при $x \in {}^*M$. Таким образом, для каждой функции f с действительными значениями, определенной на некотором множестве M действительных чисел, мы имеем гипердействительный аналог ${}^*f$ с областью определения ${}^*M$ и гипердействительными значениями.

Пусть $f\colon M \to \mathbb{R}$ — произвольная функция. Определим, что означает непрерывность f в точке $x \in M$. (Обратите внимание: x — стандартная точка! Мы еще вспомним об этом, обсуждая равномерную непрерывность). Именно: это значит, что для всякого гипердействительного числа $x' \in {}^*M$, для которого $x' \approx x$, справедливо ${}^*f(x') \approx \approx f(x)$.

Теперь мы должны показать, что это определение эквивалентно стандартному. Напомним стандартное определение. Функция $f\colon M \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $x \in M$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x' \in M$, для которых $|x' - x| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Пусть функция f непрерывна в смысле стандартного определения. Пусть $x' \in {}^*M$ и $x' \approx x$; покажем, что ${}^*f(x') \approx f(x)$, т. е. что для любого стандартного $\varepsilon > 0$ справедливо $|{}^*f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Так как f непрерывна в обычном смысле, найдется такое $\delta > 0$, что для всех стандартных $x' \in M$, для которых $|x' - x| < \delta$, выполнено $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Привычное для нас рассуждение показывает, что и для всех гипердействительных x', для которых $x' \in {}^*M$ и $|x' - x| < \delta$, выполнено неравенство $|{}^*f(x') - f(x)| < \varepsilon$. К числу таких x' относятся, очевидно, все бесконечно близкие к x элементы ${}^*M$.

Обратно, пусть f не является непрерывной в обычном смысле. Тогда найдется такое $\varepsilon > 0$, что при любом $\delta > 0$ найдется $x' \in M$, для которого $|x' - x| < \delta$ и $|f(x') - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Как обычно, рассмотрим x' как функцию от δ, т. е. рассмотрим функцию X, для которой при всех $\delta > 0$ выполнены свойства $X(\delta) \in M$, $|X(\delta) - x| < \delta$ и $|f(X(\delta)) - f(x)| \geqslant \varepsilon$. Теперь $x' = {}^*X(\delta)$, где δ — положительное бесконечно малое, будет гипердействительным числом, для которого $|x' - x| = |{}^*X(\delta) - x| < \delta$ и поэтому $x' \approx x$, но $|{}^*f(x') - f(x)| = |{}^*f({}^*X(\delta)) - f(x)| \geqslant \varepsilon$ и поэтому ${}^*f(x') \not\approx f(x)$.

Посмотрим теперь, какие доказательства получают теперь теоремы о непрерывных функциях, доказываемые в любом стандартном курсе анализа.

Непрерывность суммы непрерывных функций. Пусть f, g — функции, определенные на мно-

жестве M и непреывные в точке x. Тогда их сумма h: $h(u)=f(u)+g(u)$ непрерывна в точке x. В самом деле, если $x'\approx x$, $x'\in {}^*M$, то ${}^*h(x')={}^*f(x')+{}^*g(x')\approx \approx f(x)+g(x)=h(x)$. (Мы воспользовались тем, что $a\approx b$ и $c\approx d$ влечет $a+c\approx b+d$. Это легко следует из свойств бесконечно малых, обсуждавшихся в § 3.)

Ограниченность непрерывной функции на отрезке. Пусть f — функция, определенная и непрерывная во всех точках отрезка $I=[a, b]$. Докажем, что она ограничена. Легко показать (ср. нестандартные определения ограниченности множества и последовательности), что ограниченность функции f равносильна тому, что ${}^*f(x)$ конечно для всех $x\in {}^*I$. Легко видеть, что ${}^*I$ состоит из всех гипердействительных чисел z, для которых $a\leqslant z\leqslant b$. Все они конечны, и их стандартная часть $\mathrm{st}(z)$ принадлежит $[a, b]$ (если $\mathrm{st}(z)<a$, то $z<a$, а если $\mathrm{st}(z)>b$, то $z>b$). В силу непрерывности в точке $\mathrm{st}(z)$ из $z\approx \mathrm{st}(z)$ вытекает, что ${}^*f(z)\approx f(\mathrm{st}(z))$; так как $f(\mathrm{st}(z))$ стандартно, то ${}^*f(z)$ конечно.

Читатель может проверить себя, ответив на вопрос: почему это рассуждение неприменимо в равной мере к интервалу (a, b) вместо отрезка $[a, b]$? (Для интервалов утверждение, очевидно, неверно: функция $y=1/x$ определена и непрерывна, но не ограничена на интервале $(0, 1)$.) Дело в том, что мы пользовались непрерывностью f в точке $\mathrm{st}(z)$ и, следовательно, нам было нужно, чтобы $\mathrm{st}(z)$ принадлежало области определения функции. А для интервала (a, b) это не так: если $z=a+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$ — бесконечно малое, то z принадлежит области определения ${}^*f$, в то время как $\mathrm{st}(z)$ не принадлежит области определения функции f.

Теорема о промежуточных значениях. Если f — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, $f(a)>0$, $f(b)<0$, то существует такое действительное число $x\in[a, b]$, что $f(x)=0$. Докажем это. Начнем со следующего простого замечания (никак не связанного с гипердействительными числами). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей и посмотрим на знаки f в точках разбиения. Если хотя бы в одной из них f равна 0, то доказывать нечего, если же нет, то найдется отрезок разбиения, на концах которого f имеет разные знаки. Обозначим его концы через x_n и y_n. Тогда справедливы такие утверждения: $|x_n-y_n|=(b-a)/n$, x_n, $y_n\in[a, b]$, $f(x_n)>0$, $f(y_n)<0$. Теперь вспомним о гипердействительных числах и возьмем бесконечно далекие члены последовательностей

x_n и y_n. Пусть N — бесконечно большое гипернатуральное число. Тогда $|x_N - y_N| = (b-a)/N$ и бесконечно мало, поэтому $x_N \approx y_N$ и $\mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N)$. Так как x_N, $y_N \in [a, b]$, то и $x = \mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N)$ принадлежит $[a, b]$. В силу непрерывности $f(x)$ бесконечно близко к положительному числу $^*f(x_N)$ и отрицательному $^*f(y_N)$. Единственное стандартное число, для которого это возможно,— нуль. Значит, $f(x) = 0$, что и требовалось доказать.

Обратимся теперь к понятию равномерно непрерывной функции. Согласно стандартному определению функция f, определенная на множестве $M \subset R$, называется равномерно непрерывной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $x, y \in M$, $|x-y| < \delta$ вытекает $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Нестандартное определение требует, чтобы для любых бесконечно близких гипердействительных $x, y \in {}^*M$ значения $^*f(x)$ и $^*f(y)$ были бесконечно близки. При первом взгляде на это нестандартное определение равномерная непрерывность ничем не отличается от непрерывности в любой точке множества M. Есть, однако, важная разница: в определении непрерывности в точке x точка x обязательно стандартна, а в определении равномерной непрерывности обе точки x и y могут быть гипердействительными.

Доказательство эквивалентности стандартного и нестандартного определений равномерной непрерывности проходит аналогично приведенным выше. Если f равномерно непрерывна (в стандартном смысле), а x и y бесконечно близки, то $|^*f(x) - {}^*f(y)|$ меньше любого стандартного ε (выберем δ по ε, пользуясь определением, и заметим, что $|x-y| < \delta$). Если же f не является равномерно непрерывной в стандартном смысле, то найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x и y с $|x-y| < \delta$, $|f(x) - f(y)| \geqslant \varepsilon$. Рассмотрим эти x и y как функции от δ и подставим вместо δ бесконечно малое число. Тогда $|x-y| < \delta$, $x \approx y$, но $|^*f(x) - {}^*f(y)| \geqslant \varepsilon$, $^*f(x) \not\approx {}^*f(y)$.

Теперь приведенное в § 1 рассуждение (практически без изменений) можно рассматривать как вполне строгое доказательство теоремы о том, что всякая непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.

В самом деле, пусть f определена и непрерывна на $[a, b]$. Докажем равномерную непрерывность. Пусть x, y — произвольные бесконечно близкие гипердействительные числа из $^*[a, b]$, т. е. $a \leqslant x$, $y \leqslant b$. Тогда $\mathrm{st}(x)$ и $\mathrm{st}(y)$ равны, обозначим их общее значение через c. Ясно, что

$c \in [a, b]$. (Именно здесь важно, что у нас отрезок, а не, скажем, интервал.) Тогда (в силу непрерывности в точке c) $^*f(x) \approx f(c)$, $^*f(y) \approx f(c)$ и, следовательно, $^*f(x) \approx$ $\approx {}^*f(y)$. Равномерная непрерывность доказана.

До сих пор мы рассматривали свойства непрерывных функций, определенных на отрезках действительной прямой. Как известно из обычных курсов математического анализа, многие из этих свойств непрерывных на отрезке функций справедливы и для функций, определенных на произвольных компактных множествах. В этом параграфе мы покажем, как соответствующие утверждения могут быть получены методами нестандартного анализа.

Поскольку мы ограничиваемся (пока) подмножествами действительной прямой, нам будет достаточно такого определения компактности:

множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *компактным*, если оно замкнуто и ограничено.

Напомним, что множество A называется замкнутым, если для всякой точки x, не принадлежащей A, найдется такое $\varepsilon > 0$, что ε-окрестность точки x (множество всех точек y, для которых $|x - y| < \varepsilon$) не пересекается с A.

Как обычно, мы должны вначале дать нестандартное определение компактности. Поскольку для ограниченности такое определение у нас уже есть, нам осталось найти его для замкнутости. Вот оно.

Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *замкнутым*, если для всякого конечного гипердействительного числа y, принадлежащего $^*A$, его стандартная часть $\mathrm{st}(y)$ принадлежит A.

Применяя это определение, например, к интервалу $I = (a, b)$, видим, что он не является замкнутым, так как число $a + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ — бесконечно малое) принадлежит $^*I$, а стандартная часть этого числа, равная a, не принадлежит I. Докажем, что наше определение равносильно стандартному. Пусть A замкнуто в смысле стандартного определения, y — конечное гипердействительное число, принадлежащее $^*A$, x — его стандартная часть. Пусть x не принадлежит A. Тогда найдется такое (стандартное) $\varepsilon > 0$, что никакое действительное z, для которого $|z - x| < \varepsilon$, не принадлежит A. Система

$$|z - x| < \varepsilon, \quad z \in A$$

(с единственным неизвестным z) не имеет действительных решений. Но y является ее гипердействительным ре-

шением. Полученное противоречие с Основной гипотезой показывает, что $x \in A$.

Пусть теперь A не является замкнутым (согласно стандартному определению) и точка x та самая, для которой требования определения не выполняются. Это значит, что x не принадлежит A и что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется y из A, для которого $|y - x| < \varepsilon$. Рассмотрим это y как функцию от ε, т. е. рассмотрим такую функцию f, что (при $\varepsilon > 0$) $f(\varepsilon) \in A$, $|f(\varepsilon) - x| < \varepsilon$. Теперь легко проверить, что $y = {}^*f(\varepsilon)$, где ε — бесконечно малое положительное число, будет гипердействительным числом, принадлежащим ${}^*A$, бесконечно близким к x и, следовательно, конечным, стандартная часть которого не принадлежит к A.

Итак, мы доказали эквивалентность стандартного и нестандартного определений замкнутости. (Другой способ доказательства состоит в том, чтобы сослаться на нестандартное определение предельной точки и на то, что множество A замкнуто тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.) Таким образом, приходим к такому определению компактности:

A компактно, если любой элемент ${}^*A$ бесконечно близок к одному из элементов A.

Вспоминая доказательство теоремы об ограниченности непрерывных функций на отрезке или о равномерной непрерывности непрерывной на отрезке функции, мы видим, что, по существу, в них использована именно компактность отрезка. Продемонстрируем это на примере доказательства теоремы о равномерной непрерывности. Пусть функция f непрерывна на компактном множестве A. Докажем ее равномерную непрерывность, предварительно вспомнив соответствующее нестандартное определение. Пусть x, y — бесконечно близкие элементы ${}^*A$. В силу компактности множества A элементы x и y бесконечно близки к некоторым x_0, $y_0 \in A$. Тогда $x_0 \approx y_0$ $(x_0 \approx x \approx \approx y \approx y_0)$; так как x_0 и y_0 стандартны, то $x_0 = y_0$. В силу непрерывности f в x_0 имеем ${}^*f(x) \approx f(x_0) = f(y_0) \approx {}^*f(y)$, поэтому ${}^*f(x) \approx {}^*f(y)$, что и требовалось доказать.

Мы еще вернемся к данному выше нестандартному определению компактности, обсуждая применения нестандартных методов в топологии. А сейчас вспомним о примерах, с которых мы начинали наше знакомство с нестандартным анализом. Первый и второй примеры становятся вполне ясными, если определить производную $f'(a)$ как стандартную часть отношения dy/dx, где dx — бесконечно

малое, а $dy = {}^*f(a+dx) - f(a)$. (Во втором примере мы среди прочего используем тождество

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = (y-x)/(\sqrt{y} + \sqrt{x}),$$

которое верно и для гипердействительных x и y, раз система

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} \neq (y-x)/(\sqrt{y} + \sqrt{x})$$

не имеет действительных решений.)

В третьем примере (определение интеграла) стандартная функция f продолжается до ${}^*f$, после чего выражения $f(a+dx)$, $f(a+2dx)$, ..., $f(a+(H-1)dx)$ приобретают смысл. Этого, однако, мало — нужно объяснить, что такое сумма бесконечно большого числа слагаемых (именно, H слагаемых). Это делается с помощью такого приема. Определим (в обычном «стандартном» мире) функцию

$$S(n, dx) = [f(a) + f(a+dx) + \ldots + f(a+(n-1)dx)] \cdot dx$$

(n — натуральное, dx — действительное число). Соответствующий нестандартный аналог представляет собой функцию ${}^*S$ с гипернатуральным и гипердействительным аргументами. Подставив в нее H и $dx = (b-a)/H$, получим гипердействительное число ${}^*S(H, dx)$, стандартную часть которого мы и называем *интегралом* (стандартной) функции f по (стандартному) отрезку $[a, b]$.

