

ЗАДАЧА 7. Доказать, что всякое решение уравнения Гамильтона – Якоби $\sum(\partial u / \partial x_i)^2 = 1$ в достаточно малой окрестности любой точки евклидова пространства является суммой расстояния до некоторой гладкой гиперповерхности и константы.

ЗАДАЧА 8. Доказать, что характеристики уравнения Гамильтона – Якоби $H = 0$ проектируются на пространство (x, p) в виде фазовых кривых уравнений Гамильтона $\dot{x} = H_p, \dot{p} = -H_x$, лежащих на поверхности нулевого уровня функции Гамильтона.

§ 12. Консервативная система с одной степенью свободы

В качестве примера применения первого интеграла к исследованию дифференциального уравнения мы рассмотрим здесь механическую систему с одной степенью свободы, без трения.

1. Определения. Консервативной системой с одной степенью свободы называется система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = F(x), \quad (1)$$

где F — дифференцируемая на некотором интервале I вещественной оси x функция.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x_1), \quad (x_1, x_2) \in I \times \mathbb{R}. \quad (2)$$

В механике принята следующая терминология:

I — конфигурационное пространство;

$x_1 = x$ — координата;

$x_2 = \dot{x}$ — скорость;

\ddot{x} — ускорение;

$I \times \mathbb{R}$ — фазовое пространство;

(1) — уравнение Ньютона;

F — силовое поле;

$F(x)$ — сила.

Рассмотрим еще следующие функции на фазовом пространстве:

$T = \frac{\dot{x}^2}{2} = \frac{x_2^2}{2}$ — кинетическая энергия;

$U = - \int_{x_0}^x F(\xi) d\xi$ — потенциальная энергия;
 $E = T + U$ — полная механическая энергия.

Очевидно, $F(x) = -\frac{dU}{dx}$, так что потенциальная энергия определяет систему.

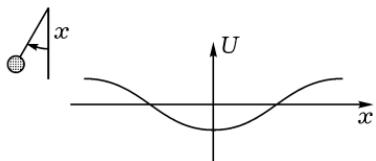


Рис. 92. Потенциальная энергия маятника

ПРИМЕР 1. Для маятника § 1 (рис. 92),
 $\ddot{x} = -\sin x$, x — угол отклонения,
 $F(x) = -\sin x$, $U(x) = -\cos x$. Для
уравнения малых колебаний маятни-
ка $\ddot{x} = -x$

$$F(x) = -x, \quad U(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Для уравнения малых колебаний перевернутого маятника $\ddot{x} = x$ (рис. 93)

$$F(x) = x, \quad U(x) = -\frac{x^2}{2}.$$

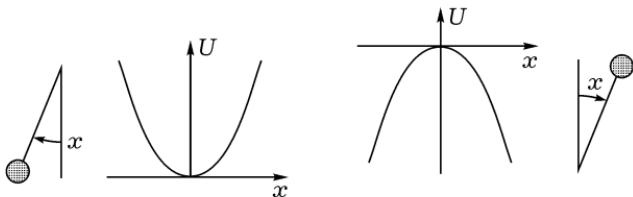


Рис. 93. Потенциальная энергия маятника вблизи нижнего и верхнего положений равновесия

2. Закон сохранения энергии.

Теорема. Полная энергия E является первым интегралом системы (2).

Доказательство.

Имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{x_2(t)^2}{2} + U(x_1(t)) \right) = x_2 \dot{x}_2 + U' \dot{x}_1 = x_2 F(x_1) - F(x_1)x_2 = 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет исследовать и явно «в квадратурах» решать уравнения вида (1), например, уравнение маятника.

3. Линии уровня энергии. Изучим фазовые кривые системы (2). Каждая из них целиком лежит на одном множестве уровня энергии. Исследуем эти множества уровня.

Теорема. *Множество уровня энергии*

$$\left\{ (x_1, x_2) : \frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E \right\}$$

является гладкой кривой в окрестности каждой своей точки, исключая лишь положения равновесия, т. е. точки (x_1, x_2) , где

$$F(x_1) = 0, \quad x_2 = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Воспользуемся теоремой о неявной функции. Имеем

$$\frac{\partial E}{\partial x_1} = -F(x_1), \quad \frac{\partial E}{\partial x_2} = x_2.$$

Если одна из производных отлична от 0, то в окрестности рассматриваемой точки множество уровня E является графиком дифференцируемой функции вида $x_1 = x_1(x_2)$ или $x_2 = x_2(x_1)$. Теорема доказана.

Заметим, что исключенные выше точки (x_1, x_2) , где $F(x_1) = 0$ и $x_2 = 0$, — это в точности стационарные точки (положения равновесия) системы (2) и особые точки векторного поля фазовой скорости. Далее, эти же точки являются критическими точками¹ полной энергии $E(x_1, x_2)$. Наконец, точки x_1 , где $F(x_1) = 0$, — это критические точки потенциальной энергии U .

Чтобы нарисовать линии уровня энергии, полезно представлять себе шарик, катящийся в «потенциальной яме» U (рис. 94).

Зафиксируем значение полной энергии E .

¹ Критической точкой функции называется точка, в которой полный дифференциал функции равен нулю. Значение функции в такой точке называется *критическим значением*.

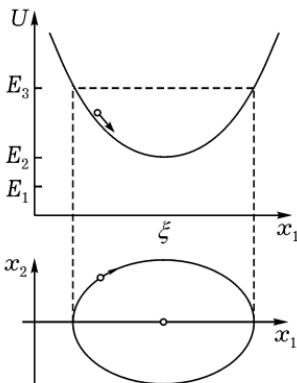


Рис. 94. Шарик в потенциальной яме и фазовая кривая

Заметим, что кинетическая энергия неотрицательна. Поэтому потенциальная энергия не превосходит полной. Значит, линия уровня энергии E проектируется на конфигурационное пространство (на ось x_1) в множество не превосходящих E значений потенциальной энергии $\{x_1 \in I : U(x_1) \leq E\}$ (шарик не может подняться выше уровня E в потенциальной яме).

Далее, скорость тем больше (по абсолютной величине), чем меньше потенциальная энергия: $|x_2| = \sqrt{2(E - U(x_1))}$ (скатываясь в яму, шарик набирает скорость, а поднимаясь, теряет ее). В «точках поворота», где $U(x_1) = E$, скорость равна 0.

Из четности энергии по отношению к x_2 следует, что линия уровня энергии симметрична относительно оси x_1 (шарик проходит каждую точку туда и обратно с одинаковой скоростью).

Этих простых соображений достаточно, чтобы рисовать линии уровня энергии систем с разнообразными потенциалами U . Рассмотрим сначала простейший случай (бесконечно глубокая потенциальная яма с одним притягивающим центром ξ), когда $F(x)$ монотонно убывает, $F(\xi) = 0$, $I = \mathbb{R}$ (рис. 94).

Если значение полной энергии E_1 меньше минимума потенциальной E_2 , то множество уровня $E = E_1$ пусто (движение шарика физически невозможно). Множество уровня $E = E_2$ состоит из одной точки $(\xi, 0)$ (шарик покоятся на дне ямы).

Если значение E_3 полной энергии больше критического значения $E_2 = U(\xi)$, то множество уровня $E = E_3$ — гладкая замкнутая симметричная кривая, окружающая положение равновесия $(\xi, 0)$ на фазовой плоскости (шарик катается в яме взад и вперед; он поднимается до высоты E_3 , в этот момент его скорость обращается в 0, и он скатывается обратно в яму, проходит ξ , в этот момент его скорость максимальна, поднимается с другой стороны и т. д.).

При исследовании более сложных случаев следует поступать подобным же образом, последовательно увеличивая значения полной энергии E и останавливаясь на значениях E , равных критическим значениям потенциальной энергии $U(\xi)$ (где $U'(\xi) = 0$), следя каж-

дый раз за кривыми со значениями E , немного меньшими и немного большими критических.

ПРИМЕР 2. Пусть потенциальная энергия U имеет три критические точки: ξ_1 (минимум), ξ_2 (локальный максимум), ξ_3 (локальный минимум). На рис. 95 показаны линии уровня $E_1 = U(\xi_1)$, $U(\xi_1) < E_2 < U(\xi_3)$, $E_3 = U(\xi_3)$, $U(\xi_3) < E_4 < U(\xi_2)$, $E_5 = U(\xi_2)$, $E_6 > U(\xi_2)$.

ЗАДАЧА 1. Нарисовать линии уровня энергии для уравнения маятника $\ddot{x} = -\sin x$ и для уравнений маятника вблизи нижнего и верхнего положений равновесия ($\ddot{x} = -x$ и $\ddot{x} = x$).

ЗАДАЧА 2. Нарисовать линии уровня энергии для задачи Кеплера¹ $U = -\frac{1}{x} + \frac{C}{x^2}$ и для потенциалов, представленных на рис. 96.

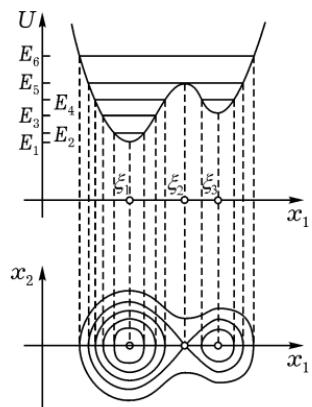


Рис. 95. Линии уровня энергии

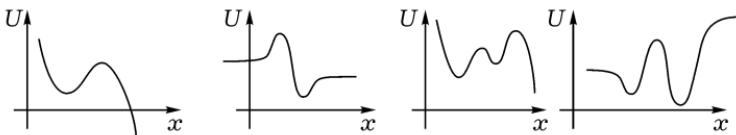


Рис. 96. Нарисуйте линии уровня энергии

4. Линии уровня энергии вблизи особой точки. При исследовании поведения линий уровня вблизи критического значения энергии полезно помнить о следующих обстоятельствах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если потенциальная энергия — квадратичная форма $U = kx^2/2$, то линии уровня энергии — кривые второго порядка $2E = x_2^2 + kx_1^2$.

В случае притяжения $k > 0$ (т.е. критическая точка 0 — минимум потенциальной энергии U (рис. 97)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные эллипсы с центром в 0.

¹ Уравнением Ньютона с таким потенциалом описывается изменение расстояния планет и комет от Солнца.

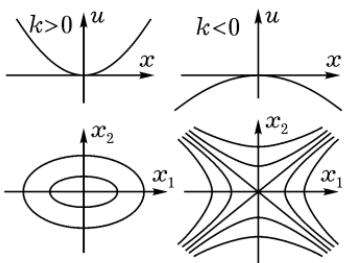


Рис. 97. Линии уровня энергии для притягивающего и отталкивающего квадратичных потенциалов

В случае отталкивания $k < 0$ (т. е. критическая точка 0 — максимум потенциальной энергии (рис. 97)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные гиперболы с центром в 0 и пара их асимптот: $x_2 = \pm\sqrt{k}x_1$. Эти асимптоты называются также *сепаратрисами*, так как они отделяют друг от друга гиперболы разных типов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В окрестности невырожденной критической точки приращение функции является квадратичной формой, если только надлежащим образом выбрать координату.

Точка 0 является критической точкой дифференцируемой функции f , если $f'(0) = 0$. Критическая точка 0 *невырождена*, если $f''(0) \neq 0$. Предположим, что $f'(0) = 0$.

Лемма (Морса¹). В окрестности невырожденной критической точки 0 можно выбрать координату y так, что $f = Cy^2$, $C = \operatorname{sgn} f''(0)$.

Такой координатой будет, конечно, $y = \operatorname{sgn} x \sqrt{|f(x)|}$. Утверждение состоит в том, что соответствие $x \mapsto y$ в окрестности точки 0 диффеоморфно.

Для доказательства удобно воспользоваться следующим предложением:

Лемма (Адамара). Пусть f — дифференцируемая (класса C^r) функция, равная в точке $x = 0$ нулю. Тогда $f(x) = xg(x)$, где g — дифференцируемая (класса C^{r-1} в окрестности точки $x = 0$) функция.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Имеем

$$f(x) = \int_0^1 \frac{df(tx)}{dt} dt = \int_0^1 f'(tx)x dt = x \int_0^1 f'(tx) dt;$$

функция $g(x) = \int_0^1 f'(tx) dt$ класса C^{r-1} , и лемма доказана.

