

Рис. 38. Аттрактор с разбеганием фазовых кривых на нем

даже вместо цикла приближаться к множеству, на котором все близкие траектории быстро расходятся друг от друга (рис. 38). Такие притягивающие множества получили в последнее время название *странных аттракторов*: они связаны с явлениями типа турбулентности и ответственны, например, за невозможность долгосрочного прогноза погоды.

§ 3. Линейные уравнения

Линейные уравнения описывают влияние малых изменений начальных условий или правых частей произвольных уравнений на их решения. Здесь явно решаются и исследуются линейные однородные и неоднородные уравнения с одним зависимым переменным: появляются оператор монодромии, δ -функция, функция Грина и вынужденные колебания.

1. Линейные однородные уравнения.

Определение. *Линейным однородным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y, \quad (1)$$

правая часть которого — линейная (однородная) функция одномерного зависимого переменного, y .

Это частный случай уравнения с разделяющимися переменными. Решая его по общему правилу, находим $\frac{dy}{y} = f(x) dx$, $\ln\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$.

Из этого вытекает

Теорема. Всякое решение уравнения (1) продолжается на весь интервал определения функции f ; решение с начальным условием (x_0, y_0)

$$\text{дается формулой } y = y_0 e^{\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi}.$$

Замечание 1. Пусть $y = \varphi(x)$ — решение уравнения (1). Тогда для любой константы c функция $y = c\varphi(x)$ — тоже решение. Сумма двух (определенных на всем интервале определения f) решений уравнения (1) тоже является решением. Поэтому все такие решения линейного однородного уравнения (1) образуют *линейное пространство*. Размерность этого линейного пространства равна 1 (почему?).

Замечание 2. Растворения расширенного фазового пространства (x, y) вдоль оси y переводят поле направлений линейного однородного уравнения (1) в себя. Поэтому *интегральные кривые под действием растворений оси y переходят друг в друга*; все они могут быть получены из одной из них такими растворениями (рис. 39).

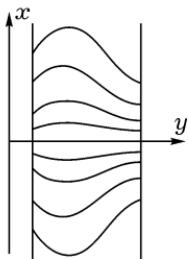


Рис. 39. Интегральные кривые линейного уравнения

Линейные уравнения занимают в теории дифференциальных уравнений особое место, потому что, согласно одной из основных идей анализа, всякая гладкая функция в окрестности каждой точки хорошо аппроксимируется линейной функцией.

Возникающая таким образом операция *линеаризации* и приводит к линейным уравнениям в качестве первого приближения при исследовании произвольного уравнения вблизи какого-либо решения.

Рассмотрим, например, автономную систему с двумерной фазовой плоскостью (x, y) , имеющую предельный цикл (рис. 40). Введем в окрестности цикла координаты $(X \bmod T, Y)$ так, чтобы уравнение цикла приняло вид $Y = 0$, а обход цикла в направлении фазовой скорости соответствовал бы увеличению X на T . Тогда фазовые кривые исходной системы при отображении $(x, y) \mapsto (X, Y)$ перейдут в интегральные кривые уравнения

$$dY/dX = a(X, Y), \quad (2)$$

где $a(X, 0) \equiv 0$, $a(X + T, Y) \equiv a(X, Y)$.

Линеаризация этого уравнения по Y в точке $Y = 0$ приводит к линейному уравнению

$$dY/dX = f(X)Y, \quad \text{где } f(X) = \partial a/\partial Y \Big|_{Y=0}.$$

Заметим, что функция f имеет период T .

Мы приходим таким образом к задаче об исследовании линейного уравнения с периодическим коэффициентом f .

2. Линейные однородные уравнения первого порядка с периодическими коэффициентами.

Определение. *Линейными однородными уравнениями первого порядка с T -периодическими коэффициентами называются уравнения*

$$dY/dX = f(X)Y, \quad \text{где } f(X + T) \equiv f(X). \quad (3)$$

Решения уравнения (3) определяют линейное отображение оси Y в себя, сопоставляющее значению $\varphi(0)$ при $X = 0$ значение $\varphi(T)$ того же решения при $X = T > 0$. Это отображение $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется *монодромией* (рис. 41). (Мы собираемся использовать аналогичный оператор и в многомерном случае.)

Теорема. *Оператор монодромии $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ линейного уравнения (3) линейный и является оператором умножения на положительное число λ . Если это число λ (называемое *мультипликатором*) больше 1, то все ненулевые решения стремятся к бесконечности при $X \rightarrow +\infty$, а если меньше 1, то к нулю; если $\lambda = 1$, то все решения ограничены.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Линейность A вытекает из того, что растяжения по оси Y переводят интегральные кривые в интегральные кривые; $\lambda > 0$, т. е. ось X — интегральная кривая. Сдвиги на T вдоль оси X также переводят интегральные кривые в интегральные кривые (ввиду периодичности f). Из этого следует, что значения решения с начальным условием $\varphi(0) = Y$ при $X = T, 2T, 3T, \dots$ равны $\lambda Y, \lambda^2 Y, \lambda^3 Y, \dots$; поэтому $\varphi(NT) \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow +\infty$, если $\lambda > 1$, и $\varphi(NT) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$, если $\lambda < 1$.

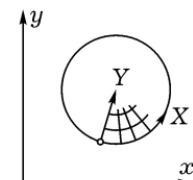


Рис. 40. Система координат вблизи цикла

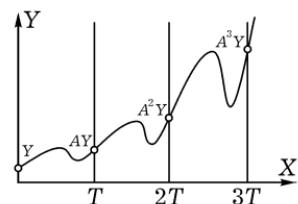


Рис. 41. Оператор монодромии

Кроме того, сдвигая расширенное фазовое пространство на NT вдоль оси X , находим

$$\varphi(NT + S) = \lambda^n \varphi(S),$$

откуда следуют все доказываемые утверждения (почему?).

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы п. 1 следует формула для мультипликатора

$$\ln \lambda = \int_0^T f(\xi) d\xi.$$

Таким образом, *мультипликатор больше единицы или меньше единицы, в зависимости от того, положительно или отрицательно среднее значение функции f .*

В первом случае нулевое решение линейного уравнения (3) неустойчиво, а во втором — устойчиво (более того, решения с близкими к 0 начальными условиями стремятся к 0); в случае $\lambda = 1$ решения с ненулевыми начальными условиями периодичны (рис. 42).

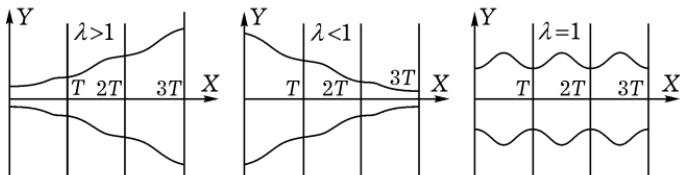


Рис. 42. Устойчивость нулевого решения

Возникает естественный вопрос, какое отношение наша теорема о решениях линеаризованного уравнения (3) имеет к исходной задаче о поведении решений нелинейного уравнения (2), т. е. к задаче о фазовых кривых, близких к циклу?

ЗАДАЧА 1. Доказать, что если $\lambda > 1$, то цикл неустойчив и фазовые кривые, начавшиеся вблизи цикла, являются разматывающимися спиральями, удаляющимися от него; если $\lambda < 1$, то цикл устойчив и фазовые кривые, начавшиеся в его окрестности, являются наматывающимися на цикл спиральами.

Иными словами, в случаях, когда мультипликатор отличен от 1, линеаризация приводит к правильному суждению об устойчивости цикла. С другой стороны, если $\lambda = 1$, то, хотя решения уравнения (3) и периодичны, было бы

неверно распространять этот вывод с линеаризованного уравнения (3) на исходное уравнение (2), для которого близкие к $Y = 0$ решения, вообще говоря, не периодичны, и об устойчивости цикла нельзя судить по линеаризованному уравнению.

Указание. Рассмотреть функцию последования Φ , заданную решениями φ уравнения (2) и сопоставляющую начальному условию $Y = \varphi(0)$ при $X = 0$ значение $\Phi(Y) = \varphi(T)$. Доказать, что линеаризация Φ в точке $Y = 0$ есть оператор монодромии.

Задача 2. Исследовать устойчивость предельного цикла $r = 1$ для системы, заданной в полярных координатах уравнениями

$$\dot{r} = (r^2 - 1)(2x - 1), \quad \dot{\varphi} = 1 \quad (\text{где } x = r \cos \varphi).$$

3. Линейные неоднородные уравнения.

Определение. *Линейным неоднородным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$dy/dx = f(x)y + g(x). \quad (4)$$

Под решением понимается решение, определенное на всем интервале определения функций f и g .

Теорема. *Если известно одно частное решение линейного неоднородного уравнения, $y = \varphi_1(x)$, то все остальные решения имеют вид $y = \varphi_1(x) + \varphi_0(x)$, где φ_0 — решение однородного уравнения (1); всякая функция указанного вида удовлетворяет неоднородному уравнению (4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $A: L_1 \rightarrow L_2$ — линейный оператор (рис. 43). Решения φ_0 однородного уравнения $A\varphi_0 = 0$ образуют линейное пространство $\text{Ker } A \subset L_1$. Образ $\text{Im } A = AL_1$ образует линейное подпространство в L_2 . Если $g \in \text{Im } A$, то решения неоднородного уравнения $A\varphi = g$ образуют в L_1 аффинное подпространство $\varphi_1 + \text{Ker } A$, параллельное $\text{Ker } A$. В нашем случае $A\varphi = d\varphi/dx - f\varphi$. Это линейный оператор¹, поэтому утверждение нашей теоремы вытекает из алгебраической теоремы о решении линейного неоднородного уравнения.

¹Пространства L_1 и L_2 можно выбирать по-разному. Например, можно считать, что L_1 — один раз непрерывно дифференцируемые, а L_2 — непрерывные функции.

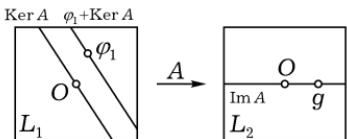


Рис. 43. Пространство решений линейного неоднородного уравнения

дим к независимому движению планет вокруг Солнца. Это — решение невозмущенных уравнений движения.

Учет возмущающего влияния планет друг на друга можно провести так: считать, что планеты совершают кеплерово движение, но параметры кеплеровых эллипсов слегка меняются со временем¹. Таким образом, величины, бывшие постоянными в невозмущенном движении, рассматриваются теперь как функции времени.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменения (вариации) этих постоянных, часто бывает проще решать или исследовать, чем исходные уравнения. В частности, в применении к линейным неоднородным уравнениям, где роль невозмущенной задачи играет однородное уравнение, а роль возмущения — неоднородность, метод вариации постоянных приводит к явной формуле для решения. В этом случае никакой малости возмущения не требуется.

Мы уже знаем, что всякое решение однородного уравнения (1) имеет вид $y = c\varphi(x)$, где c — произвольная постоянная, а φ — какое-либо ненулевое решение. Постараемся подобрать функцию $c = c(x)$ так, чтобы $y = c(x)\varphi(x)$ было решением неоднородного уравнения (4).

Теорема. *Решение линейного неоднородного уравнения (4) с начальным условием $y(x_0) = 0$ существует, единственно и дается формулой*

$$y = \int_{x_0}^x \exp \left(\int_{\xi}^x f(\zeta) d\zeta \right) g(\xi) d\xi. \quad (5)$$

¹Например, колебания эксцентриситета орбиты Земли — одна из причин наступления ледников.

Для нахождения частного решения можно воспользоваться методом «вариации постоянных».

Метод вариации постоянных часто употребляется при изучении влияния всех возможных возмущений. Рассмотрим, например, движение планет вокруг Солнца. В первом приближении, не учитывая притяжения планет друг другом, мы приходим к независимому движению планет по кеплеровым эллипсам. Это — решение невозмущенных уравнений движения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Подстановка $y = c(x)\varphi(x)$ в (4) дает

$$c'\varphi + c\varphi' = fc\varphi + g.$$

Но φ — решение однородного уравнения (1). Значит, $\varphi' = f\varphi$ и

$$c' = \frac{g}{\varphi}, \quad c(x) = \int_{x_0}^x \frac{g(\xi)}{\varphi(\xi)} d\xi.$$

Подставляя вместо φ известное решение однородного уравнения, получаем (после внесения $\varphi(x)$ под интеграл) формулу (5), что и требовалось доказать.

4. Функция влияния и δ -образные неоднородности. Формула (5) имеет простой «физический смысл», который выясняется следующим образом. Очевиден

Принцип суперпозиции. Если φ_1 и φ_2 — решения линейных неоднородных уравнений $A\varphi_1 = g_1$ и $A\varphi_2 = g_2$, то $\varphi_1 + \varphi_2$ — решение уравнения $A\varphi = g_1 + g_2$.