Четвертый пример нами уже разобран. Наш пятый пример — пример неизмеримого множества — становится также вполне ясным. В нем мы должны рассмотреть функцию $z(n, x) = (n$-й знак двоичного разложения числа $x)$. Это функция из множества $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ в $\{0, 1\}$. Ее гипердействительный аналог есть функция ${}^*z$ из ${}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{R}$ со значениями также в $\{0, 1\}$. Выберем теперь бесконечно большое гипернатуральное число H и рассмотрим те стандартные числа $x \in [0, 1]$, для которых ${}^*z(H, x) = 0$. Это множество (стандартных) действительных чисел и будет неизмеримым по Лебегу. (Это, конечно, нужно еще доказать, но доказательство несложное: оно основывается на том, что, грубо говоря, любой интервал заполняется этим множеством наполовину.)

Шестой пример (принадлежащий Эйлеру) подробно разбирается на с. 64—65 статьи Люксембурга [53]. Там делается попытка разъяснить, как ход рассуждений Эйлера становится корректным (с современной точки зрения) в свете нестандартного анализа.

§ 9. ПОСТРОЕНИЕ СИСТЕМЫ ГИПЕРДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Обратимся, наконец, к вопросу о существовании гипердействительных чисел. Точнее этот вопрос следует сформулировать так: можно ли построить расширение множества действительных чисел, для которого выполнялась бы Основная гипотеза. Напомним, что Основная гипотеза требует, чтобы:

(1) имелось некоторое множество $^*\mathbb{R}$, для которого $\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$;

(2) для каждой функции $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ имелась некоторая функция $^*f\colon (^*\mathbb{R})^n \to {}^*\mathbb{R}$, являющаяся продолжением исходной;

(3) любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог который имеет (гипердействительные) решения, имела действительные решения (о том, что может стоять в левых и правых частях уравнений и неравенств, см. подробнее выше);

(4) $^*\mathbb{R}$ содержало бесконечно малые элементы, отличные от нуля.

В этом параграфе мы покажем, каким образом этим требованиям можно удовлетворить. Правда, нам придется принять без доказательства некоторое утверждение из теории множеств (существование нетривиального ультрафильтра на множестве натуральных чисел, см. далее).

Вернемся к нашей первой попытке построения системы гипердействительных чисел, когда мы назвали гипердействительными числами последовательности действительных чисел. Эта попытка провалилась в § 4. Чтобы исправить дело, вспомним, как происходит переход от $\mathbb{Q}$ к $\mathbb{R}$ (точнее, как он может происходить в одном из вариантов построения системы действительных чисел из рациональных). Рассматриваются всевозможные фундаментальные последовательности рациональных чисел, т. е. такие последовательности, что для любого $\varepsilon > 0$ существует отрезок длины ε, содержащий все члены последовательности, кроме конечного числа. Две такие последовательности x_n и y_n называют *эквивалентными*, если $x_n - y_n$ стремится к 0 при $n \to \infty$. Это отношение эквивалентности разбивает фундаментальные последовательности на классы, которые и называются действительными числами.

Теперь, набрав достаточную инерцию мышления (как видим, инерция мышления — это не всегда плохо!), обратимся к нашей задаче — построению множества гипердей-

ствительных чисел. Оказывается, что мы достигнем цели, если от последовательностей перейдем к классам последовательностей, считая, что две последовательности $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$ задают одно и то же гипердействительное число, если $x_n = y_n$ «для большинства натуральных чисел n». Тут, конечно, непонятно, что означают слова «для большинства n».

Для наглядности будем представлять себе, что проводится голосование по вопросу «считать ли последовательности x_n и y_n совпадающими». В нем голосующими являются натуральные числа, причем число n голосует «за», если $x_n = y_n$, и «против», если $x_n \neq y_n$. Будем считать последовательности x_n и y_n совпадающими, если большинство натуральных чисел голосуют за это. Нужно объяснить лишь, какова система подсчета голосов, т. е. какие множества натуральных чисел мы считаем «большими» (содержащими «большинство» натуральных чисел), а какие «малыми» (содержащими «меньшинство» натуральных чисел). Перечислим те свойства, которым должна удовлетворять система подсчета голосов, т. е. деление множеств натуральных чисел на большие и малые.

1. Любое множество натуральных чисел является либо большим, либо малым. Ни одно множество не является большим и малым одновременно. (Голосование должно всегда давать ответ.)

2. Множество всех натуральных чисел большое, пустое множество малое. (Предложение, за которое голосуют все, принимается.)

3. Дополнение (до $\mathbb{N}$) любого малого множества является большим, дополнение любого большого множества — малым. (Из двух противоположных законопроектов получает большинство голосов ровно один.)

4. Любое подмножество малого множества является малым, любое надмножество большого множества — большим. (Утратив часть голосов, отвергнутый законопроект не может стать принятым.)

5. Объединение двух малых множеств является малым, пересечение двух больших множеств является большим. (Если каждая из двух групп голосующих не образует большинства, то они и вместе не образуют большинства («невозможность коалиций»); если каждая из групп составляет большинство, то голосующие, входящие одновременно в обе группы, уже составляют большинство.)

Эти требования весьма сильны. Чтобы понять это, рассмотрим случай конечного множества голосующих (полу-

чающийся заменой $\mathbb{N}$ на некоторое конечное множество M). Можно ли тогда удовлетворить этим требованиям? Один способ почти очевиден. Выберем одного из «голосующих» $m \in M$ и назовем большими все множества, содержащие m, а малыми — все множества, не содержащие m («диктатура» m). При таком определении легко проверить все свойства 1—5. Оказывается, что этим исчерпываются все возможности удовлетворить требованиям 1—5 для случая конечного множества M. В самом деле, пусть имеется разбиение всех множеств на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1—5. Рассмотрим тогда все большие множества и выберем из них множество M_0, содержащее наименьшее возможное число элементов (среди больших множеств). Множество M_0 непусто. Если оно содержит ровно один элемент m, то в силу свойства 4 все множества, содержащие m, будут большими, а в силу свойства 3 все множества, не содержащие m, будут малыми. Осталось показать, что M_0 не может содержать более одного элемента. В самом деле, в этом случае его можно было бы разбить на две непустые непересекающиеся части M_1 и M_2. Эти части должны быть малыми (так как содержат меньше элементов, чем M_0), а их объединение M_0 является большим, что противоречит требованию 5.

Оказывается, однако, что при счетном числе голосующих возможны системы голосования, удовлетворяющие требованиям 1—5 и не сводящиеся к упомянутому тривиальному случаю. Другими словами, можно так разбить все подмножества натурального ряда на большие и малые, чтобы выполнялись свойства 1—5 и любое одноэлементное множество было малым. Тогда (в силу свойства 5) и любое конечное множество будет малым, а (в силу свойства 3) всякое множество с конечным дополнением (до $\mathbb{N}$) — большим. Таким образом, к требованиям 1—5 можно без противоречия добавить и такое:

6. Всякое конечное множество является малым, всякое множество с конечным дополнением — большим. (При голосовании мнение конечного числа голосующих несущественно.)

Разбиение всех подмножеств натурального ряда на большие и малые, удовлетворяющее требованиям 1—6, называется *нетривиальным ультрафильтром* на множестве натуральных чисел. Мы не будем обсуждать подробно, как можно доказать существование такого разбиения. Скажем лишь, что это доказательство использует транс-

финитную индукцию (и, следовательно, так называемую аксиому выбора).

Покажем теперь, что такое разбиение позволяет построить систему гипердействительных чисел, удовлетворяющую требованиям Основной гипотезы. Итак, пусть фиксировано разбиение, удовлетворяющее требованиям 1—6. Назовем две последовательности x_0, x_1, ... и y_0, y_1, ... *эквивалентными*, если множество тех n, при которых $x_n = y_n$, является большим. В силу требования 2 всякая последовательность эквивалентна самой себе. Докажем, что построенное отношение транзитивно: если последовательность x эквивалентна последовательности y, а последовательность y эквивалентна последовательности z, то x эквивалентна z. В самом деле, обозначим через A, B и C множества тех натуральных n, при которых $x_n = y_n$, $y_n = z_n$ и $x_n = z_n$ соответственно. По условию множества A и B большие. Кроме того, из $x_n = y_n$ и $y_n = z_n$ следует $x_n = z_n$, поэтому $A \cap B \subset C$. Согласно требованию 5 множество $A \cap B$ является большим. Теперь требование 4 гарантирует, что C также является большим, что и требовалось.

Мы видим, что введенное отношение рефлексивно, симметрично (это очевидно из определения) и транзитивно и, следовательно, разбивает все последовательности действительных чисел на классы эквивалентности, т. е. такие классы, что любые две последовательности одного класса эквивалентны, а любые две последовательности из разных классов — нет. Эти классы мы и назовем гипердействительными числами. Что еще нам нужно? Нужно, чтобы множество действительных чисел было подмножеством множества гипердействительных. Нужно уметь для каждой функции с действительными аргументами и значениями строить ее гипердействительный аналог. Нужно проверить, что любая система уравнений и неравенств, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, имеет действительные решения. И, наконец, нужно убедиться, что среди гипердействительных чисел (рассматриваемых как упорядоченное поле, см. § 6, примеры 6, 7) существуют бесконечно малые, отличные от нуля.

Чтобы сделать $\mathbb{R}$ подмножеством $^*\mathbb{R}$, отождествим каждое действительное число x с последовательностью x, x, x, ..., точнее, с содержащим ее классом. При этом разным действительным числам соответствуют разные классы: x, x, x, ... не эквивалентно y, y, ... (множество

тех n, при которых n-е члены совпадают, пусто и, следовательно, является малым).

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция с действительными аргументами и значениями. Определим ее гипердействительный аналог $^*f\colon {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$. Пусть x — произвольное гипердействительное число, т. е. класс эквивалентных последовательностей действительных чисел. Рассмотрим произвольную последовательность $x_0, x_1, \ldots$ из этого класса и применим f ко всем ее членам. Класс, содержащий полученную последовательность $f(x_0), f(x_1), \ldots$, мы и будем считать значением f на x. Нужно проверить, что это определение корректно, т. е. что полученный класс не зависит от выбора последовательности $x_0, x_1, \ldots$ в классе x. В самом деле, пусть $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$ — произвольные последовательности, лежащие в одном классе. Это означает, что $x_n = y_n$ «для большинства n», т. е. что множество M тех n, при которых $x_n = y_n$, большое. Надо доказать, что $f(x_0), f(x_1), \ldots$ и $f(y_0), f(y_1), \ldots$ лежат в одном классе, т. е. что множество тех n, при которых $f(x_n) = f(y_n)$, большое. Но это очевидно, так как оно содержит M (из $x_n = y_n$ следует $f(x_n) = f(y_n)$), а всякое надмножество большого множества большое (свойство 4).

Аналогично определяются и гипердействительные аналоги для функций нескольких аргументов. Пусть, например, f — функция двух действительных аргументов с действительными значениями: $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Определим ее гипердействительный аналог $^*f$. Чтобы применить $^*f$ к двум гипердействительным числам x и y, возьмем последовательности $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$, им принадлежащие, и в качестве $^*f(x, y)$ рассмотрим класс последовательности $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots$ Докажем корректность этого определения. Если $x_0', x_1', \ldots$ и $y_0', y_1', \ldots$ — другие элементы классов x и y, то $x_n' = x_n$ для большинства n и $y_n' = y_n$ для большинства n, т. е. множества $P = \{n \mid x_n' = x_n\}$ и $Q = \{n \mid y_n' = y_n\}$ большие. В силу свойства 5 множество $P \cap Q$ также является большим, т. е. для большинства n справедливо $x_n' = x_n$ и $y_n' = y_n$ одновременно. Поскольку для этих n выполнено и равенство $f(x_n', y_n') = f(x_n, y_n)$, корректность доказана. Точно так же обстоит дело и для функций большего числа аргументов.

Нужно проверить, что построенные гипердействительные аналоги будут продолжениями исходных функций с действительными аргументами и значениями. Это оче-

видно следует из определений. Проверим теперь, что всякая система уравнений и неравенств, имеющая гипердействительные решения, имеет и действительные решения (как всегда, следовало бы говорить о системе, гипердействительный аналог которой имеет гипердействительные решения, но мы не будем столь педантичны). Пусть, например, система

$$f(g(x, y), z) = z, \quad h(x) \neq h(y)$$

имеет гипердействительные решения x, y, z. Рассмотрим последовательности $x_0, x_1, \ldots; y_0, y_1, \ldots; z_0, z_1, \ldots$, принадлежащие соответствующим классам эквивалентности. Тогда $g(x_0, y_0)$, $g(x_1, y_1), \ldots$ принадлежит классу $g(x, y)$, а $f(g(x_0, y_0), z_0)$, $f(g(x_1, y_1), z_1), \ldots$ — классу $f(g(x, y), z)$. Поскольку x, y, z по предположению являются решениями системы, то $f(g(x_n, y_n), z_n) = z_n$ для большинства n. Поскольку $h(x) \neq h(y)$, последовательности $h(x_0)$, $h(x_1), \ldots$, и $h(y_0)$, $h(y_1), \ldots$ не эквивалентны и множество тех n, при котором $h(x_n) = h(y_n)$, малое. Тогда множество тех n, при котором $h(x_n) \neq h(y_n)$, является большим. Так как пересечение двух больших множеств является большим, то множество тех n, при котором

$$f(g(x_n, y_n), z_n) = z_n, \quad h(x_n) \neq h(y_n),$$

является большим. Значит, оно непусто! Таким образом, система имеет и действительные решения.

Аналогичным образом обстоит дело и с произвольной системой уравнений и неравенств: если $x, y, z, \ldots$ — ее решение, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}, \ldots$ — соответствующие последовательности, то множество тех n, при которых действительные числа x_n, y_n, $z_n, \ldots$ являются решениями системы, является большим и, следовательно, непусто.