Применим лемму Адамара к функции f леммы Морса дважды. Найдем $f = x^2\varphi(x)$, где $2\varphi(0) = f''(0) \neq 0$. Итак, $y = x\sqrt{|\varphi(x)|}$. Лемма

¹Обе леммы можно распространить на функции многих переменных.

Морса доказана, так как функция $\sqrt{|\varphi(x)|}$ в окрестности точки $x = 0$ дифференцируема ($r - 2$ раза, если f класса C^r).

Таким образом, линии уровня энергии в окрестности невырожденной критической точки превращаются либо в эллипсы, либо в гиперболы при диффеоморфном изменении системы координат (x_1, x_2) .

Задача 1. Найти касательные к сепаратрисам отталкивающей особой точки ($U''(\xi) < 0$).

Ответ. $x_2 = \pm\sqrt{|U''(\xi)|}(x_1 - \xi)$ (рис. 98).

5. Продолжение решений уравнения Ньютона. Пусть потенциальная энергия определена на всей оси x . Из закона сохранения энергии непосредственно вытекает

Теорема. Если потенциальная энергия U всюду положительна¹, то каждое решение уравнения

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \quad (11)$$

продолжается неограниченно.

ПРИМЕР 1. Пусть $U = -x^4/2$. Решение $x = 1/(t-1)$ нельзя продолжить до $t = 1$.

Установим сначала следующее утверждение, называемое *априорной оценкой*:

Лемма. Если решение существует при $|t| < \tau$, то оно удовлетворяет неравенствам $|\dot{x}(t)| \leq \sqrt{2E_0}$, $|x(t) - x(0)| < \sqrt{2E_0}|t|$, где $E_0 = \frac{\dot{x}(0)^2}{2} + U(x(0))$ — начальное значение энергии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}(t)^2}{2} + U(x(t)) = E_0,$$

и поскольку $U > 0$, первое неравенство доказано. Второе неравенство вытекает из первого, так как $x(t) - x(0) = \int_0^t \dot{x}(\theta) d\theta$. Лемма доказана.

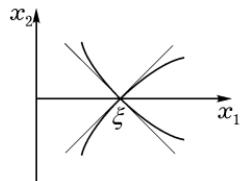


Рис. 98. Касательные к сепаратрисам отталкивающей особой точки

¹Разумеется, изменение потенциальной энергии U на константу не меняет уравнения (11). Существенно лишь, что U ограничена снизу.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Пусть T — произвольное положительное число.

Рассмотрим прямоугольник Π (рис. 99) на фазовой плоскости

$$|x_1 - x_1(0)| \leq 2\sqrt{2E_0}T, \quad |x_2| \leq 2\sqrt{2E_0}.$$

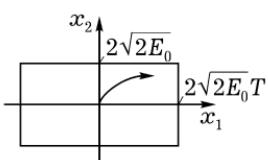


Рис. 99. Прямоугольник, откуда фазовая точка не выйдет за время T

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве (x_1, x_2, t) параллелепипед $|t| \leq T$, $(x_1, x_2) \in \Pi$. По теореме о продолжении решение можно продолжить до границы параллелепипеда. Из леммы следует, что решение может выйти лишь на те грани параллелепипеда, где $|t| = T$. Итак, решение можно продолжать до любого $t = \pm T$, следовательно, — неограниченно.

Задача 1. Доказать неограниченную продолжаемость решения системы уравнений Ньютона

$$m_i \ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad m_i > 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

в случае положительной потенциальной энергии ($U > 0$).

6. Некритические линии уровня энергии. Предположим, что потенциальная энергия U определена на всей оси x . Пусть E — некритическое значение энергии, т. е. E не равно значению функции U ни в одной из ее критических точек.

Рассмотрим множество точек, где значение U меньше E , $\{x: U(x) < E\}$. Это множество (рис. 100) состоит из конечного или счетного числа интервалов, так как функция U непрерывна (два из этих интегралов могут простираться в бесконечность). На концах интервалов $U(x) = E$, следовательно, $U'(x) \neq 0$ (так как E — некритическое значение). Каждая точка множества $\{x: U(x) \leq E\}$ является по этой причине концом ровно одного интервала меньших значений. Поэтому все множество $\{x: U(x) \leq E\}$ есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся отрезков и, быть может, одного или двух уходящих в бесконечность лучей, или же совпадает со всей осью x .

Рассмотрим (рис. 101) один из таких отрезков, $a \leq x \leq b$,

$$U(a) = U(b) = E, \quad U(x) < E \quad \text{при } a < x < b.$$

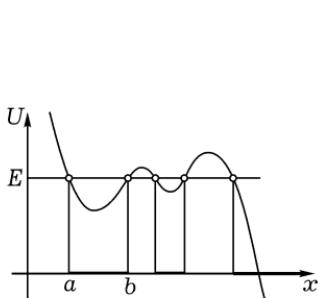


Рис. 100. Множество точек x , где $U(x) < E$

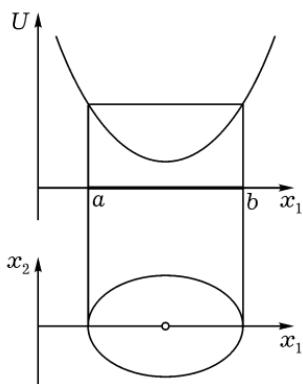


Рис. 101. Фазовая кривая, диффеоморфная окружности

Теорема. Уравнение $\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E$, $a \leq x_1 \leq b$, задает на плоскости (x_1, x_2) гладкую кривую, диффеоморфную окружности. Эта кривая является фазовой кривой системы (2).

Аналогичным образом, луч $a \leq x < \infty$ (или $-\infty < x \leq b$), где $U(x) \leq E$, является проекцией фазовой кривой, диффеоморфной прямой линии, на ось x_1 (рис. 102). Наконец, в случае, если $U(x) < E$ на всей прямой, множество уровня E состоит из двух фазовых кривых

$$x_2 = \pm \sqrt{2(E - U(x_1))}.$$

Итак, множество некритического уровня энергии состоит из конечного или счетного числа гладких фазовых кривых.

7. Доказательство теоремы п. 6. Закон сохранения энергии позволяет явно решить уравнение Ньютона. Действительно, при фиксированном значении полной энергии E величина (но не знак) скорости x определяется положением x :

$$x = \pm \sqrt{2(E - U(x))}, \quad (3)$$

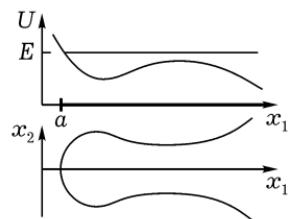


Рис. 102. Фазовая кривая, диффеоморфная прямой

а это — уравнение с *одномерным* фазовым пространством, которое мы уже умеем решать.

Пусть (x_1, x_2) — точка нашего множества уровня, причем $x_2 > 0$ (рис. 103). Решение φ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$ ищем из соотношения (3):

$$t - t_0 = \int_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} \quad (4)$$

для t , близких к t_0 .

Заметим теперь, что интеграл $\frac{T}{2} = \int_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$ сходится, так как $U'(a) \neq 0$, $U'(b) \neq 0$. Отсюда следует, что формула (4) задает непрерывную на некотором отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ функцию φ , причем $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$. Эта функция везде удовлетворяет уравнению Ньютона (рис. 104).

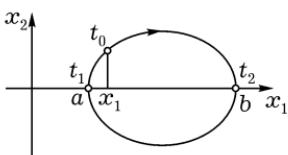


Рис. 103. Половину фазовой кривой (от a до b) фазовая точка проходит за конечное время $T/2 = t_2 - t_1$

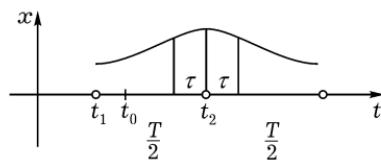


Рис. 104. Продолжение решения уравнения Ньютона с помощью отражений

Интервал (t_1, t_2) имеет длину $T/2$. Продолжим φ на следующий интервал длины $T/2$ из соображений симметрии: $\varphi(t_2 + \tau) = \varphi(t_2 - \tau)$, $0 \leq \tau \leq T/2$, и далее периодически: $\varphi(t + T) = \varphi(t)$. Функция φ , построенная теперь на всей прямой, всюду удовлетворяет уравнению Ньютона. Кроме того, $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$.

Итак, мы построили решение системы (2) с начальным условием (x_1, x_2) . Оно оказалось периодическим, с периодом T . Соответствующая замкнутая фазовая кривая есть в точности часть множества уров-

ня E над отрезком $a \leq x \leq b$. Эта кривая диффеоморфна окружности, как всякая замкнутая фазовая кривая (см. § 9).

Случай, когда интервал простирается до бесконечности (в одну сторону или в обе), проще рассмотренного и предоставляем читателю.

8. Критические линии уровня. Критические линии уровня могут быть устроены более сложно. Заметим, что такая линия содержит неподвижные точки (x_1, x_2) (где $U'(x_1) = 0, x_2 = 0$), каждая из которых уже является фазовой кривой. Если на отрезке $a \leq x \leq b$ всюду $U(x) < E$, кроме $U(a) = U(b) = E$, и оба конца — критические точки ($U'(a) = U'(b) = 0$), то две открытые дуги (рис. 105) $x_2 = \pm\sqrt{2(E - U(x_1))}$, $a < x_1 < b$, являются фазовыми кривыми. Время, затрачиваемое фазовой точкой на прохождение такой дуги, бесконечно (теорема продолжения из п. 5 + единственность).

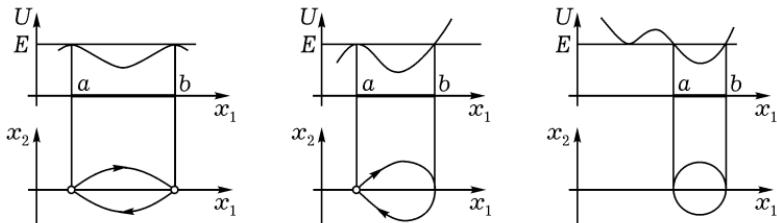


Рис. 105. Разбиение критической линии уровня энергии на фазовые кривые

Если $U'(a) = 0, U'(b) \neq 0$ (рис. 105), то уравнение

$$\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E, \quad a < x_1 \leq b,$$

определяет незамкнутую фазовую кривую. Наконец, если $U'(a) \neq 0, U'(b) \neq 0$ (рис. 105), то часть множества критического уровня над отрезком $a \leq x_1 \leq b$ — замкнутая фазовая кривая, как в случае некритического уровня E .

9. Пример. Применим все сказанное к уравнению маятника

$$\ddot{x} = -\sin x.$$

Потенциальная энергия равна $U(x) = -\cos x$ (рис. 106). Критические точки: $x_1 = k\pi, k = 0, \pm 1, \dots$

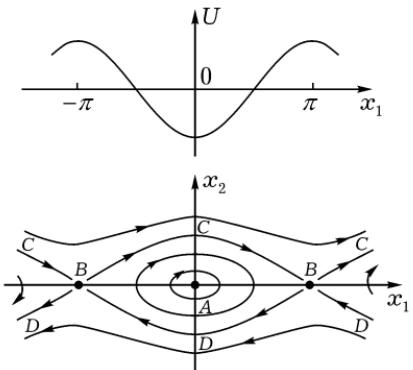


Рис. 106. Фазовые кривые уравнения маятника

Замкнутые фазовые кривые вблизи $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ похожи на эллипсы. Этим фазовым кривым соответствуют малые качания маятника. Их период T мало зависит от амплитуды, пока она мала. При больших значениях постоянной энергии получаются большие замкнутые кривые, пока энергия не достигнет критического значения, равного потенциальной энергии маятника, перевернутого вверх ногами. Период колебаний при этом растет (так как время движения по сепаратрисам, из которых состоит критическое множество уравнения, бесконечное).

Большим значениям энергии соответствуют незамкнутые кривые, на которых x_2 не меняет знака, т. е. маятник не качается, а вращается. Его скорость достигает наибольшего значения в нижнем, а наименьшего — в верхнем положении.