Этот принцип позволяет при расчете влияния всевозможных возмущений разделять разные возмущения, вычислять их влияние по одному и складывать эффекты возмущения (например, если бросить в воду два камня, то можно независимо рассчитать волны от каждого из них и сложить возмущения; при полете снаряда можно независимо вносить поправки на ветер и на отклонение плотности воздуха от табличной, и т. д.).

В применении к нашему неоднородному уравнению (4) роль возмущения играет функция g . Постараемся представить функцию g в виде линейной комбинации «элементарных возмущений»; тогда решение будет такой же линейной комбинацией решений уравнений с элементарными возмущениями в качестве неоднородности g .

Определение. δ -образной последовательностью называется последовательность h_N неотрицательных гладких функций, равных 0 вне стремящихся к 0 при $N \rightarrow \infty$ окрестностей и обладающих каждой интегралом, равным единице.

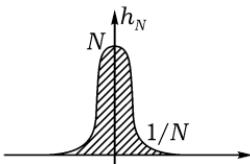


Рис. 44. δ -образная последовательность

Пример такой последовательности легко построить (рис. 44). Физики говорят, что «предел последовательности h_N есть δ -функция Дирака, равная нулю всюду, кроме точки 0, и имеющая интеграл 1».

Конечно, функции δ с такими свойствами не существует.

Тем не менее многие величины, в определение которых входят функции h_N , при $N \rightarrow \infty$ стремятся к определенным пределам, которые и называются соответствующими величинами, вычисленными для δ -функции. Например, для любой непрерывной функции g

$$\left| \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_N(x) g(x) dx \right| = g(0)$$

(докажите!). Поэтому по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) g(x) dx = g(0).$$

Точно так же, сдвигая все h_N на ξ по оси x , находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \xi) g(x) dx = g(\xi),$$

т. е. $\delta(\cdot - \xi)$ есть « δ -функция, сосредоточенная в точке ξ ».

Последнюю формулу можно также воспринимать как представление любой гладкой функции g в виде «континуальной линейной комбинации» δ -функций, сосредоточенных в разных точках x , с коэффициентами, равными значениям g в этих точках.

Таким образом, произвольную неоднородность g в уравнении (4) можно разложить в континуальную линейную комбинацию «сосредоточенных в точке» неоднородностей вида сдвинутых δ -функций. Согласно принципу суперпозиции, для нахождения частного решения уравнения (4) с произвольной неоднородностью достаточно знать это решение для δ -образной неоднородности.

Определение. Решение уравнения

$$dy/dx = f(x)y + \delta(x - \xi), \quad \xi > 0,$$

с начальным условием $y(0) = 0$ называется *функцией влияния возмущения в момент ξ на решение в момент x* (или *функцией Грина*)¹ и обозначается так: $y = G_\xi(x)$.

Теорема. *Функция Грина дается формулой*

$$G_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \xi, \\ \exp\left(\int_{\xi}^x f(\zeta) d\zeta\right) & \text{при } x > \xi. \end{cases} \quad (6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Как объяснено выше, речь идет о пределе последовательности решений уравнений

$$dy/dx = f(x)y + h_N(x - \xi), \quad (7)$$

где $\{h_N\}$ есть δ -образная последовательность, при $N \rightarrow \infty$.

ЭВРИСТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При $x < \xi$ решение равно нулю, так как неоднородность исчезает. При $x > \xi$ решение совпадает с некоторым решением однородного уравнения, так как неоднородность исчезает. При x , близких к ξ , второе слагаемое в правой части уравнения (7) велико по сравнению с первым, поэтому интеграл от dy/dx по малой окрестности точки ξ почти равен числу

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h_N(x - \xi) dx = 1.$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, видим, что скачок решения $y(x)$ при переходе x через точку ξ равен 1, т. е. при $x > \xi$ функция G_ξ переменной x есть решение однородного уравнения с начальным условием $y(\xi) = 1$, что и требовалось доказать.

¹Эта функция называется также *запаздывающей функцией Грина*, во избежание смешания с функциями Грина краевых задач для уравнений выше первого порядка, которых мы тут не касаемся.

Это рассуждение можно сделать вполне строгим, но проще провести следующее

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Подставляя вместо g сдвинутую на ξ функцию h_N в формулу (5) для решения уравнения (4) и переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем требуемое:

$$G_\xi(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x \exp\left(\int_\nu^x f(\zeta) d\zeta\right) h_N(\nu - \xi) d\nu = \exp\left(\int_\xi^x f(\zeta) d\zeta\right),$$

если $x_0 < \xi < x$.

Следствие. Решение неоднородного уравнения (4) с неоднородностью g и с нулевым начальным условием выражается через функцию влияния по формуле

$$y(x) = \int_0^x G_\xi(x) g(\xi) d\xi \quad \text{при } x > 0.$$

Конечно, эта формула эквивалентна формуле (5) (ввиду (6)).

Задача 1. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = y + h_N$, где $h_N(x) = N$ при $|x - 1| < 1/2N$, 0 при $|x - 1| \geqslant 1/2N$, с начальным условием $y(0) = 0$, и найти предел решения при $N \rightarrow \infty$.

5. Линейные неоднородные уравнения с периодическими коэффициентами.

Теорема. Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x)y + g(x)$$

с периодической (периода $T > 0$ по x) правой частью среднее по периоду значение f отлично от нуля, то уравнение имеет T -периодическое решение, и притом ровно одно (устойчивое, если среднее значение отрицательно, и неустойчивое, если оно положительно, рис. 45).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим отображение за период, сопоставляющее начальному условию $\varphi(0)$ решения φ значение $\varphi(T)$ того же решения в момент T . Это отображение — линейное неоднородное (почему?); оно имеет вид $\varphi(T) = \lambda\varphi(0) + C$, где λ — мультипликатор однородного уравнения. Логарифм λ равен интегралу f по периоду. Следовательно, $\lambda \neq 1$, если среднее значение f не 0, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Таким образом, при $\lambda < 1$ в системе после некоторого «переходного процесса» устанавливается, независимо от начального условия, вполне определенный колебательный режим. Возникающие здесь колебания называются *вынужденными*, они вызваны периодическим внешним воздействием на систему, т. е. функцией g .

Задача 1. Найти периодическое решение уравнения

$$dy/dx = -y + \sin x$$

и исследовать его устойчивость.

Замечание. Линейные неоднородные уравнения естественно возникают в тех случаях, когда мы исследуем влияние малых возмущений начального условия и одновременно малых возмущений *правой части* дифференциального уравнения на решение (пренебрегая величинами выше первого порядка малости относительно возмущений). Неоднородность g в уравнении (4) отвечает именно за возмущение *уравнения*.

Например, при малом возмущении векторного поля в окрестности предельного цикла с отличным от 1 мультипликатором цикл не исчезает, но лишь немного деформируется; периодическое решение соответствующего линейного неоднородного уравнения дает первое приближение к этой деформации цикла.

Задача 2. Пусть гладкая функция $\varphi(t, \varepsilon)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(t, x; \varepsilon)$, зависящего от параметра ε , обращающееся в решение $\varphi_0(t)$ уравнения $\dot{x} = v(t, x; 0)$ при $\varepsilon = 0$. Докажите, что производная решения по па-

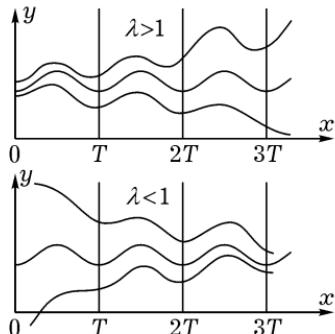


Рис. 45. Установление вынужденного колебания

раметру, $\psi(t) = \partial\varphi/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, удовлетворяет линейному неоднородному уравнению $\dot{\psi} = f(t)\psi + g(t)$, где f и g — значения $\partial v/\partial x$ и $\partial v/\partial\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$, $x = \varphi_0(t)$. Это уравнение называется (неоднородным) *уравнением в вариациях*, так как ψ описывает малую вариацию решения под действием малого изменения уравнения, отвечающего $\varepsilon = 0$.

§ 4. Фазовые потоки

Математическая формализация понятия детерминированного процесса приводит к понятию однопараметрической группы преобразований.

Здесь определяются и исследуются однопараметрические группы диффеоморфизмов и их связи с векторными полями. Нам потребуется некоторая алгебраическая терминология. Все теоремы этого параграфа в сущности очевидны.

1. Действие группы на множестве. *Преобразованием* множества называется его взаимно однозначное отображение на себя.

Задача 1. Какие из трех следующих отображений — преобразования:

- 1) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$;
- 2) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$;
- 3) $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto z^3$.

Ответ. Только второе.

Произведением fg преобразований f и g одного множества называется преобразование, получающееся последовательным применением сначала g , потом f , т. е. $(fg)(x) = f(g(x))$.

Задача 2. Приведите пример, когда fg не совпадает с gf .

Обратное к f преобразование f^{-1} определяется условием: если f переводит x в y , то f^{-1} переводит y в x .

Набор преобразований множества называется *группой преобразований*, если вместе с каждым преобразованием в него входит обратное преобразование и с каждыми двумя преобразованиями — их произведение.

Задача 3. Является ли группой преобразований равностороннего треугольника набор из трех отражений в его высотах?

Задача 4. Сколько элементов в группе изометрий¹ равностороннего треугольника, в группе вращений тетраэдра?

¹Изометрия — это преобразование, сохраняющее расстояния (так что расстояние между образами любых двух точек равно расстоянию между точками).

ОТВЕТ. 6, 12.

Понятие группы преобразований — одно из самых фундаментальных для всей математики и одновременно одно из самых простых: человеческому мозгу свойственно мышление в терминах инвариантов групп преобразований (это связано как с устройством зрения, так и с нашей способностью к абстракции).

Пусть A — группа преобразований множества X . Умножение и обращение определяют отображения $A \times A \rightarrow A$ и $A \rightarrow A$ (пара (f, g) переходит в fg , элемент g в g^{-1}). Множество A , снабженное этими двумя отображениями, называется *абстрактной группой* (или, короче, просто группой). Таким образом, *группа получается из группы преобразований просто забыванием* преобразуемого множества.

ЗАДАЧА 5. Докажите, что множество \mathbb{R} всех вещественных чисел становится группой, если снабдить его операциями обычного сложения чисел и изменения знака.

Алгебраисты обычно определяют группу как множество с двумя операциями, удовлетворяющими набору аксиом вроде $f(gh) = (fg)h$. Эти аксиомы автоматически выполняются для групп преобразований. В действительности эти аксиомы означают просто, что группа образована из некоторой группы преобразований забыванием преобразуемого множества. Такие аксиомы, наряду с другими немотивированными определениями, служат математикам главным образом для того, чтобы затруднить непосвященным овладение своей наукой и тем повысить ее авторитет.

Пусть G — группа, M — множество. Говорят, что задано *действие группы G на множестве M* , если каждому элементу g группы G сопоставлено преобразование $T_g: M \rightarrow M$ множества M , причем произведению любых двух элементов группы сопоставлено произведение соответствующих этим элементам преобразований, а взаимно обратным элементам сопоставлены взаимно обратные преобразования: $T_{fg} = T_f T_g$, $T_{g^{-1}} = (T_g)^{-1}$.

Каждая группа преобразований множества, естественно, действует на этом множестве ($T_g \equiv g$), но может действовать и на других множествах. Например, рассмотрим равносторонний треугольник. Группа из шести его изометрий действует на множестве из двух его ориентаций: вращения не переставляют, а отражения переставляют ориентации.

ЗАДАЧА 6. Какие перестановки трех осей координат осуществляются при действии на их множество группы изометрий куба $\max(|x|, |y|, |z|) \leq 1$?

ОТВЕТ. Все 6.

Задача 7. Как действует группа линейных замен координат на множестве матриц линейных операторов из пространства в себя?

Ответ. $T_g m = gm g^{-1}$.

Преобразование T_g называется также *действием элемента* g группы G на M . Действие группы G на M определяет еще отображение $T: G \times M \rightarrow M$, сопоставляющее паре $g \in G$, $m \in M$ точку $T_g m$.

Если действие T фиксировано, то результат $T_g m$ действия элемента g группы G на точку m множества M короче обозначают просто через gm . Таким образом, $(fg)m = f(gm)$, поэтому скобок обычно не пишут вовсе.

Зафиксируем точку m множества M и будем действовать на нее всеми элементами группы G . Мы получим подмножество $\{gm, g \in G\}$ множества M . Это подмножество называется *орбитой точки* m (при данном действии группы) и обозначается Gm .

Задача 8. Найти орбиты группы вращений плоскости вокруг нуля.

Задача 9. Докажите, что любые две орбиты одного действия либо не пересекаются, либо совпадают.

Задача 10. Сколько орбит имеет действие группы изометрий тетраэдра на множестве неупорядоченных пар его ребер?

Задача 11. Сколько раскрасок шести граней куба шестью красками $1, \dots, 6$ существенно различны (не переводятся друг в друга вращениями куба)?

