В. А. УСПЕНСКИЙ

ЧТО ТАКОЕ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ?

В. А. УСПЕНСКИЙ

ЧТО ТАКОЕ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ?

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1987

ББК 22.12
У77
УДК 10.6(023)

Успенский В. А.

У 77 Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.— 128 с.

20 к. 27 500 экз.

В последние два десятилетия возник так называемый нестандартный анализ. Предлагаемый им подход к обоснованию математического анализа базируется на допущении существования, помимо обычных действительных чисел, «бесконечно больших чисел» и «бесконечно малых чисел». Полное логическое обоснование этого подхода довольно сложно и опирается на конструкции математической логики.

Цель книги — не давая полного обоснования, а лишь постулируя необходимые факты, объяснить на доступных примерах, в чем суть нестандартного анализа.

Для лиц, владеющих математическим анализом в объеме первого курса вуза.

У $\frac{1702020000-066}{053(02)-87}$ 46-87 ББК 22.12

Рецензент
доктор физико-математических наук *Н. Х. Розов*

Владимир Андреевич Успенский

ЧТО ТАКОЕ НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ?

Редакторы: *А. Шень, В. В. Донченко*
Художественный редактор *Т. Н. Кольченко*
Технический редактор *Е. В. Морозова*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 12208

Сдано в набор 17.07.86. Подписано к печати 16.01.87. Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2. Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 6,72. Усл. кр.-отт. 6,93. Уч.-изд. л. 7,22. Тираж 27 500 экз. Заказ № 288. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071 Москва В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука»
630077 Новосибирск, 77, Станиславского, 25

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Слово «нестандартный» в названии этой книжки вызывает, вероятно, естественную настороженность. Что это еще за «нестандартный анализ»? Разве стандартный математический анализ, верно служивший нашим учителям, перестал нас удовлетворять? Нужно ли отказываться от накопленного в течение трех столетий богатства ради сомнительных новаций?

Все эти вопросы заставляют нас начать с разъяснения места нестандартного математического анализа в современной математике. Это место весьма скромно. Нестандартный анализ не собирается отменять стандартный. Все имеющиеся «стандартные» результаты остаются в силе. Более того, нестандартный анализ не претендует на получение принципиально новых результатов: все результаты, полученные его методами, могут быть доказаны и привычными средствами.

Зачем же он нужен? Можно сказать, что отличие нестандартного способа изложения от стандартного состоит лишь в «выражениях, которые при нашем методе являются более прямыми и более пригодны для искусства изобретения» (Лейбниц). Трудно сказать, насколько это так: опыт применения нестандартного анализа пока еще мал. Но если это действительно верно (пусть даже в небольшой степени), то несомненно, что нестандартный анализ заслуживает внимания.

Интересно отметить, что нестандартный анализ — эта «модная новинка» — по существу не так уж и нов. Его зарождение можно отнести к тому же времени, что и зарождение математического анализа как такового — к концу XVII века. Дело в том, что сам математический анализ появился — у одного из своих создателей, а именно Лейбница,— в той форме, которая, пожалуй, ближе к тому, что сейчас принято называть «нестандартным анализом», чем к современному «стандартному» изложению (см. ниже § 12). Поистине, новое — это хорошо забытое старое.

В этой книжке мы пытаемся показать, в чем состоит суть нестандартного анализа, дав читателю возможность составить мнение о том, насколько он может оказаться полезным.

§ 1. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

Относятся ли грифоны и единороги к позвоночным? Как устроены их эндокринные системы? Как протекает химическая реакция между философским камнем и флогистоном? Читатель, обнаруживший в серьезной научной монографии обсуждение подобных проблем, будет, надо думать, несколько ошарашен. А ведь отдельные страницы сочинений по нестандартному анализу могут произвести на неподготовленного читателя (впрочем, достаточно подготовленного, но именно в области обычной, стандартной математики) сходное впечатление. Вот некоторые примеры.

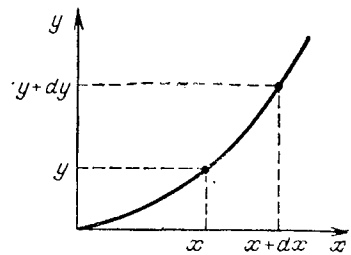

Рис. 1

Пример 1. Вычислим производную функции $y = x^2$. Дадим аргументу x приращение dx, перейдя от точки x к точке $x + dx$. Выясним, насколько при этом изменилось значение функции. В точке x оно равнялось x^2. В точке $x + dx$ оно равняется $(x + dx)^2 = x^2 + 2x \cdot dx + (dx)^2$. Таким образом, оно изменяется на $dy = 2x \cdot dx + (dx)^2$ (рис. 1). Отношение приращения dy функции $y = x^2$ к приращению dx аргумента x равно

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x \cdot dx + (dx)^2}{dx} = 2x + dx.$$

Если dx бесконечно мало (запись: $dx \approx 0$), то членом dx в сумме $2x + dx$ можно пренебречь, и искомая производная (отношение приращения функции к приращению аргумента, если последнее бесконечно мало) равна $2x$.

Пример 2. Вычислим аналогичным способом производную функции $y = \sqrt{x}$. Приращение dy равно

$\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}$; частное $\frac{dy}{dx}$ равно

$$\frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}=\frac{(\sqrt{x+dx}-\sqrt{x})(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}=$$

$$=\frac{x+dx-x}{dx(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}.$$

Взяв dx бесконечно малым, получаем, что производная равна $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Пример 3. Этот пример относится не к вычислению чего-либо, а к определению — определению понятия интеграла. Итак, что же такое интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

от функции f по отрезку $[a, b]$? Разобьем отрезок $[a, b]$ на бесконечно большое число H частей бесконечно малой длины dx (так что $b=a+Hdx$). Рассмотрим теперь сумму

$$f(a)+f(a+dx)+f(a+2dx)+\ldots+f(a+(H-1)dx),$$

состоящую из бесконечного числа членов, а именно из H членов. Значение этой суммы, умноженное на dx, и будем считать интегралом от функции f.

Пример 4. Доказательство равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке. Непрерывность функции f в точке x означает, что для любой бесконечно близкой к ней точки x' значение $f(x')$ бесконечно близко к $f(x)$; иначе говоря, для всякого x'

$$x'\approx x\Rightarrow f(x')\approx f(x), \qquad (1)$$

где запись $\alpha\approx\beta$ означает бесконечную близость чисел α и β. Поскольку по условию функция f непрерывна в каждой точке x, то (1) выполняется для всех x и для всех x'. Таким образом, бесконечная близость любых двух аргументов влечет за собой бесконечную близость значений функции, а это и означает равномерную непрерывность.

Пример 5. Построение неизмеримого множества. Каждое действительное число x, удовлетворяющее неравенству $0\leqslant x\leqslant 1$, разлагаем в бесконечную двоичную дробь; для обеспечения однозначности запрещаем разложения с бесконечным числом идущих подряд единиц. Фиксируем произвольное бесконечно большое натуральное число ν и отбираем те действительные числа, у кото-

рых ν-й член разложения равен единице; множество всех отобранных таким образом действительных чисел неизмеримо по Лебегу.

Пример 6. Разложение синуса в бесконечное произведение. Отправляясь от равенства

$$«e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i, \tag{2}$$

где i означает бесконечно большое число» (от латинского infinitus, что значит „бесконечный"; не путать с обозначением мнимой единицы, происходящим от латинского же imaginarius, что значит „воображаемый"), «рассмотрим выражение

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i». \tag{3}$$

Далее, используем делимость двучлена $a^n - z^n$ на трехчлены вида $a^2 - 2az\cos(2k\pi/n) + z^2$, причем полагаем $a = (1 + x/i)$, $z = (1 - x/i)$, $n = i$. «Так как дуга $2k\pi/i$ бесконечно мала, то

$$\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2». \tag{4}$$

Поэтому «функция $e^x - e^{-x}$ будет делиться на $1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{i^2}$, где член $\frac{x^2}{i^2}$ может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на i он останется бесконечно малым. Кроме того, первый множитель будет равен x. Вследствие этого после расположения этих множителей по порядку будет

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} =$$

$$= x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \tag{5}$$

и т. д.» Делая в тождестве (5) подстановку $x = z\sqrt{-1}$, получаем окончательно

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{9\pi^2}\right)\ldots, \tag{6}$$

Студент-математик, ответ которого на экзамене по математическому анализу содержал бы пересказ любого из

изложенных примеров, надо думать, получил бы двойку. Однако способ вычисления производной, примененный в примерах 1 и 2, указан в § 7 гл. 2 книги Мартина Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [3], примеры 4 и 5 заимствованы из той же книги (теорема 5.8 и § 9 гл. 2), а определение интеграла взято (с несущественными изменениями, в том числе сознательно допущенной неточностью, которая будет исправлена далее, в § 8) из книги Кейслера «Элементарный анализ» [38]. Пример 6 воспроизводит рассуждения Эйлера, содержащиеся в § 155—158 первого тома его сочинения «Introductio in Analysin infinitorum», опубликованного в 1748 г. (русский перевод с латинского см. в [16]). Текст, взятый при изложении примера 6 в кавычки, принадлежит непосредственно Эйлеру; заключительная формула (6) есть знаменитая формула Эйлера для синуса, верная при любом комплексном z.

Если примеры 1 и 2 хотя и могут шокировать нас наивной нестрогостью, но все же в известной мере соответствуют интуиции, то пример 4 противоречит на первый взгляд именно здравому смыслу: остается непонятным, почему проведенное рассуждение нельзя применить не к отрезку, а, скажем, к интервалу, для которого, как известно, теорема о равномерной непрерывности неверна. Примеры 3 и 6 (если не знать, что последний принадлежит Эйлеру) производят еще более странное впечатление, а пример 5 представляется просто-напросто абракадаброй.

Нестандартный анализ, однако, почти сплошь состоит из подобной «абракадабры», имеющей в нем точный математический смысл (для примеров 1—6 этот смысл будет прокомментирован ниже, в § 8). Он позволяет, в частности, с новой точки зрения посмотреть на многие рассуждения классиков математического анализа, кажущиеся нестрогими, но приводящие к успеху, и путем относительно небольших уточнений сделать их удовлетворяющими современным критериям строгости.

§ 2. ЧТО ТАКОЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ?

Первое, что нужно уточнить в приведенных в предыдущем параграфе «нестандартных» рассуждениях,— это понятие бесконечно малой величины. Один из наиболее принципиальных моментов нестандартного анализа состоит в том, что бесконечно малые рассматриваются не

как переменные величины (т. е. не как функции, стремящиеся к нулю, как учат нас современные учебники), а как величины постоянные. Уместно отметить, что такой подход хорошо согласуется как с интуицией естествоиспытателя, так и с реальной историей зарождения математического анализа. Что касается интуиции, то достаточно раскрыть любой учебник физики, чтобы натолкнуться на бесконечно малые приращения, бесконечно малые объемы и т. п. Все эти величины мыслятся, разумеется, не как переменные, а просто как очень маленькие, почти равные нулю. Было бы неправильно считать подобного рода интуицию присущей лишь авторам учебников физики. Вряд ли какой-то математик воспринимает (наглядно) элемент дуги ds иначе, чем «очень маленькую дугу». Любой математик, составляя соответствующее дифференциальное уравнение, скажет, что за бесконечно малое время dt точка прошла бесконечно малый путь dx, а количество радиоактивного вещества изменилось на бесконечно малую величину dN.

Что же касается истории математического анализа, то в наиболее явной форме излагаемый подход проявился у одного из основоположников этой науки — Лейбница. В мае 1984 г. исполнилось 300 лет с того дня, как символы dx и dy впервые появились на страницах математических публикаций, а именно в знаменитом мемуаре Лейбница «Новый метод...» [7]. Именно Лейбниц яснее других ощущал бесконечно малые величины постоянными (хотя и воображаемыми, идеальными) величинами особого рода, и именно Лейбниц сформулировал правила оперирования с бесконечно малыми в виде исчисления.

Итак, речь будет идти о бесконечно малых числах. Какое же число следует называть бесконечно малым? Во-первых, конечно, нуль! Но это не интересно — интересно найти бесконечно малое число, не равное нулю (например, положительное). Какие положительные числа следует называть бесконечно малыми?

Первый — самый наивный — ответ таков: положительное число ε называется бесконечно малым, если оно меньше всех положительных чисел (рис. 2). Легко понять, однако, что бесконечно малых в этом смысле положительных чисел не бывает: ведь если число меньше всех положительных чисел и само положительно, оно должно быть меньше самого себя. Попытаемся исправить положение, потребовав, чтобы ε было меньше всех д р у г и х

положительных чисел, но больше нуля, т. е. чтобы ε было наименьшим в множестве положительных чисел. На числовой оси такое ε должно изобразиться самой левой точкой множества $(0, +\infty)$ (рис. 3). Это «определение» бесконечно малого числа часто приводят школь-

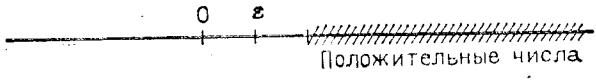

Рис. 2

ники, только что начавшие изучать математический анализ. К сожалению, числа ε с указанными свойствами тоже нет и быть не может: если ε положительно, то число $\varepsilon/2$ будет положительным числом, мень-

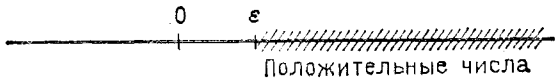

Рис. 3

шим ε. (Согласно обычным свойствам неравенств для всякого $a > 0$ выполняются неравенства $0 < a/2 < a$). Так что если мы не хотим отказываться от привычных нам свойств действительных чисел (например, от возможности разделить любое число на 2 или от возможности умножить любое неравенство на положительное число), но хотим иметь бесконечно малые числа, то приведенное определение бесконечной малости не годится.

