$$\frac{d \operatorname{dn} u}{du} = -k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u.$$

22.121. Дополнительный модуль

Если $k^2 + k'^2 = 1$ и $k' \to +1$, когда $k \to 0$, то k' называется *дополнительным модулем*. При наличии разреза в плоскости k^2 от 1 до $+\infty$ k' является однозначной функцией от k.

[С помощью тэта-функций мы можем сделать и $k'^{\frac{1}{2}}$ однозначным, определяя его как

$$\frac{\vartheta_4(0 \mid \tau)}{\vartheta_3(0 \mid \tau)}.]$$

Пример. Показать, что если

$$u = \int_y^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (k'^2 + k^2t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

то

$$y = \operatorname{cn}(u, k).$$

Показать также, что если

$$u = \int_y^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (t^2 - k'^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

то

$$y = \operatorname{dn}(u, k).$$

[Эти результаты иногда пишутся в форме

$$u = \int_{\operatorname{cn} u}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (k'^2 + k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_{\operatorname{dn} u}^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} (t^2 - k'^2)^{-\frac{1}{2}} dt.\Big]$$

22.122. Обозначение Глешера[1]) для отношений

Глешером введено было краткое и удобное обозначение для обратных величин и отношений эллиптических функций Якоби; для обозначения обратных величин изменяется порядок букв, обозначающих функцию, например:

$$\operatorname{ns} u = \frac{1}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{nc} u = \frac{1}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{nd} u = \frac{1}{\operatorname{dn} u},$$

а для обозначения отношений пишутся по порядку первые буквы названий функций, стоящих в числителе и знаменателе, например:

$$\operatorname{sc} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}, \quad \operatorname{sd} u = \frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u}, \quad \operatorname{cd} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u},$$

$$\operatorname{cs} u = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{ds} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}, \quad \operatorname{dc} u = \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u}.$$

[Примечание. Якоби обозначал функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ соответственно через $\sin\operatorname{am} u$, $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u$; сокращенное обозначение, применяемое ныне, принадлежит Гудерману[2]), который писал также $\operatorname{tn} u$ как сокращенное обозначение для $\operatorname{tg}\operatorname{am} u$, вместо чего теперь пишется $\operatorname{sc} u$.

Основанием обозначений Якоби было то обстоятельство, что он рассматривал обращение интеграла

$$u = \int_0^\varphi (1 - k^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta$$

как основную функцию и писал[3]) $\varphi = \operatorname{am} u$; он же употреблял обозначение $\Delta\varphi = (1 - k^2 \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}$ для $\frac{d\varphi}{du}$.]

---

[1]) Glaisher, Messenger of Mathematics, XI (1882), 86.
[2]) Gudermann, Journ. für Math., XVIII (1838), 12, 20.
[3]) Fundamenta Nova, 30. Когда $k \to 0$, то $\operatorname{am} u \to u$.

Пример. Получить следующие результаты:

$$u=\int_0^{\operatorname{sc} u}(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{cs} u}^{\infty}(t^2+1)^{-\frac{1}{2}}(t^2+k'^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_0^{\operatorname{sd} u}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}(1+k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{ds} u}^{\infty}(t^2-k'^2)^{-\frac{1}{2}}(t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_{\operatorname{cd} u}^{1}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_{\operatorname{dc} u}^{1}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_{\operatorname{ns} u}^{\infty}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(t^2-k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=\int_1^{\operatorname{nc} u}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(k'^2t^2+k^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=$$

$$=\int_1^{\operatorname{nd} u}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

22.2. Теорема сложения для функции $\operatorname{sn} u$

Покажем теперь, как выразить $\operatorname{sn}(u+v)$ через эллиптические функции Якоби от u и v; результат и будет теоремой сложения для функции $\operatorname{sn} u$; это будет теорема сложения в точном смысле слова, так как она может быть написана в виде алгебраического соотношения, связывающего $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{sn} v$, $\operatorname{sn}(u+v)$.

[Имеется много методов доказательства теоремы сложения; приводимый нами, по существу, принадлежит Эйлеру [1]), который первым нашел (в 1756, 1757 гг.) интеграл уравнения

$$\frac{dx}{\sqrt{X}}+\frac{dy}{\sqrt{Y}}=0$$

в форме алгебраического соотношения между x и y, где X обозначает полином 4-й степени от x, а Y — тот же самый полином от y.

Три других метода [2]) даны как примеры в конце этого параграфа.]

Предположим, что u и v изменяются так, что $u+v$ остается постоянным и равным α, т. е. так, что

$$\frac{dv}{du}=-1.$$

---

[1]) Acta Petropolitana, VI (1761), 35—57. Эйлер получил некоторые частные случаи этого результата на несколько лет раньше.

[2]) Иной метод дан Лежандром (Legendre, Fonctions Elliptiques, I (Paris, 1825), 20), и весьма интересное геометрическое доказательство дано Якоби (Jacobi, Journ. für Math., III (1828), 376).

Введем теперь в качестве новых переменных s_1 и s_2, определяемые равенствами

$$s_1 = \operatorname{sn} u, \quad s_2 = \operatorname{sn} v,$$

так что[1])

$$\dot{s}_1^2 = (1 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2)$$

и

$$\dot{s}_2^2 = (1 - s_2^2)(1 - k^2 s_2^2),$$

так как $\dot{v}^2 = 1$.

Дифференцируя по u и деля соответственно на $2\dot{s}_1$ и $2\dot{s}_2$, найдем, что для общих значений[2]) u и v

$$\ddot{s}_1 = -(1 + k^2) s_1 + 2k^2 s_1^3, \quad \ddot{s}_2 = -(1 + k^2) s_2 + 2k^2 s_2^3.$$

Отсюда при помощи легких алгебраических действий находим

$$\frac{\ddot{s}_1 s_2 - \ddot{s}_2 s_1}{\dot{s}_1^2 s_2^2 - \dot{s}_2^2 s_1^2} = \frac{2k^2 s_1 s_2 (s_1^2 - s_2^2)}{(s_2^2 - s_1^2)(1 - k^2 s_1^2 s_2^2)},$$

т. е.

$$(\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1)^{-1} \frac{d}{du} (\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1) = (1 - k^2 s_1^2 s_2^2)^{-1} \frac{d}{du} (1 - k^2 s_1^2 s_2^2);$$

интегрируя это уравнение, находим

$$\frac{\dot{s}_1 s_2 - \dot{s}_2 s_1}{1 - k^2 s_1^2 s_2^2} = C,$$

где C — постоянная интегрирования.

Заменяя выражения в левой части их значениями через u и v, получим

$$\frac{\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v + \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \operatorname{sn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C.$$

Таким образом, имеем два интеграла уравнения $du + dv = 0$, а именно:

$$u + v = \alpha \tag{I}$$

и

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v} = C, \tag{II}$$

---

[1]) Для краткости обозначаем производные по u точками над буквами, а именно:

$$\dot{v} \equiv \frac{dv}{du}, \quad \ddot{v} \equiv \frac{d^2 v}{du^2}.$$

[2]) То есть для тех значений, для которых $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$ и $\operatorname{cn} v \operatorname{dn} v$ не равны нулю.