Ответ. $6!/24=30$.

Отображение $\varphi: G \rightarrow H$ группы G в группу H называется *гомоморфизмом*, если оно переводит произведение в произведение и взаимно обратные элементы во взаимно обратные:

$$\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g), \quad \varphi(g^{-1}) = (\varphi(g))^{-1}.$$

Действие группы G на множестве M — это гомоморфизм группы G в группу всех преобразований множества M .

2. Однопараметрические группы преобразований. Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если произведение не зависит от порядка сомножителей: $fg = gf$ для любых двух элементов группы.

ПРИМЕР 1. Группа всех изометрий равностороннего треугольника неабелева.

ПРИМЕР 2. Группа всех сдвигов вещественной оси абелева.

Операция в абелевой группе обычно обозначается знаком +.

Например, последовательное выполнение сдвигов на a и на b в любом порядке есть сдвиг на $a+b$. Поэтому множество всех вещественных чисел с операцией сложения является абелевой группой; естественное действие этой группы на прямой сопоставляет числу a сдвиг на a .

Определение. Однопараметрической группой преобразований множества называется действие на нем группы всех вещественных чисел.

ЗАМЕЧАНИЕ. Действия группы всех целых чисел \mathbb{Z} иногда называют «однопараметрическими группами с дискретным временем». Для такого действия $T_n = (T_1)^n$, поэтому вся группа состоит из степеней одного преобразования.

Однопараметрическая группа преобразований множества M обычно обозначается знаком $\{g^t\}$. Здесь $g^t : M \rightarrow M$ — преобразование, соответствующее точке t из \mathbb{R} .

Таким образом, однопараметрическая группа преобразований множества M — это набор преобразований g^t , запараметризованных вещественным параметром t , такой, что для любых вещественных чисел s и t

$$1) g^{s+t} = g^s g^t, \quad 2) g^{-t} = (g^t)^{-1}.$$

Параметр t обычно называется *временем*, преобразование g^t называется *преобразованием за время* t .

ПРИМЕР 1. $M = \mathbb{R}$, g^t — сдвиг на $2t$ (т. е. $g^t x = x + 2t$). Свойства 1) и 2) очевидны.

ПРИМЕР 2. $M = \mathbb{R}$, g^t — растяжение в e^t раз (т. е. $g^t x = e^t x$). Свойства 1) и 2) очевидны. Обозначение g^t — в память об этом примере.

ПРИМЕР 3. $M = \mathbb{R}$, $g^t x = x + \sin t$. Свойство 2) выполнено, а 1) — нет; $\{g^t\}$ — не однопараметрическая группа.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из свойства 1) очевидно следует, что g^0 — тождественное преобразование, оставляющее каждую точку на месте. Поэтому

свойство 2) вытекает из 1). Свойство 1) называется *групповым свойством*.

Однопараметрическая группа преобразований множества — это математический эквивалент физического понятия «двусторонне детерминированный процесс». Пусть M — фазовое пространство процесса. Точка этого пространства — это определенное состояние процесса. Предположим, что в момент $t = 0$ процесс был в состоянии x . Тогда в другой момент t состояние процесса будет иным. Обозначим это новое состояние процесса через $g^t x$. Мы определили для каждого t отображение $g^t : M \rightarrow M$ фазового пространства процесса в себя. Отображение g^t переводит состояние в момент 0 в состояние в момент t . Оно называется *преобразованием за время t* .

Отображение g^t действительно является преобразованием (взаимно однозначным отображением *на*). Это следует из того, что, по определению детерминированности, каждое состояние однозначно определяет как будущее, так и прошлое процесса. Групповое свойство также выполнено. Действительно, пусть процесс в начальный момент находился в состоянии x . Переход к состоянию в момент $t + s$ можно осуществить либо сразу ($x \mapsto g^{t+s}x$), либо сначала рассмотреть промежуточное состояние $g^t x$, в которое процесс придет за время t , а потом посмотреть, куда это промежуточное состояние сдвинется за время s . Совпадение результатов ($g^{t+s}x = g^s g^t x$) означает, что переход из начального состояния в конечное за фиксированное время происходит всегда одинаково, независимо от того, в какой момент времени мы выходим из начального состояния.

Однопараметрическая группа преобразований множества M называется также *фазовым потоком* с фазовым пространством M (можно представлять себе фазовое пространство заполненным жидкостью, частица x через время t переходит в точку $g^t x$).

Орбиты фазового потока называются его *фазовыми кривыми* (или *траекториями*).

ПРИМЕР. Пусть g^t — поворот плоскости на угол t вокруг 0. Очевидно, групповое свойство выполнено. Орбиты фазового потока $\{g^t\}$ — точка 0 и окружности с центром 0.

Точки, являющиеся фазовыми кривыми, называются *неподвижными точками* потока.

3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов. Предположим теперь, что рассматриваемое множество M наделено структурой гладкого многообразия. Примерами гладких многообразий являются: 1) любая область в евклидовом пространстве; 2) сфера; 3) тор. Общее определение дано в гл. 5. Пока можно считать, что речь идет об области евклидова пространства.

Диффеоморфизмом называется отображение, гладкое вместе со своим обратным. (Отображение называется гладким, если координаты точки-образа — гладкие функции координат точки прообраза, и обратно).

ЗАДАЧА 1. Какие из функций x , $-x$, x^2 , x^3 , $\arctg x$ задают диффеоморфизм прямой на себя?

ОТВЕТ. Только первые две.

Определение. Однопараметрической группой диффеоморфизмов называется однопараметрическая группа преобразований, являющихся диффеоморфизмами, удовлетворяющая еще следующему условию: $g^t x$ гладко зависит от обоих аргументов, t и x .

ПРИМЕР 1. $M = \mathbb{R}$, g^t — умножение на e^{kt} .

ПРИМЕР 2. $M = \mathbb{R}^2$, g^t — поворот вокруг 0 на угол t .

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие гладкой зависимости от времени t необходимо для того, чтобы избавиться от патологических примеров, вроде следующего: пусть $\{\alpha\}$ — базис группы \mathbb{R} , т. е. такой набор вещественных чисел, что каждое вещественное число однозначно представимо в виде конечной линейной комбинации чисел набора с целыми коэффициентами. Сопоставим каждому числу α из базиса сдвиг прямой на какое-либо расстояние, совершенно не заботясь о других элементах базиса. Полагая $g^{\alpha_1 + \dots + \alpha_k} = g^{\alpha_1} \dots g^{\alpha_k}$, мы получим однопараметрическую группу преобразований, каждое из которых — сдвиг прямой и, следовательно, диффеоморфизм, однако g^t в общем случае зависит от t не гладко и даже разрывно.

Вместо гладкости по t можно было бы требовать одной лишь непрерывности (из чего гладкость уже вытекает), но нам это не нужно.

Определение. Однопараметрической группой линейных преобразований называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов, являющихся линейными преобразованиями.

ПРИМЕР. Рассмотрим на плоскости с координатами (x, y) преобразование $g^t(x, y) = (e^{\alpha t} x, e^{\beta t} y)$.

Ясно, что g^t — линейное преобразование (за время t ось x растягивается в $e^{\alpha t}$ раз, а ось y — в $e^{\beta t}$ раз).

Групповое свойство, $g^{t+s} = g^t g^s$, вытекает из свойства экспоненты ($e^{u+v} = e^u e^v$), гладкая зависимость от t также очевидна. Итак, $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости.

Пусть, в частности, $\alpha = 1, \beta = 2$ (рис. 46). В этом случае фазовые кривые — неподвижная точка нуль, половины координатных осей и половины парабол; действие одного из преобразований фазового потока на область E изображено на рис. 46. Площади областей увеличиваются при действии g^t в e^{3t} раз.

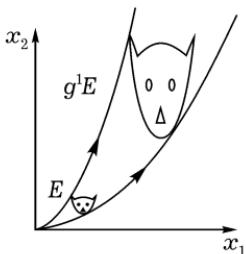


Рис. 46. Действие фазового потока на область

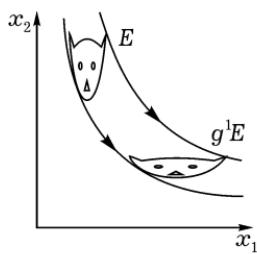


Рис. 47. Гиперболический поворот

Рассмотрим еще случай $\alpha = 1, \beta = -1$ (рис. 47). В этом случае преобразование g^t состоит из сжатия в e^t раз в направлении оси y и растяжения в e^t раз в направлении оси x . Такое преобразование называется **гиперболическим поворотом**, так как фазовые кривые потока $\{g^t\}$ — половины гипербол $xy = \text{const}$ (конечно, положение равновесия 0 и половины осей координат — также фазовые кривые). Гиперболические повороты сохраняют площади, хотя и сильно искажают форму фигур (рис. 47).

Заметим, что наша однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости распадается в «прямое произведение» двух однопараметрических групп линейных преобразований прямых (а именно, растяжений осей).

Задача 2. Всякая ли однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости распадается подобным образом?

Указание. Рассмотрите повороты или сдвиги $(x, y) \mapsto (x + ty, y)$.

4. Векторное поле фазовой скорости. Рассмотрим однопараметрическую группу $\{g^t\}$ диффеоморфизмов области M .

Определение. Вектором фазовой скорости потока $\{g^t\}$ в точке x из M называется скорость выхода точки $g^t x$ из x , т. е.

$$v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x).$$

Векторы фазовой скорости потока во всех точках области M образуют гладкое векторное поле (так как $g^t x$ гладко зависит от t и x). Оно называется *полем фазовой скорости*.

Задача 1. Найти поля фазовых скоростей потоков на прямой $g^t x = x + t$, $e^t x$, $e^{-t} x$.

Ответ. $v(x) = 1, x, -x$.

Задача 2. Неподвижные точки потока являются особыми точками поля фазовой скорости, т. е. вектор фазовой скорости обращается в них в нуль. Верно ли обратное?

Ответ. Да, ср. п. 3 § 2.

Зафиксируем точку x_0 и рассмотрим ее движение под действием фазового потока g^t . Иными словами, рассмотрим отображение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, определенное так: $\varphi(t) = g^t x_0$.

Теорема. Отображение φ является решением уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$.

Иными словами: под действием фазового потока фазовая точка движется так, что вектор ее скорости в каждый момент времени равен вектору фазовой скорости в той точке фазового пространства, где движущаяся точка находится.

Доказательство.

Это вытекает из группового свойства:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} g^t x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} g^{\tau+\varepsilon} x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} g^\varepsilon(g^\tau x) = v(g^\tau x).$$

Таким образом, с каждой однопараметрической группой диффеоморфизмов связано дифференциальное уравнение (заданное векторным полем фазовой скорости); решениями этого уравнения являются движения фазовых точек под действием фазового потока.

ЗАДАЧА 3. Верно ли обратное, т. е. всякое ли решение дается формулой $\varphi(t) = g^t x_0$?

ОТВЕТ. Да, по теореме единственности (§ 2, п. 3).

Если фазовый поток описывает ход какого-либо процесса при произвольных начальных условиях, то дифференциальное уравнение, заданное его векторным полем фазовой скорости, определяет *локальный закон эволюции процесса*; теория дифференциальных уравнений должна, зная этот закон эволюции, восстановить прошлое и предсказать будущее.

Формулировка какого-либо закона природы в виде дифференциального уравнения сводит любую задачу об эволюции процесса (физического, химического, экологического и т. д.) к *геометрической* задаче о поведении фазовых кривых данного векторного поля в соответствующем фазовом пространстве.

Определение. *Фазовым потоком дифференциального уравнения $\dot{x} = v(x)$* называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов, для которой v является векторным полем фазовой скорости.

Чтобы найти фазовый поток уравнения, достаточно решить последнее: $g^t x_0$ есть значение в момент t решения φ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$.

ПРИМЕРЫ. Фазовый поток уравнения $\dot{x} = kx$ есть группа $\{e^{kt}\}$. Фазовый поток уравнения малых колебаний маятника ($\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$) состоит из поворотов плоскости на угол t . Фазовый поток уравнения малых колебаний перевернутого маятника ($\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$) состоит из гиперболических поворотов.

ЗАДАЧА 4. Найти фазовые потоки дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 0; \quad 1; \quad x - 1; \quad \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

ОТВЕТ. $g^t x = x$; $x + t$; $(x - 1)e^t + 1$; $2 \operatorname{arcctg}(e^{-t} \operatorname{ctg} x/2)$.

ЗАДАЧА 5. Найти фазовые потоки систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

ОТВЕТ. $(x + ty, y)$, $(x + ty + t^2/2, y + t)$, $(x + t \sin y, y)$.

