Эта особая точка называется *фокусом* (мы предполагаем, что $\alpha \neq 0$, $\omega \neq 0$). Если $\alpha < 0$, то $\varphi(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ и фокус называется *устойчивым*, а если $\alpha > 0$, то *неустойчивым*.

При $\alpha = 0, \omega \neq 0$ фазовые кривые — окружности, а особая точка — их центр (рис. 125).

Выберем в $\mathbb{C}^1$ координату: $z = x + iy$. Исследуем изменение вещественной и мнимой частей $x(t)$, $y(t)$ при движении фазовой точки. Из (4) находим

$$x(t) = re^{\alpha t}\cos(\varphi + \omega t), \quad y(t) = re^{\alpha t}\sin(\varphi + \omega t),$$

где постоянные r и φ определяются начальным условием (рис. 126). Таким образом, при $\alpha > 0$ координаты $x(t)$ и $y(t)$ испытывают «гармонические колебания с частотой ω и с экспоненциально нарастающей амплитудой $re^{\alpha t}$», а при $\alpha < 0$ — затухающие колебания.

Изменение x или y со временем можно записать также в виде $Ae^{\alpha t}\cos\omega t + Be^{\alpha t}\sin\omega t$, где постоянные A и B определяются начальными условиями.

Замечание 1. Исследовав таким образом уравнение (3), мы одновременно исследовали все однопараметрические группы $\mathbb{C}$-линейных преобразований комплексной прямой.

Замечание 2. В то же время мы изучили систему линейных уравнений на вещественной плоскости

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \omega y, \\ \dot{y} = \omega x + \alpha y, \end{cases}$$

в которую переходит уравнение (3) после овеществления.

Из теорем пп. 2, 3 и вычислений п. 4 непосредственно вытекает явная формула для решений уравнения (1).

5. Следствие. *Пусть n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения* (2) *попарно различны. Тогда всякое решение φ уравнения* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}\boldsymbol{\xi}_k, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{\xi}_k$ — не зависящие от начальных условий постоянные вектора, c_k — зависящие от начальных условий комплексные постоянные. При

любом выборе этих постоянных формула (5) *дает решение уравнения* (1).

Если $z_1, \ldots, z_n$ — линейная система координат в $\mathbb{C}^n$, то вещественная (или мнимая) часть каждой координаты $z_l = x_l + iy_l$ будет меняться со временем, как линейная комбинация функций $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$:

$$\begin{aligned} x_l &= \sum_{k=1}^{n} r_{k,l} e^{\alpha_k t}\cos(\varphi_{k,l} + \omega_k t) = \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_{k,l} e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t + B_{k,l} e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$, а r, φ, A, B — вещественные постоянные, зависящие от начальных условий.

Для доказательства достаточно разложить начальное условие по собственному базису: $\varphi(0) = c_1\boldsymbol{\xi}_1 + \ldots + c_n\boldsymbol{\xi}_n$.

§ 20. Комплексификация вещественного линейного уравнения

Воспользуемся результатами исследования комплексного уравнения для изучения вещественного случая.

1. Комплексифицированное уравнение. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, задающий линейное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Комплексификация уравнения (1) — это уравнение с комплексным фазовым пространством

$$\dot{\boldsymbol{z}} = {}^{\mathbb{C}}A\boldsymbol{z}, \quad \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Лемма 1. *Решения уравнения* (2) *с комплексно сопряженными начальными условиями комплексно сопряжены.*

Доказательство.

Пусть φ — решение с начальным условием $\varphi(t_0) = \boldsymbol{z}_0$ (рис. 127). Тогда $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{\boldsymbol{z}}_0$. Покажем, что $\overline{\varphi}$ — решение. Тогда лемма будет доказана (ввиду единственности).

При любом значении t имеем

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}} = \overline{{}^{\mathbb{C}}A\varphi} = \overline{{}^{\mathbb{C}}A}\overline{\varphi} = {}^{\mathbb{C}}A\overline{\varphi},$$

что и требовалось доказать.

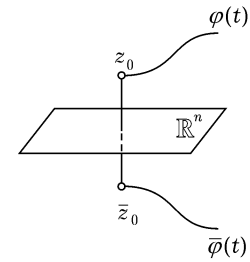

Рис. 127. Комплексно сопряженные решения

Замечание. Вместо уравнения (2) мы могли бы взять более общее уравнение

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, t), \quad \boldsymbol{z} \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n,$$

правая часть которого принимает комплексно сопряженные значения в комплексно сопряженных точках: $\boldsymbol{F}(\overline{\boldsymbol{z}}, t) = \overline{\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}, t)}$.

Например, этому условию удовлетворяет любой многочлен от координат z_k вектора $\boldsymbol{z}$ в вещественном базисе, коэффициенты которого — вещественные функции от t.

Следствие. *Решение уравнения* (2) *с вещественным начальным условием вещественно и удовлетворяет уравнению* (1).

Ибо если бы $\overline{\varphi} \neq \varphi$ (рис. 128), то нарушалась бы теорема единственности.

В следующей лемме линейность уравнения существенна.

Лемма 2. *Функция $\boldsymbol{z} = \varphi(t)$ тогда и только тогда является решением комплексифицированного уравнения* (2), *когда ее вещественная и мнимая части удовлетворяют исходному уравнению* (1).

Действительно, ${}^{\mathbb{C}}A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + iA\boldsymbol{y}$, поэтому овеществление уравнения (2) распадается в прямое произведение:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \\ \dot{\boldsymbol{y}} = A\boldsymbol{y}, & \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Из лемм 1 и 2 видно, как, зная комплексные решения уравнения (2), можно находить вещественные решения уравнения (1), и обратно. В частности, *формулы* (6) п. 5 § 19 *дают явный вид решения в случае некратных корней характеристического уравнения.*

2. Инвариантные подпространства вещественного оператора. Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — вещественный линейный оператор. Пусть λ — один из корней характеристического уравнения $\det|A - \lambda E|$, вообще говоря, комплексный. Очевидна

Лемма 3. *Если* $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ *— собственный вектор оператора* ${}^{\mathbb{C}}A$ *с собственным значением* λ*, то* $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ *— собственный вектор с собственным значением* $\overline{\lambda}$*. Кратности собственных чисел* λ *и* $\overline{\lambda}$ *совпадают.*

Действительно, поскольку $\overline{{}^{\mathbb{C}}A} = {}^{\mathbb{C}}A$, уравнение ${}^{\mathbb{C}}A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi}$, эквивалентно ${}^{\mathbb{C}}A\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\xi}}$ и характеристическое уравнение имеет вещественные коэффициенты.

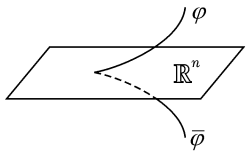

Рис. 128. Решение с вещественным начальным условием не может принимать комплексных значений

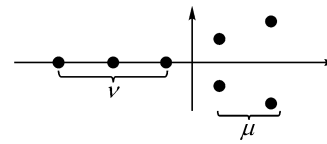

Рис. 129. Собственные числа вещественного оператора

Предположим теперь, что собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ *оператора* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *попарно различны* (рис. 129). Среди них имеется некоторое число ν вещественных собственных чисел и некоторое число μ комплексно сопряженных пар (причем $\nu + 2\mu = n$, так что четность числа вещественных собственных чисел равна четности n). Легко доказывается

Теорема. *Пространство* $\mathbb{R}^n$ *распадается в прямую сумму* ν *инвариантных относительно* A *одномерных и* μ *инвариантных относительно* A *двумерных подпространств.*

Действительно, вещественному собственному числу отвечает вещественный собственный вектор и, значит, одномерное инвариантное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Пусть λ, $\overline{\lambda}$ — одна из пар комплексно сопряженных собственных чисел. Собственному числу λ отвечает собственный вектор $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^n = {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ комплексифицированного оператора ${}^{\mathbb{C}}A$.

Сопряженный вектор $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ по лемме 3 также является собственным, с собственным значением $\overline{\lambda}$.

Комплексная плоскость $\mathbb{C}^2$, натянутая на собственные векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\overline{\boldsymbol{\xi}}$ инвариантна относительно оператора ${}^{\mathbb{C}}A$. Вещественное подпространство $\mathbb{R}^n \subset {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ также инвариантно. Поэтому их пересечение также ин-

вариантно относительно ${}^{\mathbb{C}}A$. Покажем, что это пересечение является двумерной вещественной плоскостью $\mathbb{R}^2$ (рис. 130).

Действительно, рассмотрим вещественную и мнимую части собственного вектора $\boldsymbol{\xi}$:

$$\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} + \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathbb{R}^n, \quad \boldsymbol{y} = \frac{1}{2i}(\boldsymbol{\xi} - \overline{\boldsymbol{\xi}}) \in \mathbb{R}^n.$$

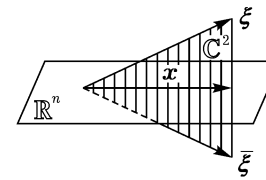

Рис. 130. Вещественная часть комплексного собственного вектора принадлежит инвариантной вещественной плоскости

Будучи $\mathbb{C}$-линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{\xi}$ и $\overline{\boldsymbol{\xi}}$, векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ принадлежат пересечению $\mathbb{C}^2 \cap \mathbb{R}^n$. Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ $\mathbb{C}$-линейно независимы, так как через них линейно выражаются $\mathbb{C}$-независимые векторы $\boldsymbol{\xi}$, $\overline{\boldsymbol{\xi}}$:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}, \quad \overline{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{x} - i\boldsymbol{y}.$$

Итак, каждый вектор плоскости $\mathbb{C}^2$ однозначно записывается в виде комплексной линейной комбинации вещественных векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{\eta} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Такой вектор вещественнен ($\boldsymbol{\eta} = \overline{\boldsymbol{\eta}}$), если и только если $\overline{a}\boldsymbol{x} + \overline{b}\boldsymbol{y} = a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y}$, т. е. a и b вещественны. Итак, *пересечение $\mathbb{C}^2 \cap \mathbb{R}^n$ — это двумерная вещественная плоскость $\mathbb{R}^2$, натянутая на векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ вещественной и мнимой частей собственного вектора $\boldsymbol{\xi}$.*

Собственные числа сужения оператора A на плоскость $\mathbb{R}^2$ — это λ и $\overline{\lambda}$.

Действительно, комплексификация не меняет собственных чисел. После комплексификации сужения A на $\mathbb{R}^2$ получится сужение ${}^{\mathbb{C}}A$ на ${}^{\mathbb{C}}A$. Но плоскость $\mathbb{C}^2$ натянута на собственные векторы оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ с собственными числами λ, $\overline{\lambda}$. Итак, собственные числа $A \mid \mathbb{R}^2$ суть λ и $\overline{\lambda}$.

Остается показать, что построенные одномерные и двумерные инвариантные подпространства пространства $\mathbb{R}^n$ $\mathbb{R}$-линейно независимы. Это сразу следует из того, что n собственных векторов оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ $\mathbb{C}$-линейно независимы и линейно выражаются через наши векторы $\boldsymbol{\xi}_k$ ($k = 1, \ldots, \nu$) и $\boldsymbol{x}_k$, $\boldsymbol{y}_k$ ($k = 1, \ldots, \mu$).

Теорема доказана.

Таким образом, *в случае, когда все собственные числа оператора $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ простые, линейное дифференциальное уравнение*

$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, распадается в прямое произведение уравнений с одномерными и двумерными фазовыми пространствами.

Заметим, что многочлен общего вида кратных корней не имеет. Итак, для исследования линейных дифференциальных уравнений необходимо прежде всего рассмотреть линейные уравнения на прямой (что мы уже и сделали) и на плоскости.

3. Линейное уравнение на плоскости.

Теорема. *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор с невещественными собственными числами λ, $\overline{\lambda}$.*

Тогда A представляет собой овеществление оператора $\Lambda\colon \mathbb{C}^1 \to \mathbb{C}^1$ умножения на комплексное число λ.

Точнее, плоскость $\mathbb{R}^2$ можно снабдить структурой комплексной прямой $\mathbb{C}^1$, так что $\mathbb{R}^2 = {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^1$ и $A = {}^{\mathbb{R}}\Lambda$.

Доказательство — несколько таинственная выкладка[1]. Пусть $\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y} \in {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ — комплексный собственный вектор оператора ${}^{\mathbb{C}}A$ с собственным значением $\lambda = \alpha + i\omega$. Векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ образуют базис в $\mathbb{R}^2$. Имеем, с одной стороны,

$$ {}^{\mathbb{C}}A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = (\alpha + i\omega)(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} - \omega\boldsymbol{y} + i(\omega\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}) $$

и, с другой,

$$ {}^{\mathbb{C}}A(\boldsymbol{x} + i\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + iA\boldsymbol{y}, $$

откуда

$$ A\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} - \omega\boldsymbol{y}, \qquad A\boldsymbol{y} = \omega\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y} $$

т. е. оператор $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в базисе $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ имеет ту же матрицу

$$ \begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix}, $$

что оператор ${}^{\mathbb{R}}\Lambda$ умножения на $\lambda = \alpha + i\omega$ в базисе 1, $-i$. Итак, искомая комплексная структура на $\mathbb{R}^2$ получится, если принять $\boldsymbol{x}$ за 1 и $\boldsymbol{y}$ за $-i$.