причем каждый интеграл содержит произвольную постоянную. По общей теории дифференциальных уравнений первого порядка эти интегралы не могут быть функционально независимыми, и таким образом,

$$\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v}$$

является функцией от $u+v$; назовем эту функцию через $f(u+v)$.

Положив $v=0$, видим, что $f(u)=\operatorname{sn} u$, и следовательно, функция f есть sn.

Таким образом, мы доказали формулу

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v + \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

что и представляет теорему сложения.

Пользуясь очевидными обозначениями[1]), можем написать

$$\operatorname{sn}(u+v)=\frac{s_1c_2d_2+s_2c_1d_1}{1-k^2s_1^2s_2^2}.$$

Пример 1. Получить теорему сложения для $\sin u$, воспользовавшись формулами

$$\left(\frac{d\sin u}{du}\right)^2=1-\sin^2 u, \quad \left(\frac{d\sin v}{dv}\right)^2=1-\sin^2 v.$$

Пример 2. Доказать, пользуясь соотношениями (I) — (IV) § 22.11, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\right)\frac{s_1c_2d_2+s_2c_1d_1}{1-k^2s_1^2s_2^2}=0,$$

и вывести теорему сложения для sn u.

(Abel, Journ. für Math., II (1827), 105)

Пример 3. Показать, что

$$\operatorname{sn}(u+v)\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1c_2d_2-s_2c_1d_1}=\frac{s_1c_1d_2+s_2c_2d_1}{c_1c_2+s_1d_1s_2d_2}=\frac{s_1d_1c_2+s_2d_2c_1}{d_1d_2+k^2s_1s_2c_1c_2}.$$

(Cayley, Elliptic Functions (1876), 63)

Пример 4. Получить теорему сложения для sn u из формул

$$\vartheta_1(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_2\vartheta_3=\vartheta_1(y)\vartheta_4(y)\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)+\vartheta_2(y)\vartheta_3(y)\vartheta_1(z)\vartheta_4(z),$$

$$\vartheta_4(y+z)\vartheta_4(y-z)\vartheta_4^2=\vartheta_4^2(y)\vartheta_4^2(z)-\vartheta_1^2(y)\vartheta_1^2(z),$$

данных в примерах 1 и 3 к главе 21 (стр. 369).

(Jacobi)

---

[1]) Эти обозначения принадлежат Глешеру (Glaisher, Messenger, X (1881), 92, 124).

Пример 5. Предполагая, что координаты любой точки кривой

$$y^2 = (1 - x^2)(1 - k^2x^2)$$

могут быть выражены в виде ($\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u \operatorname{dn} u$), получить теорему сложения для $\operatorname{sn} u$ по методу Абеля (§ 20.312).

[Рассмотреть точки пересечения данной кривой с переменной кривой $y = 1 + mx + nx^2$, одна из них будет (0, 1); пусть другие имеют параметры u_1, u_2, u_3, из которых u_1, u_2 могут быть взяты произвольно при надлежащем выборе m и n. Показать методом § 20.312, что $u_1 + u_2 + u_3$ постоянна, и вывести, что эта постоянная равняется нулю, полагая

$$m = 0, \quad n = -\frac{1}{2}(1 + k^2).$$

Заметим также, что в силу соотношений

$$(k^2 - n^2)\, x_1x_2x_3 = 2m, \quad (k^2 - n^2)(x_1 + x_2 + x_3) = 2mn$$

имеем

$$\begin{aligned} x_3(1 - k^2x_1^2x_2^2) &= x_3 - \left(1 + \frac{n^2}{k^2 - n^2}\right) 2mx_1x_2 = \\ &= x_3 - 2mx_1x_2 - nx_1x_2(x_1 + x_2 + x_3) = \\ &= (x_1 + x_2 + x_3 - nx_1x_2x_3) - (x_1 + x_2) - 2mx_1x_2 - nx_1x_2(x_1 + x_2) = \\ &= -x_1y_2 - x_2y_1.] \end{aligned}$$

22.21. Теоремы сложения для $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$

Докажем теперь формулы

$$\operatorname{cn}(u + v) = \frac{\operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn} u \operatorname{dn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v},$$

$$\operatorname{dn}(u + v) = \frac{\operatorname{dn} u \operatorname{dn} v - k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 v};$$

наиболее просто будет получить их из формулы для $\operatorname{sn}(u + v)$.

Пользуясь обозначением, введенным в конце § 22.2, имеем

$$\begin{aligned} (1 - k^2s_1^2s_2^2)^2 \operatorname{cn}^2(u + v) &= (1 - k^2s_1^2s_2^2)^2 \{1 - \operatorname{sn}^2(u + v)\} = \\ &= (1 - k^2s_1^2s_2^2)^2 - (s_1c_2d_2 + s_2c_1d_1)^2 = \\ &= 1 - 2k^2s_1^2s_2^2 + k^4s_1^4s_2^4 - s_1^2(1 - s_2^2)(1 - k^2s_2^2) - \\ &- s_2^2(1 - s_1^2)(1 - k^2s_1^2) - 2s_1s_2c_1c_2d_1d_2 = \\ &= (1 - s_1^2)(1 - s_2^2) + s_1^2s_2^2(1 - k^2s_1^2)(1 - k^2s_2^2) - 2s_1s_2c_1c_2d_1d_2 = \\ &= (c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2)^2, \end{aligned}$$

и таким образом,

$$\operatorname{cn}(u + v) = \pm \frac{c_1c_2 - s_1s_2d_1d_2}{1 - k^2s_1^2s_2^2}.$$

Но обе части этого равенства являются однозначными функциями от u, аналитическими всюду, кроме полюсов, и невозможно по теории аналитического продолжения, чтобы их отношение было $+1$

для одних значений u и -1 для других значений, так что двойной знак является в действительности определенным; положив $u=0$, видим, что следует взять знак плюс. Первая формула, следовательно, доказана.

Формула для $\operatorname{dn}(u+v)$ получается подобным же образом из тождества

$$(1-k^2s_1^2s_2^2)^2-k^2(s_1c_2d_2+s_2c_1d_1)^2\equiv$$
$$\equiv(1-k^2s_1^2)(1-k^2s_2^2)+k^4s_1^2s_2^2(1-s_1^2)(1-s_2^2)-2k^2s_1s_2c_1c_2d_1d_2,$$

доказательство которого предоставляется читателю.

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{dn}(u+v)\operatorname{dn}(u-v)=\frac{d_2^2-k^2s_1^2c_2^2}{1-k^2s_1^2s_2^2}.$$

(Jacobi)

[Совокупность 33 формул подобного рода, связывающих функции от $u+v$ и от $u-v$, дана в «Fundamenta Nova», 32—34.]