Возникает вопрос, *всякое ли гладкое векторное поле является полем фазовой скорости потока?*

Ответ на этот вопрос — отрицательный.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = 1$ с фазовым пространством $0 < x < 1$. Ясно, что преобразование g^t может быть только сдвигом на t , но при $t \neq 0$ такой сдвиг не переводит фазовое пространство в себя.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим случай $v(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием x_0 при $t = 0$ нетрудно найти явно:

$$dx/x^2 = dt, \quad -1/x = t + C, \quad C = -1/x_0, \quad x = x_0/(1 - x_0 t).$$

Итак, $g^t x = x/(1 - tx)$. Нетрудно проверить, что $g^{t+s} = g^t g^s$, так что на первый взгляд мы нашли фазовый поток.

К сожалению, отображение g^t ни при каком t , кроме нуля, не является диффеоморфизмом прямой (оно даже не всюду определено). Поэтому *поле $v(x) = x^2$ не является полем фазовой скорости никакой однопараметрической группы диффеоморфизмов прямой*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Причина, по которой оба приведенных поля не имеют фазовых потоков, заключается в некомпактности фазового пространства. В дальнейшем мы увидим, что гладкое векторное поле на компактном многообразии всегда определяет фазовый поток. В частности, поле $v(x) = x^2$ на аффинной прямой можно продолжить до гладкого на всей проективной прямой (включая бесконечно удаленную точку) векторного поля. Проективная прямая компактна (топологически это окружность), и гладкое векторное поле на ней определяет фазовый поток. Найденные нами формулы для отображений g^t как раз и описывают этот поток: g^t есть диффеоморфизм проективной прямой, а не аффинной!

ЗАДАЧА 6. Докажите, что всякое гладкое векторное поле на прямой, расстущее на бесконечности не быстрее линейного ($|v(x)| \leq a + b|x|$) является полем фазовой скорости однопараметрической группы диффеоморфизмов прямой.

Указание. Сравнив движение с более быстрым движением в подходящем линейном поле, доказать, что решение не может уйти на бесконечность за конечное время и, следовательно, продолжается на всю ось t .

Задача 7. Определяет ли фазовый поток на прямой уравнение $\dot{x} = e^x \sin x$?

ОТВЕТ. Да.

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство всех многочленов p степени меньше n от переменной x . Определим преобразование за время t как сдвиг аргумента многочлена на t (т. е. $(g^t p)(x) \equiv p(x + t)$). Докажите, что $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований, и найдите ее векторное поле фазовой скорости.

ОТВЕТ. Вектор поля в точке p есть многочлен dp/dx .

§ 5. Действие диффеоморфизмов на векторные поля и на поля направлений

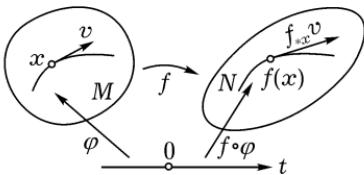


Рис. 48. Действие гладкого отображения на вектор

торых простых сведений из дифференциального исчисления.

1. Действие гладких отображений на векторы. При рассмотрении всевозможных математических объектов полезно наряду с объектами рассматривать также отображения¹. Напомню определение действия гладких отображений на векторы.

Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение области M линейного пространства в область N линейного пространства, и пусть v — вектор, приложенный в точке x области-прообраза M , т. е. стрелочка с началом x (рис. 48). Тогда в точке-образе $f(x)$ области N также возникает вектор, обозначаемый через $f_{*x} v$ и называемый *образом вектора v при отображении f*. А именно

¹ В этом состоит так называемая «категорная» точка зрения. Грубо говоря, категория — это совокупность объектов и отображений (пример: категория всех линейных пространств и их линейных отображений друг в друга).

Определение. Образом вектора v при отображении f называется вектор скорости, с которой движущаяся точка $f(\varphi(t))$ выходит из точки $f(x)$, когда движущаяся точка $\varphi(t)$ выходит из точки x со скоростью v :

$$f_{*x} v = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} f(\varphi(t)), \quad \text{где } \varphi(0) = x, \quad \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(t) = v. \quad (1)$$

Иными словами, стрелочка v снижается в 1000 раз, затем под действием f превращается в изогнутую стрелочку, затем последняя растягивается в 1000 раз и наконец 1000 устремляется к бесконечности.

Задача 1. Докажите, что образ вектора v не зависит от выбора движения φ , лишь бы точка $\varphi(t)$ выходила из x со скоростью v .

Решение. Пусть ψ — другое движение, выводящее из x с такой же скоростью. Тогда расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ при малых $|t|$ есть $o(|t|)$. Поскольку отображение f гладкое, расстояние между точками-образами $f(\varphi(t))$ и $f(\psi(t))$ в N также есть $o(|t|)$, что и требовалось.

Задача 2. Пусть v — положительный орт прямой, приложенный в точке a , и пусть $f(x) = x^2$. Найти $f_{*a} v$.

Ответ. 2a·орт.

Задача 3. Могут ли две точки на плоскости, движущиеся по разным осям координат, выходить из начала с одинаковым вектором скорости?

Ответ. Да, если скорость нулевая. Пример: $\varphi(t) = (t^2, 0)$, $\psi(t) = (0, t^2)$.

Множество всех векторов скоростей движений, выходящих из точки x области M , является линейным пространством: это просто пространство векторов, приложенных в точке x . Его размерность равна размерности области M . Это пространство называется *касательным пространством в точке x* к области M и обозначается $T_x M$.

Всякому, кто сталкивается с этим впервые, трудно оторвать касательное пространство к линейному пространству от самого линейного пространства. Следующее обобщение призвано помочь справиться с этой трудностью. Рассмотрим какую-либо гладкую поверхность M в \mathbb{R}^3 , например, сферу. Векторы скоростей, с которыми движущаяся по сфере точка может

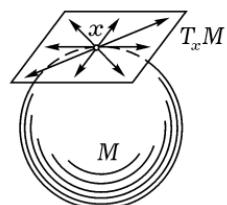


Рис. 49. Касательное пространство

выходить из заданной точки сферы, очевидно, образуют плоскость (двумерное касательное пространство сферы в заданной точке x): эта касательная плоскость $T_x M$ (рис. 49) явно отделена от самой сферы M .

Определенное выше отображение f_{*x} переводит касательное пространство к области-прообразу, M , в точке x в касательное пространство к области-образу в точке $f(x)$.

ЗАДАЧА 4. Доказать, что отображение $f_{*x}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ линейно.

Решение. По формуле Тейлора

$$f(x + vt) = f(x) + (\partial f / \partial x)vt + o(|t|),$$

следовательно, $f_{*x} = \partial f / \partial x$ — линейный оператор.

Если в пространствах — прообразе и образе отображения f — выбраны декартовы координаты (x_1, \dots, x_m) и (y_1, \dots, y_n) соответственно, так что f задается набором n функций f_i от m переменных x_j , то компоненты вектора $f_{*x} v$ выражаются через компоненты вектора v по формуле

$$(f_{*x} v)_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j.$$

Иначе говоря, *матрица оператора f_{*x} составлена из частных производных $(\partial f_i / \partial x_j)$.*

Определение. Линейный оператор f_{*x} называется *производной отображения f в точке x* .

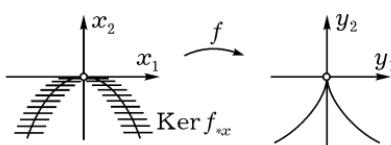


Рис. 50. Критические точки и критические значения отображения Уитни

$= (x_1^3 + x_1 x_2, x_2)$ (рис. 50). Найти множество всех точек x , в которых линейный оператор f_{*x} вырождается, и найти образ этого множества при отображении f (эти два множества называются множествами *критических точек* и *критических значений* соответственно).

ЗАДАЧА 5. Рассмотрим отображение f прямой в плоскость, $f(x) = (\sin x, \cos x)$. Найти значение его производной на положительно ориентирующем ось x векторе v длины 10, приложенном в точке α .

ОТВЕТ. $f_{*a} v = (10 \cos \alpha, -10 \sin \alpha)$.

ЗАДАЧА 6. Рассмотрим отображение f плоскости в плоскость, $f(x_1, x_2) =$

Решение. Матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2 + x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому производная вырождена на параболе $x_2 = -3x_1^2$. Ее образ — полукубическая парабола $(y_1/2)^2 + (y_2/3)^3 = 0$.

Отображение этой задачи называется *отображением Уитни (сборкой)*. Х. Уитни доказал, что особенность сборки типична для гладких отображений плоскости в плоскость (например, всякое близкое к f гладкое отображение имеет поблизости от начала координат подобную особенность).

ЗАМЕЧАНИЕ. Линейная структура (т. е. сложение векторов) в касательном к области M в точке x пространстве определена выше при помощи линейной структуры объемлющего M пространства, или иными словами — при помощи системы декартовых координат.

В действительности, как множество $T_x M$, так и структуру линейного пространства в нем, можно определить независимо от выбора системы координат, даже криволинейных, лишь бы эта система координат была допустима, т. е. связана с системой декартовых координат гладкой заменой переменных (диффеоморфизмом). Независимость касательного пространства от системы координат не совсем очевидна, так как нарисованная в области M стрелочка (приложенный вектор) при диффеоморфизме изгибается.

Не зависящее от системы координат определение вектора скорости выхода из точки x выглядит несколько абстрактно:

Определение. Касательным вектором в точке x области M называется класс эквивалентности гладких движений $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M$, для которых $\varphi(0) = x$; эквивалентность $\varphi \sim \psi$ определяется условием: расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в какой-нибудь (и тогда любой) системе координат есть $o(|t|)$ при $t \rightarrow 0$ (рис. 51).

Ясно, что это действительно отношение эквивалентности ($\varphi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi \Rightarrow \psi \sim \varphi$, $\varphi \sim \psi \sim \chi \Rightarrow \varphi \sim \chi$). Класс эквивалентности движения φ определяется (при фиксированной системе координат) компонентами вектора скорости выхода $\varphi(t)$ из точки $\varphi(0)$.

Таким образом, наш бескоординатно определенный вектор превращается в обычную стрелочку, как только система координат фиксирована. Единственное, что нужно доказывать — это независимость линейных операций над вектором (сложения и умножения на числа) от системы координат, участвующей в их определении. Но эта независимость сразу вытекает из линейности

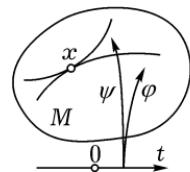


Рис. 51. Класс эквивалентных движений

оператора производной отображения в точке (нужно рассмотреть в качестве отображения «замену переменных», т. е. диффеоморфизм, сопоставляющий набору старых координат точки набор ее новых координат).

Хотя наше определение не зависит от системы координат, остается еще зависимость от класса всех допустимых систем координат, связанных гладкими заменами переменных. Этот класс называется *дифференцируемой структурой*, и от него введенные понятия зависят существенным образом.

Производная отображения f в точке x есть *не зависящий ни от системы координат в прообразе, ни от системы координат в образе* линейный оператор $f_{*x}: T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ по самому своему определению (1) (рис. 52).

ЗАДАЧА 7. Пусть f — диффеоморфизм M на N . Докажите, что отображение f_{*x} — изоморфизм линейных пространств.

ЗАДАЧА 8. Верно ли обратное?

ОТВЕТ. Нет, даже если f_{*x} — изоморфизм при любом x (см. рис. 53).

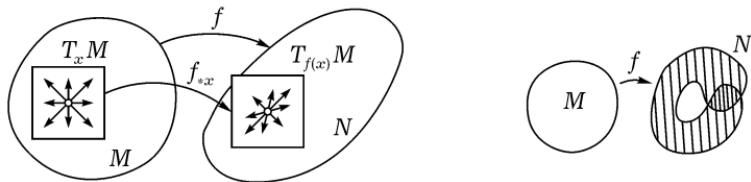


Рис. 52. Производная отображения в точке

Рис. 53. Локальный диффеоморфизм может не быть диффеоморфизмом в целом

2. Действие диффеоморфизмов на векторные поля.

Определение. В области M задано гладкое *векторное поле* v , если каждой точке x сопоставлен приложенный в ней вектор $v(x) \in T_x M$, гладко зависящий от точки x (если система m координат выбрана, то поле задается своими m компонентами, являющимися гладкими функциями m переменных). Вектор $v(x)$ называется *значением поля* v в точке x .

Посмотрим, как ведут себя различные объекты при гладких отображениях. *Касательные векторы* при отображениях $g: M \rightarrow N$ движутся вперед (т. е. под действием g касательный вектор v к M переходит в касательный вектор $g_{*x}v$ к N). *Функции* при отображениях $g: M \rightarrow N$ движутся назад, т. е. функция f на N порождает функцию

на M (ее значение, в точке x из M равно значению f в образе точки x ; эта функция обозначается $g^* f$; звездочка сверху символизирует движение назад).

Векторные поля не отображаются, вообще говоря, ни вперед, ни назад. Действительно, при отображении две точки прообраза могут перейти в одну и привести туда разные векторы, поэтому поле в прообразе не переносится на образ. Кроме того, многие касательные векторы в одной точке прообраза могут иметь общий образ, поэтому поле в образе не переносится в прообраз.