Более изощренное определение бесконечной малости числа $\varepsilon > 0$, которое мы и будем использовать в дальнейшем, таково. Будем складывать число ε с самим собой, получая числа ε, $\varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$ и т. д. Если все полученные числа окажутся меньше 1, то число ε и будет называться бесконечно малым. Другими словами, если ε бесконечно мало, то сколько раз ни откладывай отрезок длины ε вдоль отрезка длины 1, до конца не дойдешь (рис. 4). Наше требование к бесконечно малому ε можно переписать и в такой форме (поделив на ε):

$$1 < \frac{1}{\varepsilon},\ 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon},\ 1 + 1 + 1 < \frac{1}{\varepsilon},\ \ldots,$$

Таким образом, если число ε бесконечно мало, то число $1/\varepsilon$ бесконечно велико в том смысле, что оно больше любого из чисел 1, $1+1$, $1+1+1$, $1+1+1+1$ и т. д. Так что если мы начнем измерять отрезок длиной $1/\varepsilon$ с помощью эталона длины (т. е. откладывая последовательно отрезки единичной длины), то процесса измерения никогда не закончим. Из сказанного можно ви-

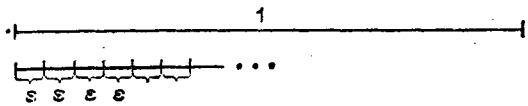

Рис. 4

деть, что существование бесконечно малых противоречит так называемой аксиоме Архимеда, которая утверждает, что для любых двух отрезков A и B можно отложить меньший из них (A) столько раз, чтобы в сумме получить отрезок, превосходящий по длине больший отрезок (B). (На рис. 5 потребовалось отложить отрезок A четыре раза.)

Приведенная формулировка касается отрезков; если считать (как это обычно делается), что длины отрезков

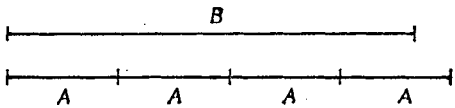

Рис. 5

являются числами, мы приходим к такой формулировке аксиомы Архимеда: для любых двух чисел a и b, для которых $0<a<b$, одно из неравенств $a+a>b$, $a+a+a>b, \ldots$ обязательно выполнено. В дальнейшем, говоря об аксиоме Архимеда, мы будем иметь в виду именно эту формулировку. Из нее видно, что в множестве действительных чисел (где эта аксиома выполняется) бесконечно малых нет: чтобы убедиться в этом, достаточно положить $a=\varepsilon$, $b=1$. Мы увидим в дальнейшем, что на самом деле аксиома Архимеда равносильна утверждению об отсутствии бесконечно малых элементов, не равных нулю.

Вывод из всего сказанного таков: если мы хотим рассматривать бесконечно малые, нужно расширить множество $\mathbb{R}$ действительных чисел до некоторого большего множества $^*\mathbb{R}$. Элементы этого нового множества будем называть *гипердействительными числами*. В нем аксиома Архимеда не выполняется и существуют бесконечно малые (в смысле последнего определения) числа — такие, что сколько их ни складывай с собой, сумма будет все время оставаться меньше 1. Подобно тому как обычный (или стандартный) математический анализ занимается изучением множества действительных чисел $\mathbb{R}$, нестандартный анализ изучает множество гипердействительных чисел $^*\mathbb{R}$. Полученные при этом результаты используются для исследования свойств $\mathbb{R}$. (Таким образом могут быть получены «нестандартные» доказательства свойств обыкновенных действительных чисел.)

Порядок на $\mathbb{R}$ архимедов, а на $^*\mathbb{R}$ неархимедов: это значит, что в $\mathbb{R}$ аксиома Архимеда выполняется, а в $^*\mathbb{R}$ не выполняется. По этой причине стандартный (обычный) анализ, изучающий $\mathbb{R}$, называется еще *архимедовым*, а нестандартный анализ, изучающий $^*\mathbb{R}$, называют *неархимедовым*.

Итак, для построения нестандартного анализа необходимо расширить множество действительных чисел до более широкого множества гипердействительных чисел. Но прежде поговорим о самих действительных числах и их происхождении.

До сих пор мы молчаливо предполагали известным понятие действительного числа. Тем не менее не стоит забывать, что понятие действительного числа имеет долгую историю, начавшуюся еще в древней Греции (о чем напоминает название «аксиома Архимеда») и закончившуюся лишь в XIX веке. Уроки этой истории помогут нам лучше понять место гипердействительных чисел среди различных числовых систем.

Самой первоначальной и основной числовой системой является, конечно, система натуральных чисел. Известное изречение немецкого математика Л. Кронекера (1823—1891) «Die ganze Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles anderes ist Menschenwerk» («Господь бог создал целые числа, все остальное — дело рук человеческих») в еще большей степени применимо к натуральным числам (впрочем, скорее всего, Кронекер имел в виду как раз натуральные числа, а наш перевод слишком буквальный).

Натуральных чисел, однако, оказывается мало: пытаясь решить уравнение $3+x=2$ в натуральных числах, мы обнаруживаем, что оно не имеет решений и наше желание определить операцию вычитания оказывается неудовлетворенным. Поэтому мы расширяем множество натуральных чисел до множества целых чисел. В этой (несомненно, хорошо знакомой читателю) процедуре для нас сейчас важно следующее: каким образом мы определим сложение и умножение на целых числах? То, что $2+2=4$, можно увидеть, сложив две кучи по два яблока в одну. Но почему мы считаем, что $(-2)+(-2)=(-4)$? Почему мы считаем, что $(-1)\cdot(-1)=1$?

Эти вопросы не так тривиальны, как нам сейчас может показаться. Найти правильный ответ будет легче, если сформулировать вопрос иначе: что плохого произойдет, если мы будем считать, например, что $(-1)\cdot(-1)=-1$? Ответ прост: в этом случае хорошо известные свойства сложения и умножения натуральных чисел (коммутативность, ассоциативность и др.) не будут выполняться для целых чисел. Можно показать, что обычное определение операций над отрицательными числами единственно возможное, если мы хотим сохранить привычные свойства операций сложения и умножения.

Тут следует остановиться и спросить: какие же именно свойства сложения и умножения мы хотим сохранить? Ведь если бы мы хотели сохранить все свойства, то введение отрицательных чисел было бы не только излишне, но и вредно: свойство «уравнение $x+3=2$ не имеет решений», верное для натуральных чисел, становится неверным для целых! Если же мы ничего не хотим сохранить, то задача становится столь же легкой, сколь и пустой: можно определить операции с отрицательными числами как угодно. Правильный выбор здесь, как обычно, представляет собой умелое лавирование между Сциллой слепого следования традициям и Харибдой бесплодного новаторства.

Возвращаясь к истории развития понятия числа, мы видим, что введение отрицательных чисел не доставляет полного удовлетворения: уравнение $2\cdot x=3$ по-прежнему не имеет решения. Это побуждает ввести рациональные (дробные) числа. Но и этого недостаточно: от рациональных чисел приходится перейти к действительным. В результате получается последовательность множеств $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ (натуральных, целых, рациональных и

действительных чисел; $A \subset B$ означает, что всякий элемент множества A принадлежит множеству B). В этой последовательности каждое следующее множество включает в себя предыдущее, при этом имевшиеся в предыдущем операции продолжаются на следующее, более широкое, множество, сохраняя свои полезные свойства.

Мы хотим продолжить эту последовательность еще на один член, получив последовательность $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \subset {}^*\mathbb{R}$, где ${}^*\mathbb{R}$ — множество гипердействительных чисел. Забегая вперед, скажем, что новый шаг расширения будет иметь много общего с предыдущими: мы продолжим на ${}^*\mathbb{R}$ имевшиеся в $\mathbb{R}$ операции, сохранив их полезные свойства. Но будут и два важных отличия. Во-первых, это расширение (переход от $\mathbb{R}$ к ${}^*\mathbb{R}$) можно выполнить многими различными способами: можно построить существенно различные множества ${}^*\mathbb{R}$, ни одно из которых ничем не выделяется среди остальных. В то же время все предыдущие шаги нашего расширения числовой системы от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{R}$ были в некотором смысле однозначны. Во-вторых, есть различие в наших целях. Если прежде (двигаясь от $\mathbb{N}$ к $\mathbb{R}$) мы строили новую числовую систему прежде всего для того, чтобы исследовать ее свойства и ее применения, то построенная система ${}^*\mathbb{R}$ предназначается не столько для того, чтобы исследовать ее свойства, сколько для того, чтобы с ее помощью исследовать свойства $\mathbb{R}$. Впрочем, быть может, различие и не так велико: и раньше расширение числовой системы было одним из способов получения новых знаний о старых объектах (пример: аналитическая теория чисел). Кроме того, множество ${}^*\mathbb{R}$ можно рассматривать, быть может, как соответствующее физической реальности в не меньшей (и даже в большей) степени, чем $\mathbb{R}$ (см. об этом в § 12).

Итак, вернемся к стоящей перед нами задаче: необходимо расширить множество $\mathbb{R}$ действительных чисел до большего множества ${}^*\mathbb{R}$, содержащего бесконечно малые, сохранив при этом все полезные свойства $\mathbb{R}$. Центральный вопрос здесь, разумеется, состоит в том, какие именно свойства действительных чисел мы желаем сохранить. Ответим на этот вопрос не сразу, начав с наиболее простых свойств действительных чисел.

Прежде всего, мы хотим, чтобы гипердействительные числа можно было складывать, умножать, вычитать и делить, чтобы эти операции обладали обычными свойствами, называемыми «аксиомами поля». Сформулируем их.

Среди гипердействительных чисел должны быть выделены числа 0 и 1; должны быть заданы операции сложения $(x+y)$, умножения $(x \cdot y)$, взятия противоположного $(-x)$, а также операция взятия обратного $(1/x)$ при $x \neq 0$. При этом должны выполняться такие свойства:

(1) $a+b=b+a$;
(2) $a+(b+c)=(a+b)+c$;
(3) $a+0=a$;
(4) $a+(-a)=0$;
(5) $a \cdot b=b \cdot a$;
(6) $a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$;
(7) $a \cdot 1=a$;
(8) $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$;
(9) $a \cdot (1/a)=1$ при $a \neq 0$.

Множество с операциями, обладающими этими свойствами, называется полем. Таким образом, требования (1)—(9) можно коротко сформулировать так: $^*\mathbb{R}$ должно быть полем.

Кроме арифметических операций, мы должны задать на гипердействительных числах порядок. Это значит, что для любых двух различных гипердействительных чисел a и b должно быть определено, какое из них больше. (Если a больше b, будем писать $a>b$ или $b<a$.) При этом должны выполняться такие свойства:

(10) если $a>b$, $b>c$, то $a>c$;
(11) если $a>b$, то $a+c>b+c$ для любого c;
(12) если $a>b$, $c>0$, то $a \cdot c>b \cdot c$;
если $a>b$, $c<0$, то $a \cdot c<b \cdot c$.

Поле, в котором введен порядок с такими свойствами, называется *упорядоченным полем*. Таким образом, можно сказать, что $^*\mathbb{R}$ должно быть упорядоченным полем.

Мы хотим, чтобы среди гипердействительных чисел были все действительные. При этом операции и порядок на $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$ должны быть согласованы — именно, если сумма двух действительных чисел x и y равна z, то сумма x и y, рассматриваемых как гипердействительные числа, также должна быть равна z. (Было бы очень странно, если бы после перехода к гипердействительным числам равенство $2+2=4$ стало неверным!) Точно так

же должно обстоять дело и с другими операциями, а также с порядком: если x, y — действительные числа и $x > y$ (в обычном смысле), то x должно быть больше y и как гипердействительное число! Эти требования согласованности можно кратко выразить так: упорядоченное поле $^*\mathbb{R}$ должно быть расширением упорядоченного поля $\mathbb{R}$.

Этим далеко не исчерпываются те свойства действительных чисел, которые мы желаем сохранить. Но нужно сказать и о том, что нового мы ожидаем от $^*\mathbb{R}$. Итак, чего же не хватало? Ясно чего: бесконечно малых! (Точнее, следовало бы сказать «бесконечно малых, отличных от нуля»,— так как 0 также будет бесконечно малым числом по нашему определению.) Что же такое бесконечно малое число (точнее, бесконечно малый элемент упорядоченного поля)?