Пример 2. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u}=\frac{\partial}{\partial v}\frac{\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v}{\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u},$$

так что отношение $(\operatorname{cn} u+\operatorname{cn} v)/(\operatorname{sn} u\operatorname{dn} v+\operatorname{sn} v\operatorname{dn} u)$ является функцией только от $u+v$, и вывести, что оно равно $\{1+\operatorname{cn}(u+v)\}/\operatorname{sn}(u+v)$.

Получить соответствующий результат для функции $(s_1c_2+s_2c_1)/(d_1+d_2)$.

(Cayley, Messenger, XIV (1885), 56—61)

Пример 3. Показать, что

$$1-k^2\operatorname{sn}^2(u+v)\operatorname{sn}^2(u-v)=(1-k^2\operatorname{sn}^4 u)(1-k^2\operatorname{sn}^4 v)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v)^{-2},$$
$$k'^2+k^2\operatorname{cn}^2(u+v)\operatorname{cn}^2(u-v)=$$
$$=(k'^2+k^2\operatorname{cn}^4 u)(k'^2+k^2\operatorname{cn}^4 v)(1-k^2\operatorname{sn}^2 u\operatorname{sn}^2 v)^{-2}.$$

(Jacobi, Glaisher)

Пример 4. Получить теоремы сложения для $\operatorname{cn}(u+v)$, $\operatorname{dn}(u+v)$ по методу примера 4 § 22.2.

Пример 5. Применяя сокращенные обозначения Глешера (Messenger, X (1881), 105), а именно:

$$s,\ c,\ d=\operatorname{sn} u,\ \operatorname{cn} u,\ \operatorname{dn} u \text{ и } S,\ C,\ D=\operatorname{sn} 2u,\ \operatorname{cn} 2u,\ \operatorname{dn} 2u,$$

доказать, что

$$S=\frac{2scd}{1-k^2s^4},\quad C=\frac{1-2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4},\quad D=\frac{1-2k^2s^2+k^2s^4}{1-k^2s^4},$$

$$s=\frac{(1+S)^{\frac{1}{2}}-(1-S)^{\frac{1}{2}}}{(1+kS)^{\frac{1}{2}}+(1-kS)^{\frac{1}{2}}}.$$

Пример 6. В обозначениях примера 5 показать, что

$$s^2 = \frac{1-C}{1+D} = \frac{1-D}{k^2(1+C)} = \frac{D-k^2C-k'^2}{k^2(D-C)} = \frac{D-C}{k'^2+D-k^2C},$$

$$c^2 = \frac{D+C}{1+D} = \frac{D+k^2C-k'^2}{k^2(1+C)} = \frac{k'^2(1-D)}{k^2(D-C)} = \frac{k'^2(1+C)}{k'^2+D-k^2C},$$

$$d^2 = \frac{k'^2+D+k^2C}{1+D} = \frac{D+C}{1+C} = \frac{k'^2(1-C)}{D-C} = \frac{k'^2(1+D)}{k'^2+D-k^2C}.$$

(Glaisher)

22.3. Постоянная K

Мы видели, что если

$$u = \int_0^y (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

то

$$y = \operatorname{sn}(u,\ k).$$

При верхнем пределе, равном единице (причем путь интегрирования — прямая), принято обозначать значение этого интеграла символом K, так что $\operatorname{sn}(K,\ k) = 1$.

[В § 22.302 увидим, что это определение K эквивалентно определению его как $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$ в § 21.61.]

Очевидно, что $\operatorname{cn} K = 0$ и $\operatorname{dn} K = \pm k'$; для определения знака предположим, что $0 < k < 1$, и проследим, как изменяется выражение $(1-k^2t^2)^{\frac{1}{2}}$, когда t возрастает от 0 до 1; так как это выражение первоначально равно единице и так как t не встречает ни одной из его точек ветвления (точек $t = \pm k^{-1}$), то конечное значение выражения будет положительно и, следовательно, будет равно $+k'$; так как $\operatorname{dn} K$ — непрерывная функция от k, то ее значение будет всегда $+k'$.

Значения эллиптических функций при $u = K$ даются, таким образом, формулами

$$\operatorname{sn} K = 1, \quad \operatorname{cn} K = 0, \quad \operatorname{dn} K = k'.$$

22.301. Выражение K через k

Положим $t = \sin\varphi$ в интеграле, определяющем K, тогда получим

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi.$$

При $|k| < 1$ подинтегральная функция может быть разложена в ряд по степеням k, ряд будет равномерно сходящимся относительно φ (по § 3.34 части I, так как $\sin^{2n}\varphi \leqslant 1$); интегрируя его почленно (§ 4.7, часть I), получим

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ k^2\right) = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2};\ 1;\ c\right),$$

где $c = k^2$. По теории аналитического продолжения этот результат сохраняется для всех значений c, когда в плоскости c сделан разрез от 1 до $+\infty$, ибо как подинтегральная функция, так и гипергеометрическая функция будут однозначными и аналитическими в разрезанной плоскости.

Пример. Показать, что

$$\frac{d}{dk}\left(kk'^2\frac{dK}{dk}\right) = kK.$$

(Legendre, Fonctions Elliptiques, 1 (1825), 62)

22.302. Эквивалентность определений K

Положив в § 21.61 $u = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$, видим сразу, что $\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 1$ и, таким образом, $\operatorname{cn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 0$. Следовательно, $1 - \operatorname{sn} u$ имеет *двойной нуль* при $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$. Так как число полюсов функции $\operatorname{sn} u$ в ячейке с вершинами $0,\ 2\pi\vartheta_3^2,\ \pi(\tau+1)\vartheta_3^2,\ \pi(\tau-1)\vartheta_3^2$ равно двум, то на основании § 20.13 заключаем, что нули, расположенные в точках $u = \frac{1}{2}\pi(4m+1+2n\pi)\vartheta_3^2$, где m и n — целые числа, будут *единственными* нулями функции $1 - \operatorname{sn} u$. Поэтому по определению § 22.3

$$K = \frac{1}{2}\pi(4m+1+2\pi\tau)\vartheta_3^2.$$

Возьмем теперь τ чисто мнимым, так что $0 < k < 1$, а K вещественно; мы имеем $n = 0$, так что

$$\frac{1}{2}\pi(4m+1)\vartheta_3^2 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi,$$

где m — положительное целое число или нуль; отрицательным целым числом оно, очевидно, быть не может.