Определение. Образом векторного поля при диффеоморфизме на называется векторное поле, значение которого в каждой точке является образом вектора исходного поля в прообразе данной точки. Образ поля v при диффеоморфизме g обозначается $g_* v$.

Иначе говоря, образ $g_* v$ поля v в M при диффеоморфизме g области M на N — это поле w в N , определенное формулой (рис. 54) $w(y) = (g_{*x})v(x)$, где $x = g^{-1}y$.

Задача 1. Найти образ поля $v(x) = 1$ на прямой под действием диффеоморфизма $g(x) = 2x$.

Ответ. $(g_* v)(y) = 2$.

Векторное поле на оси x , единственная компонента которого равна v , часто обозначается¹ символом $v\partial/\partial x$. Удобство этого обозначения состоит в том, что при растяжениях оси $\partial/\partial x$ ведет себя как $1/x$. Например, решение предыдущей задачи можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(y/2)} = 2 \frac{\partial}{\partial y}.$$

В этих обозначениях формула действия диффеоморфизма прямой на векторное поле принимает вид следующей формулы замены переменной: если $y = g(x)$, то $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial(g(x))} = \frac{1}{g'} \frac{\partial}{\partial x}$. Таким образом, обозначение

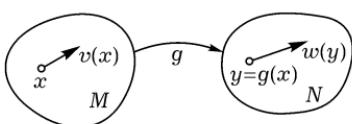


Рис. 54. Действие диффеоморфизма на векторное поле

¹ В сущности, $v\partial/\partial x$ — это оператор дифференцирования по направлению поля v (см. § 10), но так как оператор $v\partial/\partial x$ и поле v однозначно определяют друг друга, их часто отождествляют между собой.

ние $\partial/\partial x$ автоматизирует вычисление действия диффеоморфизмов на поля.

ЗАДАЧА 2. Найти образ поля $x \frac{\partial}{\partial x}$ под действием диффеоморфизма $y = e^x$.

ОТВЕТ. $y \ln y \frac{\partial}{\partial y}$.

Если (x_1, \dots, x_n) — фиксированная система координат в \mathbb{R}^n , то базисные векторные поля (с компонентами $(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$) обозначаются $\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n$. Поле с компонентами (v_1, \dots, v_n) обозначается поэтому $v_1 \partial/\partial x_1 + \dots + v_n \partial/\partial x_n$.

ЗАДАЧА 3. Найти образы «эйлерова поля» $\mathbf{v} = x_1 \partial/\partial x_1 + x_2 \partial/\partial x_2$ на плоскости под действием следующих диффеоморфизмов: 1) поворот вокруг 0; 2) гиперболический поворот; 3) любое линейное преобразование.

ОТВЕТ. \mathbf{v} .

ЗАДАЧА 4. Докажите, что диффеоморфизм, переводящий векторное поле \mathbf{v} в поле \mathbf{w} , переводит фазовые кривые поля \mathbf{v} в фазовые кривые поля \mathbf{w} . Верно ли обратное?

ОТВЕТ. Нет, пример: $\mathbf{v} = x \partial/\partial x$, $\mathbf{w} = 2x \partial/\partial x$.

3. Замена переменных в уравнении. Пусть \mathbf{w} — образ векторного поля \mathbf{v} в M при диффеоморфизме g области M на область N , т. е. $\mathbf{w} = g_* \mathbf{v}$.

Теорема. *Дифференциальные уравнения*

$$\dot{x} = \mathbf{v}(x), \quad x \in M \tag{1}$$

$$\dot{y} = \mathbf{w}(y), \quad y \in N \tag{2}$$

эквивалентны в том смысле, что если $\varphi: I \rightarrow M$ — решение первого, то $g \circ \varphi: I \rightarrow N$ — решение второго уравнения, и обратно.

Иными словами: замена переменных $y = g(x)$ превращает уравнение (1) в уравнение (2). Или еще: подстановка $g(x)$ вместо y превращает уравнение (2) в уравнение (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Это очевидно. Иными словами, последовательно применения правила дифференцирования сложной функции, определение решения φ и определение поля $g_* \mathbf{v}$, находим $\frac{d}{dt} g \circ \varphi = g_{*x} \dot{\varphi}(t) = g_{*x} \mathbf{v}(x) = \mathbf{w}(y)$, где $x = \varphi(t)$, $y = g(\varphi(t))$, что и требовалось доказать.

ЗАДАЧА 1. Решить уравнение малых колебаний маятника

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1,$$

перейдя к полярным координатам¹ подстановкой $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$.

РЕШЕНИЕ. Выполнив подстановку, находим $\dot{r} = 0$, $\dot{\theta} = -1$, откуда $x_1 = r_0 \cos(\theta_0 - t)$, $x_2 = r_0 \sin(\theta_0 - t)$.

ЗАДАЧА 2. Исследовать фазовые кривые системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Перейдя к полярным координатам, получаем

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = -1.$$

Фазовые кривые этой системы на плоскости (r, θ) совпадают с интегральными кривыми уравнения $dr/d\theta = r(r^2 - 1)$. Нарисовав эти кривые (рис. 55) и возвращаясь к декартовым координатам, получаем рис. 56. Единственная особая точка — начало координат. Начинаящиеся вблизи нее фазовые кривые наматываются с ростом времени изнутри на окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Эта окружность является замкнутой фазовой кривой (пределным циклом). Снаружи на нее также наматываются фазовые кривые.

Переход к полярным координатам позволяет и явно проинтегрировать исходную систему.

4. Действие диффеоморфизма на поле направлений. Пусть g диффеоморфизм области M на область N , и пусть в области M задано поле направления. Тогда в области N также возникает поле направлений. Оно называется *образом исходного поля под действием диффеоморфизма g* и определяется так.

Рассмотрим какую-либо точку y области N (рис. 57). Она имеет в M единственный прообраз, $x = g^{-1}y$. Рассмотрим направление данного поля в точке x . Это — прямая в касательном пространстве $T_x M$. Возьмем любой ненулевой вектор этой прямой. Его образ под действием g есть ненулевой вектор в касательном пространстве $T_y N$ (так

¹Разумеется, необходимы обычные оговорки, связанные с неоднозначностью полярных координат: отображение $(r, \theta) \mapsto (x_1, x_2)$ не является диффеоморфизмом плоскости на плоскость. Например, можно рассмотреть заданный этим отображением диффеоморфизм области $r > 0$, $0 < \theta < \pi$ на плоскость без положительной полуоси x_1 и отдельно — области $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$ на плоскость без отрицательной полуоси x_1 .

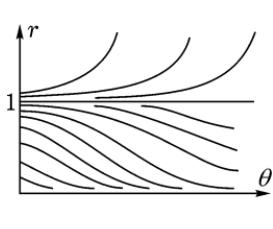


Рис. 55. Интегральные кривые на плоскости (r, θ)

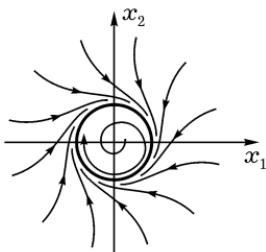


Рис. 56. Фазовые кривые на плоскости (x_1, x_2)

как g — диффеоморфизм). Прямая, определенная этим вектором, не зависит от выбора вектора исходной прямой (так как g_{*x} — линейный оператор). Эта новая прямая и есть прямая нового поля направлений в точке y . Очевидна

Теорема. *Интегральные кривые исходного поля направлений в M переходят при диффеоморфизме $g : M \rightarrow N$ в интегральные кривые поля направлений в N , полученного действием g на исходное поле.*

Для доказательства достаточно достроить данное поле направлений (в окрестности каждой точки области M) до векторного поля, векторы которого лежат на прямых заданного поля направлений и отличны от нуля, а затем применить теорему п. 3.

ЗАДАЧА 1. Всякое ли гладкое поле направлений в области на плоскости можно достроить до гладкого векторного поля?

ОТВЕТ. Нет, если область неодносвязна (рис. 58).

Сформулированная выше теорема показывает, что для решения дифференциального уравнения

$$dx/dt = v(t, x)$$

достаточно построить диффеоморфизм, приводящий поле направлений к полю направлений уравнения, которое мы уже умеем решать — например, уравнения с разделяющимися переменными. Иными словами, достаточно подобрать замену переменных, сводящую уравнение к уже решенному.

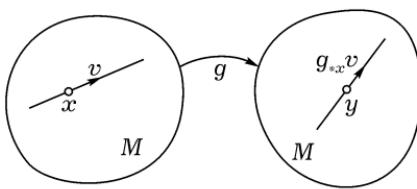


Рис. 57. Действие диффеоморфизма на поле направлений

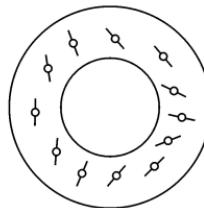


Рис. 58. Поле направлений, не достраиваемое до векторного поля

ЗАДАЧА 2. Подобрать замену переменных так, чтобы в уравнении $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}$ переменные разделились.

ОТВЕТ. Годятся полярные координаты.

ЗАДАЧА 3. Найти диффеоморфизм, превращающий все интегральные кривые уравнения $dx/dt = x - 1$ в параллельные прямые.

РЕШЕНИЕ. Решаем однородное уравнение: $x = Ce^t$. Находим частное решение неоднородного: $\dot{C}e^t = -1$, $C = e^{-t}$, $x = 1$.

Следовательно, каждое решение неоднородного уравнения имеет вид $x = 1 + ae^t$. Отображение, переводящее (t, x) в (t, a) , — искомый диффеоморфизм ($a = e^{-t}(x - 1)$), так как вдоль интегральных кривых a — константа.

ДРУГОЕ РЕШЕНИЕ: Сопоставим точке (t, x) точку (t, y) , где y — ордината точки пересечения интегральной кривой, проходящей через точку (t, x) с осью ординат (рис. 59).

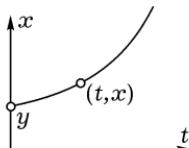


Рис. 59. Выпрямление интегральных кривых

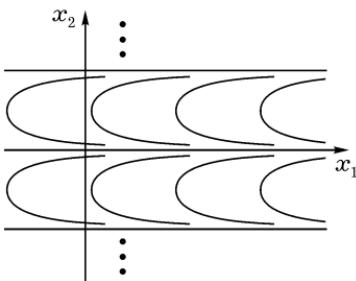


Рис. 60. Невыпрямленное поле направлений на плоскости

Задача 4. Всякое ли гладкое поле направлений, заданное на всей плоскости, превращается в поле параллельных прямых при подходящем диффеоморфизме?

ОТВЕТ. Нет, см. рис. 60.

Задача 5. Можно ли диффеоморфизмом плоскости превратить в поле параллельных прямых поле направлений дифференциального уравнения $\dot{x}=x^2$?

ОТВЕТ. Можно, хотя явную формулу написать нелегко.

5. Действие диффеоморфизма на фазовый поток. Пусть $\{g^t: M \rightarrow M\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, и пусть $f: M \rightarrow N$ — еще один диффеоморфизм *на*.

Определение. Образом потока $\{g^t\}$ под действием диффеоморфизма f называется поток $\{h^t: N \rightarrow N\}$, где $h^t = fg^t f^{-1}$.

Иными словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^t} & M \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ N & \xrightarrow{h^t} & N \end{array}$$

коммутативна при любом f . Ясно, что f переводит орбиты группы $\{g^t\}$ в орбиты группы $\{h^t\}$.

Если рассматривать диффеоморфизм f как «замену переменных», то преобразование h^t — это просто преобразование g^t , «записанное в новых координатах».

Замечание. Потоки $\{g^t\}$ и $\{h^t\}$ называются иногда *эквивалентными* (или *подобными*, или *сопряженными*), а диффеоморфизм f — *эквивалентностью* (или *сопрягающим диффеоморфизмом*).

Задача 1. Докажите, что $\{h^t\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

Задача 2. Сопряжены ли однопараметрические группы вращений плоскости и ее гиперболических поворотов?

Пусть v — векторное поле фазовой скорости однопараметрической группы $\{g^t\}$, а w — группы $\{h^t\}$, в которую ее переводят диффеоморфизм f .

Очевидна

Теорема. Диффеоморфизм f переводит поле v в поле w ; обратно, если диффеоморфизм переводит v в w , то он переводит $\{g^t\}$ в $\{h^t\}$.

ЗАДАЧА 3. Переводятся ли друг в друга диффеоморфизмы векторные поля на прямой, задающие следующие пять дифференциальных уравнений:
 $\dot{x} = \sin x, 2 \sin x, \sin^2 x, \sin 2x, 2 \sin x + \sin^2 x$.

ОТВЕТ. Второе переводится в четвертое и в пятое.

§ 6. Симметрии

Здесь решаются однородные и квазиоднородные дифференциальные уравнения. Их решение основано на использовании однопараметрических групп симметрии векторных полей и полей направлений, которые мы прежде всего и изучим.