Заметим, что значения x_1 , отличающиеся на $2k\pi$, соответствуют одинаковым положениям маятника. Поэтому фазовым пространством маятника естественно считать не плоскость, а цилиндр $\{x_1 \text{ mod } 2\pi, x_2\}$ (рис. 107).

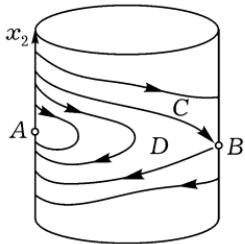


Рис. 107. Цилиндрическое фазовое пространство маятника

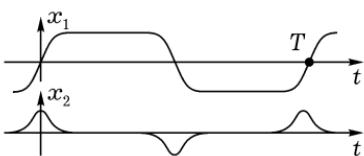


Рис. 108. Угол отклонения маятника и скорость его изменения при амплитуде, близкой к π

Наворачивая на цилиндр нарисованную уже на плоскости картину, получим фазовые кривые маятника на поверхности цилиндра. Все они — замкнутые гладкие кривые, исключая две стационарные точки A , B (нижнее и верхнее положения равновесия) и две сепаратрисы C , D .

ЗАДАЧА 1. Нарисовать графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ для решения с энергией, близкой к критической энергии в верхнем положении, но немногого меньшей.

ОТВЕТ. См. рис. 108. Функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ выражаются через эллиптический синус sn и эллиптический косинус sp . Когда E стремится к меньшему критическому значению, колебания маятника приближаются к гармоническим, а sn и sp переходят в \sin и \cos .

ЗАДАЧА 2. С какой скоростью стремится к бесконечности период T колебаний маятника, когда энергия E стремится к верхнему критическому значению E_1 ?

ОТВЕТ. С логарифмической ($\sim C \ln(E_1 - E)$).

Указание. См. формулу (4).

ЗАДАЧА 3. Нарисовать фазовые кривые систем с потенциальной энергией $U(x) = \pm x \sin x$, $\pm \frac{\sin x}{x}$, $\pm \sin x^2$.

ЗАДАЧА 4. Нарисовать фазовые кривые уравнения Ньютона с силовым полем $F(x) = \pm x \sin x$, $\pm \frac{\sin x}{x}$, $\pm \sin x^2$.

10. Малые возмущения консервативной системы. Исследовав движения консервативной системы, мы можем изучать близкие системы общего вида при помощи теоремы о дифференцируемости по параметру (ср. § 7, 5). При этом мы встретим качественно новые и весьма важные в приложениях явления — так называемые *автоколебания*.

ЗАДАЧА 1. Исследовать фазовые кривые системы, близкой к системе уравнений малых колебаний маятника:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2.$$

Решение. При $\varepsilon = 0$ получаем уравнения малых колебаний маятника. По теореме о дифференцируемости по параметру при малых ε решение (на конечном интервале времени) отличается поправкой порядка ε от гармонических колебаний:

$$x_1 = A \cos(t - t_0), \quad x_2 = -A \sin(t - t_0).$$

Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon < \varepsilon_0(T)$ фазовая точка остается вблизи окружности радиуса A в течение интервала времени T .

В отличие от консервативного случая ($\varepsilon = 0$), при $\varepsilon \neq 0$ фазовая кривая не обязательно замкнута: она может иметь вид спирали (рис. 109), у которой расстояние между соседними витками мало (порядка ε). Чтобы узнать, приближается ли фазовая кривая к началу координат или уходит

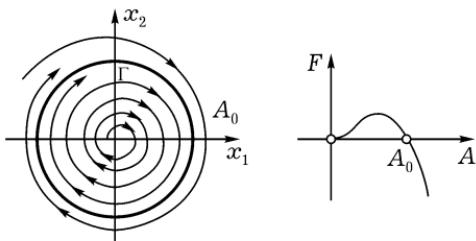


Рис. 109. Фазовые кривые уравнения Ван-дер-Поля и приращение энергии за один оборот

от него, рассмотрим приращение энергии $E = \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2}$ за один оборот вокруг начала координат. Нас будет особенно интересовать знак этого приращения: на раскручивающейся спирали приращение положительно, на сжимающейся — отрицательно, а на цикле равно 0. Выведем приближенную формулу (5) для приращения энергии. Производную энергии по направлению нашего векторного поля легко вычислить: она пропорциональна ε и равна $\dot{E}(x_1, x_2) = \varepsilon(x_1 f_1 + x_2 f_2)$.

Для вычисления приращения энергии за оборот следовало бы проинтегрировать эту функцию вдоль витка фазовой траектории, которая, к сожалению, нам неизвестна. Но мы уже выяснили, что этот виток близок к окружности. Поэтому интеграл можно с точностью до $O(\varepsilon^2)$ брать по окружности S радиуса A :

$$\Delta E = \varepsilon \int_0^{2\pi} \dot{E}(A \cos t, -A \sin t) dt + O(\varepsilon^2).$$

Подставляя вычисленное значение \dot{E} , находим¹

$$\Delta E = \varepsilon F(A) + O(\varepsilon^2). \quad (5)$$

где $F(A) = \oint f_1 dx_2 - f_2 dx_1$ (интеграл берется по окружности радиуса A «против часовой стрелки»).

Вычислив функцию F , мы сможем исследовать поведение фазовых кривых. Если функция F положительна, то приращение энергии ΔE за оборот также положительно (при малых положительных ε). В этом случае фазовая кривая — раскручивающаяся спираль; система совершает нарастающие колебания. Если $F < 0$, то $\Delta E < 0$ и фазовая спираль закручивается. В этом случае колебания затухают.

¹Мы пользуемся тем, что $dx_1 = x_2 dt$ и $dx_2 = -x_1 dt$ вдоль S .

Может случиться, что функция F меняет знак (рис. 109). Пусть A_0 — простой корень функции F . Тогда при малых ε уравнению $\Delta E(x_1, x_2) = 0$ удовлетворяет замкнутая кривая Γ на фазовой плоскости, близкая к окружности радиуса A_0 (это следует из теоремы о неявной функции).

Очевидно, кривая Γ является замкнутой фазовой кривой — предельным циклом нашей системы.

Будут ли близкие фазовые кривые наматываться на цикл или сматываются с него, определяется знаком производной $F' = \frac{dF}{dA} \Big|_{A=A_0}$. Если $\varepsilon F' > 0$, то цикл неустойчив, а если $\varepsilon F' < 0$ — устойчив. Действительно, в первом случае приращение энергии за оборот больше нуля, если фазовая кривая находится вне цикла, и меньше нуля, если внутри; поэтому фазовая кривая всегда удаляется от цикла. Во втором же случае фазовые кривые приближаются к циклу и изнутри, и снаружи, как на рис. 109.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -x + \varepsilon \dot{x}(1-x^2)$ (называемое *уравнением Ван-дер-Поля*). Вычисляя интеграл (5) при $f_1 = 0$, $f_2 = x_2(1-x_1^2)$, получаем $F(A) = \pi \left(A^2 - \frac{A^4}{4} \right)$.

Эта функция имеет простой корень $A_0 = 2$ (рис. 109), причем при меньших A она положительна, а при больших — отрицательна. Поэтому уравнение Ван-дер-Поля имеет при малых ε устойчивый предельный цикл, близкий к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ на фазовой плоскости.

Сравним движения исходной консервативной системы ($\varepsilon = 0$) с тем, что происходит при $\varepsilon \neq 0$. В консервативной системе возможны колебания с любой амплитудой (все фазовые кривые замкнуты). Амплитуда определяется здесь начальными условиями.

В неконсервативной системе возможны качественно иные явления, например устойчивый предельный цикл. В этом случае при весьма разных начальных условиях устанавливается периодическое колебание одной и той же, вполне определенной амплитуды. Этот установившийся режим называется режимом автоколебаний.

Задача *2. Исследовать автоколебательные режимы движения маятника с малым трением под действием постоянного врачающего момента M :

$$\ddot{x} + \sin x + \varepsilon \dot{x} = M.$$

Указание. Эта задача подробно разобрана для любых ε и M в книге А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина «Теория колебаний» (М.: Физматгиз, 1959, гл. 7).

ГЛАВА 3

Линейные системы

Линейные уравнения — едва ли не единственный большой класс дифференциальных уравнений, для которых имеется достаточно полная теория. Эта теория, являющаяся, в сущности, ветвью линейной алгебры, позволяет полностью решить все линейные автономные уравнения.

Теория линейных уравнений полезна в качестве первого приближения и при исследовании нелинейных задач. Например, она позволяет исследовать устойчивость положений равновесия и топологический тип особых точек векторных полей в случаях общего положения.

§ 13. Линейные задачи

Рассмотрим вначале два примера ситуаций, где возникают линейные уравнения.

1. Пример: линеаризация. Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное векторным полем v в фазовом пространстве. Мы уже знаем, что в окрестности неособой точки ($v \neq 0$) поле устроено просто: оно выпрямляется диффеоморфизмом. Рассмотрим теперь устройство поля в окрестности особой точки, т.е. точки, где вектор поля обращается в 0. Такая точка x_0 является стационарным решением нашего уравнения. Если уравнение описывает какой-либо физический процесс, то x_0 — стационарное состояние процесса, его «положение равновесия». Поэтому исследование окрестности особой точки — это изучение того, как будет развиваться процесс при малом отклонении начальных условий от равновесных (пример: верхнее и нижнее положения равновесия маятника).

При исследовании векторного поля в окрестности точки x_0 , где вектор поля равен 0, естественно разложить поле в окрестности этой точки в ряд по формуле Тейлора. Первый член ряда Тейлора — линейный. Отбрасывание остальных членов называется *линеаризацией*. Линеаризованное векторное поле можно рассматривать как пример векторного

поля с особой точкой x_0 . С другой стороны, можно надеяться, что поведение решений исходного и линеаризованного уравнений близко (так как при линеаризации отбрасываются малые высшего порядка). Конечно, вопрос о связи решений исходного и линеаризованного уравнений требует специального исследования. Это исследование основывается на подробном анализе линейного уравнения, которым мы и будем вначале заниматься.

Задача 1. Покажите, что линеаризация — инвариантная, т. е. не зависящая от системы координат, операция.

Точнее пусть поле v в области U задается в системе координат x_i компонентами $v_i(x)$. Пусть особая точка имеет координаты $x_i = 0$ (так что $v_i(0) = 0$, $i = 1, \dots, n$). Тогда исходное уравнение записывается в виде системы

$$\dot{x}_i = v_i(x), \quad i = 1, \dots, n.$$

Определение. *Линеаризованным уравнением называется уравнение*

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} \xi_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{i,j} = \left. \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right|_{x=0}.$$

Рассмотрим касательный вектор $\xi \in T_0 U$ с компонентами ξ_i ($i = 1, \dots, n$). Линеаризованное уравнение можно записать в виде

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

где A — линейное отображение $A: T_0 U \rightarrow T_0 U$, заданное матрицей a_{ij} .

Утверждается, что *отображение A не зависит от системы координат x_i , участвовавшей в его определении*.

Задача 2. Линеаризовать уравнение маятника $\ddot{x} = -\sin x$ вблизи положении равновесия $x_0 = k\pi$, $\dot{x}_0 = 0$.

2. Пример: однопараметрические группы линейных преобразований \mathbb{R}^n . Другая задача, сразу сводящаяся к линейным дифференциальным уравнениям, — это задача описания однопараметрических групп линейных преобразований¹ линейного пространства \mathbb{R}^n .

Заметим, что *касательное пространство к линейному пространству \mathbb{R}^n в любой точке естественно отождествляется с самим линейным пространством*. А именно, мы отождествляем элемент ϕ касательного пространства $T_x \mathbb{R}^n$, представителем которого является кривая φ :

¹Напомним, что мы включаем в определение однопараметрической группы g^t дифференцируемость $g^t x$ по x и t .

$I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = x$, с вектором

$$\mathbf{v} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t) - x}{t} \in \mathbb{R}^n$$

самого пространства \mathbb{R}^n (соответствие $\mathbf{v} \leftrightarrow \dot{\varphi}$ взаимно однозначное).

Это отождествление зависит от структуры *линейного* пространства \mathbb{R}^n и не сохраняется при диффеоморфизмах. Однако в линейных задачах, которыми мы будем теперь заниматься (например, в задаче об однопараметрических группах линейных преобразований), структура линейного пространства в \mathbb{R}^n раз навсегда фиксирована. Поэтому мы теперь *впредь до возвращения к нелинейным задачам отождествляем* $T_x \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$.