Если бы m было положительным числом, то, поскольку

$$\int_0^{\alpha}(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi$$

является непрерывной функцией от α и, следовательно, пробегает все значения между 0 и K при возрастании α от 0 до $\frac{1}{2}\pi$, мы могли бы найти значение α, *меньшее* $\frac{1}{2}\pi$, такое, что

$$\frac{K}{(4m+1)} = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2 = \int_0^\alpha (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi,$$

то тогда

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) \equiv \sin\alpha < 1,$$

что неверно, так как

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2\right) = 1.$$

Поэтому *m должно быть нулем*, другими словами, имеем

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2.$$

Как K, так и $\frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2$ являются аналитическими функциями от k в плоскости c с разрезом от 1 до $+\infty$, и таким образом, по теории аналитического продолжения, это соотношение, доказанное для $0 < k < 1$, сохраняется во всей разрезанной плоскости.

Эквивалентность двух определений K, таким образом, установлена.

Пример 1. Рассматривая интеграл

$$\int_0^{(1+)} (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt,$$

показать, что $\operatorname{sn} 2K = 0$.

Пример 2. Доказать, что

$$\operatorname{sn}\frac{1}{2}K = (1+k')^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{cn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}(1+k')^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{dn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}.$$

[Обратить внимание на то, что, когда $u = \frac{1}{2}K$, $\operatorname{cn} 2u = 0$. Для определения знаков, которые следует приписывать различным радикалам, проще всего заставить $k \to 0$, $k' \to 1$, тогда $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ вырождаются в $\sin u$, $\cos u$, 1.]

Пример 3. Доказать при помощи теории тэта-функций, что

$$\operatorname{cs}\frac{1}{2}K = \operatorname{dn}\frac{1}{2}K = k'^{\frac{1}{2}}.$$

22.31. Свойства периодичности (связанные с K) эллиптических функций Якоби

Тесную связь величины K со свойствами периодичности функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, которую можно предвидеть из свойств периодичности тэта-функций, связанных с $\frac{\pi}{2}$, докажем теперь непосредственно, исходя из теоремы сложения. Согласно § 22.2 имеем

$$\operatorname{sn}(u+K)=\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} K \operatorname{dn} K+\operatorname{sn} K \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 K}=\operatorname{cd} u.$$

Подобным же образом (§ 22.21)

$$\operatorname{cn}(u+K)=-k' \operatorname{sd} u, \quad \operatorname{dn}(u+K)=k' \operatorname{nd} u.$$

Отсюда

$$\operatorname{sn}(u+2K)=\frac{\operatorname{cn}(u+K)}{\operatorname{dn}(u+K)}=-\frac{k' \operatorname{sd} u}{k' \operatorname{nd} u}=-\operatorname{sn} u$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+2K)=-\operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn}(u+2K)=\operatorname{dn} u.$$

Окончательно получаем

$$\operatorname{sn}(u+4K)=-\operatorname{sn}(u+2K)=\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn}(u+4K)=\operatorname{cn} u.$$

Таким образом, $4K$ является периодом функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, в то время как $\operatorname{dn} u$ имеет меньший период $2K$.

Пример 1. Получить формулы

$$\operatorname{sn}(u+K)=\operatorname{cd} u, \quad \operatorname{cn}(u+K)=-k' \operatorname{sd} u, \quad \operatorname{dn}(u+K)=k' \operatorname{nd} u$$

непосредственно из определений функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ как отношений тэта-функций.

Пример 2. Показать, что $\operatorname{cs} u \operatorname{cs}(K-u)=k'$.

22.32. Постоянная K'

Обозначим интеграл

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2 t^2\right)^{-\frac{1}{2}} dt$$

символом K', так что K' является той же самой функцией от $k'^2 (=c')$, что и K от $k^2 (=c)$, и следовательно,

$$K'=\frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k'^2\right),$$

когда плоскость c' разрезана от 1 до $+\infty$, т. е. когда плоскость c разрезана от 0 до $-\infty$.

Чтобы показать, что это определение K' эквивалентно определению § 21.61, заметим, что K при $\tau\tau' = -1$ будет в разрезанной плоскости *однозначной* функцией от k^2, определяемой уравнениями

$$K = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau), \quad k^2 = \vartheta_2^4(0\,|\,\tau) : \vartheta_3^4(0\,|\,\tau),$$

в то время как, согласно определению § 21.51,

$$K' = \frac{1}{2}\pi\vartheta_3^2(0\,|\,\tau'), \quad k'^2 = \vartheta_2^4(0\,|\,\tau') : \vartheta_3^4(0\,|\,\tau'),$$

так что K' должно быть той же самой функцией от k'^2, как K от k^2, а это согласуется с интегральным определением K' как

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k'^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Покажем теперь, что если плоскость c разрезана от 0 до $-\infty$ и от 1 до $+\infty$, то в разрезанной плоскости K' может быть определено равенством

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (s^2-1)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2s^2)^{-\frac{1}{2}}\,ds.$$

Сначала предположим, что $0 < k < 1$, тогда и $0 < k' < 1$, и соответствующие интегралы будут вещественны.

В интеграле

$$\int_0^1 (1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}}dt$$

сделаем подстановку

$$s = \left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

которая дает

$$(s^2-1)^{\frac{1}{2}} = k't\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$(1-k^2s^2)^{\frac{1}{2}} = k'(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{k'^2t}{(1-k'^2t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

причем предполагаем, что каждый корень положителен.

После подстановки непосредственно получим требуемый результат:

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (s^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 s^2)^{-\frac{1}{2}} ds,$$

если $0 < k < 1$; теперь нужно обобщить этот результат на комплексные значения k.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

где путь интегрирования проходит над точкой 1 и не пересекает мнимой оси [1]). Этот путь может быть составлен из отрезков прямой, соединяющих точки 0, $1 - \delta$ и точки $1 + \delta$, k^{-1}, и из полуокружности (малого) радиуса δ над вещественной осью. Если $(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$ и $(1 - k^2 t^2)^{\frac{1}{2}}$ приводятся к $+1$ при $t = 0$, то значение первого радикала в точке $1 + \delta$ равно $e^{-\frac{1}{2}\pi i} \delta^{\frac{1}{2}} (2 + \delta)^{\frac{1}{2}} = -i (t^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, где каждый радикал положителен; значение же последнего в точке $t = 1$ равно $+k'$, когда k вещественно, а отсюда, по теории аналитического продолжения, оно всегда равно $+k'$.

Заставим $\delta \to 0$, тогда интеграл по полуокружности стремится к нулю, как $\delta^{\frac{1}{2}}$, и мы получим

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = K + i \int_1^{\frac{1}{k}} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Но интеграл [2])

$$\int_0^{\frac{1}{k}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 (k^2 - u^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}} du$$

и величина K — аналитические функции во всей разрезанной плоскости.

Следовательно, и интеграл

$$\int_1^{\frac{1}{k}} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

---

[1]) $\operatorname{Re} k > 0$, так как $|\arg c| < \pi$.

[2]) Путь интегрирования проходит над точкой $u = k$.

