

ЗАМЕЧАНИЕ. Верхняя грань нормы производной $|f_*|$ на V достигается. Действительно, по предположению $f \in C^1$, и, значит, производная f_* непрерывна. Следовательно, $|f_*|$ достигает на компакте L максимума L .

Приступая к доказательству сходимости пикаровских приближений, мы рассмотрим их в малой окрестности одной точки. Для описания этой окрестности мы используем следующие четыре числа.

5. Величины C , L , a' , b' . Пусть правая часть v дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x) \quad (3)$$

определенна и дифференцируема (класса C^r , $r \geq 1$) в области U расширенного фазового пространства: $U \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$. Мы фиксируем евклидову структуру в \mathbb{R}^n и тем самым в $T_x \mathbb{R}^n$.

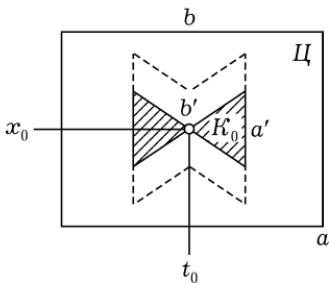


Рис. 221. Цилиндр Π и конус K_0

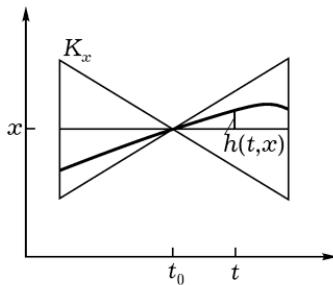


Рис. 222. Определение $h(t, x)$

Рассмотрим любую точку $(t_0, x_0) \in U$ (рис. 221). Цилиндр

$$\Pi = \{t, x: |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}$$

при достаточно малых a и b лежит в области U . Обозначим через C и L верхние грани величин $|v|$ и $|v_*|$ на этом цилиндре¹. Они достигаются, так как цилиндр компактен: $|v| \leq C$, $|v_*| \leq L$.

Рассмотрим конус K_0 с вершиной (t_0, x_0) , раствором C и высотой a' :

$$K_0 = \{t, x: |t - t_0| \leq a', |x - x_0| \leq C|t - t_0|\}.$$

¹Звездочкой здесь и далее обозначается производная (по x) при фиксированном t .

Если число a' достаточно мало, то этот конус K_0 лежит внутри цилиндра Π . Если числа $a', b' > 0$ достаточно малы, то внутри Π лежит также всякий конус K_x , полученный из K_0 параллельным перенесением вершины в точку (t_0, \mathbf{x}) , где $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant b'$.

Мы будем считать, что a' и b' выбраны столь малыми, что $K_x \subset \Pi$. Решение φ уравнения (3) с начальным условием $\varphi(t_0) = \mathbf{x}$ мы будем искать в виде $\varphi(t) = \mathbf{x} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$ (рис. 222).

Соответствующая интегральная кривая лежит внутри конуса K_x .

6. Метрическое пространство M . Рассмотрим всевозможные непрерывные отображения \mathbf{h} цилиндра $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant b'$, $|t - t_0| \leqslant a'$ в евклидово пространство \mathbb{R}^n . Через M мы обозначаем множество таких отображений, удовлетворяющих еще условию

$$|\mathbf{h}(t, \mathbf{x})| \leqslant C|t - t_0| \quad (4)$$

(в частности, $\mathbf{h}(t, \mathbf{x}_0) = 0$).

Введем в M метрику ρ , полагая

$$\rho(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2) = \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\| = \max_{\substack{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leqslant b' \\ |t - t_0| \leqslant a'}} |\mathbf{h}_1(t, \mathbf{x}) - \mathbf{h}_2(t, \mathbf{x})|.$$

Теорема. *Множество M , снабженное метрикой ρ , является полным метрическим пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции. Если допредельные функции удовлетворяли неравенству (4), то и предельная функция удовлетворяет неравенству (4) с той же постоянной C .

Заметим, что пространство M зависит от трех положительных чисел: a', b', C .

7. Сжатое отображение $A: M \rightarrow M$. Определим отображение $A: M \rightarrow M$, полагая¹

$$(Ah)(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x})) d\tau. \quad (5)$$

¹При сравнении с отображением Пикара п. 1 следует иметь в виду, что мы теперь ищем решение в виде $\mathbf{x} + \mathbf{h}$.