Пусть $\{g^t, t \in \mathbb{R}\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований. Рассмотрим движение $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} \tag{1}$$

с начальным условием $\varphi(0) = x_0$, где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор ($\equiv \mathbb{R}$ эндоморфизм), заданный соотношением $A\mathbf{x} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t \mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Указание. См. § 4, п. 4.

Уравнение (1) называется *линейным*. Таким образом, для описания всех однопараметрических групп линейных преобразований достаточно исследовать решения линейных уравнений (1).

Мы увидим далее, что соответствие между однопараметрическими группами $\{g^t\}$ линейных преобразований и линейными уравнениями (1) взаимно однозначно: каждый оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ задает однопараметрическую группу $\{g^t\}$.

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 1$, A — умножение на число k . Тогда g^t — растяжение в e^{kt} раз.

ЗАДАЧА 2. Найти поле скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через точку 0, с угловой скоростью ω .

ОТВЕТ. $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = [\omega, \mathbf{x}]$.

3. Линейное уравнение. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор в вещественном n -мерном пространстве \mathbb{R}^n .

Определение. Линейным уравнением называется уравнение с фазовым пространством \mathbb{R}^n , заданное векторным полем $v(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x})$:

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}. \quad (1)$$

Полный титул уравнения (1): *система n линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами*.

Если в \mathbb{R}^n фиксирована система (линейных) координат x_i , $i = 1, \dots, n$, то уравнение (1) записывается в виде системы n уравнений: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, $i = 1, \dots, n$, где (a_{ij}) — матрица оператора A в рассматриваемой системе координат. Матрица эта называется *матрицей системы*.

Решение уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0) = \mathbf{x}_0$ дается в случае $n = 1$ экспонентой $\varphi(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$.

Оказывается, и в общем случае решение дается той же формулой: нужно только объяснить, что называется экспонентой линейного оператора. Этой задачей мы теперь и займемся.

§ 14. Показательная функция

Функцию e^A , $A \in \mathbb{R}$, можно определить любым из двух эквивалентных способов:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots, \quad (1)$$

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{n} \right)^n \quad (2)$$

(где E означает единицу).

Пусть теперь $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Чтобы определить e^A , прежде всего определим понятие предела последовательности линейных операторов.

1. Норма оператора. Зафиксируем в \mathbb{R}^n скалярное произведение и будем обозначать через $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ ($\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) корень из скалярного квадрата \mathbf{x} .

Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Определение. Нормой A называется число

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|A\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Геометрически $\|A\|$ означает наибольший «коэффициент растяжения» преобразования A .

Задача 1. Докажите, что $0 \leq \|A\| < \infty$.

Указание. $\|A\| = \sup_{\|\mathbf{x}\|=1} \|A\mathbf{x}\|$, сфера компактна, а функция $\|A\mathbf{x}\|$ непрерывна.

Задача 2. Докажите, что $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$, $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$, $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$, где A и $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные операторы, $\lambda \in \mathbb{R}$ — число.

Задача 3. Пусть (a_{ij}) — матрица оператора A в ортонормированном базисе. Покажите, что

$$\max_j \sum_i a_{ij}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2.$$

Указание. См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств. М.: ГИТТЛ, 1956, § 53.

2. Метрическое пространство операторов. Множество L всех линейных операторов $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ само является линейным пространством над полем вещественных чисел (по определению, $(A + \lambda B)\mathbf{x} = A\mathbf{x} + \lambda B\mathbf{x}$).

Задача 1. Найти размерность этого линейного пространства L .

Ответ. n^2 .

Указание. Оператор задается своей матрицей.

Определим расстояние между двумя операторами как норму их разности $\rho(A, B) = \|A - B\|$.

Теорема. Пространство линейных операторов L с метрикой ρ является полным метрическим пространством¹.

¹ Метрическим пространством называется пара, состоящая из множества M и функции $\rho: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$, называемой метрикой, если

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Проверим, что ρ — метрика.

По определению $\rho > 0$, если $A \neq B$, $\rho(A, A) = 0$, $\rho(B, A) = \rho(A, B)$. Неравенство треугольника $\rho(A, B) + \rho(B, C) \geq \rho(A, C)$ вытекает из неравенства $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$ задачи 2 п. 1 ($X = A - B$, $Y = B - C$). Итак, метрика ρ превращает L в метрическое пространство. Его полнота тоже очевидна.

3. Доказательство полноты. Пусть $\{A_i\}$ — последовательность Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(A_m, A_k) < \varepsilon$ при $m, k > N$. Пусть $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Составим последовательность точек $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_i = A_i \mathbf{x}$. Покажем, что $\{\mathbf{x}_i\}$ — последовательность Коши в пространстве \mathbb{R}^n , снабженном евклидовой метрикой $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. Действительно, по определению нормы оператора при $m, k > N$

$$\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \leq \rho(A_m, A_k) \|\mathbf{x}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|.$$

Поскольку $\|\mathbf{x}\|$ — фиксированное (не зависящее от m, k) число, отсюда следует, что $\{\mathbf{x}_i\}$ — последовательность Коши. Пространство \mathbb{R}^n полно. Поэтому существует предел

$$\mathbf{y} = \lim_{i \rightarrow \infty} \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n.$$

Заметим, что $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{x}\|$ при $k > N(\varepsilon)$, причем $N(\varepsilon)$ то же, что и выше, не зависящее от \mathbf{x} число.

Точка \mathbf{y} зависит от точки \mathbf{x} линейно (предел суммы равен сумме пределов). Мы получаем линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $A \in L$. Мы видим, что при $k > N(\varepsilon)$

$$\rho(A_k, A) = \|A_k - A\| = \sup_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{y}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq \varepsilon.$$

Значит, $A = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ и пространство L полно.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что последовательность операторов A_i сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность их матриц в фиксированном базисе.

Выполните отсюда другое доказательство полноты.

- 1) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $(\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = \mathbf{y})$;
- 2) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$;
- 3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + \rho(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in M$.

Последовательность \mathbf{x}_i точек метрического пространства M называется *последовательностью Коши*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \rho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) < \varepsilon, \forall i, j > N$. Последовательность \mathbf{x}_i сходится к точке \mathbf{x} , если $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) < \varepsilon, \forall i > N$. Пространство называется *полным*, если всякая последовательность Коши сходится.

4. Ряды. Пусть дано вещественное линейное пространство M , пре-
вращенное в метрическое полное пространство метрикой ρ такой, что
расстояние между двумя точками M зависит лишь от их разности,
причем $\rho(\lambda x, 0) = |\lambda|\rho(x, 0)$, ($x \in M, \lambda \in \mathbb{R}$). Такое пространство на-
зывается нормированным, а функция $\rho(x, 0)$ называется нормой x и
обозначается $\|x\|$.

ПРИМЕР 1. Евклидово пространство $M = \mathbb{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y)(x - y)}.$$

ПРИМЕР 2. Пространство L линейных операторов $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ с метри-
кой $\rho(A, B) = \|A - B\|$.

Мы будем обозначать расстояние между элементами A и B из M
через $\|A - B\|$.

Поскольку элементы M можно складывать и умножать на числа
и последовательности Коши в M имеют пределы, теория рядов вида
 $A_1 + A_2 + \dots, A_i \in M$, буквально повторяет теорию числовых рядов.

Теория функциональных рядов также непосредственно переносит-
ся на функции со значениями в M .

ЗАДАЧА 1. Докажите следующие две теоремы:

ПРИЗНАК ВЕЙЕРШТРАССА. Если ряд $\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ функций $f_i : X \rightarrow M$
мажорируется сходящимся числовым рядом:

$$\|f_i\| \leq a_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \quad a_i \in \mathbb{R},$$

то он сходится абсолютно и равномерно на X .

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ РЯДА. Если ряд $\sum f_i$ функций $f_i : \mathbb{R} \rightarrow M$ схо-
дится и ряд из производных $\frac{df_i}{dt}$ сходится равномерно, то он сходится
к производной $\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{\infty} f_i$ (t — координата на прямой \mathbb{R}).

Указание. Доказательство для случая $M = \mathbb{R}$ имеется в курсе анализа.
На общий случай оно переносится дословно.

5. Определение экспоненты e^A . Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линей-
ный оператор.

Определение. Экспонентой e^A оператора A называется линейный оператор из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n $e_A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ (где E — тождественный оператор, $E\mathbf{x} = \mathbf{x}$).

Теорема. Ряд e^A сходится при любом A равномерно на каждом множестве $X = \{A : \|A\| \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Доказательство.

Пусть $\|A\| \leq a$. Тогда наш ряд мажорируется числовым рядом $1 + a + \frac{a^2}{2!} + \dots$, сходящимся к e^a . По признаку Вейерштрасса ряд e^A равномерно сходится при $\|A\| \leq a$.

Задача 1. Вычислить матрицу e^{At} , если матрица A имеет вид

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ.

$$1) \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}, \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3) \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad 4) \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Пример. Рассмотрим множество многочленов степени меньше n от одного переменного x с вещественными коэффициентами.

Это множество имеет естественную структуру вещественного линейного пространства: многочлены можно складывать и умножать на числа.

Задача 1. Найти размерность пространства многочленов степени меньше n .

Ответ. n ; базис, например, $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

Будем обозначать пространство многочленов степени меньше n через \mathbb{R}^n .¹ Производная многочлена степени меньше n есть многочлен степени меньше n . Возникает отображение

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad Ap = \frac{dp}{dx}.$$

¹ Таким образом, мы отождествляем пространство многочленов, в котором выбран указанный выше базис, с изоморфным ему координатным пространством \mathbb{R}^n .

ЗАДАЧА 2. Доказать, что A — линейный оператор; найти его ядро и образ.

ОТВЕТ. $\text{Ker } A = \mathbb{R}^1$, $\text{Im } A = \mathbb{R}^{n-1}$.

С другой стороны, обозначим через H^t ($t \in \mathbb{R}$) оператор сдвига на t , переводящий многочлен $p(x)$ в $p(x+t)$.

ЗАДАЧА 3. Доказать, что $H^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Найти его ядро и образ.

ОТВЕТ. $\text{Ker } H^t = 0$, $\text{Im } H^t = \mathbb{R}^n$.

Наконец, составим оператор e^{At} .

Теорема. $e^{At} = H^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В курсе анализа эта теорема называется формулой Тейлора для многочленов:

$$p(x+t) = p(x) + \frac{t}{1!} \frac{dp}{dx} + \frac{t^2}{2!} \frac{d^2p}{dx^2} + \dots$$

7. Экспонента диагонального оператора. Пусть матрица оператора A диагональна, с диагональными элементами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Легко видеть, что матрица оператора e^A также диагональна, с диагональными элементами $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$.

Определение. Оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *диагональным*, если его матрица в каком-нибудь базисе диагональна. Такой базис называется *собственным*.

ЗАДАЧА 1. Привести пример недиагонального оператора.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что собственные числа диагонального оператора A вещественны.

ЗАДАЧА 3. Если все n собственных чисел оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ вещественны и различны, то он диагонален.

Пусть A — диагональный оператор. Тогда вычисление e^A проще всего проводить в собственном базисе.

ПРИМЕР 1. Пусть матрица оператора A имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе e_1, e_2 . Поскольку собственные числа $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0$ вещественны и различны, оператор A диагонален. Собственный базис: $f_1 = e_1 + e_2, f_2 = e_1 - e_2$. Матрица оператора A в собственном базисе есть $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Поэтому матрица оператора e^A в собственном базисе имеет вид $\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Итак, в исходном базисе матрица оператора e^A имеет вид

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^2 + 1 & e^2 - 1 \\ e^2 - 1 & e^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

8. Экспонента нильпотентного оператора.

Определение. Оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна 0.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нильпотентный. Вообще, если все элементы матрицы оператора на диагонали и ниже равны 0, то оператор нильпотентный.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве многочленов степени меньше n нильпотентный.

Если оператор A нильпотентный, то ряд для e^A обрывается, т. е. сводится к конечной сумме.