Определение. Элемент $x \geqslant 0$ упорядоченного поля называется *бесконечно малым*, если $x < 1$, $x + x < 1$, $x + x + x < 1$ и т. д. Это определение относится к неотрицательным x; отрицательное же x называется бесконечно малым, если $-x (= |x|)$ бесконечно мало.

Как мы видели, существование ненулевых бесконечно малых противоречит аксиоме Архимеда (см. выше). Верно и обратное: если для упорядоченного поля не выполнена аксиома Архимеда, т. е. существуют такие x, $y > 0$, что $x < y$, $x + x < y$, $x + x + x < y$ и т. д., то существуют ненулевые бесконечно малые. Таким будет, например, число x/y: умножая неравенство $x + x + \ldots + x < y$ на положительное число $1/y$, получаем в силу свойства (12), что $x/y + x/y + \ldots + x/y < 1$.

Таким образом, существование ненулевых бесконечно малых равносильно нарушению аксиомы Архимеда для гипердействительных чисел. Упорядоченные поля, в которых справедлива аксиома Архимеда и нет бесконечно малых, называют *архимедово упорядоченными*, или просто *архимедовыми* упорядоченными полями. Те поля, в которых аксиома Архимеда неверна и есть бесконечно малые, называют *неархимедово упорядоченными* (*неархимедовыми*). В этих терминах наши требования можно сформулировать так: система гипердействительных чисел должна быть неархимедово упорядоченным полем, являющимся расширением упорядоченного поля действительных чисел.

В этом месте возникает вопрос: выполнимы ли наши требования? Можно ли построить числовую систему, им

удовлетворяющую? Оказывается, что да. (Более того, мы впоследствии сформулируем гораздо более сильные требования, и они окажутся выполнимыми!)

§ 3. ПЕРВОЕ ЗНАКОМСТВО С ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРЯМОЙ

Начнем с того, что в геометрических задачах на построение называют анализом: предположив, что неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел существует, исследуем его свойства.

Итак, пусть $^*\mathbb{R}$ — неархимедово расширение $\mathbb{R}$. Его элементы называются гипердействительными числами. Среди них, в частности, содержатся и все действительные числа. Чтобы отличить их от тех гипердействительных чисел, которые не являются действительными, будем называть действительные числа (элементы $\mathbb{R}$) *стандартными*, а остальные гипердействительные числа (элементы $^*\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}$) — *нестандартными*.

Согласно нашему предположению среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые. Они являются, очевидно, нестандартными, так как среди стандартных, т. е. действительных, чисел бесконечно малых нет. Рассмотрим произвольное положительное бесконечно малое число ε. Оно меньше любого стандартного положительного числа a. В самом деле, пусть $\varepsilon \geqslant a$. Так как a стандартно, а для стандартных чисел справедлива аксиома Архимеда, найдется такое натуральное число n, что

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} \geqslant 1.$$

Но тогда

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} \geqslant \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n \text{ раз}} \geqslant 1,$$

что противоречит бесконечной малости ε. Полученное противоречие показывает, что $\varepsilon < a$. Итак, бесконечно малые положительные числа меньше всех стандартных положительных чисел. (Аналогичным образом отрицательные бесконечно малые числа больше всех стандартных отрицательных чисел.) Таким образом, если пытаться изобразить бесконечно малые числа на числовой прямой, то пришлось бы втиснуть их настолько близко к нулю, чтобы все положительные стандартные числа оказались справа, а все отрицательные — слева.

Указанное свойство может служить определением бесконечной малости: если число $\varepsilon > 0$ меньше всех стандартных положительных чисел, то оно бесконечно мало. В самом деле, в этом случае для любого натурального n

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1,$$

так как ε меньше стандартного числа $1/n$.

Разумеется, бесконечно малыми не исчерпываются все нестандартные числа. Например, $1 + \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое) также нестандартно (если бы оно было стандартным, то и $\varepsilon = (1 + \varepsilon) - 1$ было бы стандартно как разность двух стандартных). Однако оно не является бесконечно малым (так как больше 1). Более изощренный пример — гипердействительное число $1/\varepsilon$, где ε — бесконечно малое число, отличное от нуля. (Оговорка «отличное от нуля» важна, ведь $1/x$ согласно определению поля определено только при $x \neq 0$: в нестандартном анализе, как и в стандартном, на нуль делить нельзя!) Число $1/\varepsilon$ служит примером «бесконечно большого» гипердействительного числа.

Определение. Гипердействительное число $A > 0$ называется *бесконечно большим*, если

$$A > 1, \quad A > 1 + 1, \quad A > 1 + 1 + 1, \ldots$$

(Отрицательное число B называется бесконечно большим, если таков его модуль $|B| = -B$.)

Покажем, что при бесконечно малом $\varepsilon > 0$ число $A = 1/\varepsilon$ будет (положительным) бесконечно большим. В самом деле, умножая обе части неравенства

$$\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1$$

на число $1/\varepsilon$, получаем

$$\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} < 1/\varepsilon,$$

что и требовалось. Легко видеть, что положительное бесконечно большое число A больше любого стандартного: если a — произвольное стандартное число, то найдется такое натуральное n, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} > a$ и тем более $A > a$. Аналогичным образом всякое отрицательное бесконечно большое гипердействительное число меньше любого стандартного.

Легко видеть, что если A — бесконечно большое число, то $1/A$ — бесконечно малое отличное от 0 число. Это показывает, что архимедово упорядоченное поле можно определить как упорядоченное поле, в котором имеются бесконечно большие элементы. (Напомним, что ранее мы определяли неархимедово поле как то, для которого не выполнена аксиома Архимеда или — что равносильно — как то, в котором есть бесконечно малые.)

Гипердействительные числа, не являющиеся бесконечно большими, будут называться *конечными*. Равносильное определение: число A конечно, если $a < A < b$ для некоторых стандартных a и b. Все стандартные числа, очевидно, конечны. Пример конечного, но не стандартного числа уже приводился — это число $1+\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — бесконечно малое. Вообще, если a — стандартное число, а ε — бесконечно малое, отличное от 0, то $a+\varepsilon$ — конечное нестандартное число. В самом деле, оно конечно, так как $-1 < \varepsilon < 1$ (ε бесконечно мало) и, следовательно, $a-1 < a+\varepsilon < a+1$. Если бы оно было стандартным, то и число $\varepsilon = (a+\varepsilon) - a$ было бы стандартным как разность двух стандартных чисел.

Оказывается, что таким образом могут быть получены все конечные гипердействительные числа. Точнее, справедливо такое утверждение: если s — конечное гипердействительное число, то найдутся стандартное v и бесконечно малое ε, для которых $s = v + \varepsilon$. В самом деле, пусть s — конечное гипердействительное число. В силу его конечности найдутся (стандартные) действительные числа a и b, для которых $a < s < b$. Рассмотрим два множества (стандартных) действительных чисел: множество L всех стандартных x, меньших s, а также множество R всех стандартных x, бо́льших s. Множество L содержит a, а множество R содержит b, поэтому оба эти множества непусты. Они не пересекаются (по определению порядка никакое число не может быть одновременно больше и меньше s). Любое число из L меньше любого числа из R: если $p < s$ и $s < q$, то $p < q$. В силу известного свойства действительных чисел («аксиомы полноты в форме Дедекинда») найдется «разделяющее число» v, т. е. такое v, что $p \leqslant v$ для всех $p \in L$ и $v \leqslant q$ для всех $q \in R$. (Можно взять v равным точной верхней грани L или точной нижней грани R.) Осталось доказать, что разность $\varepsilon = s - v$ будет бесконечно малой. Докажем, например, что ε меньше любого стандартного положительного числа z, т. е. что $s - v < z$ или $s < v + z$.

Если это не так и $v+z \leqslant s$, то $v+z/2 < v+z \leqslant s$, т. е. $v+z/2 \in L$. Но это противоречит тому, что v — разделяющее число, так как $v+z/2 > v$, а все элементы L должны быть не больше v. Аналогичным образом доказывается, что $\varepsilon = s - v$ больше всех отрицательных стандартных чисел.

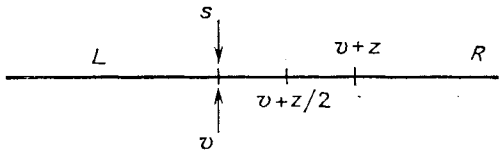

Рис. 6

Итак, каждое конечное гипердействительное число может быть представлено в виде $v+\varepsilon$, где v — стандартное, а ε — бесконечно малое. Такое представление единственно. В самом деле, если $v+\varepsilon = v'+\varepsilon'$, то $v-v' = \varepsilon'-\varepsilon$. Здесь левая часть стандартна, а правая бесконечно мала ($|\varepsilon-\varepsilon'| < z$ для любого стандартного положительного z, так как $|\varepsilon-\varepsilon'| \leqslant |\varepsilon| + |\varepsilon'| < z/2 + z/2 = z$; $|\varepsilon| < z/2$, $|\varepsilon'| < z/2$ в силу бесконечной малости ε, ε'). Так как среди стандартных чисел нет бесконечно малых, кроме нуля, то $v-v' = \varepsilon'-\varepsilon = 0$, что и требовалось доказать. Это свойство дает нам право сформулировать такое определение: *стандартной частью* $\mathrm{st}(x)$ конечного гипердействительного числа x называется такое стандартное v, что $x = v+\varepsilon$ для бесконечно малого ε.

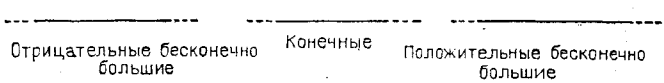

Рис. 7

Попытаемся теперь «окинуть взором» гипердействительную прямую. Прежде всего, видно, что она разбивается на три части (слева направо): отрицательные бесконечно большие, конечные, положительные бесконечно большие.

Издали «конечная часть» гипердействительной прямой выглядит как обычная действительная прямая. Но если присмотреться, то можно увидеть, что рядом с каждым стандартным действительным числом a расположено

множество бесконечно близких к нему гипердействительных чисел, для которых a является стандартной частью. Это множество (из уважения к Лейбницу) называют *монадой* стандартного числа a. Таким образом, множество конечных гипердействительных чисел разбито на непересекающиеся классы — монады, соответствующие стандартным действительным числам.

Легко проверить, что сумма и разность бесконечно малых бесконечно малы, произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало. Приведем простые доказательства этих свойств, чтобы читатель мог постепенно привыкнуть к стилю рассуждений в нестандартном анализе. Пусть ε и ε' бесконечно малы. Докажем, что $\varepsilon+\varepsilon'$ и $\varepsilon-\varepsilon'$ бесконечно малы, т. е. что $|\varepsilon+\varepsilon'|<p$, $|\varepsilon-\varepsilon'|<p$ для любого стандартного положительного p. В самом деле, $|\varepsilon+\varepsilon'|\leqslant|\varepsilon|+|\varepsilon'|$ и $|\varepsilon-\varepsilon'|\leqslant|\varepsilon|+|\varepsilon'|$. Далее, $|\varepsilon|<p/2$ и $|\varepsilon'|<p/2$, так как ε и ε' бесконечно малы. Поэтому $|\varepsilon|+|\varepsilon'|<p$, откуда и вытекает требуемое.

Пусть теперь ε бесконечно мало, а a конечно. Так как a конечно, то $|a|$ меньше некоторого стандартного A. Тогда $|\varepsilon\cdot a|<|\varepsilon|\cdot|A|$. Докажем, что $|\varepsilon|\cdot|A|<p$ для любого стандартного $p>0$. В самом деле, $|\varepsilon|<p/|A|$, так как ε бесконечно мало, а $p/|A|$ — стандартное положительное число. Таким образом, $\varepsilon\cdot a$ — бесконечно малое.

Словесно близкие (если не точно такие же) утверждения о бесконечно малых величинах, вероятно, хорошо знакомы читателю из учебников математического анализа. Это сходство, однако, не должно заслонять принципиального различия: в учебнике анализа речь идет о последовательностях действительных чисел (которые называются бесконечно малыми, если их предел равен нулю), а у нас — не о последовательностях, а о новых, гипердействительных числах.

Назовем два гипердействительных числа *бесконечно близкими*, если их разность бесконечно мала. Из приведенных выше свойств бесконечно малых следует, что отношение бесконечной близости есть отношение эквивалентности. Напомним, что это означает, что отношение бесконечной близости рефлексивно (каждое x бесконечно близко самому себе), симметрично (если x бесконечно близко к y, то y бесконечно близко к x) и транзитивно (если x бесконечно близко к y, а y бесконечно близко к z, то x бесконечно близко к z). Всякое отношение эквивалентности разбивает множество, на котором оно оп-

ределено, на непересекающиеся классы, причем любые два элемента одного класса эквивалентны, а любые два элемента разных классов не эквивалентны. В частности, наше отношение разбивает $^*\mathbb{R}$ на непересекающиеся классы, причем элементы одного класса бесконечно близки друг к другу, а элементы разных классов — нет. Классы, содержащие стандартные действительные числа, представляют собой упоминавшиеся выше «монады».