[1] Выкладку можно заменить следующим рассуждением. Пусть $\lambda = \alpha + i\omega$. Определим оператор $I\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ условием $A = \alpha E + \omega I$. Такой оператор I существует, так как $\omega \neq 0$ по условию. Тогда $I^2 = -E$, так как оператор A удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Принимая I за умножение на i, получаем в $\mathbb{R}^2$ нужную комплексную структуру.

Следствие 1. *Пусть* $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *— линейное преобразование евклидовой плоскости с невещественными собственными числами* λ, $\overline{\lambda}$. *Тогда преобразование* A *аффинно эквивалентно растяжению в* $|\lambda|$ *раз с поворотом на угол* $\arg\lambda$.

Следствие 2. *Фазовый поток линейного уравнения* (1) *на евклидовой плоскости* $\mathbb{R}^2$ *с невещественными собственными числами* λ, $\overline{\lambda} = \alpha \pm i\omega$ *аффинно эквивалентен семейству растяжений в* $e^{\alpha t}$ *раз с одновременным вращением на угол* ωt.

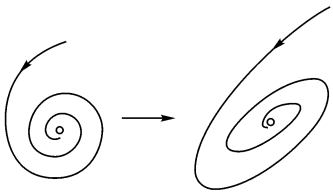

Рис. 131. Аффинный образ логарифмической спирали

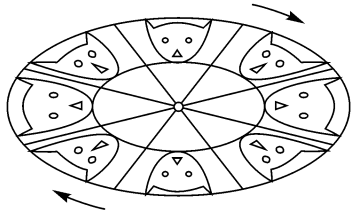

Рис. 132. Эллиптический поворот

В частности, особая точка 0 является фокусом, а фазовые кривые — аффинными образами логарифмических спиралей, приближающихся к началу координат при $t \to +\infty$ в случае, когда вещественная часть α собственных чисел λ, $\overline{\lambda}$ отрицательна, и удаляющихся в случае, когда $\alpha > 0$ (рис. 131).

В случае $\alpha = 0$ (рис. 132) фазовые кривые — семейство концентрических эллипсов, а особая точка — их *центр*. В этом случае преобразования фазового потока называются *эллиптическими поворотами*.

4. Классификация особых точек на плоскости. Пусть теперь

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2, \quad A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

— произвольное линейное уравнение на плоскости. Пусть корни λ_1, λ_2 характеристического уравнения различны. Если они вещественны и $\lambda_1 < \lambda_2$, то уравнение распадается на два одномерных и мы получаем один из случаев, уже изученных в гл. 1 (рис. 133, 134, 135).

Здесь пропущены пограничные случаи, когда λ_1 или λ_2 равно 0. Они представляют гораздо меньший интерес, так как встречаются ред-

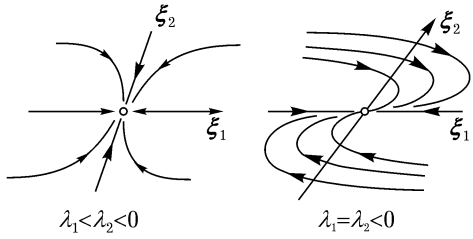

Рис. 133. Устойчивые узлы

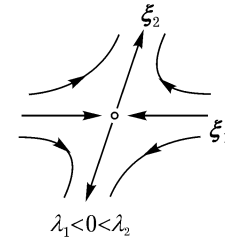

Рис. 134. Седло

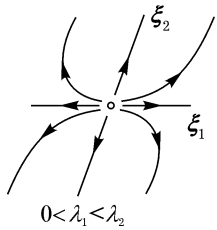

Рис. 135. Неустойчивый узел

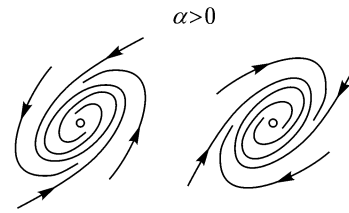

Рис. 136. Устойчивые фокусы

ко и не сохраняются при сколь угодно малом возмущении. Исследование их никаких трудностей не представляет.

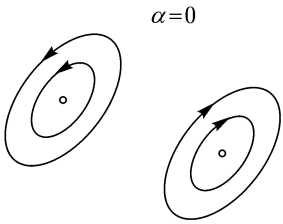

Рис. 137. Центры

Если же корни комплексны, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, то в зависимости от знака α может получится один из случаев, представленных на рис. 136, 137, 138.

Случай центра является исключительным, но он встречается, например, в консервативных системах (см. § 12). Случаи кратных корней также являются исключительными. Читателю предоставляется проверить, что жордановой клетке соответствует случай, изображенный на рис. 133 ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$; так называемый вырожденный узел).

5. Пример: маятник с трением. Применим все сказанное к уравнению малых колебаний маятника с трением $\ddot{x} = -x - k\dot{x}$ (k — коэффициент трения). Составим эквивалентную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - k\dot{x}_2. \end{cases}$$

Исследуем характеристическое уравнение. Матрица системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1 и след $-k$. Корни характеристического уравнения $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$ комплексны при $|k| < 2$, т. е. при не слишком большом трении[1].

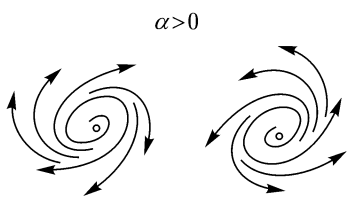

Рис. 138. Неустойчивые фокусы

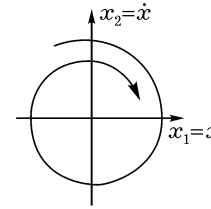

Рис. 139. Фазовая плоскость маятника с малым трением

Вещественная часть каждого из комплексных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ равна $-k/2$. Иными словами, *при положительном не слишком большом коэффициенте трения* $(0 < k < 2)$ *нижнее положение равновесия маятника* $(x_1 = x_2 = 0)$ *будет устойчивым фокусом.*

При $k \to 0$ фокус превращается в центр; чем меньше коэффициент трения, тем медленнее фазовая точка приближается к положению равновесия при $t \to +\infty$ (рис. 139). Явные формулы для изменения $x_1 = x$ со временем получаются из следствия 2 п. 3 и формул п. 4 § 19:

$$x(t) = re^{\alpha t}\cos(\varphi - \omega t) = Ae^{\alpha t}\cos\omega t + Be^{\alpha t}\sin\omega t,$$

где коэффициенты r и φ (или A и B) определяются из начальных условий.

Итак, колебания маятника будут затухающими, с переменной амплитудой $re^{\alpha t}$ и с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Чем больше коэффициент трения, тем

[1] Случай вещественных корней рассмотрен в § 17, п. 2.

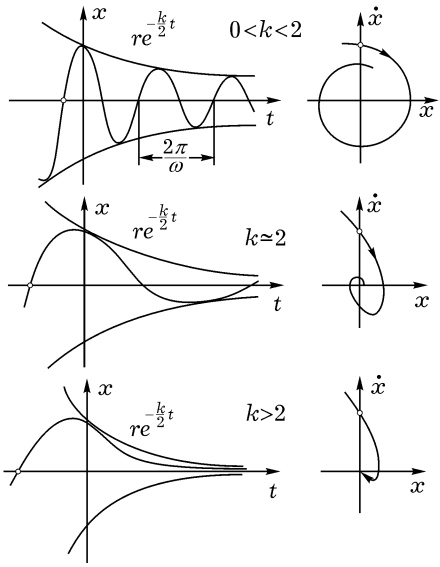

Рис. 140. Переход от затухающих колебаний к неколебательному движению маятника: фазовые кривые и графики решений при трех значениях коэффициента трения

быстрее уменьшается амплитуда[1]. Частота $\omega = \sqrt{1 - \frac{k^2}{4}}$ уменьшается с увеличением коэффициента трения k. При $k \to 2$ частота стремится к 0, а период — к ∞ (рис. 140). При малых k $\omega \approx 1 - \frac{k^2}{8}$ $(k > 0)$, так что трение увеличивает период очень незначительно, и его влиянием на частоту во многих расчетах можно пренебрегать.

Задача 1. Нарисовать фазовые кривые нелинеаризованного маятника с трением, $\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$ (рис. 141).

Указание. Сосчитайте производную полной энергии вдоль фазовой кривой.

6. Общее решение линейного уравнения в случае простых корней характеристического уравнения. Мы уже знаем, что всякое решение φ комплексифицированного уравнения является линейной

[1]И все же при любом значении $k < 2$ маятник делает бесконечное количество размахов. Если же $k > 2$, маятник меняет направление движения не более одного раза.

комбинацией экспонент (см. § 19, 5):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\xi}_k,$$

где $\boldsymbol{\xi}_k$ — какой-нибудь собственный вектор с собственным значением λ_k. *Выберем собственные векторы с вещественными собственными значениями вещественными, а с комплексно сопряженными — комплексно сопряженными.*

Мы уже знаем, что решения вещественного уравнения — это решения его комплексификации с вещественными начальными условиями. Чтобы вектор $\varphi(0)$ был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \boldsymbol{\xi}_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k \overline{\boldsymbol{\xi}}_k.$$

Для этого *коэффициенты при комплексно сопряженных векторах должны быть комплексно сопряженными, а при вещественных — вещественными.*

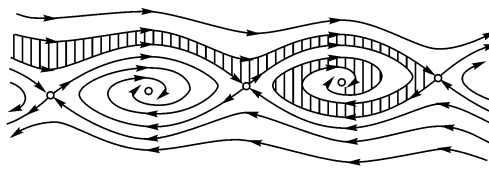

Рис. 141. После нескольких оборотов маятник начинает качаться возле нижнего положения равновесия

Заметим, что n комплексных постоянных c_k (при фиксированном выборе собственных векторов) определяются решением комплексного уравнения однозначно. Итак, доказана

Теорема. *Каждое решение вещественного уравнения единственным образом (при фиксированном выборе собственных векторов) записывается в виде*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\xi}_k + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \boldsymbol{\xi}_k + \overline{c}_k e^{\overline{\lambda}_k t} \overline{\boldsymbol{\xi}}_k, \qquad (1)$$

где a_k — вещественные, а c_k — комплексные постоянные.

Формула (1) называется *общим решением* уравнения. Ее можно переписать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t}\boldsymbol{\xi}_k + 2\,\mathrm{Re}\sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t}\boldsymbol{\xi}_k.$$

Заметим, что общее решение зависит от $\nu + 2\mu = n$ вещественных постоянных a_k, $\mathrm{Re}\, c_k$, $\mathrm{Im}\, c_k$. Эти постоянные однозначно определяются начальными условиями.

Следствие 1. *Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — решение системы n линейных вещественных дифференциальных уравнений первого порядка с матрицей A. Пусть все корни характеристического уравнения матрицы A простые. Тогда каждая из функций φ_m является линейной комбинацией функций $e^{\lambda_k t}$ и $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, где λ_k — вещественные, а $\alpha_k \pm i\omega_k$ — комплексные корни характеристического уравнения.*

Доказательство.

Разложим общее решение (1) по координатному базису: $\varphi = \varphi_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \varphi_n\boldsymbol{e}_n$. Учитывая, что $e^{(\alpha_k \pm i\omega_k)t} = e^{\alpha_k t}(\cos\omega_k t \pm i\sin\omega_k t)$, получим требуемое.

При практическом решении линейных систем можно, найдя собственные числа, искать решения в виде линейной комбинации функций $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$ и $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$ методом неопределенных коэффициентов.

Следствие 2. *Пусть A — вещественная квадратная матрица, собственные числа которой просты. Тогда каждый из элементов матрицы e^{At} есть линейная комбинация функций $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, где λ_k — вещественные, а $\alpha \pm i\omega_k$ — комплексные корни характеристического уравнения.*

Доказательство.

Каждый столбец матрицы e^{At} составлен из координат образа базисного вектора под действием фазового потока системы дифференциальных уравнений с матрицей A.

Замечание. Все сказанное выше непосредственно переносится на уравнения и системы уравнений порядка выше 1, так как они сводятся к системам первого порядка (см. § 8).

Задача 1. Найти все вещественные решения уравнений

$$x^{\mathrm{IV}} + 4x = 0, \quad x^{\mathrm{IV}} = x, \quad \dddot{x} + x = 0.$$

§ 21. Классификация особых точек линейных систем

Выше мы видели, что в общем случае (когда у характеристического уравнения нет кратных корней) вещественная линейная система распадается в прямое произведение одномерных и двумерных. Поскольку одномерные и двумерные системы мы уже изучили, мы можем теперь исследовать многомерные системы.

1. Пример: особые точки в трехмерном пространстве. Характеристическое уравнение — вещественное кубическое. Вещественное кубическое уравнение может иметь три вещественных корня, либо один вещественный и два комплексных. В зависимости от расположения этих корней λ_1, λ_2, λ_3 на плоскости комплексного переменного λ возможно много разных случаев.