будет аналитической функцией на всей разрезанной плоскости, а так как он равен аналитической функции K' при $0 < k < 1$, то это равенство сохраняется на всей разрезанной плоскости; другими словами,

$$K' = \int_1^{\frac{1}{k}} (t^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt$$

во всей c-плоскости, разрезанной от 0 до $-\infty$ и от 1 до $+\infty$.

Так как

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} (1 - t^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - k^2 t^2)^{-\frac{1}{2}} dt,$$

то мы имеем

$$\operatorname{sn}(K + iK') = \frac{1}{k}, \quad \operatorname{dn}(K + iK') = 0,$$

а значение $\operatorname{cn}(K + iK')$ есть значение радикала $(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}$, когда t проходит по вышеуказанному пути в точку $\frac{1}{k}$, и, таким образом, его значение равно $\frac{-ik'}{k}$, *а не* $\frac{+ik'}{k}$.

Пример 1. Показать, что

$$\frac{1}{2} \int_0^1 \{t(1-t)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{k^2}}^{\infty} \{t(t-1)(k^2t-1)\}^{-\frac{1}{2}} dt = K,$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} \{-t(1-t)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \int_1^{\frac{1}{k^2}} \{t(t-1)(1-k^2t)\}^{-\frac{1}{2}} dt = K'.$$

Пример 2. Показать, что K' удовлетворяет тому же самому линейному дифференциальному уравнению, что и K (§ 22.301, пример).

22.33. Свойства периодичности [1]) (связанные с $K + iK'$) эллиптических функций Якоби

Если воспользуемся тремя равенствами:

$$\operatorname{sn}(K + iK') = k^{-1}, \quad \operatorname{cn}(K + iK') = -ik'/k, \quad \operatorname{dn}(K + iK') = 0,$$

то получим непосредственно из теорем сложения для $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

[1]) Двоякая периодичность функции $\operatorname{sn} u$ может быть выведена из динамических соображений. См. Э. Т. Уиттекер, Аналитическая динамика, ОНТИ, М.— Л., 1937, § 44.

следующие формулы:

$$\operatorname{sn}(u+K+iK') = \\ = \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn}(K+iK') \operatorname{dn}(K+iK') + \operatorname{sn}(K+iK') \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{sn}^2 (K+iK')} = k^{-1} \operatorname{dc} u$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+K+iK') = -ik'k^{-1} \operatorname{nc} u,$$
$$\operatorname{dn}(u+K+iK') = ik' \operatorname{sc} u.$$

Повторным применением этих формул получим, далее,

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2K+2iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2K+2iK') = -\operatorname{dn} u, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+4K+4iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4K+4iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+4K+4iK') = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Следовательно, функции $\operatorname{sn} u$ *и* $\operatorname{dn} u$ *имеют период* $4K+4iK'$, *в то время как* $\operatorname{cn} u$ *имеет меньший период* $2K+2iK'$.

22.34. Свойства периодичности (связанные с iK') эллиптических функций Якоби

По теореме сложения имеем

$$\operatorname{sn}(u+iK') = \operatorname{sn}(u-K+K+iK') = k^{-1} \operatorname{dc}(u-K) = k^{-1} \operatorname{ns} u.$$

Подобным же образом получим равенства

$$\operatorname{cn}(u+iK') = -ik^{-1} \operatorname{ds} u, \quad \operatorname{dn}(u+iK') = -i \operatorname{cs} u.$$

Повторным применением этих формул найдем

$$\begin{cases} \operatorname{sn}(u+2iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+2iK') = -\operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+2iK') = -\operatorname{dn} u, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{sn}(u+4iK') = \operatorname{sn} u, \\ \operatorname{cn}(u+4iK') = \operatorname{cn} u, \\ \operatorname{dn}(u+4iK') = \operatorname{dn} u. \end{cases}$$

Следовательно, функции $\operatorname{cn} u$ *и* $\operatorname{dn} u$ *имеют период* $4iK'$, *в то время как* $\operatorname{sn} u$ *имеет меньший период* $2iK'$.

Пример. Получить формулы

$$\operatorname{sn}(u+2mK+2niK') = (-1)^m \operatorname{sn} u,$$
$$\operatorname{cn}(u+2mK+2niK') = (-1)^{m+n} \operatorname{cn} u,$$
$$\operatorname{dn}(u+2mK+2niK') = (-1)^n \operatorname{dn} u.$$

22.341. Поведение эллиптических функций Якоби в окрестности начала координат и в окрестности iK'

Имеем

$$\frac{d}{du}\operatorname{sn} u = \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u,$$

$$\frac{d^3}{du^3}\operatorname{sn} u = 4k^2 \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u - \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u (\operatorname{dn}^2 u + k^2 \operatorname{cn}^2 u).$$

Отсюда по теореме Маклорена, используя нечетность функции $\operatorname{sn} u$, имеем для малых значений $|u|$

$$\operatorname{sn} u = u - \frac{1}{6}(1+k^2)u^3 + O(u^5).$$

Подобным же образом

$$\operatorname{cn} u = 1 - \frac{1}{2}u^2 + O(u^4),$$

$$\operatorname{dn} u = 1 - \frac{1}{2}k^2u^2 + O(u^4).$$

Отсюда найдем

$$\operatorname{sn}(u+iK') = k^{-1}\operatorname{ns} u = \frac{1}{ku}\left\{1 - \frac{1}{6}(1+k^2)u^2 + O(u^4)\right\}^{-1} = \\ = \frac{1}{ku} + \frac{1+k^2}{6k}u + O(u^3),$$

и подобным же образом

$$\operatorname{cn}(u+iK') = \frac{-i}{ku} + \frac{2k^2-1}{6k}iu + O(u^3),$$

$$\operatorname{dn}(u+iK') = -\frac{i}{u} + \frac{2-k^2}{6}iu + O(u^3).$$

Таким образом, в точке iK' функции $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ имеют простые полюсы с вычетами k^{-1}, $-ik^{-1}$, $-i$ соответственно.

Пример. Получить вычеты функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ при $u = iK'$ из теории тэта-функций.

22.35. Общее описание функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$

Предыдущие исследования функций $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$ могут быть сведены к следующим заключениям.

(I) Функция $\operatorname{sn} u$ есть двоякопериодическая функция от u с периодами $4K$, $2iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $2K + iK' \pmod{4K, 2iK'}$; эти точки являются простыми полюсами; вычеты для первой совокупности полюсов равны k^{-1}, а вычеты для второй совокупности полюсов равны $-k^{-1}$;

кроме того, функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $0 \pmod{2K, 2iK'}$.

Заметим, что $\operatorname{sn} u$ — единственная функция от u, имеющая эти свойства; ибо если бы имелась другая такая функция $\varphi(u)$, то $\operatorname{sn} u - \varphi(u)$ не имела бы особых точек и была бы двояко-периодической функцией; следовательно (§ 20.12), она приводилась бы к постоянной, а эта постоянная равнялась бы нулю, как это видно, если положить $u = 0$; таким образом, $\varphi(u) \equiv \operatorname{sn} u$.