Ознакомившись со строением $^*\mathbb{R}$ «в малом», посмотрим на его строение «в большом». Рассмотрим другое отношение эквивалентности на $^*\mathbb{R}$, говоря, что гипердействительные числа x и y «находятся в одной галактике», если их разность — конечное гипердействительное число. Ясно, что мы получаем отношение эквивалентности на множестве всех гипердействительных чисел (если $x-y$ и $y-z$ конечны, то их сумма, равная $x-z$, конечна). Это отношение разбивает все гипердействительные числа на классы, которые естественно назвать *галактиками*. Это разбиение является более «грубым», чем разбиение на монады: каждая галактика представляет собой объединение бесконечного числа монад. Одной из галактик является множество всех конечных гипердействительных чисел (эту галактику естественно назвать «нашей галактикой»), любая другая галактика либо состоит из бесконечно больших положительных чисел, либо состоит из бесконечно больших отрицательных чисел. Галактики «не смешиваются»: если G_1 и G_2 — две галактики, то либо G_1 лежит вся левее G_2 (т. е. любое число из G_1 меньше любого числа из G_2), либо наоборот. Между любыми двумя галактиками существует третья (чтобы найти ее, возьмем x и y из двух первых галактик и рассмотрим галактику, содержащую их полусумму $(x+y)/2$) и, следовательно, бесконечно много промежуточных (возьмем четвертую между первой и третьей и т. д.). Среди галактик нет ни наибольшей («самой правой»), ни наименьшей («самой левой»): если галактика G содержит x, а ω — бесконечно большое, то число $x+\omega$ будет находиться в галактике G', расположенном правее G, а число $x-\omega$ будет находиться в галактике G'', расположенной левее G.

Как и в обычном изложении математического анализа, мы можем различать бесконечно малые (или бесконечно большие) разных порядков. Именно: будем говорить, что бесконечно малое ε является бесконечно малым более высокого порядка, чем бесконечно малое δ, если

отношение ε/δ бесконечно мало. Аналогичным образом бесконечно большое A имеет более высокий порядок, чем бесконечно большое B, если A/B бесконечно велико. Согласно этим определениям, для любого бесконечно малого ε можно указать бесконечно малое более высокого порядка, например ε^2; ε^3 будет иметь еще более высокий порядок и т. д. (Аналогично обстоит дело и для бесконечно больших.) Можно сказать, что, рассматривая окрестность 0 в микроскоп с любым (возможно, бесконечно большим) увеличением, мы всегда будем видеть слившимися точки, на самом деле различные. Если микроскоп увеличивает в $1/\varepsilon$ раз, то ε будет видно на конечном расстоянии от нуля, но ε^2 по-прежнему будет сливаться с нулем. (При этом все стандартные числа, разумеется, окажутся бесконечно далеко вне нашего поля зрения!) Включив увеличение $1/\varepsilon^2$ или, другими словами, рассматривая видимое в микроскопе изображение снова в микроскоп (представим себе, что это возможно), мы увидим, что ε теперь бесконечно далеко от нашего поля зрения, ε^2 хорошо отличимо от нуля, но по-прежнему есть числа, сливающиеся с нулем (ε^3, например).

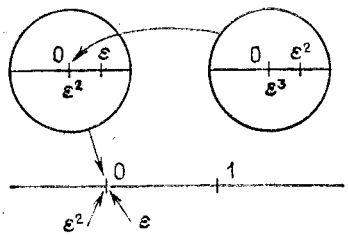

Рис. 8

Приведем (следуя книге Кейслера [38]) еще несколько «микрофотографий» разных объектов. Направив

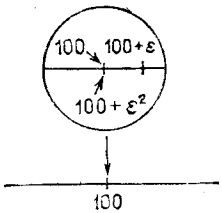

Рис. 9

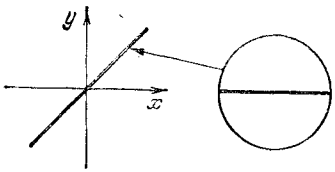

Рис. 10

микроскоп на произвольную точку действительной прямой, мы не увидим ничего особенно нового: просто вместо 0 будет какое-то другое действительное число. График функции $y =$ (стандартная часть x), определенной

на конечных гипердействительных x, при рассматривании без микроскопа неотличим от графика тождественной функции $y = x$. Но посмотрев (с бесконечно большим увеличением) на любую его точку, увидим, что сходство это лишь кажущееся: в микроскопе график выглядит как горизонтальная прямая! (График $y = x$ и в микроскопе — прямая, проходящая под углом 45° к осям координат.)

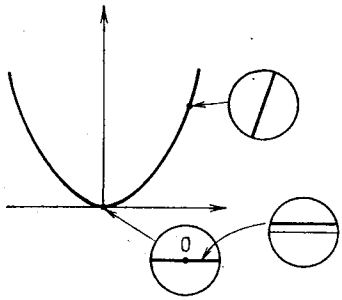

Рис. 11

График функции $y = x^2$ под микроскопом выглядит как прямая. В начале координат этот график горизонтален (сливается с осью абсцисс), а в других точках наклонен. Мы не случайно употребили слова «выглядит как» и «сливается». Если посмотреть с еще бо́льшим увеличением, то можно увидеть, что это слияние неполное: между графиком и прямой есть «бесконечно малая щель более высокого порядка».

До сих пор мы направляли наш микроскоп на конечную часть гипердействительной прямой (или на точки плоскости с конечными координатами). «Прибор», предназначенный для рассматривания бесконечно удаленных участков, естественно назвать «телескопом». Направив телескоп на какое-нибудь бесконечно большое гипердействительное число, увидим что-нибудь такое:

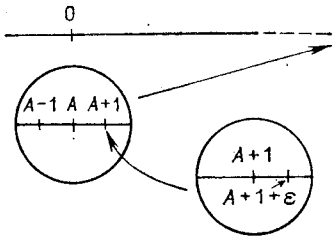

Рис. 12

(Телескопическое изображение мы, в свою очередь, следуя Кейслеру, можем рассматривать через микроскоп.) По-

смотрев в телескоп на график гиперболы $y = 1/x$ в бесконечно большой точке, мы увидим, что он сливается с осью абсцисс. Посмотрев на телескопическое изображение

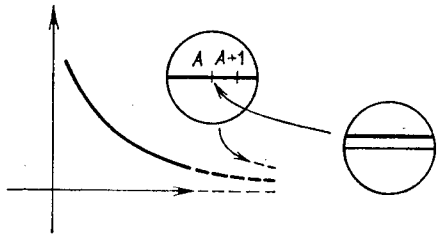

Рис. 13

в микроскоп, можно увидеть его в виде прямой, проходящей «параллельно оси абсцисс» (отклонение графика от прямой — бесконечно малое более высокого порядка).

§ 4. ПРИМЕР НЕАРХИМЕДОВОЙ ЧИСЛОВОЙ СИСТЕМЫ

До сих пор мы говорили о гипердействительной прямой (а точнее, любом неархимедовом расширении упорядоченного поля действительных чисел), откладывая вопрос о том, существует ли хотя бы одно такое расширение. Попытаемся теперь построить такое расширение.

Первая приходящая в голову мысль — следуя традиции, назвать бесконечно малыми гипердействительными числами последовательности действительных чисел, сходящиеся к 0. Нужно, разумеется, иметь и не бесконечно малые гипердействительные числа. По-видимому, самый естественный путь здесь таков: считать гипердействительным числом произвольную последовательность действительных чисел. Необходимо, чтобы действительные числа были частным случаем гипердействительных: этого можно легко добиться, отождествив каждое действительное число a с последовательностью из одинаковых элементов $a, a, a, \ldots$ Получаем на первый взгляд привлекательную картину: все последовательности действительных чисел называются гипердействительными числами, среди них есть стандартные (постоянные, или стационарные, последовательности) и стремящиеся к нулю. Гипердействительные числа можно складывать и умно-

жать так, как это обычно делают с последовательностями,— почленно, считая суммой последовательностей $a = a_0, a_1, \ldots$ и $b = b_0, b_1, \ldots$ последовательность $a + b = a_0 + b_0, a_1 + b_1 \ldots$, а произведением — последовательность $a \cdot b = a_0 \cdot b_0, a_1 \cdot b_1, \ldots$ (При этом нулем будет последовательность из одних нулей, а единицей — из единиц.)

Однако дальше нас постигает разочарование: поля не получается. Именно: не удается определить операцию взятия обратного. Что считать, например, обратным к последовательности 0, 1, 0, 1, ...? Ясно, что найти такое x, что $ax = 1$, можно, лишь если в последовательности a нет нулей. Попытка исключить из рассмотрения последовательности, содержащие нули, также ни к чему хорошему не приводит: после этого непонятно, как определять сложение (сумма двух последовательностей без нулей может содержать нули!). С определением порядка также, несомненно, нас ждут большие трудности: нам предстоит решить, например, какая из двух (неравных) последовательностей 0, 1, 0, 1, ... и 1, 0, 1, 0, ... больше.

В итоге мы видим, что идея с определением гипердействительных чисел как последовательностей наткнулась на серьезные препятствия, для преодоления которых нужна какая-то новая идея. Мы еще вернемся к этому построению.

Опишем теперь другой путь построения системы гипердействительных чисел (для нас пока «система гипердействительных чисел» означает «неархимедово расширение упорядоченного поля действительных чисел»). Основная идея этого построения может быть описана в одной фразе так: у нас нет объектов, но есть имена для них; так объявим же имена объектами! Эта (часто применяемая в математической логике) идея конкретизируется в нашем случае следующим образом.

Мы знаем, что в нашем (пока еще не построенном и неизвестно существующем ли) расширении должно быть хотя бы одно бесконечно малое положительное гипердействительное число. Обозначим его через ε. Поскольку гипердействительные числа можно умножать друг на друга (и, в частности, на действительные числа), то наряду с ε в нашем расширении будут и числа 2ε, $0{,}5\varepsilon$ и вообще все числа вида $a\varepsilon$, где a — произвольное стандартное действительное число. Более того, число ε можно умножать и на себя, поэтому в нашем расширении будут иметься ε^2, ε^3, $2\varepsilon^2$, $3\varepsilon^2 + 2\varepsilon + 1, \ldots$ и вообще все гипердействительные числа вида $P(\varepsilon)$, где P — много-

член со стандартными действительными коэффициентами. Множество чисел такого вида, как легко понять, замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения. Это значит, что, складывая, вычитая или перемножая два числа такого вида, мы вновь получим число такого же вида. Но для гипердействительных чисел определено еще и деление. Поэтому в расширении будут и числа вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где P и Q — многочлены со стандартными действительными коэффициентами. После этого мы получаем множество гипердействительных чисел, замкнутое относительно всех арифметических операций: складывая, вычитая, умножая или деля две дроби указанного вида по обычным правилам, получаем дробь такого же вида.

Таким образом, не имея пока искомого расширения, мы уже смогли назвать некоторые его элементы, дать им имена. Этими именами являются записи вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где ε — некоторый символ. Более того, мы можем судить и о том, какая из двух записей обозначает большее число. В самом деле, достаточно уметь определять, обозначает ли данная запись положительное, отрицательное или нулевое число (поскольку $a > b$ тогда и только тогда, когда $a - b > 0$). Вспоминая, что знак дроби можно определить по знакам числителя и знаменателя, мы видим, что достаточно уметь определять знак $P(\varepsilon)$, где P — многочлен. Это делается так. Легко видеть, что знак величины $a_0 + a_1\varepsilon + \ldots$ совпадает со знаком a_0, если $a_0 \neq 0$. В самом деле, добавка $a_1\varepsilon + \ldots$ бесконечно мала, а складывая положительное (отрицательное) число с бесконечно малым, мы получаем положительное (соответственно отрицательное) число. Возможен, однако, случай $a_0 = 0$. Будем считать для определенности, что ε — положительное бесконечно малое. Вынесем из нашего многочлена ε в наибольшей возможной степени, т. е. представим его в виде

$$\varepsilon^k(a_k + a_{k+1}\varepsilon + \ldots),$$

где a_k уже отлично от 0. Теперь ясно, что знак всего выражения определяется знаком выражения в скобках (при умножении на положительное число знак не меняется), а знак выражения в скобках (как мы уже видели) определяется знаком числа a_k.

Поясним сказанное на примере. Пусть мы хотим сравнить числа $\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}$ и $\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$ или, другими словами, сравнить

их разность

$$\frac{1+\varepsilon^2}{1+\varepsilon}-\frac{2+\varepsilon^3}{2+\varepsilon^2}$$

с нулем. Вычисляя эту разность по обычным правилам, получаем

$$\frac{(1+\varepsilon^2)(2+\varepsilon^2)-(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^3)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}=\frac{\varepsilon(-2+3\varepsilon-\varepsilon^2)}{(1+\varepsilon)(2+\varepsilon^2)}.$$

Видно, что она отрицательна. Значит, первое число меньше второго.