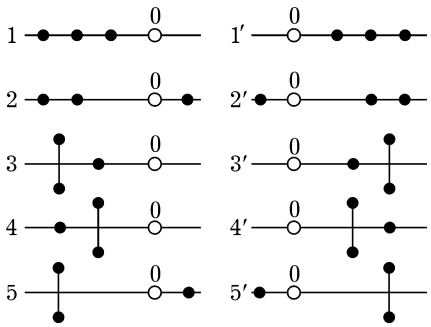

Рис. 142. Собственные числа вещественного оператора $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Грубые случаи

Обратим внимание на порядок и знаки вещественных частей. Возможны 10 «грубых» случаев (рис. 142) и ряд «вырожденных» случаев (см., например, рис. 143), когда вещественная часть одного из корней равна нулю или вещественной части не сопряженного с ним корня (мы не рассматриваем сейчас случаи кратных корней). Исследование поведения фазовых кривых в каждом из этих случаев не представляет труда.

Учитывая, что $e^{\lambda t}$ ($\operatorname{Re}\lambda < 0$) при $t \to +\infty$ стремится к 0, и тем быстрее, чем меньше $\operatorname{Re}\lambda$, мы получаем изображенные на рис. 144–148 фазовые кривые:

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}(c_1 e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{\xi}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\boldsymbol{\xi}_3).$$

Случаи 1′)–5′) получаются из случаев 1)–5) изменением направления оси t, так что на рис. 144–148 надо лишь заменить все стрелки противоположными.

Задача 1. Нарисовать фазовые кривые в случаях 6), 7), 8), 9) рис. 143.

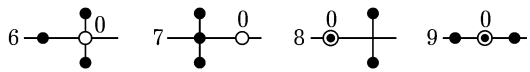

Рис. 143. Некоторые вырожденные случаи

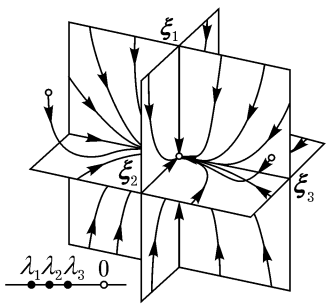

Рис. 144. Фазовое пространство линейного уравнения в случае $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Фазовый поток — сжатие по трем направлениям

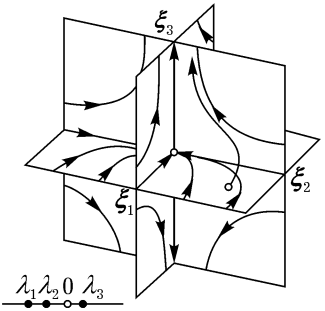

Рис. 145. Случай $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Сжатие по двум направлениям, растяжение по третьему

2. Линейная, дифференцируемая и топологическая эквивалентность. Всякая классификация основывается на каком-нибудь отношении эквивалентности. Существуют по крайней мере три разумных отношения эквивалентности для линейных систем; они соответствуют алгебраическому, дифференцируемому и топологическому подходам.

Пусть $\{f^t\}$, $\{g^t\}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — фазовые потоки.

Определение. Потоки $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ эквивалентны[1], если существует взаимно однозначное отображение h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящее по-

[1]Введенное здесь отношение эквивалентности называют также *сопряженностью и подобием.*

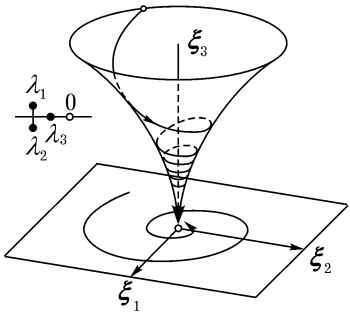

Рис. 146. Случай $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < \lambda_2 < 0$. Сжатие по направлению ξ_3 вращение с более быстрым сжатием в плоскости (ξ_1, ξ_2)

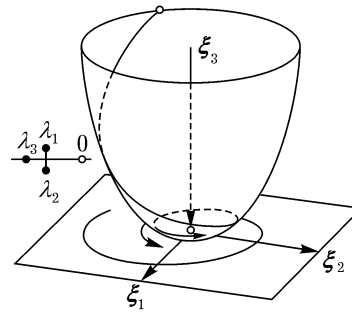

Рис. 147. Случай $\lambda_3 < \operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0$. Сжатие по направлению ξ_3 вращение с более медленным сжатием в плоскости (ξ_1, ξ_2)

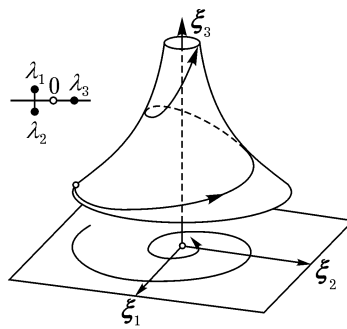

Рис. 148. Случай $\operatorname{Re}\lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$. Растяжение по направлению ξ_3, вращение со сжатием в плоскости (ξ_1, ξ_2)

ток $\{f^t\}$ в поток $\{g^t\}$, так что $h \circ f^t = g^t \circ h$ для любого $t \in \mathbb{R}$ (рис. 149). Мы можем сказать, что поток $\{f^t\}$ превращается в $\{g^t\}$ при замене координат h.

При этом потоки называются:

1) *линейно эквивалентными*, если существует такое отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, являющееся *линейным изоморфизмом*, $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$;

2) *дифференцируемо эквивалентными*, если существует такое отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, являющееся *диффеоморфизмом*;

3) *топологически эквивалентными*, если существует такое отобра-

жение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, являющееся *гомеоморфизмом*, т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением.

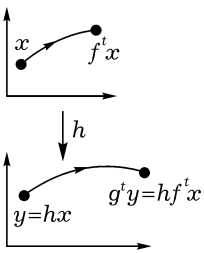

Рис. 149. Эквивалентные потоки

Задача 1. Докажите, что из линейной эквивалентности вытекает дифференцируемая, а из дифференцируемой — топологическая.

Заметим, что отображение h переводит фазовые кривые потока $\{f^t\}$ в фазовые кривые потока $\{g^t\}$.

Задача 2. Всякий ли линейный автоморфизм $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$, переводящий фазовые кривые потока $\{f^t\}$ в фазовые кривые потока $\{g^t\}$, осуществляет линейную эквивалентность потоков?

Ответ. Нет.

Указание. Рассмотреть $n = 1$, $f^t x = e^t x$, $g^t x = e^{2t} x$.

Задача 3. Доказать, что отношения линейной, дифференцируемой и топологической эквивалентности являются настоящими отношениями эквивалентности, т. е.

$$f \sim f, \quad (f \sim g) \Rightarrow (g \sim f), \quad (f \sim g,\, g \sim k) \Rightarrow (f \sim k).$$

В частности, все сказанное применимо к фазовым потокам линейных систем. Для краткости мы будем говорить об эквивалентности самих систем.

Итак, все линейные системы мы тремя способами разбили на классы эквивалентности (линейной, дифференцируемой, топологической). Изучим эти классы подробнее.

3. Линейная классификация.

Теорема. *Пусть A, $B\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейные операторы, все собственные числа которых просты. Тогда системы*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \text{и} \quad \dot{\boldsymbol{y}} = B\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n,$$

линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда собственные числа операторов A и B совпадают.

Доказательство.

Для линейной эквивалентности линейных систем необходимо и достаточно, чтобы $B = hAh^{-1}$ при некотором $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ (рис. 150) (ибо

$\dot{\boldsymbol{y}} = h\dot{\boldsymbol{x}} = hA\boldsymbol{x} = hAh^{-1}\boldsymbol{y}$). Собственные числа операторов A и hAh^{-1} совпадают. (Здесь простота собственных чисел несущественна.)

Обратно, пусть собственные числа A простые и совпадают с собственными числами B. Тогда A и B разлагаются в прямые произведения одинаковых (линейно эквивалентных) одномерных и двумерных систем согласно § 20; поэтому они линейно эквивалентны.

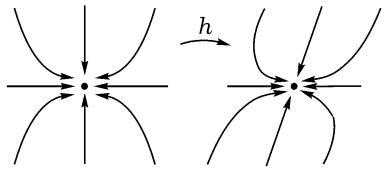

Рис. 150. Линейно эквивалентные системы

Задача 1. Покажите, что системы $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$ и $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = x_2$ линейно не эквивалентны, хотя их собственные числа и одинаковы.

4. Дифференцируемая классификация. Очевидна

Теорема. *Две линейные системы*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = B\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

дифференцируемо эквивалентны тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны[1].

Доказательство.

Пусть $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, переводящий фазовый поток системы A в фазовый поток системы B. Точка $\boldsymbol{x} = 0$ неподвижна для фазового потока системы A. Поэтому h переводит 0 в одну из неподвижных точек $\boldsymbol{c}$ потока системы B, так что $B\boldsymbol{c} = 0$. Диффеоморфизм $d\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сдвига на $\boldsymbol{c}$ ($d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}$) переводит фазовый поток B в себя: $((\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})\dot{} = \dot{\boldsymbol{x}} = B\boldsymbol{x} = B(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c})$). Диффеоморфизм $h_1 = d \circ h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ переводит поток A в поток B и оставляет 0 на месте: $h_1(0) = 0$.

Обозначим через $H\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ производную диффеоморфизма h_1 в 0. Диффеоморфизмы $h_1 \circ e^{At} = e^{Bt} \circ h_1$ совпадают при любых t. Поэтому при любом t совпадают и их производные при $\boldsymbol{x} = 0$:

$$He^{At} = e^{Bt}H,$$

что и требовалось доказать.

[1] Не следует однако думать, что всякий диффеоморфизм, устанавливающий их эквивалентность линеен. Пример: $A = B = 0$.

§ 22. Топологическая классификация особых точек

Рассмотрим две линейные системы:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = B\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n,$$

и предположим, что вещественные части всех их собственных чисел отличны от 0. Обозначим через m_- число собственных чисел с отрицательной вещественной частью и через m_+ число собственных чисел с положительной вещественной частью, так что $m_- + m_+ = n$.

1. Теорема. *Для топологической эквивалентности двух линейных систем, не имеющих собственных чисел с нулевой вещественной частью, необходимо и достаточно, чтобы количество собственных чисел с отрицательной (положительной) вещественной частью в той и в другой системе было одинаково*:

$$m_-(A) = m_-(B), \quad m_+(A) = m_+(B).$$

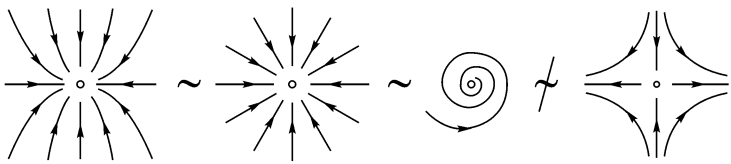

Рис. 151. Топологически эквивалентные и неэквивалентные системы

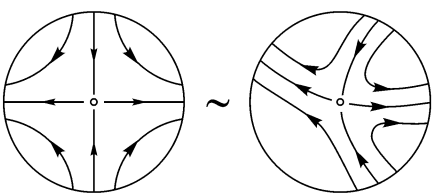

Рис. 152. Топологическая эквивалентность системы и ее линеаризации

Эта теорема утверждает, например, что устойчивые узлы и фокусы (рис. 151) топологически эквивалентны друг другу ($m_- = 2$), но не эквивалентны седлу ($m_- = m_+ = 1$).

Подобно индексу инерции невырожденной квадратичной формы, число m_- является единственным топологическим инвариантом системы.

Замечание. Аналогичное предложение справедливо *локально* (в окрестности неподвижной точки) для *нелинейных* систем, линейные

части которых не имеют чисто мнимых собственных чисел. В частности, такая система в окрестности неподвижной точки топологически эквивалентна своей линейной части (рис. 152). Мы не можем останавливаться на доказательстве этого предложения, весьма важного для исследования нелинейных систем.

2. Редукция к случаю $m_- = 0$. Топологическая эквивалентность линейных систем с одинаковыми m_- и m_+ вытекает из следующих трех лемм:

Лемма 1. *Прямые произведения топологически эквивалентных систем топологически эквивалентны.*

То есть если системы, заданные операторами A_1, $B_1\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_1}$; A_2, $B_2\colon \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$, переводятся друг в друга гомеоморфизмами $h_1\colon \mathbb{R}^{m_1} \to \mathbb{R}^{m_1}$, $h_2\colon \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_2}$, то существует гомеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^{m_1} + \mathbb{R}^{m_2} \to \mathbb{R}^{m_1} + \mathbb{R}^{m_2}$, переводящий фазовый поток системы-произведения $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = A_1\boldsymbol{x}_1$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = A_2\boldsymbol{x}_2$ в фазовый поток системы-произведения $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = B_1\boldsymbol{x}_1$, $\dot{\boldsymbol{x}}_2 = B_2\boldsymbol{x}_2$.

Доказательство очевидно: надо положить $h(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = (h_1(\boldsymbol{x}_1), h_2(\boldsymbol{x}_2))$.