Осталось проверить, что среди гипердействительных чисел существуют бесконечно малые, отличные от нуля. Положительным бесконечно малым гипердействительным числом будет, например, класс последовательности 1, 1/2, 1/3, ... (или любой другой последовательности положительных действительных чисел, сходящейся к 0). Нам нужно проверить, что это гипердействительное число (обозначим его через ε) положительно, но меньше любого стандартного положительного числа. Чтобы доказать это, мы должны вспомнить, как определяется порядок на множестве гипердействительных чисел. Он определяется в соответствии с общей схемой построения гипердействитель-

ного аналога для любого отношения на множестве действительных чисел. Нужно взять функцию f двух действительных аргументов, для которой свойства $f(x, y)=0$ и $x<y$ равносильны, и рассмотреть ее гипердействительный аналог $^*f$. Гипердействительное число x называется меньшим гипердействительного числа y, если $^*f(x, y)=0$. Посмотрим, что дает нам эта конструкция для построенной описанным способом системы гипердействительных чисел. Если x — класс последовательности $x_0, x_1, \ldots$, а y — класс последовательности $y_0, y_1, \ldots$, то $^*f(x, y)$ есть класс последовательности $f(x_0, y_0), f(x_1, y_1), \ldots$ Равенство этого класса нулю (т. е. классу последовательности 0, 0, 0, ...) означает, что $f(x_n, y_n)=0$ для большинства n, т. е. что $x_n<y_n$ для большинства n. Таким образом, чтобы выяснить, верно ли $x<y$ для гипердействительных чисел x и y, нужно взять последовательности $x_0, x_1, \ldots$ и $y_0, y_1, \ldots$ в классах x и y и выяснить, является ли множество тех n, при которых $x_n<y_n$, большим.

Нам нужно было проверить, что $0<\varepsilon$ и что $\varepsilon<p$ для любого стандартного положительного p (напомним, что ε — класс последовательности 1, 1/2, 1/3, ...). Это просто: $0<\varepsilon$, так как $0<1/n$ при всех n (а множество $\mathbb{N}$ большое), $\varepsilon<p$, так как $1/n<p$ для всех натуральных n, кроме конечного числа, а всякое множество с конечным дополнением малое (свойство 6 «системы подсчета голосов»). Отметим, что здесь мы впервые воспользовались свойством 6, до сих пор все наши рассуждения были справедливы и в случае «диктатуры» (когда большими считаются те и только те множества, которые содержат некоторое натуральное число N). В этом случае две последовательности эквивалентны, если совпадают их N-е члены, и все гипердействительные числа стандартны (класс последовательности $x_0, x_1, \ldots$ совпадает со стандартным числом x_N).

§ 10. НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Мы упоминали, что существуют два способа изложения нестандартного анализа — «кустарный» и «научный» (использующий математическую логику). До сих пор наше изложение следовало первому. Сейчас же мы постараемся объяснить, чем может быть полезна математическая логика для облегчения пользования гипердействительными числами и для их построения.

Наша Основная гипотеза гласила, что утверждения о разрешимости систем уравнений и неравенств одновременно истинны или ложны в $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$. На самом деле можно указать гораздо более широкий класс утверждений, которые одновременно истинны или ложны в $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$. Но прежде чем указать этот класс, нам придется обсудить некоторые фундаментальные логические понятия.

Ранее мы говорили о системах уравнений и неравенств, составленных из функций действительных аргументов, а также их аналогах, составленных из функций гипердействительных аргументов. Так, например, можно было рассмотреть систему

$$\sin(x) = y, \quad \sin(\cos(y)) \neq x$$

и ее гипердействительный аналог

$$^*\sin(x) = y, \quad ^*\sin(^*\cos(y)) \neq x.$$

Более естественно, однако, считать, что в систему входят не сами функции, а их *имена*, т. е. обозначающие их символы. После того как этим именам придан смысл, т. е. с каждым из них сопоставлена какая-то функция, можно говорить о решениях системы (при данной интерпретации входящих в нее имен). При этом, вместо того чтобы вводить разные имена для функции и ее гипердействительного аналога, мы будем считать, что имеется одно имя, которое двусмысленно — имеет действительный смысл и гипердействительный смысл.

Опишем все это более формально. Рассмотрим всевозможные функции действительных аргументов с действительными значениями (с произвольным числом аргументов; функции нуля аргументов отождествим с действительными числами) и введем для них имена. Для этого выберем какое-нибудь взаимно однозначное соответствие между множеством всех таких функций и некоторым множеством I, элементы которого мы будем называть именами. Элемент множества I, сопоставленный с данной функцией, будем называть ее *именем*. Если функция имеет n аргументов, будем называть соответствующий ей символ *n-местным*, или символом *валентности n*. Таким образом, нульместные символы суть имена действительных чисел. Имена (элементы I) будут использоваться при образовании термов.

Фиксируем счетный список символов, отличных от элементов I, элементы которого назовем *переменными*.

Теперь термы можно определить как выражения, составленные по следующим правилам:

(1) всякая переменная есть терм;

(2) всякий нульместный функциональный символ есть терм;

(3) если u — n-местный функциональный символ, а $t_1, \ldots, t_n$ — термы, то $u(t_1, \ldots, t_n)$ — терм.

Например, $f(x, h(y))$ и $g(g(x, z), t)$ будут термами, если x, y, z — переменные, h — одноместный функциональный символ, t — нульместный, а f и g — двуместные. Как видим, определение термов никак не апеллирует к смыслу входящих в них символов — важно лишь, какую валентность имеют входящие в них символы. Поэтому наряду с исходным смыслом термов (возникающим, когда с именем i сопоставляется та самая функция, именем которой оно являлось) можно придать им другой, гипердействительный смысл, сопоставив с i гипердействительный аналог этой функции. Окажется, что при той и другой

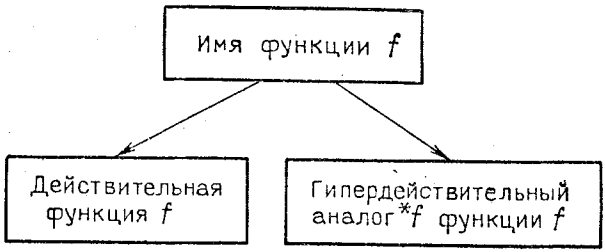

Рис. 14

интерпретации истинными будут одни и те же формулы. Но прежде мы должны определить понятие формулы.

Перечислим правила построения формул. Если t_1 и t_2 — термы, то запись $(t_1 = t_2)$ является формулой. Если φ и ψ — формулы, то записи $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $\neg\varphi$ — формулы, которые читаются (соответственно) «φ и ψ», «φ или ψ», «если φ, то ψ», «неверно, что φ». Если φ — формула, а ξ — переменная, то записи $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ — формулы, которые читаются «для всех ξ верно φ» и «существует ξ, для которого верно φ». Формулами называются только те записи, которые можно получить на основании приведенных правил.

Итак, понятие формулы определено. Теперь надо объяснить, какой смысл придается формулам. Предваритель-

но введем понятие параметров формулы. Грубо говоря, параметры формулы — это те переменные, от значений которых зависит истинность формулы. Точное определение параметров таково. Параметрами формулы $(t_1 = t_2)$ являются все переменные, входящие в t_1 или в t_2. Параметры формулы $\neg\varphi$ те же, что и у формулы φ. Параметрами формул $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \Rightarrow \psi$ являются все переменные, являющиеся параметрами φ или ψ. Параметрами формул $\forall\xi\varphi$ и $\exists\xi\varphi$ являются параметры формулы φ, отличные от ξ. Например, параметрами формулы

$$\exists x \forall y ((f(x, h(y)) = g(z, z)) \wedge \neg(z = t))$$

являются переменные z и t, а формула

$$\exists x (f(x, x) = x)$$

не имеет параметров.

Нас будет интересовать вопрос об истинности и ложности формул. Чтобы он имел смысл, нужно сделать две вещи. Во-первых, нужно фиксировать *интерпретацию* нашего языка, т. е. объяснить, каково множество M возможных значений переменных (носитель интерпретации) и какие функции на этом множестве сопоставляются с функциональными символами. Во-вторых, если нас интересует истинность формулы φ, имеющей параметры, то нужно указать значения этих параметров, сопоставив с ними какие-то элементы множества M.

Итак, пусть фиксирована некоторая интерпретация и каждому параметру формулы φ приписано некоторое значение, являющееся элементом M. Тогда формула становится либо истинной, либо ложной. Мы не будем точно описывать правила, по которым это происходит, надеясь, что смысл знаков $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\forall$ и $\exists$ ясен из их названий. Приведем несколько примеров. Формула

$$\exists x \forall y (h(y) = x)$$

не имеет параметров и будет истинной в том случае, если функция, обозначаемая символом h, является постоянной на M. (Отметим, что при перестановке кванторов $\exists x$ и $\forall y$ эта формула превращается в тождественно истинную.) Формула

$$\exists x (h(x) = y)$$

имеет один параметр y и будет истинной при данном его значении тогда и только тогда, когда это значение входит

в область значений функции h. Формула

$$\exists x \exists y ((h(x) = k(y)) \wedge \neg (f(x, y) = y))$$

не имеет параметров и будет истинной в том случае, если система

$$h(x) = k(y), \quad f(x, y) \neq y$$

имеет решения, т. е. существуют такие x_0, $y_0 \in M$, что значение сопоставленной с символом h функции на x_0 равно значению сопоставленной с символом k функции на y_0, а значение сопоставленной с символом f функции на паре (x_0, y_0) не равно y_0.

Наши правила построения формул допускают, в частности, и формулы вида $\forall \xi A$, где ξ не является параметром A. Например, можно построить формулу

$$\forall x (f(y) = g(y)),$$

в которой x не входит в выражение под квантором, или формулу

$$\forall x \exists x (f(x) = y),$$

где x хотя и входит в A, но не является ее параметром. Будем считать, что формулы $\exists \xi A$ и $\forall \xi A$, у которых ξ не является параметром A, имеют тот же смысл, что и исходная формула A.

Итак, мы имеем две интерпретации нашего языка — исходную, действительную (с носителем $\mathbb{R}$), и новую, гипердействительную (с носителем $^*\mathbb{R}$). Обобщением требования одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств является следующий принцип, называемый *принципом переноса* или *принципом Лейбница*.

Пусть φ — формула без параметров. Тогда она одновременно истинна или ложна в $\mathbb{R}$ и $^*\mathbb{R}$.

Легко понять, что этот принцип действительно является обобщением нашего старого требования. В самом деле, для каждой системы уравнений и неравенств легко написать формулу, утверждающую (при действительной или гипердействительной интерпретации), что система (или ее гипердействительный аналог) имеет решения. Эта формула имеет вид $\exists x_1, \ldots \exists x_n \varphi$, где $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, входящие в систему, а φ имеет вид $(\ldots((\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge \wedge \psi_3) \wedge \ldots)$, где каждая формула ψ_i имеет вид $(t = s)$ или $\neg (t = s)$ и соответствует одному из уравнений и неравенств системы.

Можно доказать, что для нашего языка (включающего символы для всех функций) принцип переноса и требование одновременной разрешимости систем уравнений и неравенств равносильны. Тем не менее принцип переноса зачастую удобнее применять. Продемонстрируем это на нескольких примерах.

Мы доказывали, что если множества нулей функций с именами f и g совпадают, то и множества нулей функций $^*f$ и $^*g$ совпадают. Теперь для этого достаточно записать утверждение о совпадении множеств нулей в виде формулы:

$$\forall x\,(((f(x)=0)\Rightarrow(g(x)=0))\wedge((g(x)=0)\Rightarrow(f(x)=0))).$$

Еще пример. Мы доказывали эквивалентность стандартного и нестандартного определений непрерывности в точке x функции f, определенной на множестве M. Теперь это можно сделать так. Пусть f непрерывна согласно стандартному определению, $x'\in M$ и бесконечно близко к x. Докажем, что $|^*f(x')-f(x)|$ меньше любого стандартного $\varepsilon>0$. Выберем (стандартное) $\delta>0$, для которого формула

$$\forall y\,(((y\in M)\wedge(|y-x|<\delta))\Rightarrow(|f(y)-f(x)|<\varepsilon))$$

истинна на множестве действительных чисел. Тогда она истинна и в $^*\mathbb{R}$, и, подставляя x' вместо y, получаем требуемое. (Отметим две детали. Во-первых, обратите внимание, что эта формула не имеет параметров: x, ε и δ — не переменные, а символы, изображающие соответствующие действительные числа. Во-вторых, при написании формулы мы употребили ряд сокращений. Вместо $y\in M$ следовало написать $m(y)=0$, где m — функция, множеством нулей которой служит M, записи типа $|a-b|<c$ следует расшифровать как $\mathrm{ord}(d(a,\ b),\ c)=0$, где ord — обозначение для функции двух переменных, для которой $\mathrm{ord}(x,\ y)=0\Leftrightarrow x<y$, а d — обозначение для функции, для которой $d(x,\ y)=|x-y|$, и т. п.)

Обратно, пусть f не является непрерывной. Тогда найдется такое $\varepsilon>0$, что формула

$$\forall\delta\,((\delta>0)\Rightarrow\exists y\,((|y-x|<\delta)\wedge(|f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon)))$$

будет истинной в $\mathbb{R}$. Тогда она будет истинной и в $^*\mathbb{R}$ (принцип переноса), и, взяв бесконечно малое положительное δ, мы найдем соответствующее ему гипердействительное y. Это y будет бесконечно близко к x, а $|^*f(y)-f(x)|\geqslant\varepsilon$ и, следовательно, $^*f(y)\not\approx f(x)$.

Из этого примера видно, что использование принципа переноса позволяет сделать многие рассуждения короче (в основном потому, что отпадает необходимость переходить от истинности утверждения типа $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ к функции, дающей по x такое y, что $\varphi(x, y)$).

Прежде чем идти дальше, ответим на вопрос, который, возможно, уже возник у читателя. Принцип переноса утверждает, что гипердействительные числа обладают теми же самыми свойствами, что и стандартные действительные числа. Но стандартные числа удовлетворяют аксиоме Архимеда, а гипердействительные не удовлетворяют. Не противоречит ли это принципу переноса?