1. Группы симметрий.

Определение. Диффеоморфизм $g: M \rightarrow M$ называется *симметрией* векторного поля v в M , если он переводит поле в себя: $g_* v = v$. Говорят также, что поле v *инвариантно относительно симметрии* g .

ПРИМЕР. Поворот плоскости вокруг нуля является симметрией эйлерова поля $x_1 \partial / \partial x_1 + x_2 \partial / \partial x_2$ (вектор которого в точке \mathbf{x} есть $v(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, рис. 61).

Фазовые кривые поля переходят под действием симметрии поля друг в друга.

ЗАДАЧА 1. Пусть диффеоморфизм переводит фазовые кривые векторного поля друг в друга. Является ли он симметрией поля?

ОТВЕТ. Не обязательно.

Определение. Диффеоморфизм $g: M \rightarrow M$ называется *симметрией поля направлений* в M , если он переводит это поле направлений в себя; поле тогда называется *инвариантным относительно симметрии*. Интегральные кривые поля переходят под действием симметрии друг в друга.

ПРИМЕР. Поле направлений уравнения $\dot{x} = v(t)$ в расширенном фазовом пространстве инвариантно относительно сдвигов вдоль оси x (рис. 4 на стр. 16), а уравнения $\dot{x} = v(x)$ — вдоль оси t (рис. 6 на стр. 19).

ЗАДАЧА 2. Пусть диффеоморфизм переводит интегральные кривые поля направлений друг в друга. Является ли он симметрией поля направлений?

ОТВЕТ. Да.

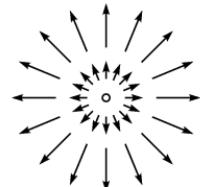


Рис. 61. Эйлерово поле

Поле называется *инвариантным относительно группы* диффеоморфизмов, если оно инвариантно относительно каждого преобразования группы. В таком случае говорят, что поле *допускает* данную группу симметрий.

ПРИМЕР. Эйлерово поле на плоскости допускает, среди других, следующие четыре группы симметрий: однопараметрическая группа расстяжений ($x \rightarrow e^t x$), однопараметрическая группа вращений на угол t , однопараметрическая группа гиперболических поворотов, группа всех линейных преобразований плоскости, $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

Все симметрии данного поля образуют группу (докажите!).

ЗАДАЧА 3. Найти группу всех симметрий эйлерова поля на плоскости.

ОТВЕТ. $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$.

2. Применение однопараметрической группы симметрий для интегрирования уравнения.

Теорема. Пусть известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений на плоскости. Тогда можно явно проинтегрировать уравнение, заданное этим полем направлений, в окрестности каждой не стационарной точки группы симметрий.

Точка называется *нестационарной* для группы преобразований, если не все преобразования группы оставляют ее на месте.

Если группа состоит из сдвигов вдоль прямой, то уравнение с такой группой симметрий решено в § 1, стр. 18 (формула Барроу). Мы покажем, что общий случай сводится к этому подходящим диффеоморфизмом (т. е. разумным выбором локальных координат на плоскости).

Лемма. В окрестности любой нестационарной точки действия однопараметрической группы диффеоморфизмов на плоскости можно выбрать координаты (u, v) так, что данная однопараметрическая группа диффеоморфизмов записывается в виде группы сдвигов:

$$g^s(u, v) = (u + s, v) \quad \text{при достаточно малых } |u|, |v|, |s|.$$

Эта формула означает, что координата v нумерует орбиты данной группы, а координата u на каждой орбите есть просто время движения (отсчитываемое от некоторой линии на плоскости).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проведем через данную точку O линию Γ , пересекающую трансверсально (под ненулевым углом) проходящую через нее фазовую кривую $\{g^sO\}$ (рис. 62). Пусть v — координата точки $\gamma(v)$ на этой линии, отсчитываемая от точки O . Рассмотрим отображение Φ плоскости (u, v) на нашу плоскость, переводящее точку с координатами (u, v) в $g^u\gamma(v)$. Это отображение — диффеоморфизм окрестности точки $(0,0)$ на окрестность точки O . Поэтому (u, v) — локальные координаты. В координатах (u, v) действие g^s принимает нужный вид, поскольку $g^s g^u = g^{s+u}$.

Теорема следует из леммы, так как в системе координат (u, v) на-
клон данного поля направлений не зависит от u .

ЗАМЕЧАНИЕ. Приведенное доказательство дает также *метод явного интегрирования* уравнения; в координатах леммы оно принимает вид $dv/du = w(v)$ (линию Γ нужно взять не касательной направле-
нию данного поля в O). Практически не всегда удобно пользоваться именно этими координатами. Достаточно, чтобы линии $v = \text{const}$ были орбитами данной однопараметрической группы диффеоморфизмов; в качестве другой координаты вместо u можно взять любую функцию от u , скажем z . Важно лишь, чтобы преобразования g^s переводили линии $z = \text{const}$ друг в друга. В системе координат (z, v) исходное поле направлений определит уравнение с разделяющимися переменны-
ми $dv/dz = w(v)f(z)$, где $f(z) = du/dz$.

ЗАДАЧА 1. Пусть известна однопараметрическая группа симметрии по-
ля направлений в n -мерной области. Свести задачу интегрирования соотв-
етствующего дифференциального уравнения к нахождению интегральных кри-
вых поля направлений в области размерности $n - 1$.

Указание. Пространство орбит группы симметрий имеет размер-
ность $n - 1$.

3. Однородные уравнения.

Определение. Уравнение называется *однородным*, если задающее его поле направлений на плоскости однородно, т. е. инвариантно отно-
сительно однопараметрической группы растяжений, $g^s(x, y) = e^s(x, y)$ (рис. 63).

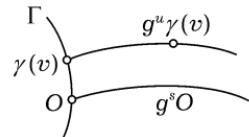


Рис. 62. Выпрямле-
ние однопараметри-
ческой группы диф-
феоморфизмов

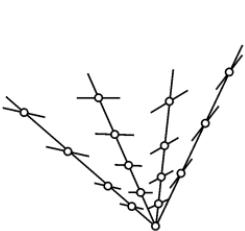


Рис. 63. Поле направлений однородного уравнения

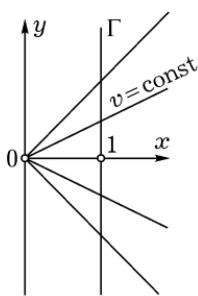


Рис. 64. Координаты для решения однородного уравнения

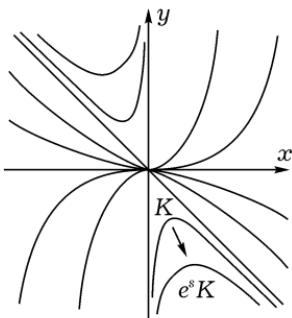


Рис. 65. Интегральные кривые однородного уравнения

Область определения такого поля — не обязательно вся плоскость: достаточно, чтобы это поле было задано в какой-либо области, инвариантной относительно растяжений (например, в угле).

ЗАДАЧА 1. Какие из уравнений $dy/dx = y/x$, x/y , $\ln x - \ln y$ ($x > 0$, $y > 0$) однородны?

ОТВЕТ. Все три.

Теорема. Однородное уравнение $dy/dx = F(x, y)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = vx$ (*t. e.* переходом к координатам (x, v)) в области $x > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Орбиты группы растяжений — это лучи проходящих через 0 прямых (рис. 64). В качестве линии Γ возьмем прямую $x = 1$ с обычным параметром y на ней. Указанные в лемме координаты u и v — это $u = \ln x$ и $v = y/x$.

По замечанию п. 2 в координатах (x, v) переменные разделяются.

ЗАДАЧА 2. Решить уравнение $dy/dx = y/x + y^2/x^2$, $x > 0$.

РЕШЕНИЕ. $dy = v dx + x dv$, $dy/dx = v + x dv/dx$, $x dv/dx = v^2$, $-1/v = \ln x + C$, $y = -x/(\ln x + C)$.

Если K — интегральная кривая однородного уравнения, то гомотетичная ей кривая $e^s K$ тоже интегральная (рис. 65). Таким образом, для исследования всех интегральных кривых однородного уравнения достаточно нарисовать одну кривую в каждом секторе плоскости.

ЗАДАЧА 3. Нарисовать интегральные кривые уравнения

$$dy/dx = 2y/x + y^2/x^2.$$

ОТВЕТ. См. рис. 65.

Определение. Функция f называется *однородной степени r* , если она удовлетворяет тождественному соотношению

$$f(e^s x) \equiv e^{rs} f(x). \quad (1)$$

Иными словами, *однородная функция степени r* — это общий собственный вектор всех линейных операторов $(e^s)^*$, с собственными числами e^{rs} .

Оператор g^* (действие диффеоморфизма g на функции) определен в § 5, стр. 77.

ПРИМЕР. Нарисуем на плоскости p, q прямую $p + q = r$. Многочлен $\sum a_{p,q} x^p y^q$ однородный степени r , если и только если показатели всех входящих в него с ненулевыми коэффициентами одночленов лежат на этой прямой (называемой *диаграммой Ньютона*).

Теорема (Эйлера). Чтобы функция f была однородной степени r , необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению Эйлера $\sum x_i \partial f / \partial x_i = rf$.

Соотношение Эйлера означает, что f — собственный вектор оператора дифференцирования вдоль изображенного на рис. 61 эйлерова поля (поля фазовой скорости группы растяжений, e^s) с собственным числом r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Соотношение Эйлера получается дифференцированием определения (1) однородной функции по s при $s = 0$. Соотношение (1) получается из соотношения Эйлера интегрированием дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, задаваемого соотношением Эйлера на каждой орбите группы растяжений: $df/dx = rf/x$.

Для того чтобы поле направлений уравнения $dy/dx = F(x, y)$ было однородным, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была однородной функцией степени 0. Например, годится отношение любых двух однородных многочленов одинаковой степени.

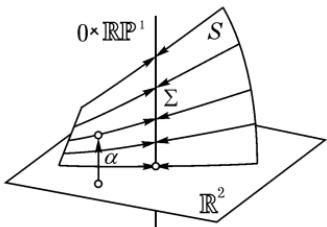


Рис. 66. Сигма-процесс

как это делается. Рассмотрим отображение (расслоение) $\alpha: (\mathbb{R}^2 \setminus 0) \rightarrow \mathbb{RP}^1$, определяющее проективную прямую¹.

Отображение α сопоставляет точке плоскости прямую, соединяющую ее с нулем. График отображения α (рис. 66) представляет собой поверхность S в пространстве $(\mathbb{R}^2 \setminus 0) \times \mathbb{RP}^1$. Вложение $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ в \mathbb{R}^2 вкладывает этот график в произведение $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{RP}^1$ (диффеоморфное внутренности барабанки.).

Задача 4. Доказать, что замыкание графика в M представляет собой гладкую поверхность.

Указание. Уравнения $y = vx$, $x = uy$ определяют гладкие поверхности.

Эта поверхность Σ (замыкание графика) состоит из самого графика и линии $0 \times \mathbb{RP}^1$ (диффеоморфной окружности). Проектирование M на первый сомножитель, \mathbb{R}^2 , определяет гладкое отображение поверхности Σ на плоскость. Это отображение называется *сдуванием*. Оно переводит всю окружность $0 \times \mathbb{RP}^1$ в точку 0 и диффеоморфно отображает остальную часть Σ (т. е. график) на плоскость без точки.

Задача 5. Доказать, что поверхность Σ диффеоморфна листу Мебиуса.

Всевозможные геометрические объекты, имеющие особенность в точке 0, можно поднять с плоскости без точки на Σ , пользуясь указанным выше диффеоморфизмом. При этом оказывается, что при переходе наверх (на Σ) особенности упрощаются.

Повторяя процедуру раздутия, можно, как говорят, *разрешать* особенности. Например, можно превратить любую алгебраическую кривую с особенностью в точке 0 в кривую, не имеющую особенностей, кроме точек обычного самопересечения.

¹Проективной прямой называется множество всех проходящих через 0 прямых на плоскости. Вообще, проективное пространство \mathbb{RP}^{m-1} есть множество прямых, проходящих через 0 в \mathbb{R}^m .

ЗАМЕЧАНИЕ. Переход от координат (x, y) к координатам $(x, v = y/x)$ в области $x \neq 0$ и к координатам $(u = x/y, y)$ в области $y \neq 0$ называется *сигма-процессом* или *раздутием точки 0*.

Эта конструкция имеет простой геометрический смысл: она означает переход от плоскости к поверхности, получающейся из нее выкидыванием начала координат и вклейванием вместо него целой проективной прямой. Вот

Задача 6. Разрешить особенность полукубической параболы $x^2 = y^3$.

ОТВЕТ. См. рис. 67.