Из курса линейной алгебры известна

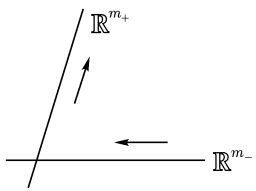

Рис. 153. Инварианты подпространства оператора, не имеющего чисто мнимых собственных чисел

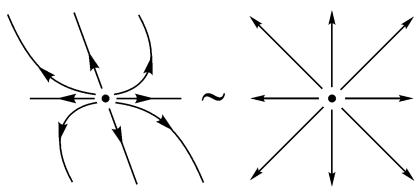

Рис. 154. Все неустойчивые узлы топологически эквивалентны

Лемма 2. *Если у оператора $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ нет чисто мнимых собственных чисел, то пространство $\mathbb{R}^n$ распадается в прямую сумму двух инвариантных относительно A подпространств, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m_-} + \mathbb{R}^{m_+}$, так что все собственные числа сужения A на $\mathbb{R}^{m_-}$ имеют отрицательные вещественные части, а на $\mathbb{R}^{m_+}$ — положительные* (рис. 153).

Это следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

Леммы 1 и 2 сводят доказательство топологической эквивалентности к следующему частному случаю:

Лемма 3. *Пусть* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть* (рис. 154). *Тогда система*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

топологически эквивалентна стандартной (рис. 154):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Эта лемма почти очевидна в одномерном случае и в случае фокуса на плоскости, а значит, — по лемме 1 — и в любой системе без кратных корней.

Мы проведем далее доказательство леммы 3 в общем случае.

3. Функция Ляпунова. Доказательство леммы 3 основано на построении специальной квадратичной формы — так называемой функции Ляпунова.

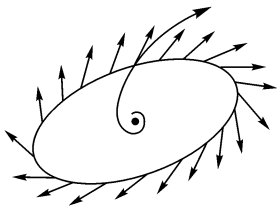

Рис. 155. Поверхность уровня функции Ляпунова

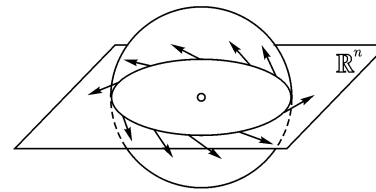

Рис. 156. Поверхность уровня функции Ляпунова в $\mathbb{C}^n$

Теорема. *Пусть* $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *— линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть. Тогда в* $\mathbb{R}^n$ *существует такая евклидова структура, что вектор* $A\boldsymbol{x}$ *в каждой точке* $\boldsymbol{x} \neq 0$ *образует с радиус-вектором* $\boldsymbol{x}$ *острый угол.*

Иными словами:

Существует такая положительно определенная квадратичная форма r^2 *в* $\mathbb{R}^n$*, что ее производная по направлению векторного поля* $A\boldsymbol{x}$

положительна:

$$L_{Ax} r^2 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{1}$$

Или еще:

Существует эллипсоид в $\mathbb{R}^n$ с центром в 0 такой, что в каждой его точке x вектор Ax направлен наружу (рис. 155).

Легко проверить, что все три формулировки эквивалентны. Мы докажем (и будем использовать в дальнейшем) эту теорему во второй формулировке. Доказывать ее удобнее в комплексном случае:

Пусть все собственные числа λ_k оператора $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ имеют положительные вещественные части. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $r^2\colon {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, производная которой по направлению векторного поля ${}^{\mathbb{R}}Az$ есть положительно определенная квадратичная форма:

$$L_{{}^{\mathbb{R}}Az} r^2 > 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0. \tag{2}$$

Применяя неравенство (2) в случае, когда оператор A является комплексификацией вещественного оператора, а z принадлежит вещественному подпространству (рис. 156), получаем вещественную теорему (1).

4. Построение функции Ляпунова. В качестве функции Ляпунова r^2 мы будем брать сумму квадратов модулей координат в подходящем комплексном базисе: $r^2 = (z, \overline{z}) = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{z_k}$. При фиксированном базисе мы можем отождествить вектор z с набором чисел $z_1, \ldots, z_n$ и оператор $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ с матрицей (a_{kl}). Вычисление показывает, что *производная является квадратичной формой*:

$$L_{{}^{\mathbb{R}}Az}(z, \overline{z}) = (Az, \overline{z}) + (z, \overline{Az}) = 2\operatorname{Re}(Az, \overline{z}). \tag{3}$$

Если базис собственный, то полученная форма положительно определена (рис. 157). Действительно, в этом случае

$$2\operatorname{Re}(Az, \overline{z}) = 2\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Re}\lambda_k |z_k|^2. \tag{4}$$

По условию все вещественные части собственных чисел λ_k положительны. Поэтому форма (4) положительно определена.

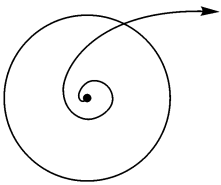

Рис. 157. Положительная определенность формы (4) в случае $n = 1$

Если оператор A не имеет собственного базиса, то он имеет почти собственный базис, которым можно с таким же успехом воспользоваться для построения функции Ляпунова.

Точнее, справедлива

Лемма 4. *Пусть $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — $\mathbb{C}$-линейный оператор и $\varepsilon > 0$. Тогда в $\mathbb{C}^n$ можно так выбрать базис $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$, что матрица A будет верхнетреугольной и все элементы выше диагонали будут по модулю меньше ε:*

$$(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & < \varepsilon \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Существование базиса, в котором матрица верхнетреугольная, следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

Такой базис легко построить индукцией по n, пользуясь лишь существованием у всякого линейного оператора $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ собственного вектора. Пусть $\boldsymbol{\xi}_1$ — этот вектор (рис. 158). Рассмотрим фактор-пространство $\mathbb{C}^n/\mathbb{C}\boldsymbol{\xi}_1 \cong \mathbb{C}^{n-1}$. Оператор A задает на фактор-пространстве оператор $\widetilde{A}\colon \mathbb{C}^{n-1} \to \mathbb{C}^{n-1}$. Пусть $\boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$ — базис в $\mathbb{C}^n$, в котором матрица оператора $\widetilde{A}$ верхнетреугольная. Обозначим через $\boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ каких-нибудь представителей классов $\boldsymbol{\eta}_2, \ldots, \boldsymbol{\eta}_n$ в $\mathbb{C}^n$. Тогда базис $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ — искомый.

Пусть матрица оператора A в базисе $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_n$ верхнетреугольная. Покажем, что *наддиагональные члены можно сделать сколь угодно малыми, заменяя векторы базиса на пропорциональные им векторы.* Действительно, пусть a_{kl} — элементы матрицы оператора A в базисе $\boldsymbol{\xi}_k$, так что $a_{kl} = 0$ при $k > l$. В базисе $\boldsymbol{\xi}'_k = N^k \boldsymbol{\xi}_k$ элементы матрицы оператора A будут $a'_{kl} = a_{kl} N^{l-k}$. При достаточно малом N для всех $l > k$ будет $|a'_{kl}| < \varepsilon$.

Лемма 4 доказана.

Сумму квадратов модулей координат в выбранном «ε-почти собственном» базисе мы и возьмем в качестве функции Ляпунова (при достаточно малом ε).

5. Оценка производной. Рассмотрим множество всех квадратичных форм в $\mathbb{R}^m$. Это множество имеет естественную структуру линейного пространства $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Очевидна

Лемма 5. *Множество положительных определенных квадратичных форм в* $\mathbb{R}^m$ *открыто в* $\mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

То есть если форма $a = \sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl}x_kx_l$ положительно определена, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что всякая форма $a+b$, где $|b_{kl}| < \varepsilon$ (для всех k, l, $1 \leqslant k$, $l \leqslant m$), тоже положительно определена.

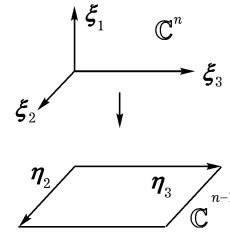

Рис. 158. Построение базиса, в котором матрица оператора треугольная

Доказательство.

Форма a положительна во всех точках единичной сферы $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 = 1$. Сфера компактна, а форма непрерывна. Поэтому нижняя грань достигается и, значит, всюду на сфере $a(x) \geqslant \alpha > 0$.

Если $|b_{kl}| < \varepsilon$, то на сфере $|b(x)| \leqslant \sum |b_{kl}| \leqslant m^2\varepsilon$.

Поэтому при $\varepsilon < \frac{\alpha}{m^2}$ форма $a+b$ положительна на сфере и, значит, положительно определена. Лемма доказана.

Замечание. Из нашего рассуждения вытекает также, что любая положительно определенная квадратичная форма удовлетворяет везде неравенству

$$\alpha\|x\|^2 \leqslant a(x) \leqslant \beta\|x\|^2, \quad 0 < \alpha < \beta. \qquad (5)$$

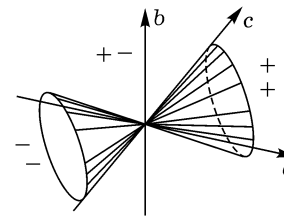

Рис. 159. Пространство квадратичных форм

Задача 1. Докажите, что множество невырожденных квадратичных форм с данной сигнатурой открыто.

Пример 1. Пространство квадратичных форм от двух переменных $ax^2 + 2bxy + cy^2$ — это трехмерное пространство с координатами a, b, c (рис. 159). Конус $b^2 = ac$ делит это пространство на три открытые части соответственно сигнатурам.

Мы используем лемму 5, чтобы доказать следующее: при достаточно малом ε производная по направлению векторного поля ${}^{\mathbb{R}}A\boldsymbol{z}$ от суммы квадратов модулей координат в «ε-почти собственном» базисе, выбранном по лемме 4, положительно определена.

Согласно формуле (3) эта производная является квадратичной формой вещественных и мнимых частей координат $z_k = x_k + iy_k$.

Выделим в формуле (3) слагаемые с диагональными и наддиагональными элементами матрицы (A):

$$L_{\mathbb{R}A_z} r^2 = P + Q, \quad \text{где} \quad P = 2\operatorname{Re}\sum_{k=l} a_{kl} z_k \overline{z}_l, \quad Q = 2\operatorname{Re}\sum_{k<l} a_{kl} z_k \overline{z}_l.$$

Заметим, что диагональные члены треугольной матрицы (A) — это собственные числа λ_k оператора A. Поэтому *квадратичная форма*

$$P = \sum_{k=1}^{n} 2\operatorname{Re}\lambda_k (x_k^2 + y_k^2)$$

переменных x_k, y_k положительно определена и не зависит от выбора базиса[1].

По лемме 5 заключаем, что при достаточно малом ε форма $P+Q$ (близкая к P) также положительно определена. Ибо коэффициенты формы Q переменных x_k, y_k при достаточно малом ε становятся сколь угодно малыми (поскольку $|a_{kl}| < \varepsilon$ при $k < l$).

Неравенство (2), а с ним и (1), доказано.

Замечание. Поскольку $L_{Ax} r^2$ является положительно определенной квадратичной формой, имеет место неравенство вида (5):

$$\alpha r^2 \leqslant L_{Ax} r^2 \leqslant \beta r^2, \tag{5'}$$

где $\beta > \alpha > 0$ — некоторые постоянные.

Таким образом, сформулированная в п. 3 теорема о функции Ляпунова доказана.

Следующая серия задач приводит к другому доказательству этой теоремы.

[1] Следует отметить, что заданное формой P отображение ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ зависит от выбора базиса.

Задача 2. Докажите, что дифференцирование по направлению векторного поля $A\boldsymbol{x}$ в $\mathbb{R}^n$ задает линейный оператор $L_A\colon \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \to \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ из пространства квадратичных форм на $\mathbb{R}^n$ в себя.

Задача 3. Зная собственные числа λ_i оператора A, найти собственные числа оператора L_A.

Ответ. $\lambda_i + \lambda_j$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$.

Указание. Пусть A имеет собственный базис. Тогда собственными векторами L_A будут квадратичные формы, равные попарным произведениям линейных форм, являющихся собственными векторами оператора, дуального к A.

Задача 4. Докажите, что оператор L_A является изоморфизмом, если A не имеет противоположных собственных чисел. В частности, если вещественные части всех собственных чисел оператора A одного знака, то каждая квадратичная форма на $\mathbb{R}^n$ есть производная некоторой квадратичной формы по направлению векторного поля $A\boldsymbol{x}$.

Задача 5. Докажите, что если вещественные части всех собственных чисел оператора A положительны, то форма, производная которой по направлению поля $A\boldsymbol{x}$ положительно определена, сама положительно определена и, следовательно, удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы.

Указание. Представить форму в виде интеграла ее производной вдоль фазовых кривых.

6. Построение гомеоморфизма h. Приступаем к доказательству леммы 3. Гомеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, переводящий фазовый поток $\{f^t\}$ уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ ($\operatorname{Re}\lambda_k > 0$) в фазовый поток $\{g^t\}$ уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$, будем строить следующим образом. Рассмотрим сферу[1]

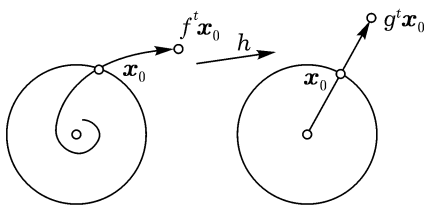

Рис. 160. Построение гомеоморфизма h

$$S = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\colon r^2(\boldsymbol{x}) = 1\},$$

где r^2 — функция Ляпунова из (1).