Вот что пишет по этому поводу Мартин Девис на с. 26 «Прикладного нестандартного анализа» [3]: «Лейбниц постулировал существование системы чисел, имеющей те же свойства, что и обычные числа, но содержащей отличные от нуля бесконечно малые... Однако позиция Лейбница кажется очевидно абсурдной. Обычные действительные числа, конечно же, имеют по крайней мере одно свойство, которым не обладает желаемое Лейбницем расширение. А именно: среди действительных чисел нет бесконечно малых.

Парадокс устраняется точным выбором формального языка в терминах современной логики (столь же жестко определенного, как и языки программирования для ЭВМ). Таким образом, принцип Лейбница уточняется: существует расширение действительных чисел, содержащее бесконечно малые элементы и имеющее те же свойства, что и действительные числа, поскольку эти свойства могут быть выражены в формальном языке. Отсюда заключаем, что свойство быть бесконечно малым не может быть выражено указанным способом».

В самом деле, попробуем записать аксиому Архимеда на нашем языке. Хочется написать что-то вроде

$$\forall \varepsilon\, ((\varepsilon > 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ((\varepsilon > 1) \vee (\varepsilon + \varepsilon > 1) \vee (\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon > 1) \vee \ldots)),$$

но, разумеется, каждая формула обязана иметь конечную длину (и не содержать многоточий!). Можно попытаться записать аксиому Архимеда в форме «для всякого числа существует большее его натуральное»:

$$\forall x \exists y\, ((y \in \mathbb{N}) \wedge (x < y))$$

(как всегда, $y \in \mathbb{N}$ и $x < y$ — сокращения; например,

$y \in \mathbb{N}$ надо понимать как $n(y) = 0$, где n — функциональный символ, которому соответствует функция, принимающая значение 0 в натуральных числах, и только в них). Эта формула является формальным аналогом аксиомы Архимеда и, разумеется, истинна в $\mathbb{R}$. Следовательно, она истинна и в $^*\mathbb{R}$ (принцип переноса). Это не противоречит тому, что поле $^*\mathbb{R}$ не является архимедовым, поскольку при интерпретации в $\mathbb{R}$ эта формула означает лишь, что для всякого гипердействительного числа существует большее его гипернатуральное число. Поэтому — как и следовало ожидать — никакого противоречия здесь нет.

Мы увидели, что дает математическая логика при использовании гипердействительных чисел. Сейчас мы рассмотрим вопрос о построении системы гипердействительных чисел с помощью методов математической логики. Оказывается, что существование системы гипердействительных чисел, удовлетворяющей нашим требованиям, является простым следствием одной из основных теорем математической логики — теоремы компактности Мальцева.

Прежде чем формулировать эту теорему, введем некоторые основные для математической логики понятия (языка, терма, формулы, интерпретации языка) в чуть более общей ситуации, чем имевшаяся у нас ранее. Эта общность будет полезна нам и впоследствии, при обсуждении нестандартной топологии.

Пусть фиксирован набор символов $\{P, Q, \ldots\}$, элементы которого мы будем называть *предикатными символами*, и набор $\{f, g, \ldots\}$, элементы которого будем называть *функциональными символами*. Пусть каждому предикатному и каждому функциональному символу поставлено в соответствие некоторое натуральное число, называемое *числом аргументов*, или *валентностью*, соответствующего символа. В таком случае говорят, что задан некоторый язык (точнее, односортный язык первого порядка). До сих пор мы рассматривали язык, в котором для каждой функции с действительными аргументами и значениями мы имели функциональный символ с соответствующим числом аргументов; предикатных символов у нас не было.

Определим теперь понятие формулы данного языка. Прежде чем давать формальное определение, приведем несколько примеров формул. Пусть язык содержит предикатные символы P, Q, R с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно и функциональные символы f, g, h также

с числом аргументов 0, 1, 2 соответственно. Тогда формулами этого языка будут, например, такие знакосочетания:

$$\forall x\,(Q\,(x) \Rightarrow R\,(x,\ x)),$$
$$(\exists y R\,(x,\ y) \Rightarrow (Q\,(z) \wedge Q\,(w))),$$
$$\forall x\,(f = g\,(x)),$$
$$\exists x\,(h\,(x,\ y) = h\,(h\,(x,\ x),\ g\,(y))),$$
$$(\exists x R\,(x,\ x) \wedge P).$$

(Вторая из этих формул, например, читается так: «если существует такое y, что имеет место R от x, y, то имеют место Q от z и Q от w».)

Если этих примеров окажется достаточно, чтобы создать ясное представление о понятии формулы, то последующее точное определение этого понятия можно смело пропустить. Тем не менее дадим его. Выберем и зафиксируем бесконечную последовательность символов, называемых *переменными*. Пусть это будут, например, символы x, y, z, u, v, w, x_1, ... Определение терма дается, по существу, так же, как и раньше. Именно:

(Т1) любая переменная и любой функциональный символ с нулем аргументов суть термы;

(Т2) если термы $t_1, \ldots, t_m$ уже построены, а s — функциональный символ с m аргументами, то выражение $s(t_1, \ldots, t_m)$ есть терм.

Термами называют те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (Т1) и (Т2). Например, при принятых выше соглашениях о валентностях символов f, g, h выражения

$$x,\ f,\ g(x),\ h(x,\ y),\ h(h(x,\ x),\ g(y))$$

являются термами. Определим теперь понятие формулы следующим образом:

(Ф1) если t и s — термы, то $(t = s)$ — формула;

(Ф2) если $t_1, \ldots, t_m$ — термы, а P — предикатный символ с m аргументами, то $P(t_1, \ldots, t_m)$ — формула; если P — предикатный символ с нулем аргументов, то P — формула;

(Ф3) если P и Q — формулы, то $\neg P$, $(P \wedge Q)$, $(P \vee Q)$, $(P \Rightarrow Q)$ (читается: «не P», «P и Q», «P или Q», «если P, то Q») — формулы;

(Ф4) если P — формула, а ξ — переменная, то $\forall \xi P$ и $\exists \xi P$ (читается: «для всех ξ верно P» и «существует такое ξ, что P») — формулы.

Формулами называются те и только те выражения, которые можно получить путем многократного применения правил (Ф1)—(Ф4). Читатель легко убедится, что приведенные определения термов и формул представляют собой обобщения имевшихся у нас ранее определений на случай произвольного языка.

Итак, понятие формулы определено. Теперь мы хотим обсудить, какой смысл придается формулам. Для этого нужно прежде всего придать смысл входящим в них предикатным и функциональным символам. Именно: каждому предикатному символу с числом аргументов m нужно поставить в соответствие m-местный предикат, принимающий значения «истина» и «ложь», а каждому функциональному символу с числом аргументов m — некоторую m-местную функцию. (Все эти предикаты и функции должны, конечно, быть заданы на одном и том же множестве, а значения функций должны принадлежать тому же множеству.) Если это сделано, то говорят, что задана *интерпретация* языка. Точнее, пусть имеется некоторый язык L с предикатными символами $\{P, Q, \ldots\}$ и функциональными символами $\{f, g, \ldots\}$. Определить интерпретацию языка L означает:

1) выбрать некоторое множество M — носитель интерпретации;

2) с каждым предикатным символом P валентности m сопоставить некоторый m-местный предикат, т. е. некоторую функцию **P**, аргументами которой являются кортежи (т. е. конечные последовательности) из m элементов множества M, а значениями — символы **И** (истина) и **Л** (ложь):

3) с каждым функциональным символом f валентности k сопоставить некоторую функцию **f**, ставящую в соответствие любой k-элементной последовательности элементов M некоторый элемент M. (В этом определении числа m и k могут быть равны нулю; функциональным символам с нулем аргументов при интерпретации должны соответствовать элементы M, а предикатным — символы **И** и **Л**.)

Чтобы окончательно определить смысл формул, надо объяснить смысл других входящих в них знаков. Как правило, смысл их ясен из их названий. Мы ограничимся тем, что приведем несколько примеров.

Если a — константа (нульместный функциональный символ), а Q — одноместный предикатный символ, то формула $Q(a)$ будет истинной в том и только том случае,

когда элемент **a** множества M, сопоставленный с символом a, обладает свойством **Q**, сопоставленным с символом Q, т. е. когда **Q**(**a**) = **И**.

Если x — переменная, то вопрос об истинности формулы $Q(x)$ приобретает смысл лишь после фиксации значения переменной x. Точнее, пусть в данной интерпретации с носителем M символу Q соответствует функция **Q** с областью определения M и значениями **И** и **Л**; тогда истинность формулы $Q(x)$ (в этой интерпретации) будет зависеть от того, какой элемент $x_0 \in M$ взят в качестве значения переменной x. Именно: $Q(x)$ будет истинной при $x = x_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Q}(x_0) = \mathbf{И}$.

Аналогично истинность формулы $h(x, x) = h(h(x, x), g(y))$ зависит не только от выбранной интерпретации, но и от значений переменных x и y. Эта формула будет истинна при $x = x_0$ и $y = y_0$, если элементы $x_0 \in M$ и $y_0 \in M$ таковы, что $\mathbf{h}(x_0, x_0) = \mathbf{h}(\mathbf{h}(x_0, x_0), \mathbf{g}(y_0))$.

Рассмотрим теперь формулу $\exists x Q(x)$. Ее истинность уже не зависит от значения x, а полностью определяется выбором интерпретации. Именно: эта формула истинна в данной интерпретации тогда и только тогда, когда функция **Q** принимает значение **И** хотя бы на одном элементе M.

Истинность формулы

$$\exists x (h(x, y) = h(h(x, x), g(y)))$$

также не зависит от значения переменной x. Ее истинность полностью определяется выбором интерпретации и значения переменной y.

Формальное определение истинности проводится по уже упоминавшейся схеме. Мы вводим понятие «параметра формулы» (переменной, от значения которой может зависеть истинность формулы) и определяем истинность формулы при данных значениях ее параметров. Формулы, не содержащие параметров, называются *закрытыми формулами*, или *суждениями*. Как только мы фиксировали какую-то интерпретацию языка, все закрытые формулы превращаются в истинные или ложные высказывания.

С помощью введенной терминологии можно описать ситуацию следующим образом. Мы рассматриваем язык, содержащий функциональные символы для каждой функции с действительными аргументами и значениями. Обозначим этот язык RL. Язык RL имеет две интерпретации — действительную и гипердействительную. В дейст-

вительной интерпретации каждому функциональному символу поставлена в соответствие функция с действительными аргументами и значениями, в гипердействительной интерпретации — ее гипердействительный аналог.

Принцип переноса теперь можно сформулировать так: в действительной и гипердействительных интерпретациях истинны одни и те же закрытые формулы языка RL. В логике есть специальное наименование для такой ситуации: две интерпретации некоторого языка, в которых истинны одни и те же закрытые формулы, называются *элементарно эквивалентными*.

Используя эту терминологию, задачу построения системы гипердействительных чисел можно сформулировать так: нужно построить интерпретацию языка RL, элементарно эквивалентную стандартной действительной интерпретации, но содержащую бесконечно малые, отличные от нуля.

Убедимся, что нам нужно именно это. В самом деле, пусть имеется такая интерпретация и M — ее носитель. В нашем языке имеются символы, изображающие все действительные функции действительных аргументов. В частности, для каждого действительного числа (нульместной функции) имеется константа, его изображающая. Этой константе при интерпретации соответствует некоторый элемент множества M. Если c и d — константы для разных действительных чисел, то им соответствуют разные элементы M, иначе формула $(c=d)$ была бы ложной в стандартной интерпретации и истинной в нашей. Отождествляя каждое действительное число с соответствующим элементом M, можно считать, что $\mathbb{R}$ является подмножеством M. Нужно проверить также, что функции на M, сопоставленные с каждым функциональным символом языка RL, становятся при этом продолжениями соответствующих функций на $\mathbb{R}$. Пусть f — функциональный символ с n аргументами, а $c_1, \ldots, c_n$ — константы, обозначающие n действительных чисел. Тогда формула $f(c_1, \ldots, c_n)=d$ будет истинной в стандартной интерпретации, если d — константа, обозначающая значение f на числах $c_1, \ldots, c_n$ (точнее, значение функции, обозначенной символом f, на числах, обозначенных символами $c_1, \ldots, c_n$). В соответствии с принципом переноса эта формула будет истинна в интерпретации с носителем M. Поэтому значение функции с аргументами и значениями в M, соответствующей символу f, на элементах M, обозначенных символами $c_1, \ldots, c_n$, равно

элементу, обозначаемому символом d. Это и означает, что функции на M являются продолжениями соответствующих функций на $\mathbb{R}$.

Посмотрим теперь, что может дать математическая логика для построения интерпретации языка RL, элементарно эквивалентной стандартной. Прежде чем ответить на этот вопрос, введем предварительно несколько понятий. Пусть фиксирован некоторый язык L. Пусть T — некоторое множество закрытых формул этого языка. Будем говорить, что интерпретация $\mathscr{P}$ языка L является *моделью* T, если все формулы из T истинны в $\mathscr{P}$. Возьмем в качестве L рассмотренный выше язык RL (с символами для всех функций на $\mathbb{R}$), в качестве T — множество Tr всех закрытых формул этого языка, истинных в стандартной его интерпретации. Тогда, в соответствии с нашим определением, стандартная интерпретация, так же как и любая система гипердействительных чисел, будет моделью для Tr.

Покажем, что в любой модели для Tr все закрытые формулы языка RL, не входящие в Tr, будут ложны. В самом деле, если φ — закрытая формула, не входящая в Tr, то φ ложна в стандартной интерпретации. Тогда формула $\neg\varphi$, отрицание формулы φ, истинна в ней и, следовательно, входит в Tr. Значит, $\neg\varphi$ истинна в любой модели множества Tr, а φ ложна в любой модели множества Tr. Таким образом, в любой модели множества Tr истинны те и только те формулы, которые истинны в стандартной модели. Доказанное можно сформулировать так: если T — множество закрытых формул, истинных в некоторой интерпретации $\mathscr{P}$ языка RL, то свойства $\mathrm{Tr} \subset T$ и $\mathrm{Tr} = T$ равносильны. Теперь задачу отыскания системы гипердействительных чисел можно сформулировать так: найти модель множества Tr, которая, рассматриваемая как упорядоченное поле, не удовлетворяет аксиоме Архимеда.