Благодаря неравенству (4) точка $(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}(\tau, \mathbf{x}))$ принадлежит конусу K_x и, следовательно, области определения поля \mathbf{v} .

Теорема. *Если значение a' достаточно мало, то формула (5) задает сжатое отображение пространства M в себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1. Покажем, что A переводит M в себя. Функция $A\mathbf{h}$ непрерывна, так как интеграл непрерывно зависит от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и от верхнего предела. Функция $A\mathbf{h}$ удовлетворяет неравенству (4), так как

$$|(A\mathbf{h})(t, \mathbf{x})| \leq \left| \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\dots) d\tau \right| \leq \left| \int_{t_0}^t C d\tau \right| \leq C|t - t_0|.$$

Итак, $AM \subset M$.

2. Покажем, что отображение A сжато:

$$\|A\mathbf{h}_1 - A\mathbf{h}_2\| \leq \lambda \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Для этого оценим значение $A\mathbf{h}_1 - A\mathbf{h}_2$ в точке (t, \mathbf{x}) . Имеем (рис. 223)

$$(A\mathbf{h}_1 - A\mathbf{h}_2)(t, \mathbf{x}) = \int_{t_0}^t (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) d\tau,$$

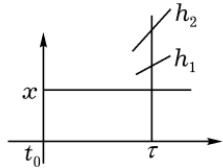


Рис. 223. Сравнение \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2

где $\mathbf{v}_i(\tau) = \mathbf{v}(\tau, \mathbf{x} + \mathbf{h}_i(\tau, \mathbf{x}))$, $i = 1, 2$.

Согласно теореме п. 4 функция $\mathbf{v}(\tau, \mathbf{x})$ при фиксированном τ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L (по второму аргументу). Поэтому

$$|\mathbf{v}_1(\tau) - \mathbf{v}_2(\tau)| \leq L |\mathbf{h}_1(\tau, \mathbf{x}) - \mathbf{h}_2(\tau, \mathbf{x})| \leq L \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|.$$

Согласно лемме п. 2

$$|(A\mathbf{h}_1 - A\mathbf{h}_2)(t, \mathbf{x})| \leq \left| \int_{t_0}^t L \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\| d\tau \right| \leq La' \|\mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2\|.$$

При $La' < 1$ отображение сжато. Теорема доказана.

8. Теорема существования и единственности.

Следствие. *Пусть правая часть \mathbf{v} дифференциального уравнения (3) непрерывно дифференцируема в окрестности точки (t_0, \mathbf{x}_0)*

расширенного фазового пространства. Тогда у точки t_0 есть такая окрестность, что в этой окрестности определено решение уравнения (3) с начальным условием $\varphi(t_0) = \mathbf{x}$, где \mathbf{x} — любая достаточно близкая к \mathbf{x}_0 точка, причем это решение непрерывно зависит от начальной точки \mathbf{x} .

Доказательство.

Сжатое отображение A , по теореме § 30, имеет неподвижную точку $\mathbf{h} \in M$. Положим $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{h}(t, \mathbf{x})$. Тогда

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \mathbf{g}(\tau, \mathbf{x})) d\tau, \quad \frac{\partial \mathbf{g}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \mathbf{v}(t, \mathbf{g}(t, \mathbf{x})).$$

Мы видим, что \mathbf{g} при фиксированном \mathbf{x} удовлетворяет уравнению (3), а при $t = t_0$ — начальному условию $\mathbf{g}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Функция \mathbf{g} непрерывна, так как $\mathbf{h} \in M$.

Следствие доказано.

Итак, мы доказали теорему существования для уравнения (3) и предъявили решение, непрерывно зависящее от начальных условий.

Задача 1. Доказать теорему единственности.

Решение 1. Положим $b' = 0$ в определении M . Из единственности неподвижной точки сжатого отображения $A: M \rightarrow M$ следует единственность решения (с начальным условием $\varphi(t_0) = \mathbf{x}_0$).