По существу, мы уже построили искомое неархимедово расширение. Нужно лишь посмотреть на наши рассуждения с другой позиции. До сих пор выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ рассматривались нами как имена «настоящих» гипердействительных чисел (взятых неизвестно откуда). А теперь они станут самими гипердействительными числами. Рассмотрим формальные выражения вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, где ε — некоторый символ, а P и Q — многочлены с действительными коэффициентами, причем $Q \neq 0$. Провозглашая, что объектами, а в данном случае гипердействительными числами, мы объявим имена, а в данном случае выражения, или записи вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$, мы были не совсем точны. Дело в том, что, очевидно, две различные записи могут выражать одно и то же число (иными словами, быть двумя различными именами одного и того же числа): так, например, естественно считать, что запись $(\varepsilon^2-1)/(\varepsilon-1)$ выражает то же самое число, что и $(\varepsilon+1)/1$. Будем называть два выражения $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ и $R(\varepsilon)/S(\varepsilon)$ эквивалентными, если $P(\varepsilon)\cdot S(\varepsilon)=R(\varepsilon)\cdot Q(\varepsilon)$ (равенство понимается как равенство многочленов, т. е. как равенство коэффициентов при одинаковых степенях). Легко проверить, что это определение действительно задает отношение эквивалентности, разбивающее все выражения вида $P(\varepsilon)/Q(\varepsilon)$ на классы. Эти классы мы и будем называть гипердействительными числами. Сложение, вычитание, умножение и деление гипердействительных чисел определяются по обычным правилам. Так, например, если α — класс, содержащий P/Q, а β — класс, содержащий R/S, то их суммой называется класс, содержащий $(PS+RQ)/SQ$, а произведением — класс, содержащий PR/QS. Легко проверить, что это определение корректно, т. е. не зависит от выбора элементов P/Q в классе α и R/S в классе β (в результате полу-

чаются разные представители одного и того же класса). Аналогичным образом можно определить взятие обратного и противоположного, нуль и единицу. Нетрудно проверить, что все аксиомы поля при этом будут выполнены. Изложенная конструкция хорошо известна в алгебре: построенное поле называется полем рациональных функций с коэффициентами в $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathbb{R}(\varepsilon)$.

Нам осталось определить только порядок, указав, как выбрать из двух различных гипердействительных чисел (т. е. из двух различных классов эквивалентных дробей) большее. Для этого нужно вычесть одно число из другого и определить, будет ли разность (отличная от нуля, поскольку числа различны) положительной или отрицательной. Чтобы определить, будет ли отличное от нуля число α положительным или отрицательным, возьмем его представитель P/Q. Здесь P и Q отличны от 0 (Q отлично от нуля по определению, P — потому что, по нашему предположению, разность не равна 0). Вынесем в числителе и в знаменателе ε в наибольшей возможной степени:

$$P = \varepsilon^k(a_k + a_{k+1}\varepsilon + \ldots), \quad Q = \varepsilon^l(b_l + b_{l+1}\varepsilon + \ldots), \quad a_k,\ b_l \neq 0.$$

Число α будет положительным, если a_k и b_l имеют одинаковые знаки, и отрицательным, если они имеют разные знаки. В качестве упражнения читатель может проверить (это нетрудно), что предлагаемое определение корректно (т. е. что неважно, какой именно из эквивалентных представителей взять) и что выполнены все аксиомы упорядоченного поля. Построенное упорядоченное поле $\mathbb{R}(\varepsilon)$ можно рассматривать как расширение поля $\mathbb{R}$: достаточно отождествить действительное число x с классом эквивалентных дробей, содержащим дробь $x/1$. Осталось лишь показать, что аксиома Архимеда не выполняется, предъявив бесконечно малый элемент. Этим элементом будет, конечно, ε (точнее, класс, содержащий $\varepsilon/1$). В самом деле, $\underbrace{\varepsilon + \varepsilon + \ldots + \varepsilon}_{n \text{ раз}} < 1$, так как разность $1 - n\varepsilon$ положительна (знак определяется свободным членом, а $1 > 0$).

Итак, искомое расширение построено. На этом примере можно проиллюстрировать некоторые понятия, обсуждавшиеся нами. Дробь

$$\frac{a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_n\varepsilon^n}{b_0 + b_1\varepsilon + \ldots + b_k\varepsilon^k}$$

будет бесконечно малой, если первый ненулевой коэффициент a_t в числителе расположен правее, чем первый ненулевой коэффициент b_s в знаменателе, т. е. если $t > s$. Если же $t < s$, то дробь будет бесконечно большой. Если же $t = s$, то дробь будет конечным гипердействительным числом, стандартная часть которого равна a_t/b_s. Например,

ε, ε^2, $\dfrac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}{1 + \varepsilon}$ — бесконечно малые,

$\dfrac{1}{\varepsilon}$, $\dfrac{1 + \varepsilon}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3}$ — бесконечно большие,

$\dfrac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$, $\dfrac{\varepsilon^2 + \varepsilon^5}{2\varepsilon^2 + 3\varepsilon^4}$ — конечные гипердействительные числа (стандартная часть первого равна 1, второго 1/2).

§ 5. НОВЫЕ ТРЕБОВАНИЯ К ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛАМ

Итак, мы построили неархимедово расширение $\mathbb{R}(\varepsilon)$ поля действительных чисел. Постараемся теперь понять, хватит ли его для обоснования приведенных выше «нестандартных рассуждений».

Пример с вычислением производной функции $y = x^2$ становится вполне корректным: нужно сказать лишь, что производной функции $y = x^2$ в стандартной точке x называется стандартная часть отношения dy/dx. Действительно, $\mathrm{st}(dy/dx) = \mathrm{st}(2x + dx) = 2x$. Хуже обстоит дело с другими примерами. При попытке продифференцировать корень необходимо вычислить разность $\sqrt{x + dx} - \sqrt{x}$ и, в частности, извлечь корень из гипердействительного числа $x + dx$. А в нашем поле $\mathbb{R}(\varepsilon)$ гипердействительных чисел корень извлекать можно не всегда. (В качестве упражнения читатель может проверить, что в нем не существует гипердействительного числа a, для которого $a^2 = \varepsilon$.) Еще хуже дело обстоит с определением интеграла: там необходимо складывать величины вида $f(x)$, где x — гипердействительное число, в то время как функция f определена только на действительных числах.

Уже из этих примеров ясно, чего нам не хватает. Нам нужно уметь вычислять «значения» стандартных функций (заданных первоначально как функции с действительными аргументами и значениями) на гипердействительных аргументах. Другими словами, для каждой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ необходимо иметь ее «гипердейст-

вительный аналог» $^*f$: $^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. При этом, конечно, значения $^*f$ на стандартных числах должны совпадать с соответствующими значениями функции f. Другими словами, $^*f$ должно быть продолжением f. Такие аналоги были у нас для операций сложения, вычитания, умножения и деления. Но этого мало: нам нужны такие аналоги и для других функций. Если бы они были, при вычислении корня мы могли бы рассмотреть функцию $\mathrm{sqrt}(x) = \sqrt{x}$ (с действительными аргументами и значениями), затем взять ее продолжение *sqrt и определить производную как стандартную часть отношения

$$({}^*\mathrm{sqrt}\,(x + dx) - {}^*\mathrm{sqrt}\,(x))/dx.$$

Итак, для каждой стандартной функции f (функции с действительными аргументами и значениями) нам нужно иметь ее гипердействительное продолжение $^*f$. Если от $^*f$ ничего не требовать, то это тривиально: можно считать, что во всех действительных точках $^*f$ принимает те же значения, что и f, а в нестандартных точках $^*f$ имеет какие угодно значения (например, нули). Ясно, однако, что от такого продолжения никакого толку нет: при вычислении производной корня, например, нужно, чтобы функция *sqrt обладала свойством

$${}^*\mathrm{sqrt}\,(b) - {}^*\mathrm{sqrt}\,(a) = \frac{b - a}{{}^*\mathrm{sqrt}\,(b) + {}^*\mathrm{sqrt}\,(a)},$$

которое мы использовали при этом вычислении. Поскольку трудно предсказать заранее, какие именно свойства могут нам понадобиться, было бы желательно, чтобы функция $^*f$ была как можно более похожа на функцию f: в идеале $^*f$ должна обладать всеми свойствами, которыми обладает функция f, быть как бы ее «естественным распространением» с $\mathbb{R}$ на $^*\mathbb{R}$.

Слова «всеми свойствами» нуждаются, однако, в правильном толковании. Вряд ли мы хотим, чтобы $^*f$, подражая f, была определенной только на действительных числах. Таким образом, нам нужно выделить некоторый класс свойств — класс тех свойств, которые мы хотим сохранить. Правильный выбор этого класса имеет решающее значение для успеха нашего построения системы гипердействительных чисел. Если этот класс будет слишком узок, то от наличия продолжений $^*f$ не будет пользы. Если же, напротив, он будет слишком широк, то сама возможность построения системы гипердействительных чисел и определения продолжений окажется под угрозой.

Итак, наша главная задача — описать, какие свойства стандартных функций мы хотим сохранить при переходе от действительных чисел к гипердействительным. Есть две возможности это сделать. Первая возможность состоит в применении методов математической логики. Можно сказать, что при переходе от действительных чисел к гипердействительным сохраняются все свойства, которые можно выразить на «языке первого порядка». Мы обсудим этот путь (в частности, объясним, что такое язык первого порядка) в дальнейшем.

А сейчас мы обсудим вторую возможность, позволяющую обойтись более «кустарными» средствами и не прибегать к сведениям из логики. Конечно, при этом мы будем испытывать некоторые неудобства, использовать обходные маневры и т. п., но зато не потребуется знакомство с математической логикой.

Напомним ситуацию, в которой мы находимся. Мы предполагаем, что помимо поля $\mathbb{R}$ действительных чисел имеется более широкое упорядоченное поле $^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел, включающее $\mathbb{R}$ как подмножество (еще раз подчеркнем, что существование $^*\mathbb{R}$ с нужными свойствами является пока только гипотезой, а не доказанным фактом). Пусть для каждой функции f с действительными аргументами имеется ее естественное распространение, ее «гипердействительный аналог» — функция с гипердействительными аргументами и значениями. При этом функция f может быть функцией не только одного действительного аргумента, но и двух, трех и т. д.; функция $^*f$, разумеется, должна иметь то же самое число аргументов. Для простоты мы пока не будем рассматривать частичных функций и будем считать, что f (соответственно $^*f$) определена при всех действительных (соответственно гипердействительных) аргументах. Сформулируем теперь наше требование («аналоги обладают теми же свойствами, что и исходные функции») более точно.

Будем рассматривать системы уравнений вида $t = s$ и неравенств вида $t \neq s$, левые и правые части которых содержат какие-то действительные функции действительных аргументов, действительные константы и переменные — что-нибудь вроде

$$\sin(\cos(x)) = y + \exp(z),\ z \neq y - 2 \cdot x,\ [z] = y.$$

Эта система содержит переменные x, y, z, одноместные функции sin, cos, exp, [ ] (целая часть), двуместные

функции (сложение, вычитание, умножение) и константу 2 (константы для единообразия мы будем считать функциями нуля аргументов). Все входящие в систему функции имеют по нашему предположению гипердействительные аналоги. Обозначим их *sin, *cos, *exp, *[ ], *+, *−, *· и напишем систему

$$*\sin(*\cos(x)) = y \; *+ \; *\exp(z), \; z \neq y \; *- \; 2 *\cdot x, \; *[z] = y,$$

которую естественно назвать «гипердействительным аналогом исходной».

В качестве возможных значений переменных этой системы могут фигурировать любые гипердействительные числа. Тем самым приобретает смысл вопрос о наличии или отсутствии гипердействительных решений этой системы. Поскольку мы предполагаем, что входящие в нее функции являются продолжениями соответствующих функций действительного аргумента, то всякое (действительное) решение исходной системы будет одновременно решением новой системы. Таким образом, если исходная система имеет решения, то и ее гипердействительный аналог имеет решения. Мы потребуем и обратного: *всякая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет (гипердействительные) решения, должна иметь действительные решения.*

Придирчивый читатель мог бы указать нам на то, что понятие «система уравнений и неравенств» не определено нами: мы всего лишь привели один пример. Тем самым и наше требование не получило точной формулировки. Чтобы ответить на эти возражения, введем понятие терма. Выберем счетный набор символов, элементы которого будем называть *переменными*. Будем называть *термом* любую переменную, любое действительное число, а также любое выражение вида $f(t_1, \ldots, t_n)$, где f — функция n действительных аргументов, а $t_1, \ldots, t_n$ — построенные ранее термы. Тем самым $\sin(\cos(x))$, $a(y, \exp(z))$ (a — функция сложения) и т. п. становятся термами. Системой (точнее, системой уравнений и неравенств) назовем конечный набор записей вида $t = s$ или $t \neq s$, где t и s — термы. Приведенный нами выше пример системы подпадает под это определение, нужно только заменить привычные обозначения типа $x + y$ на $a(x, y)$, где a — функция сложения, и т. п. Определим теперь понятие *решения* системы. Если в терм подставить действительные числа вместо переменных, то он приобретет некоторое действительное значение. Решение си-

стемы — это такой набор значений переменных, при котором левая и правая части любого равенства $t = s$, входящего в систему, приобретают одно и то же значение, а левая и правая части любого неравенства $t \neq s$, входящего в систему,— разные.