Прежде чем заняться этой задачей вплотную, введем еще один термин, относящийся к произвольному языку L и произвольному множеству T закрытых формул языка L. Назовем множество T *совместным*, если существует его модель, т. е. если существует интерпретация языка L, в которой истинны все формулы из T. Теперь все готово для того, чтобы сформулировать теорему компактности Мальцева, уже упоминавшуюся выше.

Теорема компактности. *Пусть имеется произвольный язык L и произвольное множество T закрытых*

формул этого языка. Пусть каждое конечное подмножество T_1 множества T совместно. Тогда и все множество T совместно.

Эта теорема показывает, что для построения модели множества T достаточно уметь строить модели всех конечных подмножеств множества T. (Обратное очевидно, так как модель множества является и моделью всех его конечных подмножеств.) Доказательство этой теоремы мы обсудим позже, а пока продемонстрируем, как с ее помощью может быть получена система гипердействительных чисел.

Прежде всего, добавим к нашему языку RL (содержащему функциональные символы для всех функций на множестве $\mathbb{R}$) еще один нульместный функциональный символ c (отличный от всех других символов). Получается новый, расширенный язык RL_c. Чтобы задать интерпретацию нашего языка RL_c, нужно взять произвольную интерпретацию языка RL, выбрать в ее носителе какой-то элемент и объявить его значением добавленного символа c. Наоборот, если мы имеем какую-то интерпретацию языка RL_c, то из нее тривиальным образом получается интерпретация языка RL — нужно просто забыть о символе c и о том, какой элемент ему соответствует. Рассмотрим теперь некоторое множество закрытых формул T_c нового языка. Оно будет содержать, во-первых, все элементы Tr, т. е. все закрытые формулы языка RL, истинные в его стандартной интерпретации, и, кроме того, счетное множество формул вида

$$G(c, \overline{0}) = \overline{0}, \quad G(c, \overline{1}) = \overline{0}, \quad G(c, \overline{2}) = \overline{0}, \ldots$$

где G — двуместный функциональный символ, обозначающий функцию, для которой $G(x, y) = 0 \Leftrightarrow x > y$, а $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}, \ldots$ — нульместные функциональные символы языка RL, соответствующие действительным числам 0, 1, 2, ... Нам достаточно доказать, что это множество (T_c) имеет модель. В самом деле, если есть такая модель, то, забыв о символе c, мы получим интерпретацию языка RL (не включающего символ c), являющуюся моделью множества Tr. Эта модель (как упорядоченное поле) будет неархимедовой: ее элемент, соответствующий символу c, будет бесконечно большим.

Итак, осталось доказать совместность множества T_c. Для этого согласно теореме компактности достаточно доказать совместность любого конечного подмножества множества T_c. Это будет сделано, если мы покажем

совместность семейства

$$T_c(n) = \mathrm{Tr} \cup \{G(c, \overline{0}) = \overline{0}, \ldots, G(c, \overline{n}) = \overline{0}\}$$

при любом n, так как любое конечное подсемейство семейства T_c содержится в некотором $T_c(n)$ при достаточно большом n. Чтобы доказать совместность семейства $T_c(n)$, нужно построить его модель. Это очень просто: возьмем стандартную интерпретацию языка RL и расширим ее до интерпретации языка RL_c, считая, что c интерпретируется как число $n+1$. Очевидно, что все формулы семейства $T_c(n)$ будут истинны в этой интерпретации. Тем самым мы доказали совместность семейства $T_c(n)$ при любом n; отсюда по теореме компактности получается совместность семейства T_c; модель этого семейства, как мы видели, превращается в искомую систему гипердействительных чисел, как только мы забудем о c.

Приведенное рассуждение весьма просто; таким образом, основная трудность в построении системы гипердействительных чисел содержится в теореме компактности. Обсудим теперь, каким образом эту теорему можно доказать. Существуют (по крайней мере) два способа ее доказательства. Один из них аналогичен описанному выше способу построения системы гипердействительных чисел с помощью классов эквивалентных последовательностей. Мы не будем подробно говорить о нем. Другой метод (пожалуй, более естественный) состоит в применении одной из центральных теорем логики — теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. К сожалению, точная формулировка этой теоремы далеко выходит за рамки настоящего изложения, поэтому мы вынуждены ограничиться в этом месте неформальными комментариями.

Если пытаться описать смысл теоремы Гёделя — Мальцева о полноте в одной фразе, можно сказать так: эта теорема дает синтаксический критерий совместности множества формул. Критерий этот таков. Определяется понятие выводимости данной формулы φ из данного множества формул T. Мы не можем дать здесь точного определения этого понятия, так как оно довольно громоздко. Скажем лишь, что выводимость φ из T означает, что существует последовательность формул, каждая из которых принадлежит либо T, либо заранее фиксированному множеству (элементы которого называются аксиомами), либо получается из предыдущих членов последовательности по определенным прави-

лам (эти правила называются правилами вывода), причем последней формулой этой последовательности является формула φ. Последовательность формул, обладающая описанными свойствами, называется *выводом* формулы φ из множества формул T. Таким образом, выводимость φ из T означает, что существует вывод формулы φ из T. Уже из этого описания становится ясным такое свойство выводимости: если формула φ выводится из некоторого множества T, то в этом выводе используется лишь конечное число формул из T. Точнее, справедливо такое утверждение: если формула φ выводится из множества T, то существует такое конечное подмножество $T' \subset T$, что формула φ выводится из множества T'. Наконец, назовем множество формул *противоречивым*, если из него выводится одновременно некоторая формула φ и ее отрицание $\neg\varphi$. Теперь все готово для формулировки теоремы Гёделя (точнее, теоремы Гёделя — Мальцева) о полноте.

Теорема. *Пусть L — произвольный язык* (полностью следовало бы сказать: односортный язык первого порядка, но у нас других и не было), *T — множество закрытых формул этого языка. Тогда следующие свойства равносильны:* а) *T совместно*, б) *T непротиворечиво.*

Эта теорема позволяет заменить семантическое (т. е. апеллирующее к интерпретациям) свойство совместности на синтаксическое (рассматривающее формулы только как знакосочетания, в отрыве от их смысла) свойство непротиворечивости. Из нее легко вытекает теорема компактности. В самом деле, раз совместность совпадает с непротиворечивостью, нужно доказать лишь, что если всякое конечное подмножество данного множества закрытых формул непротиворечиво, то и все множество непротиворечиво. Другими словами, нужно доказать, что если данное множество T противоречиво, то противоречиво и некоторое его конечное подмножество. А это следует из упоминавшегося выше свойства отношения выводимости. Ведь если из множества T выводятся формулы φ и $\neg\varphi$, то (по отмечавшемуся свойству выводимости) найдутся такие конечные подмножества T_1 и T_2 множества T, что из T_1 выводится φ, а из T_2 выводится $\neg\varphi$. Тогда из конечного множества $T_1 \cup T_2$ выводятся как φ, так и $\neg\varphi$, и, следовательно, оно противоречиво.

Таким образом, теорема компактности легко вытекает из теоремы Гёделя — Мальцева о полноте. (Мы называем теорему о полноте теоремой Гёделя — Мальцева,

а не просто теоремой Гёделя, как это часто делается, так как интересующий нас вариант был впервые доказан А. И. Мальцевым; Гёдель доказал равносильность совместности и непротиворечивости лишь для языков со счетным множеством предикатных и функциональных символов.) Таким образом, основная трудность в построении гипердействительных чисел заключена именно в доказательстве теоремы о полноте.

К сожалению, подробное обсуждение понятия выводимости далеко выходит за рамки нашего изложения, и мы вынуждены ограничиться уже сказанным.

Математическая логика позволяет также прояснить вопрос о неединственности гипердействительного расширения множества действительных чисел. Оказывается, что можно построить систему гипердействительных чисел (т. е. интерпретацию языка RL, элементарно эквивалентную стандартной), имеющую сколь угодно большую мощность. Тем самым $^*\mathbb{R}$ не единственно. Но это не так страшно, так как все интерпретации языка RL, элементарно эквивалентные стандартной, элементарно эквивалентны друг другу. Поэтому они, хотя и не одинаковы, в некотором смысле «неотличимы».

§ 11. «НЕСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ» ИЛИ «НЕСТАНДАРТНАЯ МАТЕМАТИКА»? (ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИМЕРЫ)

Термин «нестандартный анализ» может употребляться в двух смыслах — узком и широком. До сих пор мы говорили о нестандартном анализе в узком смысле, понимая под этим сравнительное исследование системы $\mathbb{R}$ действительных чисел и системы $^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел (точнее, любой из систем $^*\mathbb{R}$). В результате такого сравнения мы не только (и, быть может, не столько) получаем сведения о свойствах $^*\mathbb{R}$, но и получаем сведения о свойствах обычной действительной прямой $\mathbb{R}$. Возникает желание распространить этот метод на более широкую область. Где можно ожидать пользы от такого распространения? Вероятно, там, где идет речь о чем-то бесконечно малом или бесконечно большом, т. е. в топологии, теории дифференциальных уравнений, механике и т. п. В топологии, например, хотелось бы распространить те определения предельной точки и предела, которые упоминались нами выше, на случай произвольно-

го топологического пространства. Ниже мы обсудим, можно ли это сделать, и если можно, то как.

Напомним, что такое топологическое пространство (в обычном математическом смысле). Пусть задано некоторое множество X. Элементы этого множества будут называться *точками*, а само X — *пространством*. Пусть, помимо X, задано некоторое семейство множеств T, элементы которого являются подмножествами X. Пусть семейство T обладает такими свойствами:

(а) объединение любого числа множеств из T принадлежит T;

(б) пересечение любого конечного числа множеств из T принадлежит T;

(в) пустое множество $\varnothing$ и все пространство X принадлежат T.

В таком случае говорят, что на множестве X введена *топология* T; пару $\langle X, T\rangle$ (или, более вольно, само X, лишь подразумевая присутствие T) называют *топологическим пространством*, а подмножества X, входящие в T,— *открытыми подмножествами* топологического пространства $\langle X, T\rangle$.

Приведем несколько примеров топологических пространств.

1. Введем топологию на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел. Назовем точку $x \in \mathbb{R}$ *внутренней точкой* множества $A \subset \mathbb{R}$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что любая точка y, отстоящая от x менее чем на ε (в том числе и сама точка x), входит в A. Назовем множество $A \subset \mathbb{R}$ *открытым*, если любая точка x этого множества является внутренней. Другими словами, множество A открыто, если для любой точки $x \in A$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ является подмножеством множества A. Легко проверить, что семейство всех открытых (в указанном смысле) подмножеств множества $\mathbb{R}$ обладает свойствами (а)—(в) и, следовательно, является топологией на множестве $\mathbb{R}$. Эта топология называется *естественной топологией* на $\mathbb{R}$.

2. Аналогичным образом можно ввести топологию и на множестве всех точек плоскости. Именно: точка x называется *внутренней* точкой множества A, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что круг с центром в точке x радиуса ε целиком входит в A. Множество A точек плоскости называется *открытым*, если всякая его точка является внутренней. Мы получаем топологию на плоскости, называемую *естественной топологией*.

3. Пусть X — произвольное множество. Можно ввести топологию на X, объявив все подмножества X открытыми. (Легко проверить, что при таком определении свойства (а) — (в) выполняются.) Такая топология называется *дискретной*.

4. Пусть X — произвольное множество. Можно ввести топологию на X, в которой будет всего два открытых множества — пустое множество и всё X. Свойства (а) — (в), очевидно, выполняются. Этот пример топологии противоположен предыдущему — в предыдущем примере все множества были открытыми, а в этом открытыми объявляются лишь те множества, которые нельзя не объявить таковыми (по свойству (в)).

Попытаемся объяснить, каким образом понятие топологического пространства связано с интуитивной идеей «близости», «окрестности» и т. д. Попытаемся, например, придать точный смысл такому выражению: «для всех точек, достаточно близких к точке a, выполнено свойство P». Пусть сначала под точками мы понимаем точки действительной прямой (т. е. действительные числа). В этом случае указанное выражение можно уточнить следующим образом: свойство P выполнено для всех x, достаточно близких к a, тогда и только тогда, когда существует такое $\varepsilon > 0$, что свойство P выполнено для всех x, для которых $|x - a| < \varepsilon$. Например, для всех x, достаточно близких к 1, выполнено такое свойство: $0{,}99 \leqslant x^2 \leqslant 1{,}01$ (чтобы проверить это, достаточно, например, взять $\varepsilon = 0{,}001$). Другой пример: для всех x, достаточно близких к π, выполнено неравенство $\cos x \leqslant -0{,}999$.

Возникает естественная задача: перенести это уточнение с прямой на другие топологические пространства, например, придать точный смысл такому интуитивно ясному утверждению: если луч AB пересекает прямую l, то для всякой точки B', достаточно близкой к B, луч AB' также будет пересекать прямую l.

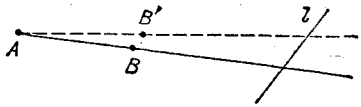

Рис. 15

Придать смысл выражению «для всех достаточно близких» оказывается возможным следующим образом. Пусть на множестве X введена топология T, превращающая его в топологическое пространство. Пусть P — некоторое свойство, которым могут обладать или не обладать точ-

ки X; пусть a — точка пространства X. Будем говорить, что свойство P выполнено для всех достаточно близких к a точек пространства X, если существует открытое (т. е. принадлежащее семейству T) множество $U \subset X$, содержащее точку a, для всех точек которого выполнено свойство P. Легко проверить, что если в качестве X взято множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, а в качестве T — естественная топология на нем, описанная в примере 1, то приведенное только что определение равносильно имевшемуся ранее. Сформулированное выше утверждение о лучах может теперь быть уточнено следующим образом: «если луч AB пересекает прямую l, то существует открытое множество, содержащее точку B, для любой точки B' которого луч AB' пересекает прямую l».