Решение 2. Пусть φ_1 и φ_2 — два решения с общим начальным условием $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, определенные при $|t - t_0| < \alpha$. Пусть $0 < \alpha' < \alpha$. Положим $\|\varphi\| = \max_{|t-t_0|<\alpha'} |\varphi(t)|$. Имеем

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi_1(\tau)) - \mathbf{v}(\tau, \varphi_2(\tau)) d\tau.$$

При достаточно малом α' точки $(\tau, \varphi_1(\tau))$ и $(\tau, \varphi_2(\tau))$ лежат в цилиндре, где $\mathbf{v} \in \text{Lip } L$. Поэтому $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leq L\alpha' \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, откуда при $L\alpha' < 1$ вытекает $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$. Итак, решения φ_1, φ_2 в некоторой окрестности точки t_0 совпадают.

Локальная теорема единственности доказана.

9. Другие применения сжатых отображений.

Задача 1. Доказать теорему об обратной функции.

Указание. Достаточно обратить C^1 -отображение с единичной линейной частью $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \varphi(\mathbf{x})$, где $\varphi'(0) = 0$, в окрестности точки $0 \in \mathbb{R}^n$ (общий случай сводится к этому линейной заменой координат).

Ищем решение в виде $x = y + \psi(y)$. Тогда получаем для ψ уравнение

$$\psi(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Следовательно, искомая функция ψ является неподвижной точкой отображения A , определенного формулой

$$(A\psi)(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Отображение A (в подходящей метрике) сжато, потому что производная функции φ в окрестности точки 0 мала (ввиду условия $\varphi'(0) = 0$).

Задача 2. Доказать, что ломаная Эйлера стремится к решению, когда ее шаг стремится к нулю.

РЕШЕНИЕ. Пусть $g_\Delta = x + h_\Delta$ — ломаная Эйлера с шагом Δ и началом $g_\Delta(t_0, x) = x$ (рис. 224). Иными словами, при $t \neq t_0 + k\Delta$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_\Delta(t, x) = v(s(t), g_\Delta(s(t), x)),$$

где $s(t) = t_0 + k\Delta$, k — целая часть $(t - t_0)/\Delta$.

Отличие ломаной Эйлера от решения g можно оценить по формуле п. 3 § 30:

$$\|g_\Delta - g\| = \|h_\Delta - h\| \leq \frac{1}{1-\lambda} \|Ah_\Delta - h_\Delta\|.$$

Но

$$(Ah_\Delta)(t, x) = \int_{t_0}^t v(\tau, g_\Delta(\tau, x)) d\tau, \quad h_\Delta(t, x) = \int_{t_0}^t v(s(\tau), g_\Delta(s(\tau), x)) d\tau.$$

При $\Delta \rightarrow 0$ разность подынтегральных выражений равномерно по τ , $|\tau| \leq a'$, стремится к 0 (вследствие равностепенной непрерывности v). Поэтому $\|Ah_\Delta - h_\Delta\| \rightarrow 0$ при $\Delta \rightarrow 0$ и ломаная Эйлера стремится к решению.

Задача*3. Рассмотрим диффеоморфизм A окрестности точки 0 в \mathbb{R}^n на окрестность точки 0 в \mathbb{R}^n , переводящий 0 в 0. Предположим, что линейная часть A в 0 (т.е. линейный оператор $A_{*0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) не имеет собственных чисел с модулем 1. Пусть число собственных чисел с $|\lambda| < 1$ равно m_- , а с $|\lambda| > 1$ равно m_+ . Тогда A_{*0} имеет инвариантное подпространство \mathbb{R}^{m_-} (входящий ус) и инвариантное подпространство \mathbb{R}^{m_+} (выходящий ус), точки которых стремятся к 0 при применении A_{*0}^N , где $N \rightarrow +\infty$ (для \mathbb{R}^{m_-}) или $N \rightarrow -\infty$ (для \mathbb{R}^{m_+}) (рис. 225).

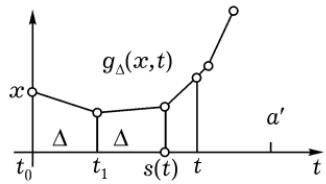


Рис. 224. Ломаная Эйлера

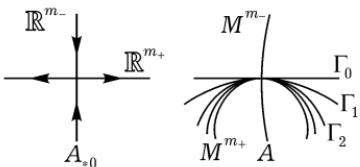


Рис. 225. Усы отображения и его линейной части

Доказать, что исходное нелинейное отображение A тоже имеет в окрестности точки 0 инвариантные подмногообразия M^{m-} и M^{m+} (входящий и выходящий усы), касающиеся в 0 подпространств \mathbb{R}^{m-} и \mathbb{R}^{m+} ; $A^N x \rightarrow 0$ при $N \rightarrow +\infty$ на M^{m-} , при $N \rightarrow -\infty$ для $x \in M^{m+}$).