При исследовании векторных полей и полей направлений также полезно раздутье с центром в особой точке. Выше мы видели, что в случае однородного поля направлений первое же раздутье приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 7. Докажите, что гладкое векторное поле на плоскости, равное 0 в начале координат, поднимается на поверхность Σ в виде поля, гладко продолжающегося на вклеиваемую при сигма-процессе окружность.

4. Квазиоднородные уравнения. Зафиксируем на плоскости систему линейных координат (x, y) и зафиксируем два вещественных числа α и β .

Определение. Группой квазиоднородных растяжений плоскости называется однопараметрическая группа линейных преобразований

$$g^s(x, y) = (e^{\alpha s} x, e^{\beta s} y).$$

Числа α и β называются *весами* переменных x и y . (Наряду с «квазиоднородный» употребляются термины *взвешенно-однородный, обобщенно-однородный*). Обозначение: $\alpha = \deg x, \beta = \deg y$.

Если $\alpha = \beta = 1$, то $\{g^s\}$ — обычная группа растяжений.

Определение. Уравнение называется *квазиоднородным* (с *весами* α, β), если задающее его поле направлений на плоскости инвариантно относительно группы квазиоднородных растяжений.

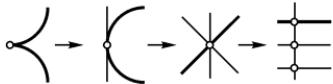
Задача 1. Подобрать веса так, чтобы поле направлений уравнения $dy/dx = -x/y^3$ было квазиоднородным.

ОТВЕТ. $\alpha = 2, \beta = 1$.

Теорема. Квазиоднородное уравнение $dy/dx = F(x, y)$ с весами $\deg x = \alpha, \deg y = \beta$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными переходом к координатам $(x, y^\alpha/x^\beta)$ в области $x > 0$.

Доказательство.

Орбиты группы квазиоднородных растяжений — половины «парабол» $y^\alpha = Cx^\beta$ (рис. 30, стр. 42). Выберем в качестве линии Γ (п. 2)



прямую $x = 1$ с параметром y на ней. Квазиоднородные растяжения переводят параллельные Γ прямые в параллельные. Поэтому теорема вытекает из леммы п. 2 и замечания к ней.

Выясним теперь, как узнать по правой части уравнения, квазиоднородно ли оно.

Определение. Функция f называется *квазиоднородной, степени r* , если она удовлетворяет тождеству $f(e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y) \equiv e^{rs}f(x, y)$.

Иными словами, f — общий собственный вектор операторов $(g^s)^*$ (где g^s — квазиоднородное растяжение) с собственными числами e^{rs} .

ПРИМЕР. Многочлен квазиоднороден степени r (при весах α, β), если и только если показатели входящих в него мономов $x^p y^q$ лежат на диаграмме Ньютона $\alpha p + \beta q = r$ (рис. 68).

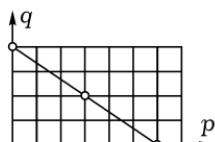


Рис. 68. Диаграмма Ньютона квазиоднородной функции

Квазиоднородная степень квазиоднородного многочлена называется также *весом*. Например, вес x равен α , вес y равен β , вес x^2y^3 равен $2\alpha+3\beta$ и т. д. Приписывание весов называется также *графированием*.

ЗАДАЧА 2. Подобрать веса переменных так, чтобы многочлен $x^2y + y^4$ был квазиоднородным степени 1.

ОТВЕТ. $\deg y = 1/4$, $\deg x = 3/8$.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что функция f переменных x_i весов α_i квазиоднородна степени r , если и только если она удовлетворяет соотношению Эйлера $\sum \alpha_i x_i \partial f / \partial x_i = rf$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Векторное поле $\sum \alpha_i x_i \partial / \partial x_i$ называется *квазиоднородным эйлеровым полем* (это — поле фазовой скорости группы квазиоднородных растяжений). Соотношение Эйлера означает, что f — собственный вектор оператора дифференцирования вдоль эйлерова поля, с собственным числом r .

Теорема. Для того, чтобы поле направлений уравнения $dy/dx = F(x, y)$ было квазиоднородным, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была квазиоднородной и ее квазиоднородная степень была равна разности степеней y и x :

$$\deg F = \deg y - \deg x = \beta - \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Под действием квазиоднородных растяжении g^s величина y и, следовательно, dy увеличивается в $e^{\beta s}$ раз, а x (и, следовательно, dx) — в $e^{\alpha s}$ раз. Чтобы поле направлений перешло при таком растяжении в себя нужно, чтобы значение F в новой точке было во столько же раз больше, чем в старой, во сколько раз увеличивается отношение dy/dx (или y/x), т. е. в $e^{(\beta-\alpha)s}$ раз, что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, при вычислении весов можно обращаться с dy/dx , как с дробью, считая d «множителем» веса нуль. Тогда вес dx есть α , вес dy есть β , вес dy/dx есть $\beta - \alpha$.

Условие квазиоднородности уравнения состоит в том, что веса левой и правой частей одинаковы.

ЗАДАЧА 4. Подобрать веса переменных так, чтобы дифференциальное уравнение фазовых кривых уравнения Ньютона $\ddot{x} = Cx^k$ было квазиоднородным.

Решение. Уравнение фазовых кривых $dy/dx = Cx^k/y$. Следовательно, $2\beta = (k+1)\alpha$.

5. Соображения подобия и размерностей. Квазиоднородные уравнения с фазовыми пространствами любой размерности определяются аналогично тому, как это сделано выше для двумерного случая. Квазиоднородные векторные поля определяются условием $\deg \partial/\partial x_i = -\deg x_i$. Например, эйлерово поле имеет степень 0.

ЗАДАЧА 1. Доказать, что если f — квазиоднородная функция степени r , а v — квазиоднородное поле степени s , то производная f вдоль v — квазиоднородная функция степени $r+s$.

ЗАДАЧА 2. Пусть $\dot{x} = P$, $\dot{y} = Q$, где P и Q — однородные многочлены степени m . Докажите, что если какая-либо из фазовых кривых замкнута и проходится за время T , то при растяжении в e^s раз из нее получится замкнутая фазовая кривая с периодом обращения $e^{s(1-m)}T$.

ЗАДАЧА 3. Пусть $\dot{x} = v(x)$, где v — квазиоднородное поле степени r . Докажите, что если T — период обращения по замкнутой кривой γ и g^s — квазиоднородное растяжение, то $g^s\gamma$ — тоже замкнутая фазовая кривая и период обращения — $e^{-sr}T$.

ЗАДАЧА 4. Как зависит от амплитуды x_{\max} период колебаний «мягкого маятника», $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x^3$?

ОТВЕТ. Обратно пропорционален амплитуде.

При применении соображений подобия часто встречаются не только первые, но и вторые производные. Посмотрим, как они ведут себя при квазиоднородных растяжениях. Очевидна

Теорема. *При квазиоднородном растяжении $(x, y) \mapsto (e^{\alpha s}x, e^{\beta s}y)$ график функции $y = \varphi(x)$ преобразуется в график функции $y = \Phi(x)$, для которой*

$$\frac{d^k \Phi}{dx^k}(в\text{ }новой\text{ }точке) = e^{(\beta - k\alpha)s} \frac{d^k \varphi}{dx^k}(в\text{ }старой\text{ }точке).$$

Иными словами, $d^k y / (dx)^k$ преобразуется как y/x^k (чем и объясняется удобство обозначения Лейбница). Следовательно, чтобы узнать, квазиоднородно ли уравнение, включающее высшие производные, достаточно приписать букве d вес нуль и потребовать одинаковости весов левой и правой частей.

Задача 5. Докажите, что если частица в силовом поле с однородной степени m силой проходит траекторию γ за время T , то та же частица пройдет гомотетичную траекторию $\lambda\gamma$ за время $T' = \lambda^{(1-m)/2}T$.

Решение. Уравнение Ньютона $d^2x/dt^2 = F(x)$, в котором F однородна степени m , переходит в себя при подходящих квазиоднородных растяжениях: нужно взять веса α (для x) и β (для y) так, чтобы $\alpha - 2\beta = m\alpha$. Берем $\alpha = 2$, $\beta = 1 - m$. Растяжению $x' = \lambda x$ соответствует $T' = \lambda^{(1-m)/2}T$.

Задача 6. Докажите, что квадраты времени прохождения подобных траекторий в поле тяготения относятся как кубы линейных размеров¹.

Решение. Из предыдущей задачи при $m = -2$ (закон всемирного тяготения) получаем $T' = \lambda^{3/2}T$.

Задача 7. Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний в случае возвращающей силы, пропорциональной отклонению («линейный осциллятор») и кубу отклонения («мягкая» сила).

Ответ. Для линейного маятника период не зависит от амплитуды, а для мягкого обратно пропорционален ей.

¹Это частный случай 3-го закона Кеплера, в котором подобие траекторий не предполагается. Закон всемирного тяготения был найден из двух предыдущих задач, закон Кеплера был известен раньше.

ЗАДАЧА 8. Уравнение теплопроводности имеет вид $\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (t — время, x — расстояние, u — температура). Известно, что вследствие годовых колебаний температуры земля в некоторой местности промерзает на метр. На какую глубину она промерзала бы вследствие суточных колебаний температуры такой же амплитуды?

Решение. Уравнение переходит в себя при квазиоднородных растяжениях $(t, x) \mapsto (e^{2s}t, e^sx)$. Следовательно, уменьшение периода в 365 раз влечет уменьшение глубины промерзания в $\sqrt{365}$ раз.

ОТВЕТ. На глубину 5 см.

Использование соображений подобия восходит к Галилео, который объяснял ими ограничение роста земных животных, вес растет пропорционально кубу линейного размера, а прочность костей — квадрату. Для водных животных этого ограничения нет, и киты достигают гораздо больших размеров, чем, скажем, слоны. Многочисленные применения этих соображений в разных областях естествознания носят названия: *теория подобия, теория размерностей, скэйлинг, автомодельность* и др.

6. Методы интегрирования дифференциальных уравнений. Есть еще несколько приемов, иногда позволяющих явно решить дифференциальное уравнение. Например, рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

Перепишем его в виде

$$Qdy - Pdx = 0$$

(1-форма равна 0 на векторах, касающихся интегральных кривых). Если форма является полным дифференциалом функции,

$$Qdy - Pdx = dF,$$

то вдоль каждой интегральной кривой функция F постоянна.

Зная линии уровня функции F , можно найти интегральные кривые. Достаточно даже, чтобы форма $Qdy - Pdx$ становилась полным дифференциалом после умножения на подходящую функцию (ведь одновременное умножение P и Q на одну и ту же функцию не меняет

исходного уравнения). Такая функция называется *интегрирующим множителем*. Интегрирующий множитель всегда существует (в окрестности точки, где Q отлично от нуля), но найти его не легче, чем решить исходное уравнение.

Основной метод решения и изучения дифференциальных уравнений — подбор диффеоморфизмов (замен переменных), приводящих к простейшему виду соответствующее поле направлений, векторное поле или фазовый поток. Например, для однородных и квазиоднородных уравнений такие замены переменных указаны выше.

Существует ряд приемов отыскания замен переменных для интегрирования дифференциальных уравнений специального вида. Списки таких уравнений и приемов имеются в задачниках (см., например, «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова, §§ 4, 5, 6, 8, 9, 10) и в справочниках (см., например, книгу Э. Камке «Справочник по дифференциальным уравнениям», содержащую около 1600 уравнений). Каждый может расширить эти списки следующим образом: взять любое уже решенное уравнение и сделать в нем любую замену переменных. Мастера интегрирования дифференциальных уравнений (например, Якоби) достигали этим способом значительных успехов в решении конкретных прикладных задач. В последнее десятилетие мы являемся свидетелями неожиданного возрождения интереса к некоторым специальным точно интегрируемым уравнениям, которые оказались связанными с тонкими вопросами алгебраической геометрии с одной стороны и физики частицеобразных решений уравнений в частных производных (солитонов, инстантонов и т. п.) — с другой.

Однако все эти методы интегрирования имеют два принципиальных недостатка. Во-первых, уже такое простое уравнение, как $dx/dt = x^2 - t$, не решается в квадратурах, т. е. решение не выражается в виде конечной комбинации элементарных и алгебраических функций и интегралов от них¹. Во-вторых, громоздкая формула, дающая решение в явном виде, часто менее полезна, чем простая приближенная формула. Например, уравнение $x^3 - 3x = 2a$ можно явно решить по формуле Кардано $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$. Однако если

¹ Доказательство этой теоремы Лиувилля близко к доказательству неразрешимости уравнений степени 5 в радикалах (Руффини – Абель – Галуа): оно выводится из неразрешимости некоторой группы. В отличие от обычной теории Галуа, речь идет здесь не о конечной группе, а о неразрешимой группе Ли. Наука, занимающаяся этими вопросами, называется дифференциальной алгеброй.