Приведем еще несколько примеров, показывающих, каким образом различные понятия переносятся с действительной прямой на произвольные топологические пространства. Дадим определения предела и предельной точки последовательности точек топологического пространства X. Пусть x_0, x_1, ...— последовательность точек топологического пространства X, a — некоторая его точка. Говорят, что a есть *предел* последовательности x_0, x_1, ..., если любое открытое множество, содержащее a, содержит все члены этой последовательности, за исключением конечного числа. Говорят, что a есть *предельная точка* последовательности x_0, x_1, ..., если любое открытое множество, содержащее a, содержит бесконечно много членов этой последовательности.

Важный класс топологических пространств составляют хаусдорфовы пространства. Пространство X называется *хаусдорфовым*, если для любых различных точек x и y существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие x и y (соответственно). Легко проверить, что пространства примеров 1—3 хаусдорфовы, в то время как пространство примера 4 не хаусдорфово (если в X содержится более одного элемента). Большинство пространств, встречающихся в математической практике (а также в ее приложениях, в том числе военных,— см. [4], гл. 9, п. 3), оказываются хаусдорфовыми; таковы, в частности, все так называемые метризуемые простран-

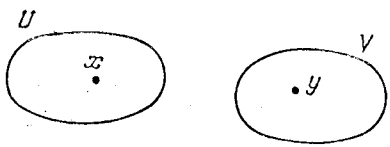

Рис. 16

ства. В нехаусдорфовых пространствах могут возникать неожиданные явления: например, одна и та же последовательность может иметь два разных предела. Хаусдорфовы пространства нередко называются также *отделимыми*.

Познакомившись с несколькими образцами понятий топологии, обсудим, каким образом можно применить методы нестандартного анализа к топологическим пространствам. На первый взгляд эта задача кажется весьма трудной. Раньше (в $\mathbb{R}$ и его расширениях) в определениях бесконечно малых участвовало сложение; в произвольном топологическом пространстве никакого сложения, разумеется, нет. Как же определять бесконечную близость?

Мы сейчас попробуем описать в общих чертах схему применения методов нестандартного анализа к произвольным топологическим пространствам.

Пусть A — произвольное множество. Элементы его мы будем, следуя М. Девису [3], называть индивидами. Будем считать, что индивиды сами не являются множествами. (Это не очень существенно — ценой некоторого усложнения последующих конструкций можно было бы обойтись без этого требования, но удобно.) Рассмотрим теперь всевозможные множества, которые можно построить, отправляясь от элементов A, за конечное число шагов. Прежде чем уточнять сказанное, приведем несколько примеров таких множеств. Прежде всего, это всевозможные множества индивидов, т. е. всевозможные подмножества множества A. Множество всех таких подмножеств обозначается $\mathscr{P}(A)$. На следующем шаге мы можем рассматривать множества, элементами которых являются (наряду с индивидами) и множества индивидов, т. е. подмножества $A \cup \mathscr{P}(A)$. Эти множества снова можно использовать в качестве элементов в дальнейших построениях.

Приведем теперь более точные формулировки. Определим последовательность множеств A_0, A_1, A_2, ... так: $A_0 = A$, $A_{i+1} = A_i \cup \mathscr{P}(A_i)$. Мы получаем, очевидно, для каждого A возрастающую последовательность множеств

$$A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \ldots;$$

ее объединение будем (также следуя М. Девису) называть *суперструктурой* с индивидами A и обозначать его $S(A)$. Таким образом, над каждым множеством индивидов A возникает суперструктура $S(A)$.

Поясним, зачем мы требовали, чтобы элементы A сами не являлись множествами. Это нужно для того, чтобы разные «уровни» нашей суперструктуры не смешивались. Например, если бы A, наряду с элементами a и b, содержало (в качестве элемента!) множество $\{a, b\}$, то A и $\mathcal{P}(A)$ пересекались бы: множество $\{a, b\}$ можно было бы рассматривать и как элемент A, и как множество элементов A, т. е. как элемент $\mathcal{P}(A)$.

Теперь мы, помимо «стандартной» суперструктуры, описанной выше, построим ее «нестандартное» расширение, в некотором смысле неотличимое от стандартной суперструктуры. Нужно объяснить только, в каком смысле оно неотличимо и в чем его нестандартность. Обсуждение нестандартности мы отложим, а пока займемся неотличимостью.

Неотличимость стандартной суперструктуры от нестандартной будем, как и прежде, понимать в том смысле, что в них истинны одни и те же закрытые формулы (суждения) некоторого языка. Осталось описать этот язык. Формулы этого языка будут строиться из констант (т. е. имен) для всех элементов суперструктуры $S(A)$ и переменных с помощью знаков $\in$ (символа принадлежности) и $=$ (знак равенства), логических знаков (конъюнкции, дизъюнкции, отрицания и т. п.) и кванторов (общности и существования). Другими словами, этот язык содержит один-единственный двуместный предикатный символ «принадлежность» (для удобства чтения вместо $\in(x, y)$ будем писать, как это обычно делают, $x \in y$) и большое число нульместных функциональных символов (это и будут константы) — столько, сколько элементов имеется в суперструктуре $S(A)$. Мы предполагаем, что фиксировано взаимно однозначое соответствие между функциональными символами и элементами суперструктуры $S(A)$.

Этот язык имеет стандартную интерпретацию, в которой носителем является $S(A)$, с нульместными функциональными символами сопоставляются соответствующие им элементы суперструктуры $S(A)$, а предикатному символу $\in$ соответствует обычное отношение принадлежности, т. е. функция, ставящая в соответствие паре $x, y \in S(A)$ символ **И**, если $x \in y$, и **Л**, если $x \notin y$.

Рассмотрим теперь произвольную (не обязательно стандартную) интерпретацию этого языка. Обозначим ее носитель через $^*S$. На множестве $^*S$ имеется бинарное отношение, соответствующее предикатному символу $\in$. Мы

будем обозначать это отношение $*\in$ и писать $x *\in y$, если пара $\langle x, y\rangle$ (здесь $x, y \in *S$) находится в этом отношении, т. е. $*\in(x, y) = \text{И}$. Кроме того, в $*S$ интерпретированы все функциональные символы языка (напомним, что все они нульместны); другими словами, с каждым элементом $s \in S(A)$ сопоставлен некоторый элемент множества $*S$. Элемент множества $*S$, соответствующий элементу s из $S(A)$, будем обозначать $*s$.

Мы требуем, чтобы для новой интерпретации был справедлив принцип переноса, т. е. были истинны те же самые закрытые формулы рассматриваемого языка, что и в стандартной его интерпретации. Попробуем, зная это, прояснить устройство множества $*S$. С каждым элементом $s \in S(A)$ сопоставляется элемент $*s \in *S$; могут ли двум различным элементам s_1 и $s_2 \in S(A)$ быть поставлены в соответствие одинаковые элементы $*S$? Легко видеть, что нет. В самом деле, пусть c_1 и c_2 — константы (т. е. нульместные функциональные символы), соответствующие элементам s_1 и s_2. Рассмотрим формулу $c_1 = c_2$. В $S(A)$ эта формула ложна, так как интерпретацией константы c_1 служит элемент s_1, интерпретацией константы c_2 служит элемент s_2, а элементы s_1 и s_2 различны. Значит, и в $*S$ эта формула будет ложна, т. е. интерпретации констант c_1 и c_2 в $*S$ — элементы $*s_1$ и $*s_2$ — будут различны. Таким образом, мы построили взаимно однозначное соответствие между $S(A)$ и некоторым подмножеством множества $*S$. Элементы этого подмножества естественно назвать *стандартными элементами* $*S$. Теперь становится ясным, что $*S$ можно считать расширением суперструктуры $S(A)$, отождествив $S(A)$ с некоторой частью множества $*S$.

Посмотрим на это отождествление более внимательно. Пусть $a \in A$ — некоторый индивид, а $X \subset A$ — некоторое множество индивидов. Тогда и a, и X являются элементами суперструктуры $S(A)$. Им соответствуют некоторые элементы $*a$ и $*X$ в ее нестандартном расширении $*S$. Находятся ли они в отношении $*\in$? Другими словами, верно ли в $*S$, что $*a *\in *X$? Легко понять, что это верно тогда и только тогда, когда $a \in X$. В самом деле, пусть c_a и c_X — константы нашего языка, соответствующие a и X. Истинность суждения $c_a \in c_X$ в стандартной суперструктуре означает, естественно, что $a \in X$; истинность этого же суждения в $*S$ означает, что $*a *\in *X$. Таким образом, при вложении суперструктуры $S(A)$ в $*S$ сохраняется отношение принадлежности.

Каждому элементу Y из $^*S$ можно поставить в соответствие некоторое подмножество $^*S$, именно подмножество тех $x \in {}^*S$, для которых в $^*S$ имеет место $x {}^*\!\in Y$. Посмотрим, каким будет это множество для некоторых стандартных элементов из $^*S$. Самый простой пример — пустое множество $\varnothing \in S(A)$. Ему соответствует стандартный элемент $^*\varnothing \in {}^*S$ и, далее, множество всех тех $x \in {}^*S$, для которых $x^* \in {}^*\varnothing$. Легко понять, что это множество пусто. В самом деле, в $S(A)$ истинна формула

$$\forall x \neg (x \in \varnothing)$$

(напомним, что $\forall$ — квантор «для всех», $\neg$ — знак отрицания). Эта формула в силу нашего предположения истинна и в $^*S$. Это значит, что для всех $x \in {}^*S$ неверно, что $x {}^*\!\in {}^*\varnothing$, т. е. что интересующее нас множество пусто.

Чуть более сложный пример. Пусть a и b — некоторые индивиды, $X = \{a, b\}$. Множество X является элементом суперструктуры $S(A)$ и, значит, с ним сопоставлен некоторый элемент $^*X$ из $^*S$. Какое подмножество в $^*S$ ему соответствует? Другими словами, для каких $x \in {}^*S$ выполнено соотношение $x {}^*\!\in {}^*X$? Легко видеть, что это так при $x = {}^*a$ и $x = {}^*b$. Но, быть может, есть и другие $x \in {}^*S$, при которых $x {}^*\!\in {}^*X$? Оказывается, что других нет. Чтобы понять это, рассмотрим формулу

$$\forall x (x \in c_X \Rightarrow (x = c_a) \vee (x = c_b)),$$

в которой c_X, c_a и c_b суть константы, соответствующие элементам X, a, b суперструктуры $S(A)$. Это формула истинна в $S(A)$, так как $X = \{a, b\}$. Значит, она истинна и в $^*S$. Это означает, что любой элемент $x \in {}^*S$, для которого $x {}^*\!\in {}^*X$, равен либо $^*a$, либо $^*b$. Таким образом, элементу $^*X$ соответствует подмножество $\{^*a, {}^*b\}$.

Будет ли так всегда? Сформулируем этот вопрос точнее. Рассмотрим произвольное множество $X \subset A$. Ему соответствует элемент $^*X \in {}^*S$. Рассмотрим подмножество в $^*S$, состоящее из всех тех $x \in {}^*S$, для которых $x {}^*\!\in {}^*X$. Очевидно, это подмножество содержит все $^*a$ для всевозможных $a \in X$. Может ли оно содержать что-нибудь еще? Легко видеть, что других стандартных элементов оно не содержит: ведь если бы $^*s {}^*\!\in {}^*X$ при некотором $s \in S(A)$, то (по принципу переноса) оказалось бы, что $s \in X$. Но, как мы увидим ниже, могут существовать

нестандартные элементы x, для которых $x {}^*\!\in {}^*X$. Возникающую ситуацию можно проиллюстрировать так:

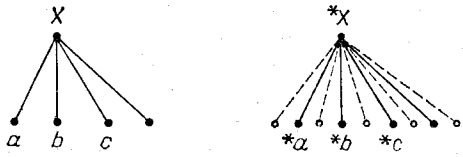

Рис. 17

Левый рисунок изображает ситуацию в стандартной суперструктуре: множество X содержит элементы a, b, c, ... Справа изображена ситуация в $^*S$. По-прежнему элементы $^*a$, $^*b$, $^*c$, ... находятся в отношении $^*\!\in$ к элементу $^*X$; но помимо них могут появиться новые нестандартные элементы, также находящиеся в отношении $^*\!\in$ к элементу $^*X$.

Подобный эффект может возникнуть (и, как правило, возникает) и на более высоких уровнях. Напомним, что через $\mathscr{P}(A)$ мы обозначали семейство всех множеств индивидов. Множество $\mathscr{P}(A)$ (как и любой элемент $S(A)$) имеет аналог $^*\mathscr{P}(A)$ в $^*S$; для всякого $X \in \mathscr{P}(A)$ элемент $^*X$ находится в отношении $^*\!\in$ с $^*\mathscr{P}(A)$; однако могут существовать и нестандартные элементы, находящиеся в отношении $^*\!\in$ с $^*\mathscr{P}(A)$. Таким образом, в $^*S$ могут появиться не только «новые индивиды», но и «новые множества индивидов».

Структуру $^*S$ можно рассматривать как результат конструкции, похожей на построение $S(A)$. Именно, можно представить себе дело так: мы вкладываем A в более широкое множество $\mathscr{A}_0$; затем рассматриваем множество $\mathscr{A}_1$, являющееся объединением $\mathscr{A}_0$ с некоторым семейством подмножеств множества $\mathscr{A}_0$; затем рассматриваем $\mathscr{A}_2$, равное объединению $\mathscr{A}_1$ с некоторым семейством подмножеств $\mathscr{A}_1$, и т. д. Отличие этого процесса от процесса построения $S(A)$ состоит в том, что мы берем на каждом шаге не все подмножества, а только некоторые (они называются «внутренними»). Сформулируем сказанное точнее. Пусть $^*S$ — произвольное расширение $S(A)$, удовлетворяющее принципу переноса. Тогда существуют последовательность множеств $\mathscr{A}_0 \subset \mathscr{A}_1 \subset \mathscr{A}_2 \subset \ldots$, для которой $A \subset \mathscr{A}_0$, $\mathscr{A}_{i+1} \subset \mathscr{A}_i \cup \mathscr{P}(\mathscr{A}_i)$ при всех i, и взаимно однозначное соответствие между $^*S$ и объединением всевозможных множеств $\mathscr{A}_i$ при всех

l; при этом соответствии отношение $^*\in$ на $^*S$ переходит в обычное отношение принадлежности на объединении всех $\mathscr{A}_i$. Кроме того, если $x \in S(A)$ и входит в множество A_i (напомним, что $S(A)$ мы строили как объединение возрастающей цепи множеств $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$ с $A_0 = A$ и $A_{i+1} = A_i \cup \mathscr{P}(A_i)$), то элементу $^*x$ множества $^*S$ соответствует элемент множества $\mathscr{A}_i$.