Указание. Взять какое-либо подмногообразие Γ_0 размерности m_+ (скажем, касающееся \mathbb{R}^{m+} в 0) и применять к нему степени A . Методом сжатых отображений доказать сходимость полученных приближений $\Gamma_N = A^N \Gamma_0$, $N \rightarrow +\infty$, к M^{m+} .

Задача *4. Доказать существование входящего и выходящего усов у нелинейного седла $\dot{x} = v(x)$, $v(0) = 0$ (предполагается, что ни одно из собственных чисел оператора $A = v_*(0)$ не лежит на мнимой оси).

§ 32. Теорема о дифференцируемости

В этом параграфе доказывается теорема о выпрямлении.

1. Уравнение в вариациях. С дифференцируемым отображением $f: U \rightarrow V$ связано линейное отображение касательных пространств в каждой точке

$$f_{*x}: T_x U \rightarrow T_{f(x)} V.$$

Точно так же с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

связана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x), & x \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ \dot{y} = v_*(t, x)y, & y \in T_x U, \end{cases} \tag{2}$$

называемая *системой уравнений в вариациях* для уравнения (1) и *линейная относительно касательного вектора y* (рис. 226).

Звездочка в формуле (2) (и в дальнейших формулах) означает производную по x при фиксированном t . Так, $v_*(t, x)$ есть линейный оператор из \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^n .

Наряду с системой (2) удобно рассматривать систему

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n, \\ \dot{z} = v_*(t, \mathbf{x})z, & z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) получена из системы (2) заменой неизвестного вектора \mathbf{y} неизвестным линейным преобразованием z . Мы будем употреблять название *уравнение в вариациях* также и применительно к системе (3).

ЗАМЕЧАНИЕ. Вообще, если дано линейное уравнение

$$\dot{\mathbf{y}} = A(t)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (2')$$

то полезно рассмотреть ассоциированное уравнение

$$\dot{z} = A(t)z, \quad z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (3')$$

относительно линейного оператора z .

Зная решения одного из уравнений (2'), (3'), легко найти решения другого (как?).

2. Теорема о дифференцируемости. Пусть правая часть v уравнения (1) дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (t_0, x_0) . Тогда решение $g(t, x)$ уравнения (1) с начальным условием $g(t_0, x) = x$ зависит от начального условия x непрерывно дифференцируемо, когда x и t меняются в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки (t_0, x_0) :

$$v \in C^2 \Rightarrow g \in C_x^1$$

(класса C^1 по x).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$v \in C^2 \Rightarrow v_* \in C^1$. Поэтому система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям из § 31 и последовательность пикаровских приближений равномерно сходится к ее решению в достаточно малой окрестности точки t_0 . Выберем начальные условия $\varphi_0 = x$ (достаточно

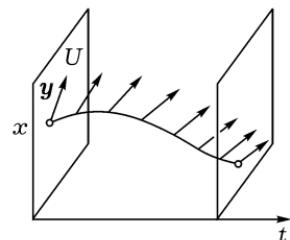


Рис. 226. Решение уравнения в вариациях с начальным условием (x, y)

близко к \mathbf{x}_0), $\psi_0 = E$. Обозначим пикаровские приближения через φ_n (для \mathbf{x}) и ψ_n (для z), т. е. положим

$$\varphi_{n+1}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{v}(\tau, \varphi_n(\tau, \mathbf{x})) d\tau, \quad (4)$$

$$\psi_{n+1}(t, \mathbf{x}) = E + \int_{t_0}^t \mathbf{v}_*(\tau, \varphi_n(\tau, \mathbf{x})) \psi_n(\tau, \mathbf{x}) d\tau. \quad (5)$$

Заметим, что $\varphi_{0*} = \psi_0$. Из определений (4) и (5) индукцией по n заключаем, что $\varphi_{n+1*} = \psi_{n+1}$. Поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ — это последовательность производных последовательности $\{\varphi_n\}$. Обе последовательности (4), (5) равномерно сходятся (как последовательности пикаровских приближений системы (3)) при достаточно малом $|t - t_0|$. Итак, последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится равномерно вместе с производными по \mathbf{x} . Поэтому предельная функция $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t, \mathbf{x})$ непрерывно дифференцируема по \mathbf{x} , что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ. Одновременно доказана