Точки этой сферы гомеоморфизм h будет оставлять на месте. Пусть $\boldsymbol{x}_0$ — точка сферы (рис. 160). Точку $f^t\boldsymbol{x}_0$ фазовой траектории

[1] Если угодно, эллипсоид.

уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ отображение h будет переводить в точку $g^t\boldsymbol{x}_0$ фазовой траектории уравнения $\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{x}$:

$$h(f^t\boldsymbol{x}_0) = g^t\boldsymbol{x}_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{x}_0 \in S, \quad h(0) = 0. \tag{6}$$

Мы должны проверить:

1) что формула (6) однозначно определяет значение h в любой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$;

2) что отображение $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно;

3) что $h \circ f^t = g^t \circ h$.

Доказательства всех этих утверждений очевидны.

7. Доказательство леммы 3.

Лемма 6. *Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ — какое-нибудь отличное от 0 решение уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$. Составим существенную функцию вещественного переменного t:*

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)).$$

Тогда отображение $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является диффеоморфизмом, причем

$$\alpha \leqslant \frac{d\rho}{dt} \leqslant \beta.$$

Доказательство.

По теореме единственности $r^2(\varphi(t)) \neq 0$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Согласно $(5')$, находим для $\dfrac{d\rho}{dt} = \dfrac{L_{Ax}r^2}{r^2}$ оценку $\alpha \leqslant \dfrac{d\rho}{dt} \leqslant \beta$, что и требовалось доказать.

Из леммы 6 следует, что:

1) *Каждая точка $\boldsymbol{x} \neq 0$ представляется в виде $\boldsymbol{x} = f^t\boldsymbol{x}_0$, где $\boldsymbol{x}_0 \in S$, $t \in \mathbb{R}$, $\{f^t\}$ — фазовый поток уравнения $\dot{\boldsymbol{r}} = A\boldsymbol{x}$.*

Действительно, рассмотрим решение φ с начальным условием $\varphi(0) = \boldsymbol{x}$. По лемме 6 при некотором τ будет $\tau^2(\varphi(\tau)) = 1$. Точка $\boldsymbol{x}_0 = \varphi(\tau)$ принадлежит S. Полагая $t = -\tau$, получим $\boldsymbol{x} = f^t(\boldsymbol{x}_0)$.

2) *Такое представление единственно.*

Действительно, фазовая кривая, выходящая из $\boldsymbol{x}$ (рис. 160), единственна и пересекает сферу в одной точке $\boldsymbol{x}_0$ (по лемме 6); единственность t также следует из монотонности ρ (лемма 6).

Итак, мы построили взаимно однозначное отображение прямого произведения прямой и сферы на евклидово пространство без одной точки

$$F\colon \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus 0, \quad F(t, \boldsymbol{x}_0) = f^t\boldsymbol{x}_0.$$

Из теоремы о зависимости решения от начальных условий вытекает, что как отображение F, так и обратное отображение непрерывно (и даже является диффеоморфизмом).

Заметим теперь, что для стандартного уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$ имеем $d\rho/dt = 2$. Поэтому отображение $G\colon \mathbb{R} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$, $G(t, \boldsymbol{x}_0) = g^t \boldsymbol{x}_0$ также взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Отображение h по определению (6) совпадает с отображением $G \circ F^{-1}\colon \mathbb{R}^n \setminus 0 \to \mathbb{R}^n \setminus 0$ всюду, кроме точки 0. Таким образом, мы доказали, что $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — взаимно однозначное отображение.

Непрерывность h и h^{-1} всюду, кроме точки 0, следует из непрерывности F, F^{-1} и G, G^{-1} (в действительности h — диффеоморфизм всюду, кроме точки 0; рис. 161).

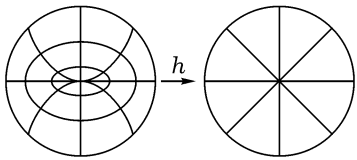

Рис. 161. Гомеоморфизм h является диффеоморфизмом всюду, кроме 0

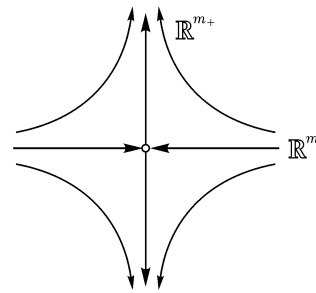

Рис. 162. Стандартное седло

Непрерывность h и h^{-1} в точке 0 следует из леммы 6. Эта лемма позволяет получить даже явную оценку $r^2(h(\boldsymbol{x}))$ через $r^2(\boldsymbol{x})$, $\|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1$:

$$(r^2(\boldsymbol{x}))^{2/\alpha} \leqslant r^2(h(\boldsymbol{x})) \leqslant (r^2(\boldsymbol{x}))^{2/\beta}.$$

Действительно, пусть $\boldsymbol{x} = F(t, \boldsymbol{x}_0)$, $t \leqslant 0$. Тогда $\beta t \leqslant \ln r^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \alpha t$ и $\ln r^2(h(\boldsymbol{x})) = 2t$. Наконец, при $\boldsymbol{x} \neq 0$ имеем $\boldsymbol{x} = f^s \boldsymbol{x}_0$, поэтому

$$\begin{aligned}(h \circ f^t)(\boldsymbol{x}) &= h(f^t(f^s(\boldsymbol{x}_0))) = h(f^{t+s}(\boldsymbol{x}_0)) = \\ &= g^{t+s}(\boldsymbol{x}_0) = g^t(g^s(\boldsymbol{x}_0)) = g^t(h(\boldsymbol{x})) = (g^t \circ h)(\boldsymbol{x}).\end{aligned}$$

При $\boldsymbol{x} = 0$ также $(h \circ f^t)(\boldsymbol{x}) = (g^t \circ h)(\boldsymbol{x})$. Итак, утверждения 1), 2), 3) п. 6 доказаны. Доказательство леммы 3 закончено.

8. Доказательство теоремы о топологической классификации. Из лемм 1, 2, 3 следует, что всякая линейная система $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$,

у которой оператор $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью, топологически эквивалентна стандартному многомерному седлу (рис. 162):

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = -\boldsymbol{x}_1, \quad \dot{\boldsymbol{x}}_2 = \boldsymbol{x}_2, \quad \boldsymbol{x}_1 \in \mathbb{R}^{m_-}, \quad \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^{m_+}.$$

Следовательно, две такие системы с одинаковыми числами m_-, m_+ топологически эквивалентны друг другу.

Заметим, что подпространства $\mathbb{R}^{m_-}$ и $\mathbb{R}^{m_+}$ инвариантны относительно фазового потока $\{g^t\}$. При увеличении t всякая точка $\mathbb{R}^{m_-}$ приближается к 0.

Задача 1. Докажите, что $g^t\boldsymbol{x} \to 0$ при $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{m_-}$.

Поэтому $\mathbb{R}^{m_-}$ — называется *входящим усом седла.* Точно так же $\mathbb{R}^{m_+}$ называется *выходящим усом.* Выходящий ус определяется условием $g^t\boldsymbol{x} \to 0$ при $t \to -\infty$.

Докажем теперь вторую часть теоремы о топологической классификации: *у топологически эквивалентных систем одинаково количество собственных чисел с отрицательной вещественной частью.*

Это количество есть размерность m_- входящего уса. Итак, достаточно доказать, что *размерности входящих усов у топологически эквивалентных седел одинаковы.*

Заметим, что всякий гомеоморфизм h, переводящий фазовый поток одного седла в фазовый поток другого, обязан переводить входящий ус одного во входящий ус другого (поскольку стремление к 0 при $t \to +\infty$ сохраняется при гомеоморфизме). Поэтому гомеоморфизм h осуществляет также гомеоморфное отображение входящего уса одного седла на входящий ус другого.

Совпадение размерностей усов вытекает теперь из следующего топологического предложения:

Размерность пространства $\mathbb{R}^n$ — топологический инвариант. Иными словами, гомеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ существует только между пространствами одинаковой размерности.

Хотя это предложение и кажется очевидным[1], доказательство его не просто и не будет здесь приводиться.

[1]Существуют, однако, взаимно однозначные отображения $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, а также непрерывные отображения $\mathbb{R}^m$ *на* $\mathbb{R}^n$ при $m < n$ (например, $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$).

Задача 2. Докажите, что 4 седла с трехмерным фазовым пространством и с $(m_-, m_+) = (3, 0), (2, 1), (1, 2), (0, 3)$ топологически не эквивалентны (не пользуясь недоказанным топологическим предложением).

Указание. Одномерный ус состоит из трех фазовых кривых, а более чем одномерный — из бесконечного числа (рис. 163).

Таким образом, топологическая классификация линейных систем с ненулевыми вещественными частями собственных чисел в $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^3$ проведена полностью, тогда как в $\mathbb{R}^n$ при $n > 3$ мы вынуждены ссылаться на недосказанное утверждение о топологической инвариантности размерности.

Задача 3. Провести топологическую классификацию линейных операторов $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, не имеющих собственных чисел с модулем 1.

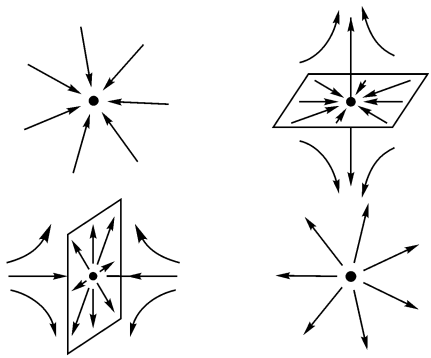

Рис. 163. Усы трехмерных седел

§ 23. Устойчивость положений равновесия

Вопрос об устойчивости положения равновесия нелинейной системы решается так же, как для линеаризованной системы, если у последней нет собственных чисел на мнимой оси.

1. Устойчивость по Ляпунову. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{v}$ — $r > 2$ раз дифференцируемое в области и векторное поле. Предположим, что уравнение (1) имеет положение равновесия (рис. 164). Выберем координаты x_i так, чтобы положение равновесия было началом координат: $\boldsymbol{v}(0) = 0$.

Решение с начальным условием $\varphi(t_0) = 0$ есть $\varphi = 0$. Нас интересует поведение решений с близкими начальными условиями.

Определение. Положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ уравнения (1) называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее только от ε и не зависящее от t, о котором идет речь ниже) такое, что для всякого $\boldsymbol{x}_0$, для

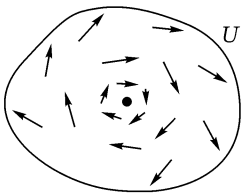

Рис. 164. Останутся ли вблизи положения равновесия фазовые кривые, начинающиеся в его достаточно малой окрестности

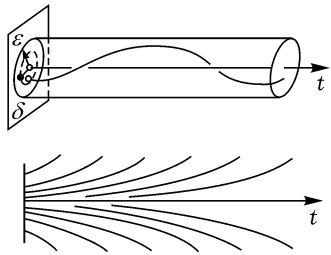

Рис. 165. Устойчивое и неустойчивое положения равновесия: различие в поведении интегральных кривых

которого[1] $\|\boldsymbol{x}_0\| < \delta$, решение φ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0) = \boldsymbol{x}_0$ продолжается на всю полуось $t > 0$ и удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ для всех $x > 0$ (рис. 165).

Иными словами, *устойчивость положения равновесия по Ляпунову — это равномерная на интервале* $[0, +\infty)$ *сходимость* (*к постоянному решению*) *решений, начальные значения которых стремятся к рассматриваемому положению равновесия.* Сходимость значений решении при любом фиксированном t гарантируется теоремой о непрерывной зависимости решения от начального условия; важна именно равномерная сходимость, т. е. независимость δ от t.

Задача 1. Исследовать устойчивость положений равновесия:

1) $\dot{x} = 0$,
2) $\dot{x} = x$;
3) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1; \end{cases}$
4) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1, \\ \dot{x}_2 = -x_2; \end{cases}$
5) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1. \end{cases}$

Задача 2. Докажите, что приведенное определение корректно, т. е. что устойчивость положения равновесия не зависит от системы координат, участвовавшей в определении.

Задача 3. Пусть известно, что для любого $N > 0$, $\varepsilon > 0$ существует такое решение φ уравнения (1), что для некоторого $t > 0$ $\|\varphi(t)\| > N\|\varphi(0)\|$, причем $\|\varphi(0)\| < \varepsilon$. Вытекает ли отсюда неустойчивость положения равновесия $x = 0$?

[1] Если $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, то $\|\boldsymbol{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$.

2. Асимптотическая устойчивость.

Определение. Положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ уравнения (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво (по Ляпунову) и

$$\lim_{t \to +\infty} \boldsymbol{\varphi}(t) = 0$$

для всякого решения $\boldsymbol{\varphi}$ с начальным условием $\boldsymbol{\varphi}(0)$, лежащим в достаточно малой окрестности нуля (рис. 166).