Если $0 < k^2 < 1$, то очевидно, что K и K' вещественны; тогда $\operatorname{sn} u$ вещественна для вещественных значений u и чисто мнимая, когда u чисто мнимое.

(II) Функция $\operatorname{cn} u$ — двоякопериодическая функция от u с периодами $4K$ и $2K + 2iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $2K + iK' \pmod{4K, 2K + 2iK'}$; эти точки являются простыми полюсами; вычеты в первой совокупности полюсов равны $-ik^{-1}$, а вычеты во второй совокупности полюсов равны ik^{-1}; функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $K \pmod{2K, 2iK'}$.

(III) Функция $\operatorname{dn} u$ — двоякопериодическая функция от u с периодами $2K$ и $4iK'$. Она аналитическая всюду, за исключением точек, сравнимых с iK' и с $3iK' \pmod{2K, 4iK'}$; эти точки суть простые полюсы; вычеты в первой совокупности полюсов равны $-i$, а вычеты во второй совокупности полюсов равны i; функция имеет простые нули во всех точках, сравнимых с $K + iK' \pmod{2K, 2iK'}$.

[Чтобы видеть, что функции не имеют других нулей или полюсов, кроме только что указанных, следует обратиться к их определению через тэта-функции.]

22.351. Связь между эллиптическими функциями Вейерштрасса и Якоби

Если e_1, e_2, e_3 — какие-нибудь три различных числа, сумма которых равна нулю, и если положим

$$y = e_3 + \frac{e_1 - e_3}{\operatorname{sn}^2(\lambda u, k)},$$

то имеем

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4(e_1 - e_3)^2 \lambda^2 \operatorname{ns}^2 \lambda u \operatorname{cs}^2 \lambda u \operatorname{ds}^2 \lambda u =$$
$$= 4(e_1 - e_3)^2 \lambda^2 \operatorname{ns}^2 \lambda u (\operatorname{ns}^2 \lambda u - 1)(\operatorname{ns}^2 \lambda u - k^2) =$$
$$= 4\lambda^2 (e_1 - e_3)^{-1} (y - e_3)(y - e_1)\{y - k^2(e_1 - e_3) - e_3\}.$$

Таким образом, если $\lambda^2 = e_1 - e_3$ и $k^2 = (e_2 - e_3)/(e_1 - e_3)$, то y удовлетворяет уравнению [1])

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

[1]) Значения g_2 и g_3 будут, как обычно, равны $-\frac{1}{4}\sum e_2 e_3$ и $\frac{1}{4} e_1 e_2 e_3$.

и следовательно,

$$e_3+(e_1-e_3)\,\mathrm{ns}^2\left\{u(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}},\ \sqrt{\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}}\right\}=\wp(u+\alpha;\ g_2,\ g_3),$$

где α — постоянная. Заставляя $u\to 0$, мы видим, что α будет периодом, и, таким образом, имеем

$$\wp(u;\ g_2,\ g_3)=e_3+(e_1-e_3)\,\mathrm{ns}^2\left\{u(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}\right\},$$

причем эллиптическая функция Якоби имеет модуль, определяемый уравнением

$$k^2=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

22.4. Мнимое преобразование [1]) Якоби

Результат § 21.51, дающий преобразование тэта-функций с параметром τ в тэта-функции с параметром $\tau'=-\frac{1}{\tau}$, естественно, приводит к преобразованию эллиптических функций Якоби, это преобразование выражается уравнениями

$$\mathrm{sn}(iu,\ k)=i\,\mathrm{sc}(u,\ k'),\quad \mathrm{cn}(iu,\ k)=\mathrm{nc}(u,\ k'),\quad \mathrm{dn}(iu,\ k)=\mathrm{dc}(u,\ k').$$

Предположим для простоты, что $0<c<1$ и $y>0$; пусть

$$\int_0^{iy}(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}(1-k^2t^2)^{-\frac{1}{2}}\,dt=iu,$$

так что

$$iy=\mathrm{sn}(iu,\ k);$$

возьмем прямолинейный путь интегрирования, имеем

$$\mathrm{cn}(iu,\ k)=(1+y^2)^{\frac{1}{2}},\quad \mathrm{dn}(iu,\ k)=(1+k^2y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Положим теперь $y=\eta/(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$, где $0<\eta<1$, так что t изменяется от 0 до $i\eta/(1-\eta^2)^{\frac{1}{2}}$ по прямой, а отсюда, если $t=it_1/(1-t_1^2)^{\frac{1}{2}}$, то t_1 изменяется от 0 до η также по прямой.

---

[1]) Fundamenta Nova, 34, 35; Абель (Abel, Journ. für Math. (1827), 104) выводит двоякую периодичность эллиптических функций из этого результата. См. письмо Якоби от 12 января 1828 г. Лежандру (Jacobi, Ges. Werke, I (1881), 402).

Кроме того,

$$dt = i\left(1-t_1^2\right)^{-\frac{3}{2}} dt_1, \quad \left(1-t^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

$$1-k^2t^2 = \left(1-k'^2t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

и мы получаем

$$iu = \int_0^{\eta} \left(1-t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-k'^2t_1^2\right)^{-\frac{1}{2}} i\,dt_1;$$

следовательно,

$$\eta = \operatorname{sn}(u, k'),$$

и, значит,

$$y = \operatorname{sc}(u, k').$$

Таким образом, мы получили, что

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\operatorname{sc}(u, k').$$

Далее получим

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \left(1+y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-\eta^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{nc}(u, k'),$$

$$\operatorname{dn}(iu, k) = \left(1-k^2y^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(1-k'^2\eta^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\eta^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \operatorname{dc}(u, k').$$

Но $\operatorname{sn}(iu, k)$ и $i\operatorname{sc}(u, k')$ — однозначные функции от u и k (в разрезанной плоскости c) с изолированными полюсами. Поэтому по теории аналитического продолжения формулы, доказанные для вещественных значений u и k, сохраняют силу для любых комплексных значений u и k.

22.41. Доказательство мнимого преобразования Якоби при помощи тэта-функций

Найденные результаты могут быть получены весьма просто при помощи тэта-функций. Например, по § 21.61

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau)\,\vartheta_1(iz\,|\,\tau)}{\vartheta_2(0\,|\,\tau)\,\vartheta_4(iz\,|\,\tau)},$$

где

$$z = u/\vartheta_3^2(0\,|\,\tau);$$

следовательно (§ 21.51),

$$\operatorname{sn}(iu, k) = \frac{\vartheta_3(0\,|\,\tau')}{\vartheta_4(0\,|\,\tau')}\,\frac{-i\vartheta_1(iz\tau'\,|\,\tau')}{\vartheta_2(iz\tau'\,|\,\tau')} = -i\operatorname{sc}(v, k'),$$

где

$$v = iz\tau'\vartheta_3^2(0\,|\,\tau') = iz\tau'(-i\tau)\vartheta_3^2(0\,|\,\tau) = -u,$$

так что окончательно

$$\operatorname{sn}(iu, k) = i\operatorname{sc}(u, k').$$

Пример 1. Доказать, что

$$\operatorname{cn}(iu, k) = \operatorname{nc}(u, k'), \quad \operatorname{dn}(iu, k) = \operatorname{dc}(u, k'),$$

при помощи тэта-функций.