Таким образом, множество $^*S$ может быть построено так: сначала расширим A до некоторого $\mathscr{A}_0$, а затем будем применять обычное построение суперструктуры на $\mathscr{A}_0$ с той разницей, что на каждом шаге рассматриваются не все подмножества, а только некоторые. Все это можно видеть на рисунке.

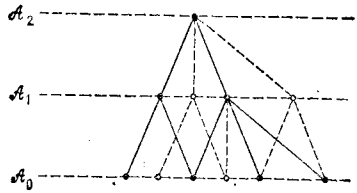

Рис. 18.

Зачерненные кружки и сплошные линии изображают стандартные объекты и стандартное отношение принадлежности. Зачерненные кружки нижнего уровня изображают индивиды из A, зачерненные кружки следующего уровня — множества индивидов и т. п. Светлые кружки и штриховые линии изображают добавленные (нестандартные) элементы. Видно, что на каждом уровне появляются новые элементы и что у старых множеств появляются новые элементы.

Эта схема, конечно, весьма условна, но, быть может, способствует созданию общего представления о структуре нестандартных расширений.

Теперь можно объяснить, как происходит, например, применение нестандартных методов к топологии. Точки исследуемого пространства объявляются индивидами. Затем мы надстраиваем над ними стандартную суперструктуру и рассматриваем ее нестандартные расширения. В нестандартном расширении появляются новые, нестандартные точки. Топология (семейство открытых множеств) также является элементом суперструктуры, поэтому возникает соответствующий объект в нестандартном расширении. Его «элементы» (т. е. элементы $^*S$, нахо-

дящиеся в отношении $^*\in$ с ним) можно рассматривать как нестандартные «открытые множества». Каждое стандартное открытое множество U имеет аналог $^*U$ в нестандартной модели; этому аналогу «принадлежат» «те же» стандартные точки, что и U, и, возможно, некоторые нестандартные точки. Слово «принадлежат» взято в кавычки, так как оно представляет собой некоторую вольность речи; корректнее было бы говорить «находится в отношении $^*\in$» вместо «принадлежать». По аналогичным причинам взято в кавычки «те же»: ведь на самом деле множеству $^*U$ принадлежат не сами элементы множества U, а их нестандартные аналоги (элементы нестандартной модели, отождествленные с ними). Мы, однако, будем позволять себе подобные вольности, надеясь, что читатель сам восстановит корректные формулировки (если захочет). Итак, при переходе к нестандартной модели старые открытые множества могут приобретать новые (нестандартные) точки; кроме того, могут появиться новые (нестандартные) открытые множества.

Покажем теперь, каким образом в нестандартной интерпретации вводится понятие «бесконечной близости». Рассмотрим сначала ситуацию в стандартной интерпретации. Пусть x — стандартная точка топологического пространства X. Рассмотрим все стандартные открытые множества, содержащие x. Рассмотрим пересечение всех этих множеств. Если пространство X отделимо, то это пересечение содержит единственную точку x. (В самом деле, если $y \neq x$, то существует открытое множество, содержащее x и не содержащее y; поэтому точка y не входит в пересечение всех открытых множеств, содержащих точку x.)

До сих пор все наши рассмотрения были стандартны. Переходя к нестандартной интерпретации, мы замечаем, что в рассматриваемом пересечении могут появиться нестандартные точки, отличные от x. Точнее, могут найтись такие $z \in {}^*S$, отличные от $^*x$, что *для любого (стандартного) открытого множества U, содержащего (стандартную) точку x, выполнено $z\, {}^*\!\in {}^*U$.* Точки с таким (выделенным курсивом) свойством называются *бесконечно близкими* к x. Множество всех таких точек называется *монадой* точки x. В случае когда X представляет собой действительную прямую с естественной топологией, мы приходим, по существу, к тому же самому определению монады, что и раньше (если отвлечься от того, что теперь рассматривается другой язык).

В терминах монад удается дать критерий отделимости (т. е. хаусдорфовости) топологических пространств. Напомним, что топологическое пространство X называется отделимым пространством, если для всяких точек x и y этого пространства, для которых $x \neq y$, найдутся непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие x и y соответственно. Оказывается, что пространство X отделимо тогда и только тогда, когда в его нестандартном расширении монады любых двух стандартных точек не пересекаются. Другими словами, отделимость пространства означает, что не существует (возможно, нестандартной) точки, которая была бы бесконечно близка к двум различным стандартным точкам.

Нужно уточнить, однако, что́ мы имеем в виду, говоря о нестандартных расширениях пространства X. До сих пор мы требовали лишь того, чтобы в нестандартном расширении суперструктуры над X были истинны те же закрытые формулы, что и в стандартном. Этого, разумеется, мало: мы должны объяснить также, в чем же состоят особенности рассматриваемых нестандартных объектов (множества $^*S$ и отношения «принадлежности» $^*\in$), отличающие их от стандартных. До сих пор об этом не было сказано ни слова, и все наши требования к $^*S$ были выполнены и в том случае, когда в качестве $^*S$ взята сама суперструктура $S(A)$, а в качестве отношения $^*\in$ взято обычное отношение принадлежности. Ясно, однако, что в этом случае «нестандартная» топология не дает ничего нового по сравнению со стандартной. Поэтому мы должны сформулировать какие-то требования к нестандартным объектам, которые отличали бы их от стандартных. Эти требования должны быть достаточно сильны, чтобы с их помощью можно было развить содержательную теорию, и, кроме того, должны быть такими, чтобы их можно было удовлетворить,— ведь если мы потребуем от $^*S$ слишком много, то такого $^*S$ просто не будет. Раньше, когда мы рассматривали нестандартный анализ в узком смысле (для действительной прямой), таким требованием была неархимедовость поля гипердействительных чисел. Ее оказалось достаточно для развития содержательной теории. К сожалению, свойство неархимедовости использует специфику действительных чисел — наличие сложения и порядка. Для случая произвольного топологического пространства нужны какие-то существенно более общие понятия и методы. Один из таких методов мы впоследствии опишем, сфор-

мулировав требование «направленности», отличающее нестандартное расширение от исходной стандартной суперструктуры. С его помощью критерий отделимости получает следующую точную формулировку.

Пусть фиксировано произвольное нестандартное расширение суперструктуры на топологическом пространстве X, для которого справедливы принцип переноса и требование направленности. В этом случае монады любых двух стандартных точек не пересекаются тогда и только тогда, когда исходное пространство X отделимо.

Доказательство этого критерия состоит из двух частей. Нужно доказать, что если X отделимо, то монады не пересекаются, и, напротив, что если X неотделимо, то монады некоторых двух стандартных точек пересекаются. Требование направленности используется лишь во второй части, поэтому мы отложим его формулировку и приведем вначале первую часть доказательства. Отметим, что как приводимое ниже рассуждение, так и его словесное оформление (с нестандартно понимаемыми словами типа «принадлежать», «включена» и т. п.) весьма типичны для нестандартного анализа. Пусть пространство является отделимым. Докажем, что монады различных стандартных его точек не пересекаются. Пусть x и y — две различные стандартные точки пространства. Докажем, что монады $\mu(x)$ и $\mu(y)$ не пересекаются. Так как требование отделимости выполнено, то существуют открытые множества U и V, содержащие точки x и y, не имеющие общих стандартных точек. Рассмотрим соответствующие им объекты $^*U$ и $^*V$ в нестандартной интерпретации. Это — «открытые множества» нестандартной интерпретации. Они «содержат» точки x и y. Утверждение о том, что множества U и V не пересекаются, может быть записано в виде суждения нашего языка:

$$\neg \exists x ((x \in c_U) \wedge (x \in c_V));$$

здесь c_U, c_V — константы (т. е. функциональные символы с нулем аргументов), соответствующие элементам U и V в стандартной интерпретации. Будучи истинно в стандартной интерпретации, это суждение (согласно принципу переноса) обязано быть истинным и в нестандартной. Это означает, что $^*U$ и $^*V$ «не пересекаются». Отсюда следует, что и монады точек x и y не пересекаются, так как монада точки x «включена» в множество U, а монада точки y «включена» в V.

В приведенном рассуждении мы широко пользовались «вольностями речи», используя некоторые слова в переносном смысле; надеемся, что читатель сможет (если захочет) восстановить корректный способ выражения. Например, когда мы говорили, что монада $\mu(x)$ «включена» в U, мы имели в виду следующее: всякий элемент монады $\mu(x)$ находится в отношении $*\in$ с $*U$. Привычка к такого рода переносному словоупотреблению совершенно необходима для полного овладения методами нестандартного анализа.

Итак, одна из половин доказательства нестандартного критерия отделимости завершена. Прежде чем перейти ко второй, нам необходимо сформулировать требование направленности. К сожалению, его формулировка может поначалу показаться несколько искусственной и ее смысл проясняется лишь при применении этого требования.

Начнем со следующего простого замечания. Пусть на суперструктуре $S(A)$ задано некоторое бинарное отношение $R(x, y)$, причем участвующие в нем пары $\langle x, y\rangle$ имеют своими членами элементы некоторого фиксированного уровня. Сформулируем это точнее. Напомним, что суперструктура $S(A)$ представляет собой объединение множеств A_0, A_1, ..., где $A_0 = A$, а $A_{i+1} = A_i \cup \cup \mathscr{P}(A_i)$. Так вот, наше предположение о бинарном отношении R на множестве $S(A)$ состоит в следующем: существует такое N, что для любой пары $\langle x, y\rangle$, находящейся в отношении R, элементы x и y принадлежат множеству A_N. Будем рассматривать в дальнейшем только бинарные отношения с описанным свойством, называя их отношениями конечного уровня. Это свойство позволяет рассматривать бинарное отношение как элемент суперструктуры с помощью известного метода Куратовского, отождествляющего пару $\langle x, y\rangle$ с множеством $\{\{x\}, \{x, y\}\}$. Если x и y принадлежат уровню A_N, то множество $\{\{x\}, \{x, y\}\}$ принадлежит уровню A_{N+2} (так как $\{x\}$ и $\{x, y\}$ принадлежат A_{N+1}). Тем самым любое множество понимаемых по Куратовскому упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$, где $x, y \in A_N$, становится элементом A_{N+3}.

Напомним, что первой проекцией отношения R называется множество всех тех x, для которых $R(x, y)$ имеет место при некотором y. Назовем отношение R *направленным*, если для любого конечного набора $x_1, \ldots, x_n$, элементы которого входят в первую проекцию отношения R, найдется y, находящийся в отношении R со всеми x_i,

Другими словами, условие направленности состоит в следующем: если для каждого x_i из конечного набора $x_1, \ldots, x_n$ найдется y, для которого $R(x_i, y)$, то существует единое y, при котором $R(x_i, y)$ при всех x_i.

С помощью понятия направленного отношения конечного уровня мы и сформулируем требования к нестандартной интерпретации, отличающие ее от стандартной. Прежде чем сформулировать эти требования, напомним, что с каждым элементом $S(A)$ сопоставлен некоторый элемент $*S$. Итак, пусть R — произвольное направленное отношение конечного уровня. Мы требуем выполнения следующего условия: существует такое $y \in *S$, что для любого стандартного x, входящего в первую проекцию отношения R, выполнено $R(x, y)$. Эта формулировка требует разъяснения. Непонятно, что означает $R(x, y)$: ведь x — элемент суперструктуры $S(A)$, а y — элемент ее расширения $*S$. Объясним это. Напомним, что отношение конечного уровня рассматривается как элемент суперструктуры $S(A)$. Как и всякому другому элементу, ему соответствует некоторый элемент $*R \in *S$. Так вот, требуется, чтобы $\langle *x, y\rangle *\in *R$ для любого элемента $x \in S(A)$, входящего в первую проекцию отношения R. Элемент y с такими свойствами должен существовать для любого направленного отношения R конечного уровня. В этом и состоит требование направленности.

Здесь требуется еще объяснить, что означает запись $\langle *x, y\rangle$. Сделаем это. Для любых элементов a и b из $*S$ существует и единствен элемент $c \in *S$, для которого $a *\in c$, $b *\in c$ и из $t *\in c$ следует, что $t = a$ или $t = b$ для любого $t \in *S$. (Это следует из того, что аналогичное свойство верно в $S(A)$.) Этот элемент c естественно обозначить через $\{a, b\}$. Обозначим также $\{a, a\}$ через $\{a\}$ и $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ через $\langle a, b\rangle$. Таким образом, мы придали смысл выражению $\langle a, b\rangle$ для любых элементов $a, b \in *S$.

Сформулированные требования можно коротко выразить так: если в (стандартной) суперструктуре $S(A)$ для любого конечного набора элементов можно найти элемент, находящийся со всеми ними в каком-то отношении, то в нестандартном расширении можно найти элемент, находящийся в этом отношении со всеми стандартными.

На первый взгляд это требование (будем называть его требованием направленности) выглядит довольно бессмысленным. Чтобы оправдать его, нужно, во-первых,

показать, что оно выполнимо, т. е. что для всякой суперструктуры $S(A)$ можно найти ее расширение $^*S$, удовлетворяющее принципу переноса и требованию направленности, и, во-вторых, продемонстрировать полезность последнего для построения нестандартного анализа. Начнем с первого.