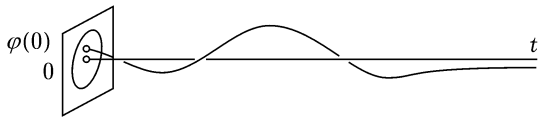

Рис. 166. Асимптотически устойчивое положение равновесия: интегральные кривые

Задача 1. Решить задачи 1), 2), 3) п. 1, заменив везде устойчивость асимптотической устойчивостью.

Задача 2. Вытекает ли устойчивость положения равновесия по Ляпунову из того, что каждое решение стремится в этому положению равновесия при $t \to +\infty$?

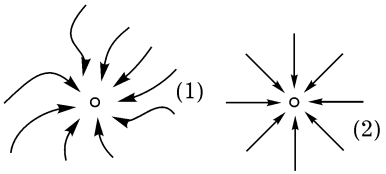

Рис. 167. Фазовые кривые уравнений (1) и (2)

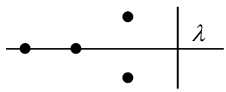

Рис. 168. Собственные числа оператора A

3. Теорема об устойчивости по первому приближению. Наряду с (1) рассмотрим линеаризованное уравнение (рис. 167)

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тогда $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_1(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x}) = O(\|\boldsymbol{x}\|^2)$.

Теорема. *Пусть все собственные числа λ оператора A лежат в левой полуплоскости*: $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (рис. 168). *Тогда положение равновесия $\boldsymbol{x} = 0$ уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Задача 1. Приведите пример неустойчивого (по Ляпунову) положения равновесия уравнения (1), для которого все $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Замечание. Можно доказать, что если вещественная часть хотя бы одного собственного числа λ *положительна*, то положение равновесия неустойчиво. В случае нулевых вещественных частей устойчивость зависит от членов ряда Тейлора выше первой степени.

Задача 2. Устойчиво ли (ло Ляпунову и асимптотически) нулевое положение равновесия системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$?

Ответ. Если n четно, неустойчиво (по Ляпунову); если нечетно, то устойчиво (по Ляпунову), но не асимптотически.

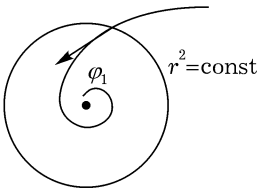

Рис. 169. Поверхность уровня функции Ляпунова

4. Доказательство теоремы. Согласно § 22, п. 3 существует функция Ляпунова: положительно определенная квадратичная форма r^2, производная которой по направлению линейного поля $\boldsymbol{v}_1$ отрицательно определена:

$$L_{v_1} r^2 \leqslant -2\gamma r^2,$$

где γ — положительная постоянная (рис. 169).

Лемма. *В достаточно малой окрестности точки $x = 0$ производная функции Ляпунова по направлению нелинейного поля $\boldsymbol{v}$ удовлетворяет неравенству*

$$L_{\boldsymbol{v}} r^2 \leqslant -\gamma r^2. \tag{3}$$

Доказательство.

Действительно, $L_{\boldsymbol{v}} r^2 = L_{\boldsymbol{v}_1} r^2 + L_{\boldsymbol{v}_2} r^2$. Покажем, что при малых r второе слагаемое гораздо меньше первого:

$$L_{\boldsymbol{v}_2} r^2 = O(r^3). \tag{4}$$

В самом деле, для любого поля $\boldsymbol{u}$ и любой функции f

$$L_{\boldsymbol{u}} f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i.$$

В нашем случае ($\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_2$, $f = r^2$) $u_i = O(r^2)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = O(r)$ (почему?), откуда и вытекает соотношение (4).

Итак, существуют $C > 0$, $\sigma > 0$ такие, что для всех $\boldsymbol{x}$ с $\|\boldsymbol{x}\| < \sigma$ выполнено неравенство $|L_{\boldsymbol{v}_2} r^2|_{\boldsymbol{x}} \leqslant C|r^2(\boldsymbol{x})|^{3/2}$. Правая часть не больше γr^2 при достаточно малых $\|\boldsymbol{x}\|$, так что в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x} = 0$

$$L_{\boldsymbol{v}} r^2 \leqslant -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2.$$

Лемма доказана.

Пусть $\boldsymbol{\varphi}$ — решение уравнения (1), отличное от нулевого, с начальным условием в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x} = 0$. Определим функцию времени ρ соотношением

$$\rho(t) = \ln r^2(\boldsymbol{\varphi}(t)), \quad t \geqslant 0.$$

По теореме единственности $r^2(\boldsymbol{\varphi}(t)) \neq 0$, так что функция ρ определена и дифференцируема. Согласно неравенству (3)

$$\dot{\rho} = \frac{1}{r^2 \circ \boldsymbol{\varphi}} \frac{d}{dt} r^2 \circ \boldsymbol{\varphi} = \frac{L_{\boldsymbol{v}} r^2}{r^2} \leqslant -\gamma.$$

Отсюда вытекает, что $r^2(\boldsymbol{\varphi}(t))$ монотонно убывает и стремится к 0 при $t \to +\infty$:

$$\rho(t) \leqslant \rho(0) - \gamma t, \quad r^2(\boldsymbol{\varphi}(t)) \leqslant r^2(\boldsymbol{\varphi}(0)) e^{-\gamma t} \to 0, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Указать пробел в приведенном доказательстве.

Решение. Мы не доказали, что решение $\boldsymbol{\varphi}$ продолжается вперед неограниченно.

Рассмотрим такое $\sigma > 0$, что при $\|\boldsymbol{x}\| < \sigma$ выполнено неравенство (3).

Рассмотрим компакт в расширенном фазовом пространстве (рис.170)

$$F = \{\boldsymbol{x}, t\colon r^2(\boldsymbol{x}) \leqslant \sigma,\ |t| \leqslant T\}.$$

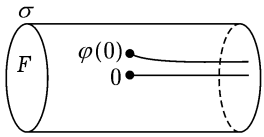

Рис. 170. Неограниченная продолжаемость решения вперед

Рассмотрим решение φ с начальным условием $\varphi(0)$, где $r^2(\varphi(0)) < \sigma$. По теореме о продолжении φ можно продолжить вперед до границы цилиндра F. Но пока точка $(t, \varphi(t))$ принадлежит F, производная функции $r^2(\varphi(t))$ отрицательна. Поэтому решение не может выйти на боковую поверхность цилиндра F (где $r^2 = \sigma^2$) и, значит, продолжается до торца $t = T$.

Поскольку T произвольно (и не зависит от σ), решение φ продолжается вперед неограниченно, причем $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$ и неравенство (3) имеет место при всех $t \geqslant 0$.

Замечание 1. Мы доказали больше, чем асимптотическую устойчивость положения равновесия. Из неравенства (5) видно, что сходимость $\varphi(t) \to 0$ равномерная (относительно начальных условий $\boldsymbol{x}_0$, достаточно близких к 0).

Кроме того, неравенство (5) указывает скорость сходимости (экспоненциальную).

По существу, теорема утверждает, что равномерная экспоненциальная сходимость «решений линейного уравнения (2) к нулю не нарушается при нелинейном возмущении $v_2(\boldsymbol{x}) = O(\|\boldsymbol{x}\|^2)$ правой части уравнения. Аналогичное утверждение справедливо для различных возмущений более общей природы. Например, можно было бы рассмотреть неавтономное возмущение $\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x}, t)$, для которого $\|\boldsymbol{v}_2(\boldsymbol{x}, t)\| \leqslant \varphi(|\boldsymbol{x}|)$, где $\varphi(|\boldsymbol{x}|) = o(|\boldsymbol{x}|)$ при $\boldsymbol{x} \to 0$.

Задача 2. Докажите, что в условиях теоремы уравнения (1) и (2) топологически эквивалентны в окрестностях положения равновесия.

Замечание 2. В связи с доказанной выше теоремой мы приходим к следующей алгебраической задаче (так называемая проблема Рауса–Гурвица):

Требуется узнать, *лежат ли все корни данного многочлена в левой полуплоскости.*

Этот вопрос решается конечным числом арифметических действии над коэффициентами многочлена. Соответствующие алгоритмы описаны в курсах алгебры (*критерий Гурвица, метод Штурма*) и комплекс-

ного переменного (*принцип аргумента, методы Вышеградского, Найквиста и Михайлова*). См., например, А. Г. Курош, «Курс высшей алгебры» (М.: Наука, 1968), гл. 9; М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, «Методы теории функции комплексного переменного» (М.: Физматгиз, 1958), гл. V; см. также М. М. Постников, «Устойчивые многочлены» (М.: Наука, 1981). Мы вернемся к проблеме Рауса–Гурвица в § 36, 5.

§ 24. Случай чисто мнимых собственных чисел

Линейные уравнения без чисто мнимых собственных чисел детально исследованы в §§ 21, 22. Их фазовые кривые ведут себя достаточно просто (седло, § 22, п. 8).

Линейные уравнения с чисто мнимыми собственными числами доставят нам примеры более сложного поведения фазовых кривых.

Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний консервативных систем (см. § 25, п. 6).

1. Топологическая классификация. Пусть все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ линейного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

чисто мнимы.

В каких случаях два уравнения вида (1) топологически эквивалентны?

Задача 1. Докажите, что в случае плоскости ($n = 2$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega \neq 0$) для топологической эквивалентности двух уравнений вида (1) необходима и достаточна алгебраическая эквивалентность, т. е. одинаковость собственных чисел.

В настоящее время аналогичный результат доказан и при $n > 2$.

2. Пример. Рассмотрим уравнение в $\mathbb{R}^4$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \end{cases} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \qquad \begin{cases} \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2. \tag{2}$$

Пространство $\mathbb{R}^4$ распадается в прямую сумму двух инвариантных плоскостей (рис. 171):

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}_{1,2} + \mathbb{R}_{3,4}.$$

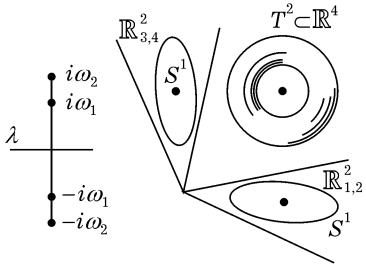

Рис. 171. Фазовое пространство системы (2)

Система (2) распадается на две независимые:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{1,2}, \qquad \begin{cases} \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad (x_3, x_4) \in \mathbb{R}_{3,4}. \tag{3}$$

В каждой из плоскостей фазовые кривые — окружности

$$S^1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_{1,2} \colon x_1^2 + x_2^2 = C > 0\}$$

или точки ($C = 0$), и фазовый поток состоит из вращении (на угол $\omega_1 t$ и $\omega_2 t$ соответственно).

Каждая фазовая кривая уравнения (2) принадлежит прямому произведению фазовых кривых на плоскостях $\mathbb{R}_{1,2}$ и $\mathbb{R}_{3,4}$. Пусть эти две кривые — окружности.

Прямое произведение двух окружностей

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \colon x_1^2 + x_2^2 = C,\ x_3^2 + x_4^2 = D\}$$

называется *двумерным тором.*

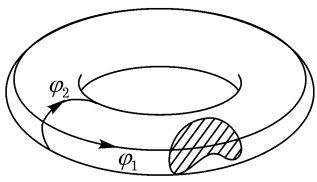

Рис. 172. Тор

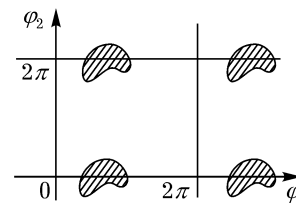

Рис. 173. Карта тора

Чтобы лучше представить себе тор T^2, можно поступить следующим образом. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ поверхность баранки (рис. 172), полученную при вращении окружности вокруг лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее оси. Точка такой поверхности задается двумя угловыми координатами φ_1, $\varphi_2 \bmod 2\pi$. Координаты φ_1 и φ задают диффеоморфизм поверхности баранки и прямого произведения T^2 двух окружностей.

Координаты φ_1 и φ_2 можно назвать *долготой* и *широтой*. Карту тора T^2 (см. рис. 173) можно изобразить на квадрате $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$ плоскости (φ_1, φ_2), «склеив» точки $(\varphi_1, 0)$ и $(\varphi_1, 2\pi)$ и $(0, \varphi_2)$ и $(2\pi, \varphi_2)$. Можно также считать картой всю плоскость (φ_1, φ_2), но тогда каждая точка тора будет иметь бесконечное число изображений на карте (подобно двум изображениям Чукотки на карте полушарий).

Фазовый поток уравнения (2) оставляет тор $T^2 \subset \mathbb{R}^4$ на месте. Фазовые кривые уравнения (2) лежат на поверхности T^2. Если φ_1 полярный угол плоскости $\mathbb{R}_{1,2}$, отсчитываемый от орта x_2 к орту x_1, то согласно (3) $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$. Аналогично, отсчитывая φ_2 от x_4 к x_3 получаем $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$. Итак:

Фазовые траектории потока (2) *на поверхности* T^2 *удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\dot{\varphi}_1 = \omega_1, \quad \dot{\varphi}_2 = \omega_2. \tag{4}$$

Широта и долгота фазовой точки меняются равномерно, и на карте тора движение изображается прямой линией, а на поверхности баранки получается «обмотка» (рис. 174).