Пример 2. Показать, что

$$\operatorname{sn}\left(\frac{1}{2} iK', k\right) = i \operatorname{sc}\left(\frac{1}{2} K', k'\right) = ik^{-\frac{1}{2}},$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{1}{2} iK', k\right) = (1+k)^{\frac{1}{2}} k^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{dn}\left(\frac{1}{2} iK', k\right) = (1+k)^{\frac{1}{2}}.$$

[Если применить не преобразование Якоби, а какой-либо другой метод, то определение знаков $\operatorname{sn}\frac{1}{2} iK'$, $\operatorname{cn}\frac{1}{2} iK'$, $\operatorname{dn}\frac{1}{2} iK'$ представляет большие трудности.]

Пример 3. Показать, что

$$\operatorname{sn}\frac{1}{2}(K+iK') = \frac{(1+k)^{\frac{1}{2}} + i(1-k)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2k}}, \quad \operatorname{cn}\frac{1}{2}(K+iK') = \frac{(1-i)\sqrt{k'}}{\sqrt{2k}},$$

$$\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+iK') = \frac{k'^{\frac{1}{2}}\left\{(1+k')^{\frac{1}{2}} - i(1-k')^{\frac{1}{2}}\right\}}{\sqrt{2}}.$$

Пример 4. Пусть $0 < k < 1$ и θ — модулярный угол; показать, что

$$\operatorname{sn}\frac{1}{2}(K+iK') = e^{\frac{1}{4}\pi i - \frac{1}{2} i\theta}\sqrt{\operatorname{cosec}\theta},$$

$$\operatorname{cn}\frac{1}{2}(K+iK') = e^{-\frac{1}{4}\pi i}\sqrt{\operatorname{ctg}\theta},$$

$$\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+iK') = e^{-\frac{1}{2} i\theta}\sqrt{\cos\theta}.$$

(Glaisher)

22.42. Преобразование Ландена [1])

Докажем теперь формулу

$$\int_0^{\varphi_1} (1 - k_1^2 \sin^2\theta_1)^{-\frac{1}{2}} d\theta_1 = (1+k') \int_0^{\varphi} (1 - k^2 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

где

$$\sin\varphi_1 = (1+k')\sin\varphi\cos\varphi(1 - k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}$$

и

$$k_1 = (1-k')/(1+k').$$

---

[1]) Landen, Phil. Trans. of the Royal Soc., LXV (1775), 285.

Эта формула, открытая Ланденом, может быть представлена при помощи эллиптических функций Якоби в виде

$$\operatorname{sn}\{(1+k')u,\ k_1\} = (1+k')\operatorname{sn}(u,\ k)\operatorname{cd}(u,\ k),$$

если положим

$$\varphi = \operatorname{am} u, \quad \varphi_1 = \operatorname{am} u_1.$$

Для доказательства этой формулы воспользуемся соотношениями § 21.52, а именно соотношениями

$$\frac{\vartheta_3(z\mid\tau)\,\vartheta_4(z\mid\tau)}{\vartheta_4(2z\mid 2\tau)} = \frac{\vartheta_2(z\mid\tau)\,\vartheta_1(z\mid\tau)}{\vartheta_1(2z\mid 2\tau)} = \frac{\vartheta_3(0\mid\tau)\,\vartheta_4(0\mid\tau)}{\vartheta_4(0\mid 2\tau)}.$$

Положим[1]) $\tau_1 = 2\tau$, и пусть k_1, Λ, Λ' суть модуль и четверти периодов, соответствующие параметру τ_1; тогда равенство

$$\frac{\vartheta_1(z\mid\tau)\,\vartheta_2(z\mid\tau)}{\vartheta_3(z\mid\tau)\,\vartheta_4(z\mid\tau)} = \frac{\vartheta_1(2z\mid\tau_1)}{\vartheta_4(2z\mid\tau_1)}$$

может быть, очевидно, переписано в виде

$$k\operatorname{sn}(2Kz/\pi,\ k)\operatorname{cd}(2Kz/\pi,\ k) = k_1^{\frac{1}{2}}\operatorname{sn}(4\Lambda z/\pi,\ k_1). \tag{A}$$

Чтобы найти выражение k_1 через k, положим $z = \frac{1}{4}\pi$ и тогда тотчас получим

$$\frac{k}{1+k'} = k_1^{\frac{1}{2}},$$

что дает по возведении в квадрат $k_1 = \frac{1-k'}{1+k'}$, как и утверждалось выше. Для определения Λ разделим равенство (A) на z и заставим затем $z \to 0$; тогда получим $2Kk = 4k_1^{\frac{1}{2}}\Lambda$, так что

$$\Lambda = \frac{1}{2}(1+k')K.$$

Отсюда, заменив в (A) $\frac{2Kz}{\pi}$ на u, получим

$$(1+k')\operatorname{sn}(u,\ k)\operatorname{cd}(u,\ k) = \operatorname{sn}\{(1+k')u,\ k_1\},$$

так как

$$4\Lambda z/\pi = 2\Lambda u/K = (1+k')u.$$

Итак, преобразование Ландена доказано.

---

[1]) Для того чтобы избегнуть затруднений в определении знака, которые возникают, когда $\operatorname{Re}\tau_1$ не лежит между ± 1, предполагается, что $|\operatorname{Re}\tau| < {}^1/_2$. Когда $0 < k < 1$, это условие удовлетворяется, ибо τ тогда чисто мнимое.

Пример 1. Показать, что $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{2K'}{K}$, а отсюда, что $\Lambda' = (1+k')K'$.

Пример 2. Показать, что

$$\operatorname{cn}\{(1+k')u, k_1\} = \{1-(1+k')\operatorname{sn}^2(u, k)\}\operatorname{nd}(u, k),$$
$$\operatorname{dn}\{(1+k')u, k_1\} = \{k'+(1-k')\operatorname{cn}^2(u, k)\}\operatorname{nd}(u, k).$$

Пример 3. Показать, что

$$\operatorname{dn}(u, k) = (1-k')\operatorname{cn}\{(1+k')u, k_1\} + (1+k')\operatorname{dn}\{(1+k')u, k_1\},$$

где

$$k = 2k_1^{\frac{1}{2}}/(1+k_1).$$

22.421. Преобразование эллиптических функций

Формула Ландена есть частный случай так называемого преобразования эллиптических функций; преобразование состоит в выражении эллиптических функций с параметром τ через те же функции с параметром $\frac{a+b\tau}{c+d\tau}$, где a, b, c, d целые. Другим примером такого преобразования, уже нами рассмотренного, является преобразование, в котором $a=-1$, $b=0$, $c=0$, $d=1$, т. е. мнимое преобразование Якоби. Для ознакомления с общей теорией преобразований, выходящей за рамки этой книги, читатель отсылается к книгам: Jacobi, Fundamenta Nova; Klein, Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen (изданной Фрике) и Cayley, Elliptic Functions (London, 1895).