ЗАДАЧА 3. Вычислить e^{tA} ($t \in \mathbb{R}$), где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

(1 только над главной диагональю).

Указание. Один из способов решения этой задачи — формула Тейлора для многочленов. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ имеет матрицу указанного вида в некотором базисе (каком?). Решение см. в § 25.

9. Квазимногочлены. Пусть λ — вещественное число. *Квазимногочленом с показателем λ* называется произведение $e^{\lambda x}p(x)$, где p — многочлен. Степень многочлена p называется степенью квазимногочлена. Зафиксируем значение показателя λ .

ЗАДАЧА 1. Докажите, что множество всех квазимногочленов степени меньше n — линейное пространство. Найдите его размерность.

ОТВЕТ. n . Базис, например, $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{n-1}e^{\lambda x}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В понятии квазимногочлена, как и в понятии многочлена, кроется некоторая двусмыслинность. Можно понимать (квази-)многочлен как *выражение*, составленное из знаков и букв; в таком случае решение предыдущей задачи очевидно. С другой стороны, можно понимать под (квази-)многочленом *функцию*, т. е. отображение $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

В действительности оба понимания равносильны (когда коэффициенты многочленов вещественные или комплексные числа; мы сейчас рассматриваем (квази-) многочлен с вещественными коэффициентами).

ЗАДАЧА 2. Докажите, что каждая функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которую можно записать в виде квазимногочлена, записывается в виде квазимногочлена единственным образом.

Указание. Достаточно доказать, что соотношение $e^{\lambda x}p(x) \equiv 0$ влечет равенство нулю всех коэффициентов многочлена $p(x)$.

Обозначим n -мерное линейное пространство квазимногочленов степени меньше n с показателем λ через \mathbb{R}^n .

Теорема. *Оператор дифференцирования* $\frac{d}{dx}$ — линейный оператор $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, и при любом $t \in \mathbb{R}$

$$e^{t \frac{d}{dt}} = H^t, \tag{3}$$

где $H^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — оператор сдвига на t (т. е. $(H^t f)(x) = f(x + t)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы должны доказать прежде всего, что производная и сдвиг квазимногочлена степени меньше n с показателем λ суть снова квазимногочлены степени меньше n с показателем λ .

Действительно,

$$\frac{d}{dx}(e^{\lambda x} p(x)) = \lambda e^{\lambda x} p(x) + e^{\lambda x} p'(x), \quad e^{\lambda(x+t)} p(x+t) = e^{\lambda x} (e^{\lambda t} p(x+t)).$$

Линейность дифференцирования и сдвига сомнений не вызывает. Остается заметить, что ряд Тейлора для квазимногочлена абсолютно сходится на всей прямой (так как абсолютно сходятся ряды Тейлора для $e^{\lambda x}$ и для $p(x)$) — это и выражает формула (3).

ЗАДАЧА 3. Вычислить матрицу оператора e^{At} , если матрица A имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

(на диагонали λ , над диагональю 1, остальные 0). Например, вычислить

$$\exp \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Указание. Именно такой вид имеет матрица оператора дифференцирования в пространстве квазимногочленов (в каком базисе?). Решение см. в § 25.

§ 15. Свойства экспоненты

Установим теперь ряд свойств оператора $e^A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; эти свойства позволяют нам использовать e^A для решения линейных дифференциальных уравнений.

1. Групповое свойство. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Теорема. Семейство линейных операторов $e^{tA}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, является однопараметрической группой линейных преобразований \mathbb{R}^n .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Поскольку мы уже знаем, что e^{tA} — линейный оператор, нужно только проверить, что

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA} \tag{1}$$

и что e^{tA} дифференцируемо зависит от t . Мы докажем, что

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}, \quad (2)$$

как и положено экспоненте.

Чтобы доказать групповое свойство (1), перемножим сначала формальные ряды по степеням A :

$$\begin{aligned} (E + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots)(E + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + \dots) &= \\ &= E + (t+s)A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2} \right) A^2 + \dots \end{aligned}$$

Коэффициент при A^k в произведении будет равен $(t+s)^k/(k!)$, так как формула (1) верна в случае числовых рядов ($A \in \mathbb{R}$). Остается обосновать законность почленного умножения. Это можно сделать так же, как доказывается законность почленного умножения абсолютно сходящихся числовых рядов (ряды для e^{tA} и e^{sA} сходятся абсолютно, так как ряды $e^{|t|a}$, $e^{|s|a}$, где $a = \|A\|$, сходятся). Можно и прямо свести доказательство к числовому случаю.

Лемма. Пусть $p \in \mathbb{R}[z_1, \dots, z_n]$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами от переменных z_1, \dots, z_n . Пусть $A_1, \dots, A_N: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейные операторы. Тогда

$$\|p(A_1, \dots, A_N)\| \leq p(\|A_1\|, \dots, \|A_N\|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Это вытекает из неравенств

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \quad \|\lambda\| = |\lambda| \|A\|.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $S_m(A)$ частную сумму ряда для e^A .

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^m \frac{A^k}{k!}.$$

S_m — многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно A . Мы должны доказать, что разность $\Delta_m = S_m(tA)S_m(sA) - S_m((t+s)A)$ стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$.

Заметим, что Δ_m — это многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно sA и tA . Действительно, члены степени не выше m по A в произведении рядов все получаются перемножением членов степени не выше m в рядах-сомножителях. Далее, $S_m((s+t)A)$ — частная сумма ряда произведения. Поэтому Δ_m — это сумма всех членов степени выше m по A в произведении $S_m(tA)S_m(sA)$. Но все коэффициенты произведения многочленов с неотрицательными коэффициентами неотрицательны.

По лемме $\|\Delta_m(tA, sA)\| \leq \Delta_m(\|tA\|, \|sA\|)$. Обозначим неотрицательные числа $\|tA\|, \|sA\|$ через τ, σ . Тогда $\Delta_m(\tau, \sigma) = S_m(\tau)S_m(\sigma) - S_m(\tau + \sigma)$. Поскольку $e^\tau e^\sigma = e^{\tau+\sigma}$, правая часть стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$. Итак, $\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m(tA, sA) = 0$ и соотношение (1) доказано.

Для доказательства соотношения (2) продифференцируем ряд e^{At} по t формально; получим ряд из производных

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любой области $\|A\| \leq a$, $|t| \leq T$, так же как и исходный ряд. Поэтому производная суммы ряда существует и равна сумме ряда из производных. Теорема доказана.

ЗАДАЧА 1. Верно ли, что $e^{A+B} = e^A e^B$?

ОТВЕТ. Нет.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что $\det e^A \neq 0$.

Указание. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что если оператор A в евклидовом пространстве кососимметрический, то оператор e^A — ортогональный.

2. Основная теорема теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Из доказанной теоремы непосредственно вытекает формула для решения линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Теорема. Решение уравнения (3) с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ есть

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно формуле дифференцирования (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = Ae^{tA}x_0 = A\varphi(t).$$

Итак, φ — решение. Поскольку $e^0 = E$, $\varphi(0) = x_0$. Теорема доказана, так как по теореме единственности всякое решение в своей области определения совпадает с решением (4).

3. Общий вид однопараметрических групп линейных преобразований пространства \mathbb{R}^n .

Теорема. Пусть $\{g^t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований. Тогда существует линейный оператор $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $g^t = e^{At}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\text{Положим } A = \left. \frac{dg^t}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g^t - E}{t}.$$

Мы уже доказали, что движение $\varphi(t) = g^t x_0$ — это решение уравнения (3) с начальным условием $\varphi(0) = x_0$. Согласно (4) $g^t x_0 = e^{tA} x_0$, что и требовалось.

Оператор A называют *производящим оператором* группы $\{g^t\}$.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что производящий оператор определен группой однозначно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между линейными дифференциальными уравнениями (3) и их фазовыми потоками $\{g^t\}$; при этом фазовый поток состоит из линейных диффеоморфизмов.

4. Второе определение экспоненты.

Теорема. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Тогда

$$e^A = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m. \quad (5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим разность

$$e^A - \left(E + \frac{A}{m} \right)^m = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) A^k.$$

(Ряд сходится, так как $\left(E + \frac{A}{m}\right)^m$ — многочлен, а ряд e^A сходится.) Заметим, что коэффициенты разности неотрицательны:

$$\frac{1}{k!} \geq \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{m \cdot m \cdot \dots \cdot m} \frac{1}{k!}.$$

Поэтому, полагая $\|A\| = a$, находим

$$\left\| e^A - \left(E + \frac{A}{m}\right)^m \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{k!} - \frac{C_m^k}{m^k} \right) a^k = e^n - \left(1 + \frac{a}{m}\right)^m.$$

Последняя величина стремится к 0 при $m \rightarrow \infty$, и теорема доказана.

5. Пример: формула Эйлера для e^z . Пусть \mathbb{C} — комплексная прямая. Мы можем рассматривать ее как вещественную плоскость \mathbb{R}^2 , а умножение на комплексное число z — как линейный оператор $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Оператор A есть поворот на угол $\arg z$ с растяжением в $|z|$ раз.

ЗАДАЧА 1. Найти матрицу умножения на $z = u + iv$ в базисе $e_1 = 1$, $e_2 = i$.

ОТВЕТ. $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Найдем теперь e^A . По формуле (5) надо вначале составить оператор $E + \frac{A}{n}$. Это — умножение на число $1 + \frac{z}{n}$, т. е. поворот на угол $\arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ с растяжением в $\left|1 + \frac{z}{n}\right|$ раз (рис. 110).

ЗАДАЧА 2. Докажите, что при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) &= \operatorname{Im} \frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right), \\ \left|1 + \frac{z}{n}\right| &= 1 + \operatorname{Re} \frac{z}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Оператор $\left(E + \frac{A}{n}\right)^n$ есть поворот на угол $n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ с растяжением в $\left|1 + \frac{z}{n}\right|^n$ раз. Из формул (6) находим пределы угла поворота и коэффициента растяжения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \arg\left(1 + \frac{z}{n}\right) = \operatorname{Im} z, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n = e^{\operatorname{Re} z}.$$

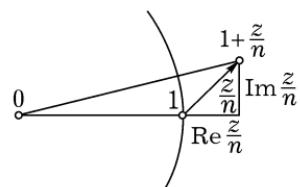


Рис. 110. Комплексное число $1 + z/n$

Тем самым доказана

Теорема. Пусть $z = u + iv$ — комплексное число, $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — оператор умножения на z . Тогда e^A есть оператор умножения на комплексное число $e^u(\cos v + i \sin v)$.

Определение. Комплексное число

$$e^u(\cos v + i \sin v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

называется экспонентой комплексного числа $z = u + iv$ и обозначается

$$e^z = e^u(\cos v + i \sin v). \quad (7)$$

Замечание. Если не отличать комплексное число от оператора умножения на это число, то определение превращается в теорему, поскольку экспонента оператора уже определена.

Задача 3. Найти $e^0, e^1, e^i, e^{\pi i}, e^{2\pi i}$.

Задача 4. Докажите, что $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ ($z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$).

Замечание. Поскольку экспонента определяется также рядом, имеем

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

(ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом круге $|z| \leq a$).

Задача 5. Сравнивая этот ряд с формулой Эйлера (7), вывести ряды Тейлора для $\sin v, \cos v$.

Замечание. Обратно, зная ряды Тейлора $\sin v, \cos v, e^u$, можно было бы доказать формулу (7), приняв формулу (8) за определение e^z .

6. Ломаные Эйлера. Соединяя формулы (4) и (5), мы получаем метод приближенного решения дифференциального уравнения (3), называемый *методом ломанных Эйлера*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с линейным фазовым пространством \mathbb{R}^n , заданное векторным полем v . Чтобы найти решение φ уравнения $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с начальным условием x_0 , поступим следующим образом (рис. 111). Скорость в точке x_0 нам известна: это $v(x_0)$. Будем двигаться с постоянной скоростью $v(x_0)$ из x_0 в течение времени $\Delta t = t/N$. Попадем в точку $x_1 = x_0 + v(x_0)\Delta t$. В течение

следующего отрезка времени Δt будем двигаться со скоростью $v(x_1)$, и т. д.:

$$x_{k+1} = x_k + v(x_k)\Delta t, \quad k = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Обозначим через $X_N(t)$ последнюю точку, x_N . Заметим, что график, изображающий движение с кусочно-постоянной скоростью, — это ломаная линия из N звеньев в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Эта ломаная и называется ломаной Эйлера. Естественно ожидать, что при $N \rightarrow \infty$ последовательность ломанных Эйлера сходится к интегральной кривой, так что последняя точка X_N будет при больших N близка к значению решения φ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ в точке t .