Как и в случае поля гипердействительных чисел, построение искомого расширения $^*S$ (точнее, доказательство его существования) может быть осуществлено различными методами. Один из методов использует теорему о компактности, другой — нетривиальные ультрафильтры. Единственным существенным отличием возникающей здесь ситуации от случая гипердействительных чисел является, пожалуй, то, что нужно рассматривать ультрафильтры не на натуральном ряде $\mathbb{N}$, а на некоторых других множествах. За подробностями (в том числе за точным определением ультрафильтра на произвольном множестве) мы вновь отсылаем читателя к книге Девиса «Прикладной нестандартный анализ» [3].

Перейдем теперь к обсуждению второго вопроса — вопроса о том, какую пользу можно извлечь из требования направленности. Мы обещали использовать его, завершая доказательство нестандартного критерия отделимости. Но для начала продемонстрируем его в более простой ситуации, показав, что в применении к суперструктуре с множеством индивидов $\mathbb{R}$ оно дает нам некоторое неархимедово расширение этого поля. В самом деле, рассмотрим такое отношение $R(x, y)$ на множестве $\mathbb{R}$: $R(x, y) \Leftrightarrow x < y$. Его первой проекцией является всё $\mathbb{R}$, так как для каждого числа существует большее. Более того, для каждого конечного множества чисел можно найти число, которое больше всех элементов этого множества, поэтому отношение R является направленным. Теперь остается применить принцип направленности и получить такое (нестандартное) c, что $R(x, c)$ при любом стандартном действительном числе x. Это c и будет бесконечно большим. Можно также провести подобное рассуждение и с бесконечно малыми вместо бесконечно больших; для этого в качестве R нужно взять отношение $(x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x > y)$.

Перейдем теперь к завершению доказательства нестандартного критерия отделимости. Пусть топологическое пространство не является отделимым. Пусть x и y — точки, для которых не выполнено требование отделимости. Это означает, что любые открытые множества U,

и V, для которых $x \in U$ и $y \in V$, имеют общую точку. Определим такое отношение:

$R(a, b) \rightleftharpoons a$ представляет собой пару открытых множеств $\langle U, V \rangle$, причем U содержит x, V содержит y, а b является общей точкой множеств U и V.

Убедимся, что это отношение является направленным. Для этого нужно рассмотреть произвольный конечный набор $a_1, \ldots, a_n$, каждый из членов которого принадлежит первой проекции отношения R, и найти такое b, что $R(a_i, b)$ при всех i. Раз каждый из a_i принадлежит первой проекции отношения R, то он представляет собой пару $\langle U_i, V_i \rangle$, где U_i — открытое множество, содержащее x, а V_i — открытое множество, содержащее y. Рассмотрим пересечения $F = \bigcap U_i$ и $G = \bigcap V_i$. Эти пересечения являются открытыми множествами. (В определении топологического пространства мы требовали, чтобы конечные пересечения открытых множеств были открытыми множествами.) Множества F и G содержат x и y соответственно. Так как для точек x и y нарушается требование отделимости, то множества F и G имеют общую точку. Взяв ее в качестве b, получим, что $R(a_i, b)$ при всех i. Этим завершается проверка направленности отношения R.

До сих пор все наши рассуждения происходили в стандартной интерпретации. Теперь перейдем в нестандартную и воспользуемся требованием направленности. Согласно этому требованию найдется такое (вообще говоря, нестандартное) b, что $R(a, b)$ для любого стандартного a, входящего в первую проекцию отношения R. Другими словами, $b \in^* U \cap {}^*V$ для любой пары стандартных открытых множеств U и V, для которых $x \in U$ и $y \in V$. Тогда b принадлежит и монаде точки x, и монаде точки y; следовательно, эти монады пересекаются. Тем самым мы завершаем доказательство нестандартного критерия отделимости, сформулированного выше.

Приведем еще один пример нестандартного критерия стандартного понятия. Этим понятием будет компактность. Мы уже имели нестандартный критерий компактности множества действительных чисел, теперь обобщим его на произвольные топологические пространства. Напомним, что топологическое пространство X называется *компактным*, если из любого покрытия этого пространства открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Другими словами, X компактно, если для

любого семейства α открытых (в пространстве X) множеств, образующего покрытие пространства X (это значит, что всякая точка пространства X принадлежит хотя бы одному из множества семейства α), существует конечное подсемейство $\alpha' \subset \alpha$, также образующее покрытие пространства X. Свойство компактности (иногда его называют также свойством бикомпактности) является одним из важнейших свойств топологических пространств. Дадим теперь нестандартный критерий компактности. Именно: пространство X компактно тогда и только тогда, когда любая точка его нестандартного расширения $^*X$ бесконечно близка к какой-нибудь из стандартных точек этого расширения. Другими словами, X компактно тогда и только тогда, когда объединение всех монад совпадает с множеством всех точек нестандартного расширения пространства X.

Попытаемся изложить основную идею доказательства критерия компактности. При этом мы, как и прежде, будем широко пользоваться вольностями речи, систематически отождествляя объекты стандартной интерпретации с соответствующими им объектами нестандартной интерпретации. Итак, пусть пространство X компактно. Докажем, что всякая (возможно, нестандартная) точка бесконечно близка к некоторой стандартной точке. Пусть x — произвольная (возможно, нестандартная) точка пространства X. Нам нужно найти стандартную точку, к которой она бесконечно близка. Предположим, что такой точки нет. Это означает, что для каждой стандартной точки a существует открытое множество U_a, не содержащее точки x (вспоминаем определение монады!). Эти открытые множества образуют покрытие. Выберем из него конечное подпокрытие $U_1, \ldots, U_n$. Это подпокрытие будет содержать все стандартные точки пространства, но не все нестандартные. Поэтому суждение

$$\forall x((x \in X) \Rightarrow ((x \in U_1) \vee \ldots \vee (x \in U_n))),$$

гласящее, что множества $U_1, \ldots, U_n$ образуют покрытие, будет истинным в стандартной интерпретации и ложным в нестандартной, что противоречит принципу переноса. Итак, в одну сторону критерий компактности доказан. Докажем теперь обратное утверждение. Пусть известно, что всякая точка бесконечно близка к некоторой стандартной. Покажем, что из всякого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие. Пусть α — покрытие, из

которого нельзя выбрать конечного подпокрытия. Рассмотрим отношение

$R(U, x) \rightleftharpoons U$ есть множество из покрытия α, а x — точка пространства, не принадлежащая U.

Так как покрытие α не имеет конечного подпокрытия, то это отношение будет направленным. Согласно требованию направленности, можно найти (возможно, нестандартную) точку x, которая находится в этом отношении с любым стандартным открытым множеством из нашего покрытия. Покажем, что она (в противоречии с предположением) не будет бесконечно близка ни к одной стандартной точке. В самом деле, пусть a — произвольная стандартная точка. Она содержится в каком-то из множеств покрытия. Обозначим это множество через U. По определению бесконечной близости все бесконечно близкие к a точки также содержатся в множестве U. Но точка x не содержится в U. Значит, она не может быть бесконечно близкой к a. Полученное противоречие завершает доказательство нестандартного критерия компактности.

Подробное доказательство этого критерия можно найти в книге М. Девиса [3], уже неоднократно упоминавшейся нами, на с. 113 (следствие 1.7). Там же можно найти и доказательство рассмотренного нами нестандартного критерия отделимости на с. 111, теорема 1.2.

С помощью нестандартного критерия компактности можно без особого труда доказать знаменитую теорему Тихонова о компактности произведения произвольного числа компактных пространств. Это доказательство также имеется в книге Девиса — на с. 118 (теорема 2.6). Отметим, что «стандартное» доказательство этой теоремы довольно сложно (в частности, использует аксиому выбора). Нестандартный анализ позволяет «спрятать» применения аксиомы выбора в основные конструкции (а именно в построение нестандартной интерпретации с нужными свойствами). Это — одна из причин того, что нестандартные доказательства часто оказываются проще стандартных доказательств тех же самых теорем.

На этом мы заканчиваем обсуждение применения нестандартных методов в топологии.

§ 12. ЛЕЙБНИЦ И «ДРЕВНЯЯ ИСТОРИЯ» НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

Возраст нестандартного анализа колеблется (в зависимости от точки зрения) от двух с половиной десятков до трех сотен лет. Два с половиной десятка получится, если считать, что нестандартный анализ зародился осенью 1960 г., когда его основатель, Абрахам Робинсон, сделал доклад на одном из семинаров Принстонского университета о возможности применения методов математической логики к обоснованию математического анализа. Триста лет получится, если считать началом нестандартного анализа появление символов бесконечно малых dx и dy в трактате Лейбница «Новый метод» (см. [7], с. 166).

Трудно сказать с уверенностью, насколько в действительности Лейбниц был близок к идеям нестандартного анализа. Как пишет сам Робинсон в [61], гл. 10, «история предмета обычно пишется в свете его позднейшего развития. Уже более чем полвека все обзоры истории дифференциального и интегрального исчислений основывались на уверенности в том, что понятие бесконечно малых и бесконечно больших, если даже и непротиворечиво, бесполезно для развития анализа. В результате в работах этого периода заметно различие между строгостью, с которой рассматриваются идеи Лейбница и его последователей, и снисходительностью, проявляемой к провозвестникам идеи предела». Характерно, например, следующее высказывание Анри Лебега от 3 декабря 1926 г. «Бесконечно малые были когда-то туманными сущностями, встречавшимися в неясных и неточных формулировках. Все разъяснилось впоследствии благодаря понятию предела» ([6], с. 6).

Считая, что идеи Лейбница и идеи сторонников понятия предельного перехода мерились двойным стандартом при несправедливом склонении весов правосудия в пользу предела, Робинсон предлагает во многом пересмотреть общую картину возникновения и развития математического анализа от Ньютона и Лейбница до Коши и Вейерштрасса. Этот пересмотр приводит к более полному признанию заслуг Лейбница, и сам Лейбниц перемещается, таким образом, из разряда гениев третьего класса в разряд гениев второго класса (здесь мы пользуемся классификацией, предложенной Станиславом Лемом [8]: в этой классификации гении третьего класса получают прижиз-

ненное, а гении более высокого второго класса — лишь посмертное признание).

Постараемся изложить историко-математические взгляды Робинсона. Отметим, однако, что здесь есть возможность впасть в другую крайность, приписав Лейбницу и его последователям наши сегодняшние взгляды, сложившиеся под влиянием нестандартного анализа. Чтобы быть в состоянии дать «объективную» оценку ранних этапов развития математического анализа, нужно прочесть работы его основателей глазами их учеников и современников, что, по-видимому, невозможно сделать, не погрузившись в культурную атмосферу того времени. Автор, разумеется, ни в малейшей степени не претендует на это. (Как, впрочем, не претендует на это и Робинсон, который пишет: «Наши замечания по необходимости будут фрагментарными, так как полная история Анализа лежит за пределами книги».) Переходя к изложению взглядов Робинсона (многие из которых нетрадиционны), мы хотим напомнить читателю об опасности их некритического восприятия: «публика, как судия беспристрастный и благоразумный, всегда соглашается с тем, кто последний жалуется ей» (А. С. Пушкин «Опровержения на критики»).

Прежде чем излагать свою точку зрения, Робинсон резюмирует стандартный взгляд на историю развития математического анализа в следующих словах ([61], с. 260):

«После длительного периода, в течение которого были определены площади, объемы и касательные в различных частных случаях, во второй половине семнадцатого столетия Ньютоном и (несколько позже, но независимо) Лейбницем была построена общая теория дифференцирования и интегрирования. Касаясь обоснования введенных им понятий, Ньютон обращался то к бесконечно малым, то к пределам, то непосредственно к физической интуиции; его непосредственные последователи предпочитали последнее. С другой стороны, Лейбниц и его последователи развивали теорию исходя из дифференциалов первого и следующих порядков. Технические удобства обозначений, использовавших дифференциалы, привели к быстрому развитию Анализа и его приложений в Европе, где они были приняты. Однако внутренние противоречия этой концепции привели к осознанию того, что необходимы какие-то другие основания. Лагранж считал, что ему удалось найти подходящий путь, взяв за основу тейло-

ровское разложение функции. Но первое строгое обоснование математического анализа было дано лишь Коши. Основой теории Коши было понятие предела, которое, будучи впервые выдвинуто Ньютоном, впоследствии поддерживалось Даламбером. Более формальное изложение методов Коши было дано Вейерштрассом (которого в некоторой степени предвосхитил Больцано). После создания теории пределов использование бесконечно больших и бесконечно малых превратилось в оборот речи, применяемый в выражениях типа «... стремится к бесконечности». Дальнейшее развитие теории неархимедовых полей было целиком предоставлено алгебре.»

Этот стандартный взгляд, по мнению Робинсона, в некоторых отношениях «должен быть дополнен или даже изменен». В доказательство этого Робинсон приводит большое количество выдержек из сочинений Лейбница и других упомянутых выше авторов. Как считает Робинсон, «... отношение Лейбница к бесконечно большим и бесконечно малым величинам в Анализе в основном оставалось неизменным в течение двух последних десятилетий его жизни. Он полностью одобрял их введение, но считал их «идеальными элементами, подобными мнимым числам. Эти идеальные элементы подчиняются тем же законам, что и обычные числа. Тем не менее они представляют собой не более чем удобные фикции, необходимые для облегчения рассуждений и открытий. Всегда, при желании, можно исключить их использование и вернуться к стилю античных математиков, рассуждая в терминах величин, достаточно больших (или малых) для того, чтобы ошибка была меньше любой наперед заданной. Все это отчетливо и неоднократно утверждается в сочинениях Лейбница» ([61], с. 261).

Приведем теперь некоторые из высказываний Лейбница, цитируемых Робинсоном. (Мы использовали переводы А. П. Юшкевича [7]; если не оговорено противное, страницы указаны по [7].)

«... Нужно воспринимать бесконечное подобно тому, как это делается в оптике, когда солнечные лучи считаются приходящими из бесконечно удаленной точки и поэтому параллельными... И когда имеются различные порядки бесконечного или бесконечно малых, то понимаются они в том же смысле, в каком земной шар считается точкой по сравнению с расстоянием до неподвижных звезд, а шарик в наших руках — точкой по сравнению с радиусом земного шара, так что расстояние до