Пример. Рассматривая преобразование $\tau_2 = \tau \pm 1$, показать способом § 22.42, что

$$\operatorname{sn}(k'u, k_2) = k'\operatorname{sd}(u, k),$$

где $k_2 = \pm\frac{ik}{k'}$, знак $\pm$ выбирается, смотря по тому, будет ли $\operatorname{Re}\tau < 0$ или $\operatorname{Re}\tau > 0$; далее, получить формулы для $\operatorname{cn}(k'u, k_2)$ и $\operatorname{dn}(k'u, k_2)$.

22.5. Бесконечные произведения для эллиптических функций Якоби[1])

Бесконечные произведения для тэта-функций, полученные в § 21.3, дают непосредственно бесконечные произведения для эллиптических функций Якоби; положив $u = 2K\frac{x}{\pi}$, очевидно, получаем из формул (A), (B) и (C) § 22.11

$$\operatorname{sn} u = 2q^{\frac{1}{4}}k^{-\frac{1}{2}}\sin x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\},$$

$$\operatorname{cn} u = 2q^{\frac{1}{4}}k'^{\frac{1}{2}}k^{-\frac{1}{2}}\cos x\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n}\cos 2x+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\},$$

$$\operatorname{dn} u = k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2}}\right\}.$$

---

[1]) Fundamenta Nova, 84—115.

По этим произведениям могут быть составлены произведения для девяти обратных величин и отношений.

Имеются двадцать четыре другие формулы, которые могут быть получены следующим образом.

По формулам удвоения (§ 22.21, пример 5) имеем

$$\frac{1-\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{sn}\frac{1}{2}u\operatorname{dc}\frac{1}{2}u,\qquad \frac{1+\operatorname{dn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{ds}\frac{1}{2}u\operatorname{nc}\frac{1}{2}u,$$

$$\frac{\operatorname{dn} u+\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\operatorname{cn}\frac{1}{2}u\operatorname{ds}\frac{1}{2}u.$$

Возьмем первую из них и воспользуемся произведениями для $\operatorname{sn}\frac{1}{2}u$, $\operatorname{cn}\frac{1}{2}u$, $\operatorname{dn}\frac{1}{2}u$; тогда получим

$$\frac{1-\operatorname{cn} u}{\operatorname{sn} u}=\frac{1-\cos x}{\cos x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-2(-q)^n\cos x+q^{2n}}{1+2(-q)^n\cos x+q^{2n}}\right\},$$

произведя почленное перемножение бесконечных произведений.

Заменим здесь u на $u+K$ и x на $x+\frac{1}{2}\pi$, получим

$$\frac{\operatorname{dn} u+k'\operatorname{sn} u}{\operatorname{cn} u}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2(-q)^n\sin x+q^{2n}}{1-2(-q)^n\sin x+q^{2n}}\right\}.$$

Заменяя u на $u+iK'$ в этих формулах, получим

$$k\operatorname{sn} u+i\operatorname{dn} u=i\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1+2i(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\sin x-q^{2n-1}}{1-2i(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\sin x-q^{2n-1}}\right\}.$$

Отсюда получается выражение для $k\operatorname{cd} u+ik'\operatorname{nd} u$ путем замены $\sin x$ на $\cos x$ в этом произведении.

Из тождеств

$$(1-\operatorname{cn} u)(1+\operatorname{cn} u)\equiv\operatorname{sn}^2 u,\qquad (k\operatorname{sn} u+i\operatorname{dn} u)(k\operatorname{sn} u-i\operatorname{dn} u)\equiv 1$$

и т. д. мы получаем непосредственно четыре другие формулы, что в общем даст восемь формул; другие шестнадцать получаются таким же образом из выражений для $\operatorname{ds}\frac{1}{2}u\operatorname{nc}\frac{1}{2}u$ и $\operatorname{cn}\frac{1}{2}u\operatorname{ds}\frac{1}{2}u$.

Это предоставляется читателю в виде упражнения; отметим одну из них:

$$\operatorname{sn} u+i\operatorname{cn} u=ie^{-ix}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(1-q^{4n-3}e^{2ix})(1-q^{4n-1}e^{-2ix})}{(1-q^{4n-1}e^{2ix})(1-q^{4n-3}e^{-2ix})}\right\}.$$

Пример 1. Показать, что

$$\operatorname{dn}\frac{1}{2}(K+iK') = k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{\left(1+iq^{2n-\frac{1}{2}}\right)\left(1-iq^{2n-\frac{3}{2}}\right)}{\left(1-iq^{2n-\frac{1}{2}}\right)\left(1+iq^{2n-\frac{3}{2}}\right)}\right\} =$$

$$= k'^{\frac{1}{2}}\prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}{1+(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Пример 2. Показать, пользуясь примером 1 и примером 4 § 22.41, что если θ — модулярный угол, то

$$e^{-\frac{1}{2}i\theta} = \prod_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}{1+(-1)^n iq^{n+\frac{1}{2}}}\right\},$$

а затем, взяв логарифмы, получить формулу Якоби:

$$\frac{1}{4}\theta = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \operatorname{arctg} q^{n+\frac{1}{2}} = \operatorname{arctg}\sqrt{q} - \operatorname{arctg}\sqrt{q^3} + \operatorname{arctg}\sqrt{q^5} - \ldots,$$

«quae inter formulas elegantissimas censeri debet» [1]) (Fundamenta Nova, 108).

Пример 3. Разложением каждого члена в равенстве

$$\lg \operatorname{sn} u = \lg\left(2q^{\frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{2}\lg k + \lg\sin x +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\{\lg(1-q^{2n}e^{2ix}) + \lg(1-q^{2n}e^{-2ix}) - \lg(1-q^{2n-1}e^{2ix}) - \lg(1-q^{2n-1}e^{-2ix})\}$$

по степеням $e^{\pm 2ix}$ и перестановкой членов в полученном двойном ряде показать, что

$$\lg \operatorname{sn} u = \lg\left(2q^{\frac{1}{4}}\right) - \frac{1}{2}\lg k + \lg\sin x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2q^m\cos 2mx}{m(1+q^m)},$$

если $|\operatorname{Im} z| < \frac{1}{2}\pi \operatorname{Im}\tau$.

Получить подобные же ряды для $\lg \operatorname{cn} u$, $\lg \operatorname{dn} u$.

(Jacobi, Fundamenta Nova, 99)

---

[1]) «Которую следует считать одной из самых изящных».