Теорема. Для линейного уравнения (3)
 $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N(t) = \varphi(t).$

Доказательство.

По определению ломаной Эйлера при $v(x) = Ax$ имеем $X_N = \left(E + \frac{At}{N}\right)^N x_0$. Поэтому $\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = e^{tA}x_0$ (см. (5)). Итак,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} X_N = \varphi(t) \quad (\text{см. (4)}).$$

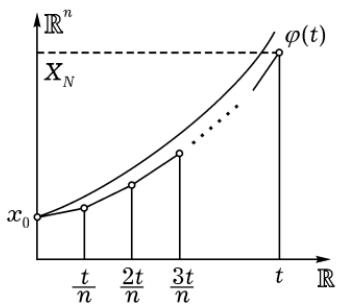


Рис. 111. Ломаная Эйлера

Задача 1. Докажите, что не только конец ломаной Эйлера стремится к $\varphi(t)$, но и вся последовательность кусочно-линейных функций $\varphi_n: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, графиками которых служат ломаные Эйлера, равномерно сходится к решению φ на отрезке $[0, t]$.

Замечание. Ломаная Эйлера в общем случае (когда векторное поле v зависит от x нелинейно) также может быть записана в виде $X_N = \left(E + \frac{tA}{N}\right)^N x_0$, где A — нелинейный оператор, переводящий точку x в точку $v(x)$. В дальнейшем мы увидим, что и в этом случае последовательность ломанных Эйлера сходится к решению, по крайней мере при достаточно малых $|t|$ (§ 31, 9). Таким образом, выражение (4), в котором экспонента определена формулой (5), даст решение вообще всех дифференциальных уравнений¹.

¹ Практически приближенно решать уравнение с помощью ломанных Эйлера неудобно, так как приходится брать очень малый шаг Δt , чтобы получить заданную точность. Чаще пользуются различными усовершенствованиями этого метода,

Эйлерова теория экспоненты, единообразная во всех своих вариантах от определения числа e , формулы Эйлера для e^z , формулы Тейлора, формулы (4) для решения линейных уравнений и до метода ломаных Эйлера, имеет много других применений, выходящих за рамки нашего курса.

§ 16. Определитель экспоненты

Если оператор A задан своей матрицей, вычисление матрицы оператора e^A может требовать длинных выкладок. Однако определитель матрицы e^A можно, как мы сейчас увидим, вычислить очень легко.

1. Определитель оператора. Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор.

Определение. *Определителем* оператора A называется определитель матрицы оператора A в каком-нибудь базисе e_1, \dots, e_n ; обозначение: $\det A$.

Определитель матрицы оператора A не зависит от базиса. Действительно, если (A) — матрица оператора A в базисе e_1, \dots, e_n , то матрицей оператора A в другом базисе будет $(B)(A)(B^{-1})$, и

$$\det(B)(A)(B^{-1}) = \det(A).$$

Определитель матрицы — это ориентированный объем параллелепипеда¹, ребра которого задаются столбцами матрицы.

Например, при $n = 2$ (рис. 112) определитель $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы ξ_1, ξ_2 с компонентами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , взятая со знаком плюс, если упорядоченная пара векторов (ξ_1, ξ_2) задает ту же ориентацию \mathbb{R}^2 , что и базисная пара векторов (e_1, e_2) и со знаком минус в противном случае.

в которых интегральная кривая аппроксимируется не отрезком прямой, а отрезком параболы той или иной степени. Наиболее часто используются методы Адамса, Штермера и Рунге. С ними можно познакомиться по учебникам приближенных вычислений.

¹Параллелепипед с ребрами $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ есть подмножество \mathbb{R}^n , состоящее из всех точек вида $x_1\xi_1 + \dots + x_n\xi_n$, $0 \leq x_i \leq 1$. При $n = 2$ параллелепипед называется параллелограммом. Если вы знакомы с каким-либо определением объема, то легко докажете выделенное утверждение. Если же нет, то можете принять его за определение объема параллелепипеда.

Столбец с номером i в матрице оператора A в базисе e_1, \dots, e_n составлен из координат образа базисного вектора Ae_i . Поэтому определитель оператора A — это ориентированный объем образа единичного куба (параллелепипеда с ребрами e_1, \dots, e_n) при отображении A .

ЗАДАЧА 1. Пусть Π — параллелепипед с линейно независимыми ребрами. Докажите, что отношение (ориентированного) объема образа параллелепипеда $A\Pi$ к (ориентированному) объему Π не зависит от Π и равно $\det A$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Читатель, знакомый с теорией измерения объемов в \mathbb{R}^n , может заменить Π любой фигурой, имеющей объем.

Итак, определитель оператора A — это коэффициент изменения ориентированного объема: при применении A ориентированный объем любой фигуры меняется в $\det A$ раз. Геометрически вовсе не очевидно, что растяжение объема для всех фигур одинаково (даже в случае плоскости), ведь форма фигуры при линейном преобразовании сильно меняется.

2. След оператора. Следом матрицы A называется сумма ее диагональных элементов. След обозначается tr (от английского «trace») или Spur (от немецкого «Spur»):

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

След матрицы оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ не зависит от базиса, но лишь от самого оператора A .

ЗАДАЧА 1. Докажите, что след матрицы равен сумме всех n ее собственных чисел, а определитель — их произведению.

Указание. Примените формулу Виета к многочлену

$$\det |A - \lambda E| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1} \sum_{i=1}^n a_{ii} + \dots$$

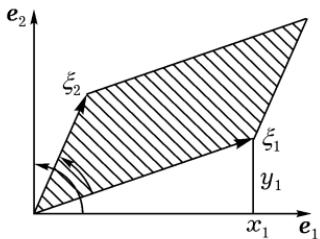


Рис. 112. Определитель матрицы равен ориентированной площади параллелограмма, натянутого на ее столбцы

Собственные числа уже не зависят от базиса. Это позволяет дать следующее

Определение. Следом оператора A называется след его матрицы в каком-нибудь (и тогда в любом) базисе.

3. Связь определителя и следа. Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Легко доказывается

Теорема. При $\varepsilon \rightarrow 0$ $\det(E + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2)$.

Доказательство.

Определитель оператора $E + \varepsilon A$ равен произведению собственных чисел. Собственные числа оператора $E + \varepsilon A$ (с учетом кратностей) равны $1 + \varepsilon \lambda_i$, где λ_i — собственные числа A . Поэтому

$$\det(E + \varepsilon A) = \prod_{i=1}^n (1 + \varepsilon \lambda_i) = 1 + \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i + O(\varepsilon^2),$$

что и требовалось доказать.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $\varphi(\varepsilon) = \det(E + \varepsilon A)$ — многочлен относительно ε , причем $\varphi(0) = 1$. Нужно доказать, что $\varphi'(0) = \operatorname{tr} A$. Определитель матрицы $\|x_{ij}\|$ обозначим через $\Delta(\{x_{ij}\})$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E \frac{dx_{ij}}{d\varepsilon},$$

где $x_{ij}(\varepsilon)$ — элементы матрицы $E + \varepsilon A$. Частная производная $\frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E$ равна

по определению $\frac{d}{dh} \Big|_{h=0} \det(E + he_{ij})$, где e_{ij} — матрица, единственный ненулевой элемент которой — это 1 в i -й строке, j -м столбце. Но $\det(E + he_{ij}) = 1$ при $i \neq j$ и $1 + h$, если $i = j$. Итак, $\frac{\partial \Delta}{\partial x_{ij}} \Big|_E = 0$, если $i \neq j$, и 1, если $i = j$.

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \sum_{i=1}^n \frac{dx_{ii}}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^n a_{ii} = \operatorname{tr} A,$$

что и требовалось доказать.

Между прочим, мы заново доказали независимость следа от базиса.

Следствие. Влияет лишь изменение каждого ребра в его собственном направлении; изменение же в направлении других ребер дает в изменение объема лишь вклад второго порядка малости.

Например, площадь параллелограмма, близкого к квадрату (рис. 113), малыми второго порядка малости отличается от площади заштрихованного прямоугольника.

Можно было бы доказать это следствие из элементарно-геометрических соображений; это привело бы к геометрическому доказательству предыдущей теоремы.

4. Определитель оператора e^A .

Теорема. Для любого линейного оператора $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно второму определению экспоненты

$$\det e^A = \det \left(\lim_{m \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\det \left(E + \frac{A}{m} \right)^m \right),$$

ибо определитель матрицы — многочлен (и, следовательно, непрерывная функция) от элементов. Далее, по предыдущей теореме

$$\begin{aligned} \det \left(E + \frac{A}{m} \right)^m &= \left(\det \left(E + \frac{A}{m} \right) \right)^m = \\ &= \left(1 + \frac{1}{m} \operatorname{tr} A + O \left(\frac{1}{m^2} \right) \right)^m, \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Остается заметить, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{m} + O \left(\frac{1}{m^2} \right) \right)^m = e^a$ для любого $a \in \mathbb{R}$, в частности для $a = \operatorname{tr} A$.

Следствие 1. Оператор e^A невырожден.

Следствие 2. Оператор e^A сохраняет ориентацию \mathbb{R}^n (т. е. $\det A > 0$).

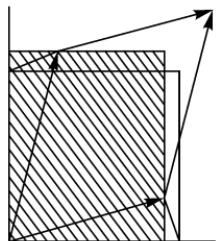


Рис. 113. Приближенное определение площади параллелограмма, близкого к квадрату

Следствие 3 (формула Лиувилля). Фазовый поток $\{g^t\}$ линейного уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

за время t меняет объем любой фигуры в e^{at} раз, где $a = \operatorname{tr} A$.

Действительно, $\det g^t = \det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At} = e^{t \operatorname{tr} A}$.

В частности, отсюда вытекает

Следствие 4. Если след A равен 0, то фазовый поток уравнения (1) сохраняет объемы (т. е. g^t переводит любой параллелепипед в параллелепипед того же объема).

Действительно, $e^0 = 1$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим уравнение маятника с коэффициентом трения $-k$

$$\ddot{x} = -x + k\dot{x},$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + kx_2 \end{cases}$$

с матрицей (рис. 114)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}.$$

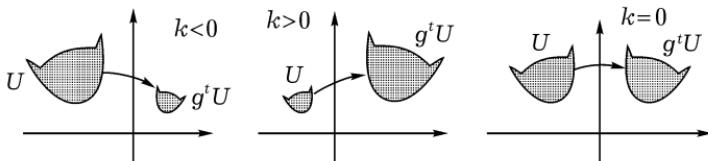


Рис. 114. Поведение площадей при преобразованиях фазового потока уравнения маятника

След этой матрицы равен k . Итак, при $k < 0$ преобразование фазового потока g^t ($t > 0$) переводит каждую область фазовой плоскости в область меньшей площади. В системе с отрицательным трением ($k > 0$), наоборот, площадь области g^tU , $t > 0$, больше площади U . Наконец, когда трения нет ($k = 0$), фазовый поток g^t сохраняет площади (неудивительно: в этом случае, как мы уже знаем, g^t есть поворот на угол t).

Задача 1. Пусть вещественные части всех собственных чисел A отрицательны. Докажите, что фазовый поток g^t уравнения (1) уменьшает объемы ($t > 0$).

Задача 2. Докажите, что собственные числа оператора e^A равны e^{λ_i} , где λ_i — собственные числа оператора A . Выведите отсюда доказанную выше теорему.

§ 17. Практическое вычисление матрицы экспоненты — случай вещественных и различных собственных чисел

При практическом решении дифференциальных уравнений оператор A задан своей матрицей в некотором базисе, и требуется явно вычислить матрицу оператора e^A в том же базисе. Начнем с простейшего случая.