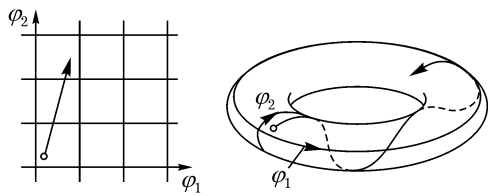

Рис. 174. Обмотка тора

3. Фазовые кривые уравнения (4) на торе. Числа ω_1, ω_2 называются *рационально независимыми*, если из $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ с целыми k_1 и k_2 следует $k_1 = k_2 = 0$. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ рационально зависимы, а $\sqrt{6}$ и $\sqrt{8}$ нет.

Теорема. *Если* ω_1 *и* ω_2 *рационально зависимы, то всякая фазовая кривая уравнения* (4) *на торе замкнута. Если же* ω_1 *и* ω_2 *рационально*

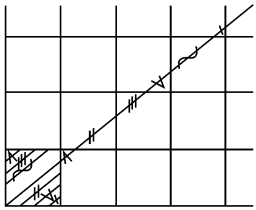

Рис. 175. Всюду плотная кривая не торе

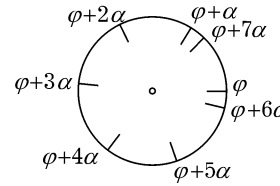

Рис. 176. Образы точки окружности при повторении поворота на угол α

независимы, то всякая фазовая кривая уравнения (4) *всюду плотна*[1] *на торе* T^2 (рис. 175).

Иными словами.

Если в каждой клетке бесконечной шахматной доски сидит одинаковый (и одинаково расположенный) заяц, и охотник стреляет по направлению с иррациональным тангенсом угла наклона к линиям доски, то он попадет хоть в одного зайца. (Ясно что если тангенс угла наклона рационален, то достаточно малых зайцев можно расположить так, что охотник промахнется.)

Лемма. *Рассмотрим поворот окружности* S^1 *на угол* α *несоизмеримый с* 2π (рис. 176). *Тогда образы любой точки на окружности при повторении поворота*

$$\varphi,\ \varphi+\alpha,\ \varphi+2\alpha,\ \varphi+3\alpha,\ \ldots \pmod{2\pi}$$

образуют множество, всюду плотное на окружности.

Доказательство можно извлечь из строения замкнутых подгрупп прямой (см. § 9). Мы проведем его заново.

Принцип ящиков Дирихле. *Если в* k *ящиках лежит* $k+1$ *предмет, то хотя бы в одном ящике больше одного предмета.*

Разделим окружность на k равных полуинтервалов длины $2\pi/k$. По принципу ящиков среди первых $k+1$ точек нашей последовательности есть 2 точки в одном полуинтервале. Пусть это точки $\varphi+p\alpha$ и $\varphi+q\alpha$, $p>q$. Рассмотрим $s=p-q$. Угол поворота $s\alpha$ отличается от кратного 2π меньше чем на $2\pi/k$. В последовательности точек φ, $\varphi+s\alpha$, $\varphi+2s\alpha$, $\varphi+3s\alpha$, $\ldots \pmod{2\pi}$ (рис. 177) каждые две соседние

[1] Множество A всюду плотно в пространстве B, если в сколь угодно малой окрестности любой точки пространства B есть точка множества A.

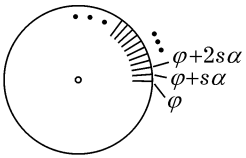

Рис. 177. Точки $\varphi + Ns\alpha$

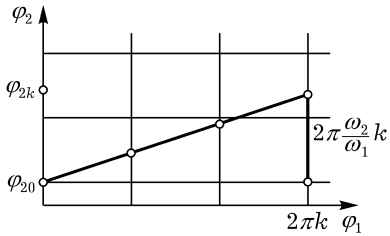

Рис. 178. Редукция теоремы к лемме

точки отстоят на одинаковое расстояние, меньшее чем $2\pi/k$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выбрав k достаточно большим, мы можем сделать $2\pi/k < \varepsilon$. В любой ε-окрестности любой точки S^1 есть точки последовательности

$$\varphi + Ns\alpha \pmod{2\pi}.$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы не использовали несоизмеримость α с 2π. Между тем очевидно, что при α, соизмеримом с 2π, лемма неверна.

Задача 1. Найти и восполнить пробел в доказательстве леммы.

Доказательство теоремы.

Решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t. \tag{5}$$

Пусть ω_1 и ω_2 рационально зависимы: $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$. Уравнения относительно T

$$\omega_1 T = 2\pi k_2, \quad \omega_2 T = -2\pi k_1$$

совместны. Их решение T и является периодом замкнутой фазовой кривой (5).

Пусть ω_1 и ω_2 рационально независимы. Тогда ω_1/ω_2 — иррациональное число. Рассмотрим последовательные точки пересечения фазовой кривой (5) с меридианом $\varphi_1 = 0 \pmod{2\pi}$ (рис. 178). Широты этих точек будут

$$\varphi_{2,k} = \varphi_{2,0} + 2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}k \pmod{2\pi}.$$

По лемме множество точек пересечения всюду плотно на меридиане. Заметим, что прямые, проведенные из точек множества, всюду плотного на прямой, лежащей в плоскости, по направлению, не совпадающему с направлением этой прямой, образуют всюду плотное множество на плоскости. Поэтому изображение

$$\widetilde{\varphi}_1(t) = \varphi_1(t) - 2\pi\left[\frac{\varphi_1(t)}{2\pi}\right], \quad \widetilde{\varphi}_2(t) = \varphi_2(t) - 2\pi\left[\frac{\varphi_2(t)}{2\pi}\right]$$

фазовой кривой (5) на квадрате $0 \leqslant \widetilde{\varphi}_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \widetilde{\varphi}_2 < 2\pi$ всюду плотно. Итак, фазовая кривая уравнения (4) (и, значит, уравнения (2)) всюду плотна на торе.

4. Следствия. Ряд простых следствий доказанной теоремы выходит за рамки теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача 1. Рассмотрим последовательность первых цифр степени двойки:

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, \ldots$$

Встретится ли в этой последовательности 7? Вообще, с любой ли комбинации цифр начинается 2^n?

Задача 2. Докажите, что $\sup\limits_{0<t<\infty} \cos t + \sin\sqrt{2}t = 2$.

Задача 3. Рассмотрим группу S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1. Найти все ее замкнутые подгруппы.

Ответ. 1, S^1, $\{\sqrt[n]{1}\}$.

5. Многомерный случай. Пусть собственные числа уравнения (1) в $\mathbb{R}^{2m}$ просты и имеют вид

$$\lambda = \pm i\omega_1, \ \pm i\omega_2, \ \ldots, \ \pm i\omega_m.$$

Рассуждая, как в примере п. 2, мы покажем, что фазовые кривые лежат на m-мерном торе

$$T^m = S^1 \times \ldots \times S^1 = \{(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) \bmod 2\pi\} \cong \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$$

и удовлетворяют уравнениям $\dot{\varphi}_1 = \omega_1$, $\dot{\varphi}_2 = \omega_2$, $\ldots$, $\dot{\varphi}_m = \omega_m$. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_m$ рационально независимы, если при целых k

$$(k_1\omega_1 + \ldots + k_m\omega_m = 0) \Rightarrow (k_1 = \ldots = k_m = 0).$$

Задача *1. Доказать, что если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_m$ рационально независимы, то каждая фазовая кривая уравнения (1), лежащая на торе T^m, всюду плотна на нем.

Следствие. *Пусть конь прыгает скачками* $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ *по полю* (рис. 179), *где квадратно-гнездовым способом посеяна кукуруза. Тогда он обязательно сшибет хоть один росток.*

6. Равномерное распределение. Всюду плотные кривые, рассмотренные выше, обладают замечательным свойством равномерно распределяться по поверхности торов. Сформулируем соответствующую теорему в простейшем случае. Рассмотрим последовательность точек $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ на окружности $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$. Последовательность называется *равномерно распределенной*, если для любой дуги $\Delta \subset S^1$ число $N(\Delta, k)$ точек длинного отрезка последовательности $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ в Δ асимптотически пропорционально длине Δ:

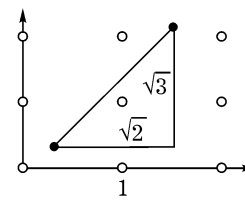

Рис. 179. Фазовая кривая системы $\dot\varphi_1 = 1$, $\dot\varphi_2 = \sqrt{2}\,\dot\varphi_3 = \sqrt{3}$ всюду плотна на трехмерном торе

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(\Delta, k)}{k} = \frac{|\Delta|}{2\pi}.$$

Задача *1. Доказать, что последовательность φ, $\varphi + \alpha$, $\varphi + 2\alpha$, ..., где α — угол, несоизмеримый с 2π, равномерно распределена на S^1.

Следствие. *Числа* 2^n *чаще начинаются с* 7 *чем с* 8. *Если* $N_7(k)$ *и* $N_8(k)$ *— количества чисел* $(1, 2, 4, \ldots, 2^k)$, *начинающихся с* 7 *и* 8 *соответственно, то существует* $\lim\limits_{k\to\infty} (N_7(k)/N_8(k))$.

Задача 2. Найти этот предел и убедиться, что он больше 1.

Замечание. Начальный отрезок последовательности (см. п. 4) указывает, кажется, на то, что семерок меньше. Это связано с тем, что иррациональнее число $\lg 2 = 0.3010\ldots$ очень близко к рациональному числу[1] 3/10.

§ 25. Случай кратных собственных чисел

Решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами сводится к вычислению матрицы e^{At}. Если собственные числа матрицы A попарно различны, то явный вид матрицы e^{At} указан в § 19, п. 5

[1] Первые цифры степеней тройки и населений стран мира распределены по тому же закону.

и § 20, п. 6. Чтобы найти явный вид матрицы e^{At} в случае кратных собственных чисел, мы воспользуемся жордановой нормальной формой.

1. Вычисление e^{At}, где A — жорданова клетка. Один из способов вычисления e^{At}, где A — жорданова клетка:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

указан в § 14: A есть матрица оператора дифференцирования в базисе

$$\boldsymbol{e} = t^k \boldsymbol{e}^{\lambda_k t}/k!, \quad 0 \leqslant k < n,$$

пространства квазимногочленов степени меньше n с показателем λ. По формуле Тейлора e^{As} есть матрица оператора сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + s)$ в том же базисе.

Другой способ основан на следующей лемме:

Лемма. *Пусть A и B — линейные операторы из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Если они коммутируют, то $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Доказательство.

Сравним формальные ряды

$$e^A e^B = \left(E + A + \frac{A^2}{2} + \dots\right)\left(E + B + \frac{B^2}{2} + \dots\right) =$$
$$= E + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + 2AB + B^2) + \dots,$$

$$e^{A+B} = E + (A + B) + \frac{1}{2}(A + B)^2 + \dots =$$
$$= E + (A + B) + \frac{1}{2}(A^2 + AB + BA + B^2) + \dots$$

Если $AB = BA$, то ряды совпадают (так как $e^{x+y} = e^x e^y$ для чисел). Поскольку ряды абсолютно сходятся, $e^{A+B} = e^A e^B$, что и требовалось.

Представим A в виде $A = \lambda E + \Delta$, где Δ — нильпотентная жорданова клетка:

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку λE коммутирует с любым оператором, то $e^{At} = e^{t(\lambda E+\Delta)} = e^{\lambda t}e^{\Delta t}$. Вычислим матрицу

$$e^{\Delta t} = E + \Delta t + \frac{\Delta^2 t^2}{2} + \ldots + \frac{\Delta^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (\Delta^n = 0).$$

Заметим, что Δ действует на базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ как сдвиг: $0 \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{e}_1 \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{e}_2 \leftarrow\!\shortmid \ldots \leftarrow\!\shortmid \boldsymbol{e}_n$. Поэтому Δ^k действует как сдвиг на k мест и имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, доказана

Теорема.

$$e^{\Delta t} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 & \cdots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & \cdots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

$$e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \cdots & t^{n-1}e^{\lambda t}/(n-1)! \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & \ddots & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Наши вычисления проходят без изменений в комплексном случае ($\lambda \in \mathbb{C}$, $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$).

2. Приложения. Из формулы (1) непосредственно вытекают:

Следствие 1. *Пусть $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные числа, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — их кратности, $t \in \mathbb{R}$. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от t с показателями λ_l, степеней меньше ν_l соответственно ($l = 1, \ldots, k$).*

Доказательство.

Рассмотрим матрицу оператора e^{At} в базисе, в котором матрица A имеет жорданову форму. Наше утверждение тогда следует из (1). Элементы матрицы оператора e^{At} в любом другом базисе являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) элементов матрицы оператора e^{At} в указанном базисе.