По нашему предположению всякая функция с действительными аргументами и значениями имеет гипердействительный аналог («естественное продолжение»). Понятие гипердействительного аналога легко распространяется на термы — чтобы получить аналог терма t, надо просто заменить все входящие в него функции на их гипердействительные аналоги. Проделав эту операцию со всеми термами, входящими в какую-то систему S, мы получим систему $^*S$, которую естественно также назвать гипердействительным аналогом системы S. Поскольку в нее входят функции с гипердействительными аргументами и значениями, вместо переменных можно подставлять произвольные гипердействительные числа. Гипердействительным решением системы $^*S$ назовем такой набор гипердействительных значений переменных, при которых выполнены все входящие в нее уравнения и неравенства. Теперь можно сформулировать наше требование к системе гипердействительных чисел и к гипердействительным аналогам следующим образом.

Пусть S — произвольная система уравнений и неравенств, $^*S$ — ее гипердействительный аналог. Если $^*S$ имеет (гипердействительные) решения, то S должна иметь действительные решения.

Напомним, что возможность построения неархимедова упорядоченного расширения $\mathbb{R}$ поля $\mathbb{R}$ и таких гипердействительных аналогов $^*f$ для всех действительных функций f, которые бы удовлетворяли сформулированному требованию, остается пока всего лишь гипотезой. (Мы будем называть эту гипотезу Основной гипотезой.) В следующих параграфах мы обсудим некоторые ее следствия. А к вопросу о построении системы гипердействительных чисел с требуемыми свойствами мы еще вернемся.

§ 6. ПЕРВЫЕ СЛЕДСТВИЯ

В этом параграфе мы приведем несколько примеров, показывающих, какие следствия можно вывести из сформулированной в предыдущем параграфе Основной гипотезы. Оказывается, что несмотря на то, что сформулированное нами требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств кажется весьма частным,

оно имеет самые разнообразные следствия и достаточно для обоснований значительной части рассуждений с гипердействительными числами.

Пример 1. Пусть f — функция одного действительного аргумента, принимающая только значения 0 и 1. Докажем, что функция $^*f$ принимает только значения 0 и 1. Для этого рассмотрим систему

$$f(x) \neq 0, \quad f(x) \neq 1,$$

которая по предположению не имеет действительных решений. Следовательно, не имеет (гипердействительных) решений и ее аналог — система

$$^*f(x) \neq 0, \ ^*f(x) \neq 1.$$

Пример 2. Пусть f и g — функции одного действительного аргумента, причем множества их нулей совпадают. (Множество нулей функции — множество тех значений аргумента, при которых значение функции равно 0.) В этом случае и множества гипердействительных чисел, являющиеся множествами нулей функций $^*f$ и $^*g$, совпадают. Докажем это. В самом деле, каждая из систем

$$(1) \qquad f(x) = 0, \quad g(x) \neq 0;$$

$$(2) \qquad g(x) = 0, \quad f(x) \neq 0$$

не имеет действительных решений. Следовательно, не имеют гипердействительных решений и их аналоги. Поэтому любой гипердействительный нуль функции $^*f$ обязан (чтобы не быть решением аналога системы (1)) быть нулем и для $^*g$ и наоборот.

Этот пример позволяет определить гипердействительные аналоги не только для функций, но и для множеств. Пусть A — произвольное множество действительных чисел. Рассмотрим произвольную функцию f, для которой A — множество нулей. (Такая есть: достаточно положить, например, $f(x) = 0$ при $x \in A$ и $f(x) = 1$ при $x \notin A$.) Рассмотрим теперь гипердействительный аналог $^*f$ функции f и множество $^*A$ его (гипердействительных) нулей. Как мы видим, множество $^*A$ не зависит от выбора функции f. Его мы и назовем гипердействительным аналогом множества A.

Пример 3. Мы можем теперь разрешить включать в системы наряду с равенствами $t = s$ и неравенствами $t \neq s$ и записи вида $s \in A$, где s представляет собой терм, а A — множество действительных чисел. При

этом решениями будут такие наборы (действительных или гипердействительных) значений переменных, при которых выполнены все равенства и неравенства, а значение s принадлежит множеству A. Гипердействительным аналогом записи $s \in A$ будет $^*s \in {}^*A$, где $^*s$ — гипердействительный аналог терма s, а $^*A$ — аналог множества A (в указанном смысле). Таким образом, у всякой системы равенств, неравенств и включений (т. е. записей вида $s \in A$) появляется гипердействительный аналог. Для таких систем остается в силе свойство одновременной разрешимости: если гипердействительный аналог системы имеет (гипердействительные) решения, то исходная система имеет (действительные) решения. Чтобы увидеть это, достаточно заменить $s \in A$ на $a(s) = 0$, где a — функция с действительными аргументами и значениями, множеством нулей которой является A. Аналогичным образом можно добавлять в систему и утверждения вида $s \notin A$ (что заменяется на $a(s) \neq 0$).

Пример 4. Пусть A — пустое множество. Докажем, что $^*A$ — пустое множество. В самом деле, система

$$x \in A$$

не имеет действительных решений, поэтому и система $x \in {}^*A$ не имеет (гипердействительных) решений. Рассмотрев систему $x \notin A$, получаем аналогичным образом, что если A содержит все действительные числа, то $^*A$ содержит все гипердействительные числа. Таким образом, гипердействительным аналогом множества $\mathbb{R}$ будет множество $^*\mathbb{R}$, так что наши обозначения согласованы.

Чтобы не быть излишне многословными, мы в дальнейшем будем позволять себе некоторые вольности речи. Именно: вместо того чтобы говорить о системе S и ее действительных решениях, а также о системе $^*S$ и ее гипердействительных решениях, будем говорить о действительных и гипердействительных решениях системы S. (Разумеется, говоря о гипердействительных решениях системы S, мы на самом деле будем иметь в виду гипердействительные решения системы $^*S$.) Это позволит нам сэкономить место и не писать две системы, отличающиеся друг от друга лишь звездочками. Например, в последнем примере мы могли бы сказать, что «система $x \in A$ не имеет действительных решений и, следовательно, не имеет и гипердействительных решений, поэтому $^*A$ пусто».

Пример 5. Если $A = B \cap C$, то ${}^*A = {}^*B \cap {}^*C$. В самом деле, каждая из систем

$$x \in B,\ x \in C,\ x \notin A;$$
$$x \in A,\ x \notin B;$$
$$x \in A,\ x \notin C$$

не имеет действительных, и, следовательно, гипердействительных решений. (Точнее, следовало бы говорить об аналогах этих систем!) Отсюда получаем, что ${}^*B \cap {}^*C \subset {}^*A$ (первая система), ${}^*A \subset {}^*B$ (вторая) и ${}^*A \subset {}^*C$ (третья), откуда вытекает, что ${}^*A \subset {}^*B \cap {}^*C$. В качестве упражнения читатель может проверить аналогичные свойства других теоретико-множественных операций (если $A = B \cup C$, то ${}^*A = {}^*B \cup {}^*C$; если $A = \mathbb{R} \setminus B$, то ${}^*A = {}^*\mathbb{R} \setminus {}^*B$).

Напомним, что наши требования к системе гипердействительных чисел состояли из двух частей. Во-первых, ${}^*\mathbb{R}$ должно быть упорядоченным неархимедовым полем, расширяющим $\mathbb{R}$. Во-вторых, должны существовать аналоги для всех действительных функций, удовлетворяющие требованию одновременной разрешимости систем уравнений. Эти требования оказываются избыточными: тот факт, что гипердействительные аналоги сложения, умножения и т. п. превращают ${}^*\mathbb{R}$ в поле, можно вывести из требования одновременной разрешимости систем уравнений. Покажем это.

Пример 6. Пусть a и m — функции сложения и умножения действительных чисел: $a(x, y) = x + y$, $m(x, y) = x \cdot y$. Функции a и m (как и любые функции с действительными аргументами и значениями) имеют гипердействительные аналоги ${}^*a$ и ${}^*m$. Эти аналоги мы будем рассматривать в качестве сложения и умножения гипердействительных чисел. Аналогичным образом, рассмотрев функции N (взятие противоположного) и R (взятие обратного) и их гипердействительные аналоги, мы определим взятие противоположного и обратного в ${}^*\mathbb{R}$. (Небольшая тонкость: мы рассматриваем лишь всюду определенные функции, а функция R первоначально не определена в 0. Это легко поправить, например, доопределив ее и считая, что $R(0) = 0$.) Покажем, что введенные таким образом в ${}^*\mathbb{R}$ операции удовлетворяют аксиомам поля. Это делается совсем просто. Проверим, например, что в ${}^*\mathbb{R}$

$$x(y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Так как $\mathbb{R}$ — поле, то система

$$m(x, a(y, z)) \neq a(m(x, y), m(x, z))$$

не имеет действительных решений. Значит, она не имеет и гипердействительных решений, т. е. требуемое свойство выполнено и в $^*\mathbb{R}$. Аналогично проверяются и остальные аксиомы поля. Мы рассмотрим для примера еще одну: $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ при $x \neq 0$ (ее выбор объясняется желанием проиллюстрировать, что учет условия $x \neq 0$ не создает трудностей). Система

$$x \neq 0,\ m(x, R(x)) \neq 1$$

не имеет действительных и, следовательно, гипердействительных решений. Поэтому нет гипердействительных x, для которых $x \neq 0$ и $^*m(x, {}^*R(x)) \neq 1$, т. е. для всех гипердействительных x, для которых $x \neq 0$, выполнено $^*m(x, {}^*R(x)) = 1$.

Пример 7. Продолжая двигаться в выбранном направлении, мы должны превратить $^*\mathbb{R}$ в упорядоченное поле, исходя из требования одновременной разрешимости систем в $^*\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$. Другими словами, нам нужен гипердействительный аналог отношения порядка. Отношение порядка на $\mathbb{R}$, как и всякое двуместное отношение, есть некоторое подмножество множества $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ пар действительных чисел. Определим для каждого $S \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ его аналог следующим образом (см. пример 2). Рассмотрим функцию s двух действительных аргументов, для которой $s(x, y) = 0$ равносильно $\langle x, y \rangle \in S$. Рассмотрим ее гипердействительный аналог $^*s$ и множество $^*S$ тех пар гипердействительных чисел $\langle x, y \rangle$, для которых $^*s(x, y) = 0$. Как и в примере 2, легко проверить, что множество $^*S$ зависит только от множества нулей функции s. Эту общую процедуру можно применить и к отношению порядка, рассмотрев множество Ord тех пар $\langle x, y \rangle$ действительных чисел, для которых $x < y$, его аналог *Ord и определив порядок в $^*\mathbb{R}$ так: гипердействительное число x меньше гипердействительного числа y, если пара $\langle x, y \rangle$ принадлежит *Ord.

Теперь в Основной гипотезе можно наряду с равенствами $t = s$, неравенствами вида $t \neq s$ и включениями $t \in A$ включать в системы и неравенства вида $t < s$ и $t \nless s$. Такие записи нужно рассматривать как сокращения для ord $(t, s) = 0$ и ord$(t, s) \neq 0$, где ord — функция, множеством нулей которой является Ord.

Легко проверить свойства порядка. В самом деле, система

$$x < y,\ y < x$$

не имеет действительных решений, поэтому одновременное выполнение свойств $x < y$ и $y < x$ невозможно и для гипердействительных чисел. Аналогично система $x < x$ не имеет действительных решений, поэтому никакое гипердействительное число не меньше самого себя. Наконец, рассмотрев систему

$$x \neq y,\ x \not< y,\ y \not< x,$$

не имеющую решений, убеждаемся, что из любых двух различных гипердействительных чисел одно меньше другого. Рассмотрев систему

$$x < y,\ x + z \not< y + z,$$

убеждаемся, что из $x < y$ следует $x + z < y + z$, и т. д.

Тем самым $^*\mathbb{R}$ превращается в упорядоченное поле.

Пример 8. Пусть A — произвольное множество действительных чисел. Покажем, что $A \subset {}^*A$. В самом деле, если $a \in A$, а f — функция с множеством нулей A (пример 2), то $f(a) = 0$ и, значит, $^*f(a) = 0$, т. е. $a \in {}^*A$.

Пример 9. Пусть A — конечное множество действительных чисел. Покажем, что в этом случае $^*A = A$, т. е. никаких новых элементов $^*A$ по сравнению с A не содержит.

Пусть, например, A содержало три действительных числа p, q, r. Рассмотрим систему

$$x \neq p,\ x \neq q,\ x \neq r,\ x \in A.$$

Она не имеет действительных решений, значит, не имеет и гипердействительных решений. Но всякое $x \in {}^*A$, отличное от p, q, r, было бы ее решением. Значит, $^*A = A$.

Пример 10. Естественный вопрос, возникающий после рассмотрения предыдущего примера, таков: а что будет для бесконечных A? Мы видели, что всякое действительное x, принадлежащее A, принадлежит и $^*A$. Аналогичным образом всякое действительное x, не принадлежащее A, не принадлежит и $^*A$. Поэтому все новые элементы $^*A$ по сравнению с A обязаны быть нестандартными. Оказывается, что они обязательно будут, если A бесконечно! Прежде чем приводить это рассуждение, об-

ратим внимание на то, что это первое рассуждение, использующее наличие бесконечно малых в $^*\mathbb{R}$. До сих пор мы ссылались только на Основную гипотезу, и, следовательно, все наши рассуждения были справедливы и для случая $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}$.