1. Диагональный оператор. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — диагональный оператор. В базисе, в котором матрица оператора A диагональна, она имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственные числа. Матрица оператора e^{At} имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Итак, решение φ с начальным условием $\varphi_0(0) = (x_{1_0}, \dots, x_{n_0})$ имеет в этом базисе вид $\varphi_k = e^{\lambda_k t} x_{k_0}$. К этому базису и надо перейти, если матрица оператора A дана в другом базисе.

Если все n собственных чисел оператора A вещественны и различные, то он диагонален (\mathbb{R}^n распадается в прямую сумму одномерных инвариантных относительно A подпространств).

Поэтому решать уравнение (1) в случае, когда собственные числа оператора A вещественны и различны, нужно следующим образом:

- 1) составить *вековое* или *характеристическое* уравнение

$$\det |A - \lambda E| = 0;$$

2) найти его корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; мы предполагаем, что они вещественны и различны;

3) найти собственные векторы ξ_1, \dots, ξ_n из линейных уравнений $A\xi_k = \lambda_k \xi_k$, $\xi_k \neq 0$;

- 4) разложить начальное условие по собственным векторам

$$x_0 = \sum_{k=1}^n C_k \xi_k;$$

- 5) написать ответ

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t} \xi_k.$$

В частности, получаем

Следствие. Пусть A — диагональный оператор. Тогда элементы матрицы e^{At} ($t \in \mathbb{R}$) в любом базисе являются линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda_k t}$, где λ_k — собственные числа матрицы A .

2. Пример.

Рассмотрим маятник с трением

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2. \end{cases}$$

Матрица оператора A имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A = -k, \quad \det A = 1.$$

Поэтому характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$; корни вещественны и различны, когда дискриминант положителен, т. е. когда $|k| > 2$. Итак, при достаточно большом (по абсолютной величине) коэффициенте трения k оператор A диагонален.

Рассмотрим случай $k > 2$. В этом случае оба корня λ_1, λ_2 отрицательны. В собственном базисе уравнение запишется в виде

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1, \quad \lambda_1 < 0, \\ \dot{y}_2 &= \lambda_2 y_2, \quad \lambda_2 < 0.\end{aligned}$$

Отсюда, как в § 2, получаем решение

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t} y_1(0), \quad y_2(t) = e^{\lambda_2 t} y_2(0)$$

и картинку (узел, рис. 115). При $t \rightarrow +\infty$ все решения стремятся к 0, почти все интегральные кривые касаются оси y_1 , если $|\lambda_2|$ больше $|\lambda_1|$ (тогда y_2 стремится к 0 быстрее y_1). Картина на плоскости (x_1, x_2) получается линейным преобразованием.

Пусть, например, $k = 3^{1/3}$, так что $\lambda_1 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = -3$.

Собственный вектор ξ_1 находим из условия $x_1 = -3x_2$; получаем $\xi_1 = e_2 - 3e_1$. Аналогично $\xi_2 = e_1 - 3e_2$. Поскольку $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, фазовые кривые имеют вид, изображенный на рис. 116. Рассматривая рис. 116, мы приходим к следующему удивительному выводу: если коэффициент трения k достаточно велик ($k > 2$), то маятник не совершает затухающих колебаний, а сразу идет к положению равновесия: его скорость x_2 меняет знак не более одного раза.

Задача 1. Каким движениям маятника соответствуют фазовые кривые I, II, III на рис. 116? Нарисовать примерный график $x(t)$.

Задача 2. Исследовать движение перевернутого маятника с трением, $\ddot{x} = x - k\dot{x}$.

3. Дискретный случай. Все сказанное о показательной функции e^{At} непрерывного аргумента t относится и к показательной функции A^n дискретного аргумента n . В частности, если A — диагональный

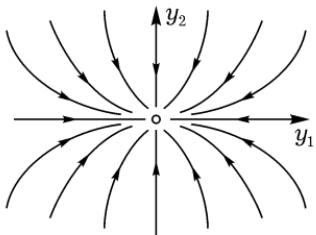


Рис. 115. Фазовые кривые маятника с сильным трением в собственном базисе

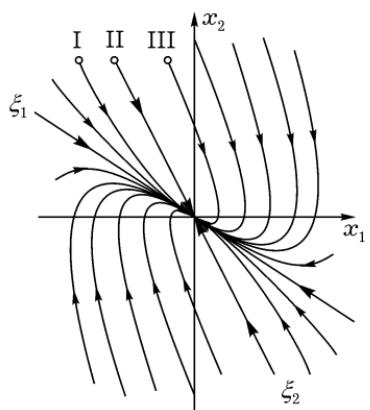


Рис. 116. Фазовые кривые уравнения маятника с сильным трением в обычном базисе

оператор, то для вычисления A^n удобно перейти к диагональному базису.

ПРИМЕР. Последовательность Фибоначчи $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ определяется тем, что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, и двумя начальными членами $a_0 = 0, a_1 = 1$.

ЗАДАЧА 1. Найти формулу для a_n . Показать, что a_n растет, как геометрическая прогрессия, и найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{n} = \alpha.$$

Указание. Заметим, что вектор $\xi_n = (a_n, a_{n-1})$ выражается линейно через ξ_{n-1} : $\xi_n = A\xi_{n-1}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, причем $\xi_1 = (1, 0)$. Поэтому a_n есть первая компонента вектора $A^{n-1}\xi_1$.

ОТВЕТ. $\alpha = \ln \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right)$, $a_n = \frac{(\lambda_1^n - \lambda_2^n)}{\sqrt{5}}$, где $\lambda_{1,2} = \frac{(1 \pm \sqrt{5})}{2}$ — собственные числа A .

Такое же рассуждение сводит исследование любой рекуррентной последовательности a_n порядка k , заданной правилом

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \dots + c_k a_{n-k}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

и k начальными членами¹, к изучению показательной функции A^n , где $A: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ — линейный оператор. Поэтому, когда мы научимся вычислять матрицу экспоненты, мы одновременно изучим все рекуррентные последовательности.

Возвращаясь к общей задаче о вычислении e^{At} , заметим, что корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ могут быть комплексными. Чтобы изучить этот случай, мы вначале рассмотрим линейное уравнение с комплексным фазовым пространством \mathbb{C}^n .

§ 18. Комплексификация и овеществление

Прежде чем изучать комплексные дифференциальные уравнения, вспомним, что такое комплексификация вещественного пространства и овеществление комплексного.

¹Тот факт, что для определения рекуррентной последовательности k -го порядка надо знать k ее первых членов, тесно связан с тем, что фазовое пространство дифференциального уравнения порядка k имеет размерность k . Эта связь становится понятной, если записать дифференциальное уравнение в виде предела разностных.

1. Овеществление. Через \mathbb{C}^n мы будем обозначать n -мерное линейное пространство над полем комплексных чисел \mathbb{C} .

Овеществлением пространства \mathbb{C}^n называется вещественное линейное пространство, которое совпадает с \mathbb{C}^n как группа и в котором умножение на вещественные числа определено как в \mathbb{C}^n , а умножение на комплексные числа не определено. (Иными словами, овеществить \mathbb{C}^n — это значит забыть о структуре \mathbb{C} -модуля, сохраняя структуру \mathbb{R} -модуля.)

Легко видеть, что овеществление пространства \mathbb{C}^n будет $2n$ -мерным вещественным линейным пространством \mathbb{R}^{2n} . Мы будем обозначать овеществление знаком \mathbb{R} сверху слева, например: $\mathbb{R}\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Если (e_1, \dots, e_n) — базис в \mathbb{C}^n , то $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ — базис в $\mathbb{R}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

Пусть $A: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^n$ — \mathbb{C} -линейный оператор. *Овеществление оператора A* — это \mathbb{R} -линейный оператор $\mathbb{R}A: \mathbb{R}\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{C}^n$, совпадающий с A поточечно.

Задача 1. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис пространства \mathbb{C}^m , (f_1, \dots, f_n) — базис пространства \mathbb{C}^n , (A) — матрица оператора A . Найти матрицу овеществленного оператора $\mathbb{R}A$.

Ответ. $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $(A) = (\alpha) + i(\beta)$.

Задача 2. Докажите, что $\mathbb{R}(A + B) = \mathbb{R}A + \mathbb{R}B$, $\mathbb{R}(AB) = \mathbb{R}A\mathbb{R}B$.

2. Комплексификация. Пусть \mathbb{R}^n — вещественное линейное пространство. *Комплексификация пространства \mathbb{R}^n* — это n -мерное комплексное линейное пространство, обозначаемое через $\mathbb{C}\mathbb{R}^n$, которое строится следующим образом.

Точки пространства $\mathbb{C}\mathbb{R}^n$ — это пары (ξ, η) , где $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\eta \in \mathbb{R}^n$. Такая пара обозначается $\xi + i\eta$. Операции сложения и умножения на комплексные числа определяются обычным образом:

$$(u + iv)(\xi + i\eta) = (u\xi - v\eta) + i(v\xi + u\eta),$$

$$(\xi_1 + i\eta_1) + (\xi_2 + i\eta_2) = (\xi_1 + \xi_2) + i(\eta_1 + \eta_2).$$

Легко проверить, что полученный \mathbb{C} -модуль является n -мерным комплексным линейным пространством: $\mathbb{C}\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$. Если (e_1, \dots, e_n) — базис в \mathbb{R}^n , то векторы $e_k + i\mathbf{0}$ образуют \mathbb{C} -базис в $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}\mathbb{R}^n$.

Векторы $\xi + i\mathbf{0}$ обозначаются короче через ξ .

Пусть $A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть \mathbb{R} -линейный оператор. *Комплексификация оператора A* — это \mathbb{C} -линейный оператор ${}^{\mathbb{C}}A: {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^m \rightarrow {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$, определенный соотношением ${}^{\mathbb{C}}A(\xi + i\eta) = A\xi + iA\eta$.

ЗАДАЧА 1. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис в \mathbb{R}^m , (f_1, \dots, f_m) — базис в \mathbb{R}^n . Пусть (A) — матрица оператора A . Найти матрицу комплексифицированного оператора $({}^{\mathbb{C}}A)$.

ОТВЕТ. $({}^{\mathbb{C}}A) = (A)$.

ЗАДАЧА 2. Докажите, что ${}^{\mathbb{C}}(A + B) = {}^{\mathbb{C}}A + {}^{\mathbb{C}}B$, ${}^{\mathbb{C}}(AB) = {}^{\mathbb{C}}A {}^{\mathbb{C}}B$.

ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. Операции комплексификации и овеществления определены как для пространств, так и для отображений. Алгебраисты называют такого рода операции *функциями*.

3. Комплексное сопряжение. Рассмотрим вещественное $2n$ -мерное линейное пространство $\mathbb{R}^{2n} = {}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$, полученное из \mathbb{R}^n комплексификацией, а затем овеществлением. В этом пространстве лежит n -мерное подпространство векторов вида $\xi + i\mathbf{0}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. Оно называется *вещественной плоскостью* $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$.

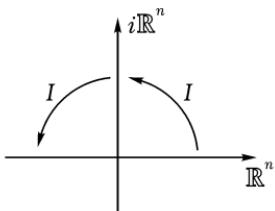


Рис. 117. Оператор умножения на i

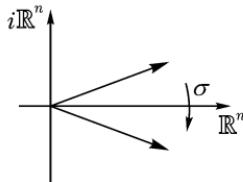


Рис. 118. Комплексное сопряжение

Подпространство векторов вида $\mathbf{0} + i\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, называется *мнимой плоскостью* $i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$. Все пространство \mathbb{R}^{2n} есть прямая сумма этих двух n -мерных подпространств.

Оператор iE умножения на i в $\mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ после овеществления превращается в \mathbb{R} -линейный оператор ${}^{\mathbb{R}}(iE) = I: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, (рис. 117). Оператор I изоморфно отображает вещественную плоскость в мнимую, а мнимую — в вещественную. Квадрат оператора I равен минус единичному.

ЗАДАЧА 1. Пусть (e_1, \dots, e_n) — базис \mathbb{R}^n , $(e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n)$ — базис $\mathbb{R}^{2n} = {}^{\mathbb{R}\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$. Найти матрицу оператора I в этом базисе.

ОТВЕТ. $(I) = \begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $\sigma: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ (рис. 118) оператор комплексного сопряжения: $\sigma(\xi + i\eta) = \xi - i\eta$. Действие σ обозначается часто чертой сверху.