мы хотим решить уравнение при $a = 0.01$, то полезнее заметить, что оно имеет при малых a корень $x \approx -(2/3)a$ — обстоятельство вовсе не очевидное с точки зрения формулы Кардано. Точно так же уравнение маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ решается в явном виде при помощи интегралов (эллиптических). Однако большинство вопросов о поведении маятника проще решить, исходя из приближенного уравнения малых колебаний ($\ddot{x} + x = 0$) и из качественных соображений, не использующих явную формулу (см. § 12).

Точно решаемые уравнения бывают полезны в качестве примеров, так как на них можно иногда заметить явления, которые имеют место и в более сложных случаях. Например, исследование точного решения уравнения $\dot{x} = kx$ позволяет доказать теорему единственности для самого общего уравнения с гладкой правой частью (см. § 2, п. 3). Другие примеры доставляют так называемые автомодельные решения уравнений математической физики.

Задача 1. Найти решения уравнения Лапласа¹ в \mathbb{R}^2 и в \mathbb{R}^3 , зависящие только от расстояния точки до начала координат.

Ответ. $C \ln 1/r + \text{const}$, $C/r + \text{const}$ (ньютоновские потенциалы; строго говоря, $\Delta(\ln 1/r) = -2\pi\delta$ в \mathbb{R}^2 , $\Delta(1/r) = -4\pi\delta$ в \mathbb{R}^3 (почему?)).

Всякий раз, когда найдена точно решаемая задача, открывается возможность приближенно исследовать близкие задачи методами теории возмущений.

Однако опасно распространять результаты, полученные при изучении точно решаемой задачи, на близкие задачи общего вида: нередко точно интегрируемое уравнение потому и интегрируется, что его решения ведут себя проще, чем у близких неинтегрируемых задач. Например, уравнение фазовых кривых модели Лотка–Вольтерра удается проинтегрировать (п. 7 § 2) лишь благодаря тому, что все эти кривые замкнуты (в то время как у большинства близких неинтегрируемых моделей большинство фазовых кривых — незамкнутые спирали).

¹ Оператором Лапласа в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n называется оператор $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad} = \sum \partial^2 / \partial x_i^2$ (x_i — декартовы координаты). Уравнение Лапласа имеет вид $\Delta u = 0$. Решения этого уравнения называются гармоническими функциями. Например, установившееся распределение температуры задается гармонической функцией. Оператор Лапласа измеряет отличие среднего значения функции в малом шаре от ее значения в центре шара. Среднее гармонической функции по любому шару точно равно ее значению в центре шара (докажите!).

ГЛАВА 2

Основные теоремы

В этой главе формулируются теоремы о существовании и единственности решений и первых интегралов, о зависимости решений от начальных данных и от параметров. Доказательства изложены в гл. 4, здесь лишь обсуждается связь этих результатов друг с другом.

§ 7. Теоремы о выпрямлении

Здесь формулируется основная теорема о выпрямлении поля направлений, и из нее выводятся теоремы существования, единственности и дифференцируемой зависимости решения от параметров и начальных условий, теоремы о продолжении и о локальных фазовых потоках.

1. Выпрямление поля направлений.

Рассмотрим гладкое поле направлений в области U n -мерного пространства.

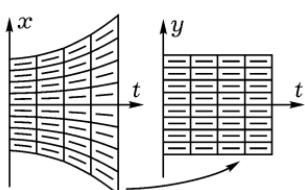


Рис. 69. Выпрямление поля направлений

Определение. Выпрямлением поля направлений называется диффеоморфизм, переводящий его в поле параллельных направлений (рис. 69). Поле называется *выпрямляемым*, если существует его выпрямление.

Теорема 1 (основная). Всякое гладкое поле направлений выпрямляемо в окрестности каждой точки. Если поле t раз непрерывно дифференцируемо (класса C^r , $1 \leq r \leq \infty$), то и выпрямляющий диффеоморфизм можно выбрать класса C^r .

ПРИМЕР. Поле направлений уравнения $\dot{x} = x$ (рис. 69) выпрямляется диффеоморфизмом $(t, x) \mapsto (t, y = xe^{-t})$. Действительно, этот диффеоморфизм переводит интегральные кривые $x = Ce^t$ на плоскости (t, x) в параллельные прямые $y = C$ на плоскости (t, y) .

ЗАДАЧА 1. Выпрямить поля направлений уравнений $\dot{x} = t$ и $\dot{x} = x^2$ в окрестности начала координат.

ЗАДАЧА 2. Всякое ли гладкое поле направлений на плоскости выпрямляется в целом?

ОТВЕТ. Нет, см. рис. 60.

ЗАДАЧА *3. Пусть в \mathbb{R}^3 дано (гладкое) поле двумерных плоскостей (в каждой точке приложена плоскость). Всегда ли можно выпрямить его (превратить в поле параллельных плоскостей подходящим диффеоморфизмом)?

Указание. Выпрямляемое поле является полем плоскостей, касательных к семейству поверхностей.

ОТВЕТ. Нет. Рассмотрим, например, поле плоскостей, заданное уравнением $y \, dx + dz = 0$ (вектор принадлежит плоскости поля, если на нем эта 1-форма обращается в нуль). Не существует ни одной поверхности, касающейся плоскостей этого поля.

Доказательство основной теоремы 1 будет дано в § 32. Вот две ее переформулировки.

Теорема 2. Все гладкие поля направлений в областях одинакового числа измерений локально диффеоморфны (переводятся друг в друга диффеоморфизмом).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$1 \Rightarrow 2$: по основной теореме все поля локально диффеоморфны одному стандартному полю. $2 \Rightarrow 1$: из локальной диффеоморфности любому полю вытекает, в частности, локальная диффеоморфность стандартному, т. е. локальная выпрямляемость.

Теорема 3. Дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(t, x)$ с гладкой правой частью v локально эквивалентно простейшему уравнению $dy/dt = 0$.

Иными словами: В окрестности каждой точки расширенного фазового пространства (t, x) существует допустимая система координат (τ, y) (переход к которой — диффеоморфная замена переменных), в которой уравнение записывается в простейшем виде: $dy/d\tau = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$1 \Rightarrow 3$: сначала выпрямим поле направлений v , а затем рассмотрим декартовы координаты, в которых ось времени τ параллельна прямым

выпрямленного поля направлений. $3 \Rightarrow 1$: всякое поле направлений локально записывается как поле направлений подходящего дифференциального уравнения. Переход к локальной системе координат, в которой уравнение имеет вид $dy/d\tau = 0$, выпрямляет заданное поле.

ЗАДАЧА *4. Можно ли выпрямить во всем расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ поле направлений уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ с гладкой правой частью, заданной во всем этом пространстве?

ЗАДАЧА 5. Докажите, что систему координат теоремы 3 можно выбрать так, чтобы время не преобразовывалось ($\tau \equiv t$).

ЗАДАЧА 6. Выпрямить поле направлений уравнения $\dot{x} = x + t$ на всей плоскости сохраняющим время диффеоморфизмом $(t, x) \mapsto (t, y(t, x))$.

ЗАДАЧА 7. Можно ли выпрямить поле направлений уравнения $\dot{x} = x^2$ на всей плоскости сохраняющим время диффеоморфизмом?

ОТВЕТ. Нет.

Основная теорема о выпрямлении открыта, в сущности, Ньютона. В знаменитом «втором письме» Ньютона к секретарю Королевского общества Ольденбурга (от 24 октября 1676 года) он зашифровал метод ее доказательства в виде второй (длинной) анаграммы (переписку с Лейбницем, жившим в Германии, Ньютон предпочитал вести через Ольденбурга). В современных терминах метод Ньютона состоит в следующем.

Пусть дано уравнение $\dot{x} = v(t, x)$. Будем искать выпрямляющий диффеоморфизм $y = h(t, x)$, для которого $y = x$ при $t = 0$ (время не преобразовываем). Из условия $\dot{y} = 0$ получаем для h уравнение $\partial h / \partial t + (\partial h / \partial x)v \equiv 0$. Разложим v и h в ряды по степеням t :

$$h = h_0 + th_1 + \dots, \quad v = v_0 + tv_1 + \dots$$

Тогда $h_0(x) \equiv x$, поэтому $\partial h / \partial x = E + th_{1*} + \dots$. Подставим ряды для h и для v в уравнение для h . Развернем левую часть в ряд по t . Приведем нулю коэффициенты при t^0, t^1, \dots в этом ряду (на основании единственности коэффициентов ряда Тейлора). Мы получим последовательно

$$h_1 + v_0 = 0, \quad 2h_2 + h_{1*}v_0 + v_1 = 0, \quad \dots$$

В уравнение для h_k входят, кроме него, лишь производные от h_m с меньшими номерами. Поэтому мы можем последовательно («рекуррентно») найти сначала h_1 , потом h_2 и так все члены искомого ряда.

В этом состоит *метод Ньютона интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов*. Чтобы применять этот метод, нужно было уметь разлагать данные функции в ряды. Для этого Ньютону пришлось открыть свою формулу бинома $(1+t)^a = 1 + at + \dots$

Задача 8. Решить методом Ньютона уравнение $\dot{x} = x$ с начальным условием $\varphi(0) = 1$.

Решение. $\varphi = 1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \dots \Rightarrow \varphi_1 + 2\varphi_2 t + 3\varphi_3 t^2 + \dots = 1 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \dots$, следовательно, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \varphi_1/2$, $\varphi_3 = \varphi_2/3, \dots$, откуда $\varphi_k = 1/k!$. Так и был впервые выведен ряд для экспоненты.

Все дальнейшее развитие анализа даже и сегодня следует по намеченному Ньютоном пути.

Доказательством сходимости построенных Ньютоном рядов много занимались в XIX веке. Сходимость рядов для h в аналитическом случае была доказана Коши¹. Теорема Коши была перенесена на случаи конечной гладкости Пикаром, его доказательство и изложено в § 32.

Основная теорема 1 — утверждение такого же характера, как теоремы линейной алгебры о приведении квадратичных форм или матриц линейных операторов к нормальному виду. Она дает исчерпывающее описание локального поведения поля направлений, сводя все вопросы к тривиальному случаю параллельного поля.

В анализе родственной теоремой является теорема о неявной функции. Гладкое отображение $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *невырожденным в точке 0*, если ранг производной в этой точке имеет максимальное возможное значение (т. е. равен меньшему из чисел m и n). Пусть $f(0) = 0$.

Два таких отображения f, g называются *локально эквивалентными в точке 0*, если одно из них переходит в другое под действием диффеоморфизмов пространств прообраза и образа, оставляющих 0 на месте: $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \circ h = k \circ g$.

Иными словами, *два отображения локально эквивалентны, если при подходящих выборах допустимых систем локальных координат в прообразе и в образе (с началом в 0) они записываются одинаковыми формулами*.

Теорема о неявной функции. *В окрестности невырожденных точек всякие два гладких отображения (пространств фиксированных размерностей m и n) эквивалентны друг другу.*

¹На необходимость доказательства сходимости обратил внимание еще Эйлер, заметивший, что ряды, получаемые аналогичным путем в других задачах, иногда расходятся. Эйлер искал в виде ряда по t решение уравнения $dx/dt = (x-t)/t^2$, равное 0 при $t = 0$. Получился всюду расходящийся ряд $x = \sum(k-1)!t^k$.

В частности, всякое отображение эквивалентно своей линейной части в невырожденной точке. Поэтому сформулированная теорема является одной из многочисленных теорем о линеаризации.

В качестве локальной нормальной формы, к которой приводится отображение f диффеоморфизмами h и k , естественно выбрать следующую простейшую:

$$y_i = x_i, \quad \text{при } i \leq r, \quad y_i = 0 \quad \text{при } i > r,$$

где $r = \min(m, n)$ — ранг производной f в нуле, x_i — координаты точки в пространстве-прообразе, y_i — в пространстве образа. Иными словами, f — вложение, если размерность прообраза меньше, чем образа, и расслоение — в противном случае.

Читатель, привыкший к более сложным формулировкам теоремы о неявной функции, легко проверит их эквивалентность приведенной простой геометрической формулировке.

Все перечисленные теоремы о нормальных формах описывают орбиты действий различных групп («замен переменных») на множествах (матриц, форм, полей, отображений, соответственно).

2. Теоремы существования и единственности. Из основной теоремы 1 о выпрямлении вытекает

Следствие 1. *Через каждую точку области, в которой задано гладкое поле направлений, проходит интегральная кривая.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим выпрямляющий данное поле диффеоморфизм. Выпрямленное поле состоит из параллельных направлений. В нем через каждую точку проходит интегральная кривая (а именно прямая). Диффеоморфизм, обратный к выпрямляющему, переводит эту прямую в исключенную интегральную кривую.

Следствие 2. *Две интегральные кривые гладкого поля направлений, имеющие общую точку, совпадают в окрестности этой точки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Для выпрямленного поля это очевидно, а выпрямляющий диффеоморфизм переводит интегральные кривые исходного поля в интегральные кривые выпрямленного.

Следствие 3. *Решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ с начальным условием (t_0, x_0) из области гладкости правой части существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки t_0).*