Итак, докажем, что если A бесконечно, то в $^*A$ существуют нестандартные (и, следовательно, не принадлежащие A) элементы. Это доказательство значительно сложнее уже встречавшихся (которые были почти очевидны). Его идею можно описать так. Раз A бесконечно, существует вещественная функция f, не ограниченная сверху на A. Тогда ее аналог $^*f$ будет неограниченным на $^*A$. Это значит, что среди $x \in {}^*A$ найдутся нестандартные: если бы все элементы $^*A$ были стандартны, то и все значения $f(x)$ при $x \in {}^*A$ были бы стандартны, и множество этих значений было бы ограничено сверху бесконечно большим гипердействительным числом.

Проведем теперь это рассуждение подробно.

Пусть A бесконечно. Рассмотрим функцию f одного действительного аргумента с действительными значениями, не являющуюся ограниченной сверху на A. (Чтобы построить такую функцию, достаточно выбрать счетное подмножество $A' = \{a_0, a_1, \ldots\}$, $A' \subset A$ и положить $f(a_n) = n$, $f(x) = 0$ при $x \notin A'$.) Так как функция f не ограничена, то для любого c существует такое $x \in A$, что $f(x) > c$. Обозначим это x через $g(c)$. Мы имеем две функции f и g с такими свойствами: $g(c) \in A$ при всех действительных c, причем $c < f(g(c))$. Рассмотрим теперь гипердействительные аналоги $^*f$ и $^*g$ функций f и g и докажем несколько утверждений о них.

1. $^*g(c) \in {}^*A$ при всех гипердействительных c. В самом деле, система $g(x) \notin A$ не может иметь гипердействительных решений, так как не имела действительных решений.

2. $c < {}^*f({}^*g(c))$ при всех гипердействительных c. В самом деле, система $x \nless f(g(x))$ не имеет гипердействительных решений, так как не имеет действительных.

3. При бесконечно большом положительном c число $^*g(c)$ нестандартно. В самом деле, если бы $^*g(c)$ было стандартным, то и $^*f({}^*g(c))$ было бы стандартным ($^*f$ на стандартных числах принимает стандартные значения, так как продолжает f). Но это противоречит неравенству $c < {}^*f({}^*g(c))$ и тому, что c — положительное бесконечно большое.

Таким образом, $^*g(c)$ при бесконечно большом c представляет собой нестандартное гипердействительное число, принадлежащее $^*A$, что и требовалось доказать.

Советуем обратить особое внимание на это рассуждение, несмотря на то, что оно может показаться поначалу странным и даже несколько искусственным, поскольку все использованные в нем приемы не раз нам еще встретятся.

§ 7. ОГРАНИЧЕННОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ

В предыдущем параграфе мы показали, что любое конечное множество действительных чисел A равно своему гипердействительному аналогу $^*A$ (и, следовательно, $^*A$ состоит только из стандартных элементов), а для любого бесконечного A множество $^*A$ содержит нестандартные элементы. Этот факт можно рассматривать с различных точек зрения. Можно считать его любопытным свойством системы гипердействительных чисел. Другая точка зрения, кажущаяся на первый взгляд неестественной и даже абсурдной, состоит в том, чтобы видеть в этом свойстве определение конечности множества. Представим себе на минуту, что мы не знаем, что такое конечные и бесконечные множества. Тогда мы можем определить бесконечное множество как такое множество A, гипердействительный аналог $^*A$ которого содержит нестандартные элементы. Мы можем даже доказывать разные свойства бесконечных множеств, исходя из этого определения. Докажем, например, что если $C = A \cup B$ бесконечно, то хотя бы одно из множеств A и B бесконечно. В самом деле, как отмечалось в предыдущем параграфе, $^*C = {}^*A \cup {}^*B$; по предположению $^*C$ содержит нестандартный элемент, значит, его должно содержать по крайней мере одно из множеств $^*A$ и $^*B$.

Это рассуждение выглядит абсурдным: мы доказываем очевидный факт с использованием загадочного гипердействительного расширения, само существование которого пока весьма сомнительно! Согласитесь, однако, что, несмотря на свою абсурдность (или благодаря ей), это рассуждение весьма изящно. Оценивший это изящество читатель может считать, что он понял движущую силу нестандартного анализа; все дальнейшее изложение состоит лишь в применении той же идеи в других ситуациях.

Наш первый пример применения нестандартного анализа — нестандартное доказательство следующей (весьма стандартной) теоремы:

всякое ограниченное бесконечное множество действительных чисел имеет предельную точку.

Доказательство будет состоять в том, что мы дадим новые, нестандартные (но, разумеется, эквивалентные обычным, стандартным) определения ограниченного множества и предельной точки, после чего теорема станет почти очевидной. Но вначале напомним стандартные определения.

Множество A действительных чисел называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором отрезке, т. е. если существуют такие действительные числа p и q, что $p \leqslant x \leqslant q$ для всех $x \in A$. Точка a называется *предельной точкой* множества A, если для всякого положительного ε в интервале $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ найдется точка множества A, отличная от x.

Нестандартное определение ограниченности весьма просто: A ограничено, если $^*A$ не содержит бесконечно больших гипердействительных чисел. Покажем, что оно равносильно стандартному определению. Пусть A ограничено в обычном смысле, т. е. содержится в некотором отрезке $[p,\ q]$. Тогда система

$$x \in A,\ x > q$$

не имеет действительных решений, поэтому не имеет гипердействительных решений, и, следовательно, все элементы $^*A$ не больше q (в смысле имеющегося на гипердействительных числах порядка). Аналогичным образом все элементы $^*A$ не меньше p. Поэтому все элементы $^*A$ конечны. Теперь надо доказать обратное утверждение. Пусть A не ограничено (в обычном смысле). Тогда либо для всякого действительного p найдется $x \in A$, для которого $x < p$ (A не ограничено снизу), либо для всякого действительного q найдется $x \in A$, для которого $x > q$ (A не ограничено сверху). Пусть, например, A не ограничено сверху. Рассмотрим функцию f, которая по каждому действительному q дает $x \in A$, для которого $x > q$. Другими словами, $f(q) \in A$ и $f(q) > q$ при всех действительных q. Тогда $^*f(q) \in {}^*A$ (система $f(q) \notin A$ не имеет решений) и $^*f(q) > q$ (система $f(q) \ngtr q$ не имеет решений) при всех гипердействительных q. Взяв q положительным и бесконечно большим, увидим, что $^*f(q)$ есть бесконечно большой (так как $^*f(q) >$

$> q$) элемент множества $^*A$. Таким образом, A не ограничено и в смысле гипердействительного определения.

Дадим теперь гипердействительное определение предельной точки. Оно таково: стандартное число a называется *предельной точкой* множества A действительных чисел, если $^*A$ содержит нестандартное гипердействительное число, бесконечно близкое к a. (Отметим важную оговорку «нестандартное»: если бы ее не было, всякий элемент A являлся бы его предельной точкой.) Докажем, что это определение равносильно стандартному. Пусть a — предельная точка множества A в смысле стандартного определения. Тогда для всякого действительного $\varepsilon > 0$ существует такое $x \in A$, что $x \neq a$ и $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. Рассмотрим функцию f, которая дает одно из таких x по ε (при $\varepsilon \leqslant 0$ доопределим ее как угодно). Тогда при всех $\varepsilon > 0$ имеем

$$f(\varepsilon) \in A,\ f(\varepsilon) \neq a,\ f(\varepsilon) < a + \varepsilon,\ f(\varepsilon) > a - \varepsilon.$$

Каждое из этих соотношений сохранится и после перехода к гипердействительным числам: для всех $\varepsilon \in {}^*\mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ имеем

$$^*f(\varepsilon) \in {}^*A,\ {}^*f(\varepsilon) \neq a,\ {}^*f(\varepsilon) < a + \varepsilon,\ {}^*f(\varepsilon) > a - \varepsilon$$

(достаточно рассмотреть четыре системы, каждая из которых не имеет решения относительно ε:

$$f(\varepsilon) \notin A,\ \varepsilon > 0;\ f(\varepsilon) = a,\ \varepsilon > 0;$$
$$f(\varepsilon) \not< a + \varepsilon,\ \varepsilon > 0;\ f(\varepsilon) \not> a - \varepsilon,\ \varepsilon > 0).$$

Возьмем положительное бесконечно малое ε. Тогда $^*f(\varepsilon)$ будет элементом $^*A$, отличным от a. Кроме того, $^*f(\varepsilon)$ бесконечно близко к a, так как разность $^*f(\varepsilon) - a$ заключена между $-\varepsilon$ и ε и, следовательно, ее модуль меньше ε и меньше любого стандартного положительного числа. Итак, эквивалентность определений наполовину доказана. Докажем обратное утверждение.

Предположим, что a не является предельной точкой в смысле стандартного определения. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ нет точек множества A, отличных от a. Другими словами, система

$$x > a - \varepsilon,\ x < a + \varepsilon,\ x \neq a,\ x \in A$$

(рассматриваемая как система относительно x) не имеет решений. (Обратите внимание на то, что, в отличие от предыдущего рассуждения, ε в этой системе является не переменной, а константой — такой же константой, как и

a.) Согласно Основной гипотезе эта система не имеет и гипердействительных решений. Но любой нестандартный элемент $^*A$, бесконечно близкий к a, являлся бы ее гипердействительным решением. Поэтому a не является предельной точкой множества A в смысле гипердействительного определения.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство обещанного в начале параграфа утверждения. Пусть A — ограниченное бесконечное множество действительных чисел. Так как A бесконечно, $^*A$ содержит нестандартный элемент s (таково гипердействительное определение бесконечности). Так как A ограничено, то s — конечное гипердействительное число (в силу гипердействительного определения ограниченности). Как и всякое конечное число, s имеет стандартную часть a — стандартное число, бесконечно близкое к s. Оно и будет предельной точкой множества A (в силу гипердействительного определения предельной точки).

Мы видим, что доказательство становится почти тривиальным. На это можно возразить, конечно, что это упрощение — фикция: вся трудность перенесена в доказательство эквивалентности стандартных и гипердействительных определений бесконечности, ограниченности и предельной точки. Но приверженцев нестандартного анализа это возражение не смутит: они скажут, что стандартные определения вообще не нужны, а нужно с начала и до конца пользоваться нестандартными. При этом вопрос об эквивалентности, конечно, отпадает.

Не будем продолжать этого воображаемого диалога между энтузиастами нестандартного анализа и скептиками. Вместо этого мы приведем несколько примеров, которые, быть может, помогут читателю составить собственное мнение об этом предмете. Посмотрим с гипердействительной точки зрения на понятия, по традиции открывающие курс математического анализа,— понятия последовательности и предела.

Последовательностью называется функция, которая сопоставляет с каждым натуральным числом n некоторое действительное число, называемое n-м членом последовательности. Естественно ожидать, что гипердействительный аналог последовательности будет сопоставлять с каждым гипернатуральным числом n некоторое гипердействительное число. Дадим точные определения.

Рассмотрим множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел и его гипердействительный аналог $^*\mathbb{N}$. Элементы множества

$^*\mathbb{N}$ мы будем называть *гипернатуральными числами*. Легко видеть, что все нестандартные гипернатуральные числа бесконечно велики. В самом деле, для любого стандартного числа q система

$$x \in \mathbb{N}, \quad x \leqslant q, \quad x \neq 0, \ldots, \quad x \neq \llcorner q \lrcorner,$$

где $\llcorner q \lrcorner$ обозначает целую часть q (наибольшее целое число, не превосходящее q), не имеет решений. Поэтому всякое гипернатуральное число, не большее q, должно совпадать с одним из чисел $0, \ldots, \llcorner q \lrcorner$ и, следовательно, быть стандартным. Так как q можно выбрать произвольно, получаем, что всякое конечное гипернатуральное число стандартно. Поэтому все нестанадартные гипернатуральные числа бесконечно велики. Такие бесконечно большие гипернатуральные числа действительно существуют: достаточно взять функцию $f(x) = \llcorner x \lrcorner + 1$, убедиться, что системы $f(x) \notin \mathbb{N}$ и $f(x) < x$ не имеют решений (и, следовательно, $^*f(x) \in {}^*\mathbb{N}$ и $^*f(x) \geqslant x$ для всех гипердействительных x) и взять $^*f(a)$ для произвольного бесконечно большого a.

Пусть $a_0, a_1, \ldots$ — произвольная последовательность. Рассмотрим функцию α, для которой $\alpha(i) = a_i$ при натуральном i, значения же $\alpha(x)$ при x, не являющемся натуральным числом, могут быть выбраны как угодно. Рассмотрим теперь значения $^*\alpha$ на гипернатуральных числах. Функцию, сопоставляющую с каждым гипернатуральным числом значение функции $^*\alpha$ на нем, будем называть *гипердействительным аналогом последовательности* a. Мы будем использовать вольность речи, называя $^*\alpha(\omega)$ (при гипернатуральном ω) ω-м членом последовательности a и обозначая его a_ω. Таким образом, при переходе из действительной области в гипердействительную у каждой последовательности «вырастает гипердействительный хвост».