Оператор σ совпадает с единичным на вещественной плоскости и с минус единичным — на мнимой. Он инволютивен: $\sigma^2 = E$.

Пусть $A: \mathbb{C}\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{R}^n$ — \mathbb{C} -линейный оператор. *Комплексно сопряженным к A оператором \bar{A}* называется оператор $\bar{A}: \mathbb{C}\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{R}^n$, определенный соотношением

$$\bar{A}\bar{z} = \overline{Az} \text{ для всякого } z \in \mathbb{C}\mathbb{R}^m.$$

ЗАДАЧА 2. Докажите, что \bar{A} является \mathbb{C} -линейным оператором.

ЗАДАЧА 3. Докажите, что матрица оператора \bar{A} в вещественном базисе комплексно сопряжена матрице A в том же базисе.

ЗАДАЧА 4. Докажите, что $\overline{A+B} = \bar{A} + \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, $\overline{\lambda A} = \bar{\lambda}\bar{A}$.

ЗАДАЧА 5. Докажите, что комплексный линейный оператор $A: \mathbb{C}\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{R}^n$ является комплексификацией вещественного тогда и только тогда, когда $\bar{A} = A$.

4. Экспонента, определитель и след комплексного оператора. Экспонента, определитель и след комплексного оператора определяются в точности так же, как в вещественном случае. Они обладают такими же свойствами, что и в вещественном случае, разница состоит лишь в том, что определитель, будучи комплексным числом, не равен объему.

ЗАДАЧА 1. Докажите свойства экспоненты:

$$\mathbb{R}(e^A) = e^{\mathbb{R}A}, \quad \overline{e^A} = e^{\bar{A}}, \quad \mathbb{C}(e^A) = e^{\mathbb{C}A}.$$

ЗАДАЧА 2. Докажите свойства определителя:

$$\det \mathbb{R}A = |\det A|^2, \quad \det \bar{A} = \overline{\det A}, \quad \det \mathbb{C}A = \det A.$$

ЗАДАЧА 3. Докажите свойства следа:

$$\operatorname{tr} \mathbb{R}A = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} \bar{A}, \quad \operatorname{tr} \bar{A} = \overline{\operatorname{tr} A}, \quad \operatorname{tr} \mathbb{C}A = \operatorname{tr} A.$$

ЗАДАЧА 4. Докажите, что и в комплексном случае

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

5. Производная кривой с комплексными значениями. Пусть $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ — отображение интервала I вещественной оси t в комплексное линейное пространство \mathbb{C}^n . Мы будем называть φ *кривой*.

Производная кривой φ в точке $t_0 \in I$ определяется обычным образом:

$$\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(t_0 + h) - \varphi(t_0)}{h}.$$

Это вектор пространства \mathbb{C}^n .

ПРИМЕР 1. Пусть $n = 1$, $\varphi(t) = e^{it}$ (рис. 119). Тогда $\frac{d\varphi}{dt}\Big|_{t=0} = i$.

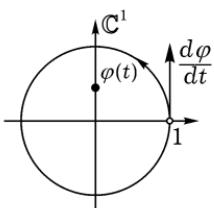


Рис. 119. Производная отображения $t \mapsto e^{it}$ в точке 0 равна i

Рассмотрим случай $n = 1$ подробнее. Поскольку в \mathbb{C} определено умножение, кривые со значениями в \mathbb{C} можно не только складывать, но и умножать:

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t), \\ (\varphi_1 \varphi_2)(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t), \quad t \in I.$$

ЗАДАЧА 1. Докажите свойства производной:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 + \varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1 \varphi_2) = \frac{d\varphi_1}{dt} \varphi_2 + \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

В частности, производная многочлена с комплексными коэффициентами дается той же формулой, что для случая вещественных коэффициентов.

Если $n > 1$, то перемножить две кривые со значениями в \mathbb{C}^n нельзя. Однако, поскольку \mathbb{C}^n есть \mathbb{C} -модуль, можно умножить кривую $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ на функцию $f: I \rightarrow \mathbb{C}$:

$$(f\varphi)(t) = f(t)\varphi(t).$$

ЗАДАЧА 2. Докажите свойства производной:

$$\begin{aligned}\frac{d(\mathbb{R}\varphi)}{dt} &= \frac{\mathbb{R}d\varphi}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbb{C}\varphi) - \frac{\mathbb{C}d\varphi}{dt}, \quad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}}, \\ \frac{d(\varphi_1 + \varphi_2)}{dt} &= \frac{d\varphi_1}{dt} + \frac{d\varphi_2}{dt}, \quad \frac{d(f\varphi)}{dt} = \frac{df}{dt}\varphi + f\frac{d\varphi}{dt}.\end{aligned}$$

Разумеется, здесь предполагается, что производные существуют.

Теорема. Пусть $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — \mathbb{C} -линейный оператор. Тогда существует при любом $t \in \mathbb{R}$ \mathbb{C} -линейный оператор из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^n

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Это можно доказать в точности так же, как в вещественном случае, но можно и сослаться на него. Ибо овеществив \mathbb{C}^n , получим

$$\mathbb{R}\left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right) = \frac{d}{dt}\mathbb{R}(e^{tA}) = \frac{d}{dt}e^{t(\mathbb{R}A)} = (\mathbb{R}A)e^{t(\mathbb{R}A)} = \mathbb{R}(Ae^{tA}).$$

§ 19. Линейное уравнение с комплексным фазовым пространством

Комплексный случай, как это часто бывает, проще вещественного. Он важен сам по себе; кроме того, изучение комплексного случая поможет нам исследовать вещественный.

1. Определения. Пусть $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — \mathbb{C} -линейный оператор. *Линейным уравнением¹* с фазовым пространством \mathbb{C}^n мы будем называть уравнение

$$\dot{z} = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{1}$$

Решением φ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0) = z_0$, $t_0 \in \mathbb{R}$, $z_0 \in \mathbb{C}^n$, называется отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ интервала I вещественной оси t в \mathbb{C}^n , если

$$1) \text{ для всякого } \tau \in I, \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{t=\tau} = A\varphi(\tau);$$

¹Полный титул: система n линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными постоянными коэффициентами.

2) $t_0 \in I$ и $\varphi(t_0) = z_0$.

Иными словами, отображение $\varphi: I \rightarrow \mathbb{C}^n$ называется решением уравнения (1), если после овеществления пространства \mathbb{C}^n и оператора A отображение φ будет решением уравнения с 2n-мерным вещественным фазовым пространством $\dot{z} = \mathbb{R}Az$, $z \in \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}\mathbb{C}^n$.

2. Основная теорема. Следующие теоремы доказываются точно так же, как в вещественном случае (см. § 15, 2, 3):

Теорема. Решение φ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0) = z_0$ дается формулой $\varphi(t) = e^{At}z_0$.

Теорема. Всякая однопараметрическая группа $\{g^t(t \in \mathbb{R})\}$ \mathbb{C} -линейных преобразований пространства \mathbb{C}^n имеет вид $g^t = e^{At}$, где $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ — некоторый \mathbb{C} -линейный оператор.

Наша цель теперь — исследовать и явно вычислить e^{At} .

3. Диагональный случай. Пусть $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ есть \mathbb{C} -линейный оператор. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det |A - \lambda E| = 0. \quad (2)$$

Теорема. Если n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического уравнения попарно различны, то \mathbb{C}^n разлагается в прямую сумму инвариантных относительно A и e^{At} одномерных подпространств $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}_1^1 + \dots + \mathbb{C}_n^1$, причем в каждом одномерном инвариантном подпространстве, скажем в \mathbb{C}_k^1 , e^{At} сводится к умножению на комплексное число $e^{\lambda_k t}$.

Действительно, оператор A имеет¹ n линейно независимых собственных прямых: $\mathbb{C}^n = \mathbb{C}_1^1 + \dots + \mathbb{C}_n^1$. На прямой \mathbb{C}_k^1 оператор A действует как умножение на λ_k , поэтому оператор e^{At} действует как умножение на $e^{\lambda_k t}$.

Рассмотрим теперь подробнее одномерный случай, $n = 1$.

4. Пример: линейное уравнение, фазовое пространство которого — комплексная прямая. Такое уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

¹Это — единственное место, где комплексный случай отличается от вещественного. Причина большей сложности вещественного случая — алгебраическая незамкнутость поля \mathbb{R} .

Мы уже знаем его решения: $\varphi(t) = e^{\lambda t} z_0$. Исследуем комплексную функцию $e^{\lambda t}$ вещественного переменного t :

$$e^{\lambda t}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Если λ вещественно, то функция $e^{\lambda t}$ вещественна (рис. 120).

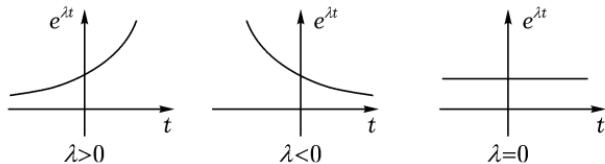


Рис. 120. Графики функций $e^{\lambda t}$ при вещественных λ

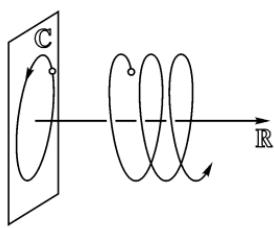


Рис. 121. Фазовая и интегральная кривые уравнения $z = \lambda z$ при чисто мнимом λ

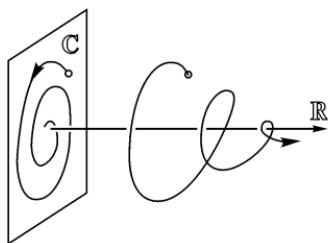


Рис. 122. Фазовая и интегральная кривые уравнения $\dot{z} = \lambda z$ при $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha < 0$, $\omega > 0$

В этом случае фазовый поток уравнения (3) состоит из растяжений в $e^{\lambda t}$ раз. Если λ чисто мнимо, $\lambda = i\omega$, то по формуле Эйлера

$$e^{\lambda t} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

В этом случае фазовый поток уравнения (3) — это семейство $\{g^t\}$ поворотов на угол ωt (рис. 121). Наконец, в общем случае $\lambda = \alpha + i\omega$ и умножение на $e^{\lambda t}$ есть произведение умножения на $e^{\alpha t}$ и умножения на $e^{i\omega t}$ (см. § 15, 5):

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha+i\omega)t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Таким образом, преобразование g^t фазового потока уравнения (3) — это растяжение в $e^{\alpha t}$ раз с одновременным поворотом на угол ωt .

Рассмотрим теперь фазовые кривые. Пусть, например, $\alpha < 0, \omega > 0$ (рис. 122). В таком случае при росте t фазовая точка $e^{\lambda t} z_0$ будет приближаться к началу координат, обходя вокруг него в направлении «против часовой стрелки» (т. е. от 1 к i).

В полярных координатах, при соответствующем выборе начала отсчета углов, фазовая кривая задается уравнением

$$r = e^{k\varphi} \quad \left(k = \frac{\alpha}{\omega} \right), \quad \text{или} \quad \varphi = k^{-1} \ln r.$$

Такая кривая называется *логарифмической спиралью*.

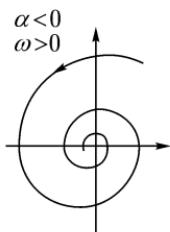


Рис. 123. Устойчивые фокусы

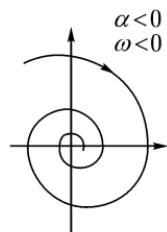


Рис. 124. Неустойчивые фокусы

При других комбинациях знаков α и ω фазовые кривые также будут логарифмическими спиртялями (рис. 123, 124).

Во всех случаях (кроме $\lambda = 0$) точка $z = 0$ является единственной неподвижной точкой фазового потока (и единственной особой точкой соответствующего уравнению (3) векторного поля).

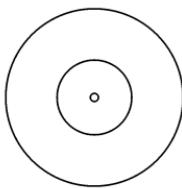


Рис. 125. Центр

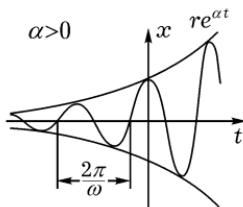


Рис. 126. Вещественная часть $e^{\lambda t}$ как функция времени