Следствие 2. *Пусть φ — решение дифференциального уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$, $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Тогда каждая компонента вектора φ (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от t с показателями λ_l степеней меньше ν_l соответственно*: $\varphi_j(t) = \sum\limits_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_{j,l}(t)$, *где $p_{j,l}$ — многочлен степени $< \nu_l$.*

Действительно, $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{At}\boldsymbol{\varphi}(0)$.

Следствие 3. *Пусть $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор, λ_l ($1 \leqslant l < k$) — его вещественные собственные числа, ν_l — их кратности, $\alpha_l \pm i\omega_l$ ($1 \leqslant l \leqslant m$) — комплексные собственные числа, μ_l — их кратности. Тогда каждый элемент матрицы e^{At} и каждая компонента решения уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, является суммой комплексных квазимногочленов с показателями λ_l, $\alpha_l \pm i\omega_l$ степеней меньше ν_l, μ_l соответственно.*

Такую сумму можно записать также в менее удобном виде:

$$\varphi_j(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_{j,l} + \sum_{l=1}^{m} e^{\alpha_l t}[q_{j,l}(t)\cos\omega_l t + r_{j,l}(t)\sin\omega_l t],$$

где p, q, r — многочлены с *вещественными* коэффициентами степеней меньше ν_l, μ_l, μ_l соответственно.

Действительно, если $z = x + iy$, $\lambda = \alpha + i\omega$, то

$$\operatorname{Re} ze^{\lambda t} = \operatorname{Re} e^{\alpha t}(x + iy)(\cos \omega t + i \sin \omega t) = e^{\alpha t}(x \cos \omega t - y \sin \omega t).$$

Между прочим, из этих формул видно, что если вещественные части всех собственных чисел отрицательны, то все решения стремятся к 0 при $t \to +\infty$ (как это и должно быть согласно §§ 22, 23).

3. Применения к системам уравнений выше первого порядка. Записав систему в виде системы уравнений первого порядка, мы сведем задачу к рассмотренной выше и можем ее решить, приведя матрицу к жордановой форме. Практически часто удобнее поступать иначе. Прежде всего, собственные числа эквивалентной системы первого порядка можно найти, не выписывая ее матрицы.

Действительно, собственному числу λ отвечает собственный вектор и, значит, решение $\varphi(t) = e^{\lambda t}\varphi(0)$ эквивалентной системы первого порядка. Но тогда и исходная система имеет решение вида $\psi(t) = e^{\lambda t}\psi(0)$. Подставим в исходную систему $\psi = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$. Система допускает такое решение (ненулевое), если и только если λ удовлетворяет алгебраическому уравнению, из которого мы и можем найти собственные числа λ_l.

Сами решения можно затем искать в виде сумм квазимногочленов с показателями λ_l и с неопределенными коэффициентами.

Пример 1. $\dddot{x} = x$.

Подставляем $x = e^{\lambda t}\xi$. Находим $\lambda^4 e^{\lambda t}\xi = e^{\lambda t}\xi$, $\lambda^4 = 1$, $\lambda_{1,2,3,4} = 1, -1, i, -i$. Всякое решение нашего уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Пример 2. $\ddot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_2 = x_1$.

Подставляем $\boldsymbol{x} = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$. Находим $\lambda^2\xi_1 = \xi_2$, $\lambda^2\xi_2 = \xi_1$. Эта система линейных уравнений относительно ξ_1, ξ_2 имеет нетривиальное решение, если и только если $\lambda^4 = 1$. Всякое решение нашей системы имеет вид

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t,$$
$$x_2 = D_1 e^t + D_2 e^{-t} + D_3 \cos t + D_4 \sin t.$$

Подстановка в систему дает $D_1 = C_1$, $D_2 = C_2$, $D_3 = -C_3$, $D_4 = -C_4$.

Пример 3. $x^{\mathrm{IV}} - 2\ddot{x} + x = 0$.

Подставляем $x = e^{\lambda t}\xi$. Находим

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0, \quad \lambda^2 = 1, \quad \lambda_{1,2,3,4} = 1, 1, -1, -1.$$

Всякое решение исходного уравнения имеет вид

$$(C_1 t + C_2)e^{\lambda t} + (C_3 t + C_4)e^{-\lambda t}.$$

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму матрицы четвертого порядка, соответствующей нашему уравнению.

4. Случаи одного уравнения n-го порядка. Заметим, что кратности собственных чисел, вообще говоря, не определяют размеров жордановых клеток. Положение упрощается, если речь идет о линейном операторе A, соответствующем одному дифференциальному уравнению n-го порядка:

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x, \quad a_k \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Из следствия 2 п. 2 вытекает

Следствие 4. *Всякое решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_l(t), \tag{3}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *— корни характеристического уравнения*

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{4}$$

а p_l *— многочлен степени меньше* ν_l *(где* ν_l *— кратность корня* λ_l*).*

Доказательство.

Действительно, уравнение (2) имеет решение вида $e^{\lambda t}(\boldsymbol{\xi})$, если и только если λ — корень уравнения (4). Следствие (4) доказано.

Перейдем к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_n & & & \cdots & a_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Получаем

Следствие 5. *Если оператор* $A\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *имеет матрицу вида* (5)*, то каждому его собственному числу* λ *отвечает ровно одна жорданова клетка, размер которой равен кратности* λ*.*

Доказательство.

Действительно, согласно формуле (3) каждому собственному числу λ отвечает одно собственное направление. В самом деле, пусть $\boldsymbol{\xi}$ — собственный вектор оператора A. Тогда среди решений вида (3) имеется первая компонента $e^{\lambda t}\xi_0$ вектора $e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$. Но тогда остальные компоненты — это производные: $\xi_k = \lambda^k \xi_0$. Поэтому число λ определяет направление вектора $\boldsymbol{\xi}$ однозначно.

Поскольку каждой жордановой клетке соответствует свое собственное направление, следствие 5 доказано.

Задача 1. Всякая ли линейная комбинация квазимногочленов (3) является решением уравнения (2)?

5. О возвратных последовательностях. Наше исследование экспоненты с непрерывным показателем e^{tA} легко перенести на экспоненту с дискретным показателем A^n. Мы можем, в частности, исследовать теперь любую возвратную (= рекуррентную) последовательность, определенную соотношением

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} \tag{6}$$

(например, последовательность 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... , заданную соотношением $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ и начальным условием $x_0 = 0$, $x_1 = 1$).

Следствие 6. *n-й член возвратной последовательности зависит от n как сумма квазимногочленов от n:*

$$x_n = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^n p_l(n),$$

где λ_l — собственные числа матрицы A, соответствующей последовательности, а p_l — многочлен степени меньше ν_l (где ν_l — кратность λ_l).

Вспомним, что матрица A — это матрица оператора $A\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, переводящего отрезок длины k из нашей последовательности, $\boldsymbol{\xi}_{n-1} = (x_{n-k}, \ldots, x_{n-1})$, в следующий отрезок длины k, $\boldsymbol{\xi}_n = (x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$:

$$A\boldsymbol{\xi}_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_k & & \cdots & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ \\ \vdots \\ \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k+1} \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{\xi}_n.$$

Важно заметить, что оператор A не зависит от n. Поэтому x_n есть одна из компонент вектора $A^n\boldsymbol{\xi}$, где $\boldsymbol{\xi}$ — постоянный вектор. Матрица A имеет вид (5). Пользуясь следствием 5 и приводя A к жордановой форме, получаем следствие 6.

При вычислениях нет нужды ни выписывать матрицу, ни приводить ее к нормальной форме. Собственный вектор оператора A соответствует решению уравнения (6) вида $x = \lambda^n$. Подставляя в уравнение (6), находим для λ уравнение

$$\lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Легко убедиться, что это и есть характеристическое уравнение оператора A.

Пример 1. Для последовательности $0, 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$ ($x_n{=}2x_{n-1} + x_{n-2}$) находим $\lambda^2 = 2\lambda + 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$. Поэтому соотношению $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ удовлетворяют последовательности $x_n = (1+\sqrt{2})^n$, $x_n = (1-\sqrt{2})^n$, а также любые их линейные комбинации (и только они)

$$x_n = c_1(1+\sqrt{2})^n + c_2(1-\sqrt{2})^n.$$

Среди этих комбинаций легко подобрать такую, для которой $x_0 = 0$, $x_1 = 1$: $c_1 + c_2 = 0$, $\sqrt{2}(c_1 - c_2) = 1$.

Ответ. $x_n = \bigl[(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\bigr]/(2\sqrt{2})$.

Замечание. При $n \to +\infty$ первое слагаемое экспоненциально растет, а второе экспоненциально убывает. Поэтому при больших n

$$x_n \approx (1+\sqrt{2})^n/(2\sqrt{2})$$

и, в частности, $x_{n+1}/x_n \approx 1+\sqrt{2}$. Отсюда мы находим для $\sqrt{2}$ очень хорошие приближения: $\sqrt{2} \approx (x_{n+1} - x_n)/x_n$. Подставляя $x_n = 0,\ 1,\ 2,\ 5,\ 12,\ 29, \ldots$, находим

$$\sqrt{2} \approx (1-0)/1 = 1; \qquad \sqrt{2} \approx (5-2)/2 = 1{,}5;$$

$$\sqrt{2} \approx (12-5)/5 = 1{,}4; \qquad \sqrt{2} \approx (29-12)/12 = 17/12 \approx 1{,}417\ldots$$

Это те самые приближения, с помощью которых вычисляли $\sqrt{2}$ в древности; их можно получить также разложением $\sqrt{2}$ в цепную дробь. Далее, $(x_{n+1} - x_n)/x_n$ является наилучшим среди всех рациональных приближений к $\sqrt{2}$ со знаменателями, не превосходящими x_n.

6. Малые колебания. Мы рассмотрели выше случай, когда каждому корню характеристического уравнения, какова бы ни была его кратность, соответствует один собственный вектор: случай одного уравнения n-го порядка. Существует в некотором смысле противоположный случай, когда каждому корню соответствует столько собственных чисел, какова кратность корня. Это — случай малых колебаний консервативной механической системы.

Рассмотрим в *евклидовом* пространстве $\mathbb{R}^n$ квадратичную форму U, заданную симметрическим оператором A:

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad A' = A.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение[1]

$$\ddot{\boldsymbol{x}} = -\operatorname{grad} U \tag{7}$$

(U — потенциальная энергия).

При исследовании уравнения (7) полезно представлять себе шарик, катающийся по графику потенциальной энергии (ср. § 12).

Уравнение (7) можно записать в виде $\ddot{\boldsymbol{x}} = -A\boldsymbol{x}$ или в координатной записи в виде системы n линейных уравнений второго порядка. По общему правилу ищем решение $\boldsymbol{\varphi} = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}$ и находим

$$\lambda^2 e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = -Ae^{\lambda t}\boldsymbol{\xi}, \quad (A + \lambda^2 E)\boldsymbol{\xi} = 0, \quad \det|A + \lambda^2 E| = 0.$$

[1] Векторное поле $\operatorname{grad} U$ определяется условием «$dU(\boldsymbol{\xi}) = (\operatorname{grad} U, \boldsymbol{\xi})$ для всякого вектора $\boldsymbol{\xi} \in T\mathbb{R}^n_x$». Здесь круглые скобки означают евклидово скалярное произведение. В декартовых координатах (ортонормированных) векторное поле $\operatorname{grad} U$ задается компонентами $\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial U}{\partial x_n}\right)$.

Отсюда находим n вещественных (почему?) значений λ^2 и $2n$ значений λ.

Если все они различны, то всякое решение уравнения (7) есть линейная комбинация экспонент. Если же имеются кратные корни, возникает вопрос о жордановых клетках.

Теорема. *Если квадратичная форма U невырождена, то каждому собственному значению λ соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность, так что каждое решение уравнения* (7) *можно записать в виде суммы экспонент*[1]:

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t}\boldsymbol{\xi}_k, \quad \boldsymbol{\xi}_k \in \mathbb{C}^n.$$

Доказательство.

Ортогональным преобразованием можно привести форму U к *главным осям*: существует ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, в котором U записывается в виде

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2, \quad \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Невырожденность формы (7) означает, что ни одно из чисел a_k не равно 0. В выбранных координатах уравнение (7) принимает вид

$$\ddot{x}_1 = -a_1 x_1, \quad \ddot{x}_2 = -a_2 x_2, \ldots, \ddot{x}_n = -a_n x_n$$

независимо от того, есть ли кратные корни[2]. Наша система распалась в прямое произведение n «уравнений маятника». Каждое из них ($\ddot{x} = -ax$) мгновенно решается.

Если $a > 0$, то $a = \omega^2$ и

$$x = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t.$$

[1] Интересно отметить, что Лагранж, впервые исследовавший уравнение малых колебаний (7), вначале ошибся. Он думал, что в случае кратных корней потребуются «вековые» слагаемые вида $te^{\lambda t}$ (в вещественном случае $t\sin\omega t$), как в пп. 2, 4, 5 выше.

[2] Заметим, что мы существенно используем ортонормированность базиса $\boldsymbol{e}_k$: если бы базис не был ортонормированным, то компоненты вектора $\operatorname{grad}\frac{1}{2}\sum a_k x_k^2$ *не были бы равны* $a_k x_k$.