Чтобы сказанное в предыдущем абзаце стало корректным, нужно проверить лишь, что значение a_ω при гипердействительных ω не зависит от выбора функции α. В самом деле, пусть α_1 и α_2 — две функции, совпадающие на натуральных аргументах. Тогда система

$$x \in \mathbb{N}, \quad \alpha_1(x) \neq \alpha_2(x)$$

не имеет решений, и, следовательно, $^*\alpha_1$ и $^*\alpha_2$ совпадают на всех гипернатуральных аргументах.

Теперь мы должны систематически переводить определения различных свойств последовательностей на ги-

пердействительный язык. Начнем с наиболее простого свойства — ограниченности. Вот стандартное определение: последовательность $a_0, a_1, \ldots$ ограничена, если найдутся такие действительные p и q, что $p \leqslant a_i \leqslant q$ при всех i. Вспоминая содержание предыдущего параграфа (гипердействительный вариант определения ограниченности для множеств), можно предположить, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда все ее члены (как натуральные, так и гипернатуральные!) конечны (т. е. a_n — конечное гипердействительное число при всех $n \in {}^*\mathbb{N}$). Доказательство эквивалентности почти такое же, как и для множеств. Пусть $a = a_0, a_1, \ldots$ ограничена в стандартном смысле и $p \leqslant a_n \leqslant q$ при всех (стандартных) натуральных n. Тогда каждая из систем

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_n < p;$$

$$n \in \mathbb{N}, \quad a_n > q$$

не имеет решений. (Более формально следовало бы написать не $a_n < p$ и $a_n > q$, а $\alpha(n) < p$ и $\alpha(n) > q$, где α — функция, продолжающая a на аргументы, не являющиеся натуральными, см. выше.) Поэтому $a_n \geqslant p$ и $a_n \leqslant q$ для всех гипернатуральных n (в том числе и нестандартных), поэтому a_n конечно.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть последовательность $a = a_0, a_1, \ldots$ не ограничена. Тогда она либо не ограничена сверху (т. е. для всякого действительного q найдется такое натуральное n, что $a_n > q$), либо она не ограничена снизу (т. е. для всякого p найдется n, для которого $a_n < p$). Пусть, например, она не ограничена сверху. Рассмотрим функцию N, которая дает n по q, т. е. $N(q) \in \mathbb{N}$ и $a_{N(q)} > q$ для всех действительных q. Рассуждая обычным образом, получаем, что при всех гипердействительных q справедливы соотношения ${}^*N(q) \in {}^*\mathbb{N}$ и $a_{{}^*N(q)} > q$. Взяв q бесконечно большим и положительным, обнаруживаем, что при $n = N(q)$ гипердействительное число a_n будет бесконечно большим. Итак, эквивалентность стандартного и нестандартного определений ограниченности последовательности доказана.

Более сложной задачей является описание нестандартного определения предела. Постараемся вспомнить, однако, как мы представляли себе предел, начиная изучать математический анализ. По-видимому, следующая формулировка весьма правдоподобна: «число a есть предел последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если бесконечно далекие члены этой последовательности бесконечно близки к a».

Теперь ее можно истолковать вполне буквально: бесконечно далекие члены — это x_n с бесконечно большими гипернатуральными n, а бесконечная близость x_n к a означает, что $x_n - a$ бесконечно мало. Единственное обстоятельство, нуждающееся в уточнении, таково: требуем ли мы, чтобы *все* бесконечно далекие члены были бесконечно близки к a, или нам достаточно того, чтобы *некоторые* из них были таковы. Оказывается, что оба варианта ответа приводят к осмысленным понятиям: первый («все») дает определение предела, а второй («некоторые») дает определение предельной точки. К предельным точкам мы еще вернемся, а сейчас докажем эквивалентность двух определений предела.

Стандартное определение. Число a называется *пределом* последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое M, что для всех натуральных $n \geqslant M$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Гипердействительное определение. Число a называется *пределом* последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, если для любого бесконечно большого гипернатурального n разность $x_n - a$ бесконечно мала.

Напомним, что и в том, и в другом определении числа a и x_i стандартные. Пусть a является пределом последовательности $x_0, x_1, \ldots$ по стандартному определению, n — бесконечно большое гипернатуральное число. Докажем, что $x_n - a$ бесконечно мало, т. е. что $|x_n - a| < \varepsilon$ для любого положительного стандартного ε. В самом деле, пусть $\varepsilon > 0$ — стандартное число. Тогда по определению найдется такое стандартное M, что для всех стандартных $n > M$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Тогда оно выполняется и для бесконечно больших гипернатуральных n (так как система $n \in \mathbb{N}$, $n > M$, $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ не имеет решений), что нам и нужно.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть a не является пределом последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$ (в смысле обычного определения). Это означает, что для некоторого (стандартного) действительного $\varepsilon > 0$ и для любого M найдется (стандартное) натуральное $n \geqslant M$, для которого $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$. Как обычно, рассмотрим функцию f, дающую n по M, т. е. такую функцию, что $f(M) \in \mathbb{N}$, $f(M) \geqslant M$ и $|x_{f(M)} - a| \geqslant \varepsilon$ для любого действительного M. Возьмем теперь $n = {}^*f(M)$ для бесконечно большого гипердействительного M. Тогда $n \in {}^*\mathbb{N}$, $n \geqslant M$ и $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ (это доказывается обычным образом с помощью подходящих систем, не имеющих решений). Тогда n — бесконеч-

но большое гипернатуральное число, а $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$, где ε — стандартное положительное число и, следовательно, x_n не бесконечно близко к a. Таким образом, нестандартное определение предела также не выполнено.

Доказав равносильность стандартного и нестандартного определений предела, посмотрим, как выглядят нестандартные доказательства стандартных теорем. Начнем с самых простых.

Единственность предела. Докажем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots$ не может иметь двух разных пределов a и b. В самом деле, в этом случае x_n при бесконечно большом гипернатуральном n должно быть бесконечно близко и к a, и к b, поэтому a и b бесконечно близки. Но так как они стандартны, то $a = b$.

Монотонность предела. Докажем, что если $x_n \leqslant y_n$ при всех n, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $a \leqslant b$. В самом деле, пусть n — бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда $a = \mathrm{st}(x_n)$, $b = \mathrm{st}(y_n)$ (через $\mathrm{st}(p)$ обозначается стандартная часть конечного гипердействительного числа p). Так как $x_n \leqslant y_n$ при всех стандартных n, то это неравенство справедливо и для всех гипернатуральных n. Легко проверить также, что из $p \leqslant q$ следует $\mathrm{st}(p) \leqslant \mathrm{st}(q)$. Поэтому $a = \mathrm{st}(x_n) \leqslant \mathrm{st}(y_n) = b$.

Предел суммы. Докажем, что если $z_n = x_n + y_n$, $x_n \to a$, $y_n \to b$, то $z_n \to a + b$. В самом деле, равенство $z_n = x_n + y_n$ справедливо для всех натуральных, а значит, и для всех гипернатуральных n. Поэтому z_n при бесконечно большом n равно $x_n + y_n = a +$ (бесконечно малое) $+ b +$ (бесконечно малое). Как мы видели, сумма бесконечно малых бесконечно мала, поэтому z_n бесконечно близко к $a + b$ при бесконечно больших гипернатуральных n.

Аналогично можно доказать, что предел произведения равен произведению пределов (при этом будет использован тот факт, что произведение бесконечно малого и конечного гипердействительных чисел бесконечно мало).

Сходимость монотонной ограниченной последовательности. Пусть $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots$ — монотонно неубывающая ограниченная последовательность. Докажем, что она имеет предел. Все ее бесконечно далекие члены конечны (по определению ограниченности); осталось доказать лишь, что их стандартные части равны. Пусть m и n — два бесконечно больших гипернатуральных числа и пусть $\mathrm{st}(x_m) \neq \mathrm{st}(x_n)$. Пусть для определен-

ности $m < n$. Тогда $\mathrm{st}(x_m) < \mathrm{st}(x_n)$ ($\mathrm{st}(x_m) \neq \mathrm{st}(x_n)$ по предположению, а $\mathrm{st}(x_m) > \mathrm{st}(x_n)$ невозможно, так как в этом случае $x_m > x_n$, что противоречит монотонности). Рассмотрим (стандартное) число a, для которого $\mathrm{st}(x_m) < a < \mathrm{st}(x_n)$. Тогда $x_m < a$, $x_n > a$. Все члены x_k со стандартными k удовлетворяют неравенству $x_k < a$ (так как $x_k \leqslant x_m$ в силу монотонности, а $x_m < a$). Поэтому система $x_k > a$ не имеет натуральных решений, но имеет гипернатуральное решение ($k = n$). Полученное противоречие показывает, что предположение $\mathrm{st}(x_m) \neq \mathrm{st}(x_n)$ ложно, что и требовалось.

Рассмотрев несколько применений гипердействительного определения предела, перейдем теперь к понятию предельной точки последовательности. Стандартное его определение таково: a называется предельной точкой последовательности $x_0, x_1, \ldots$, если для всякого положительного ε и всякого N найдется такое натуральное $n \geqslant N$, при котором $|x_n - a| < \varepsilon$. Докажем, что это стандартное определение эквивалентно следующему (уже упоминавшемуся) нестандартному: a называется *предельной точкой* последовательности $\{x_n\}$, если при некотором бесконечно большом гипернатуральном n число x_n бесконечно близко к a.

Пусть выполнено стандартное определение. Как обычно, рассмотрим функцию, дающую n по ε, N, т. е. такую функцию f, что (при $\varepsilon > 0$ и произвольном N) выполняются свойства $f(\varepsilon, N) \in \mathbb{N}$, $f(\varepsilon, N) > N$ и $|x_{f(\varepsilon, N)} - a| < \varepsilon$. Обычное рассуждение показывает, что при любом положительном гипердействительном ε и при любом гипердействительном N число $n = {}^*f(\varepsilon, N)$ будет гипернатуральным числом, бо́льшим N и таким, что $|x_n - a| < \varepsilon$. Взяв $\varepsilon > 0$ бесконечно малым, а N бесконечно большим и положительным, найдем бесконечно большое гипернатуральное число n, для которого $|x_n - a|$ бесконечно мало, что и требовалось доказать.

Обратно, пусть стандартное определение не выполнено. Тогда найдутся такие $\varepsilon > 0$ и N, что $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ при всех натуральных $n \geqslant N$ и, следовательно, $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$ при всех гипернатуральных n, бо́льших N. Так как все бесконечно большие гипернатуральные n таковы, ни одно из x_n при бесконечно больших n не может быть бесконечно близко к a (разница $|x_n - a|$ больше положительного стандартного числа ε).

Итак, мы доказали эквивалентность стандартного и нестандартного определений предельной точки. В качест-

ве немедленной награды получаем доказательство следующей известной теоремы:

всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

В самом деле, рассмотрим произвольный ее член с бесконечно большим номером. Он будет конечным гипердействительным числом (последовательность ограничена), а его стандартная часть будет предельной точкой.

§ 8. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ И КОМПАКТНОСТЬ

Следующая традиционная тема курсов математического анализа — свойства непрерывных функций. Придерживаясь этой традиции, дадим нестандартное определение непрерывности. Оно, как и определение предела, почти дословно воспроизводит «наивное» определение (упоминавшееся в § 1): функция f непрерывна в точке x, если ее значение в бесконечно близких к x точках бесконечно близко к значению в точке x: $x' \approx x \Rightarrow f(x') \approx f(x)$ (здесь $\approx$ означает бесконечную близость).

Сказанное требует уточнений в нескольких отношениях: должно ли x быть стандартным? что делать, если f — не всюду определенная функция? Дадим точное определение. Пусть f — функция с действительными значениями, определенная на некотором множестве M действительных чисел. (Мы рассматриваем функции одного действительного аргумента, читатель может проверить, что случай нескольких аргументов ничуть не сложнее.) Построим гипердействительный аналог функции f — функцию $^*f$, определенную на множестве $^*M$ и принимающую гипердействительные значения. Мы будем действовать в точности так же, как и для последовательностей (когда M равнялось $\mathbb{N}$). Возьмем произвольное продолжение F функции f на все действительные числа, совпадающее с f на M и какое угодно на $\mathbb{R} \setminus M$. Возьмем теперь гипердействительный аналог $^*F$ функции F и ограничим его на $^*M$, т. е. будем интересоваться его значениями лишь на элементах множества $^*M$. Легко проверить, что полученная функция будет определяться функцией f и не будет зависеть от того, какое продолжение F этой функции мы взяли. В самом деле, если F_1 и F_2 — два продолжения функции f, то система

$$x \in M, \quad F_1(x) \neq F_2(x)$$

не имеет действительных решений. Поэтому она не имеет и гипердействительных решений, т. е. $^*F_1(x) = {}^*F_2(x)$