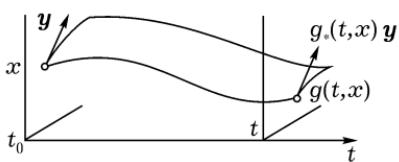


Рис. 227. Действие преобразования за время от t_0 до t на кривую в фазовом пространстве и на ее касательный вектор

Теорема. Производная g_* решения уравнения (1) по начальному условию \mathbf{x} удовлетворяет уравнению в вариациях (3) с начальным условием $z(t_0) = E$:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, g(t, \mathbf{x})),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} g_*(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}_*(t, g(t, \mathbf{x})) g_*(t, \mathbf{x}),$$

$$g(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad g_*(t_0, \mathbf{x}) = E.$$

Эта теорема объясняет смысл уравнений в вариациях: они описывают действие преобразований за время от t_0 до t на касательные векторы к фазовому пространству (рис. 227).

3. Высшие производные по \mathbf{x} . Пусть $r \geq 2$ — целое число.

Теорема T_r . Пусть правая часть \mathbf{v} уравнения (1) r раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки (t_0, \mathbf{x}_0) . Тогда решение $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ уравнения (1) с начальным условием $\mathbf{g}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$ зависит

от начального условия x $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемо, когда x и t меняются в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки (t_0, x_0) :

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1}$. Значит, система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям теоремы T_{r-1} . Поэтому теорема T_r , $r > 2$, вытекает из теоремы T_{r-1} :

$$v \in C^r \Rightarrow v_* \in C^{r-1} \Rightarrow g_* \in C_x^{r-2} \Rightarrow g \in C_x^{r-1}.$$

Но теорема T_2 доказана в п. 2. Итак, теорема T_r доказана.

4. Производные по x и t . Пусть $r \geq 2$ — целое число.

Теорема T'_r . В условиях теоремы T_r решение $g(t, x)$ является дифференцируемой функцией класса C^{r-1} по переменным x и t вместе:

$$v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Эта теорема — очевидное следствие предыдущей. Вот формальное доказательство.

Лемма. Пусть f — функция (со значениями в \mathbb{R}^n), определенная на прямом произведении области G евклидова пространства \mathbb{R}^m и отрезка I на оси t :

$$f : G \times I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Составим интеграл

$$F(x, t) = \int_{t_0}^t f(x, \tau) d\tau, \quad x \in G, \quad [t_0, t] \subset I.$$

Если $f \in C_x^r$ и $f \in C^{r-1}$, то $F \in C^r$.

Действительно, любая r -я частная производная функции F по переменным x_i и t , содержащая дифференцирование по t , выражается через f и частные производные функции f порядка меньше r , а потому непрерывна; всякая же r -я частная производная по переменным x_i , непрерывна по условию.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Имеем

$$g(t, x) = x + \int_{t_0}^t v(\tau, g(\tau, x)) d\tau.$$

Обозначим $f(\tau, x) = v(\tau, g(\tau, x))$ и будем применять лемму. Находим при $1 \leq \rho \leq r$

$$g \in C^{\rho-1} \cap C_x^\rho \Rightarrow g \in C^\rho.$$

Согласно теореме T_r , имеем $g \in C_x^\rho$ при $\rho < r$. Последовательно получаем

$$g \in C^0 \Rightarrow g \in C^1 \Rightarrow \dots \Rightarrow g \in C^{r-1}.$$

Но, согласно § 31, $g \in C^0$ (решение непрерывно зависит от (x, t)).

Теорема T'_r доказана.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что если правая часть дифференциального уравнения (1) бесконечно дифференцируема, то и решение зависит от начальных условий бесконечно дифференцируемо:

$$v \in C^\infty \Rightarrow g \in C^\infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно также доказать, что если правая часть v аналитична (разлагается в сходящийся к v ряд Тейлора в окрестности каждой точки), то и решение g аналитически зависит от x и t .

Дифференциальные уравнения с аналитическими правыми частями естественно рассматривать как при комплексных значениях неизвестных, так и (что особенно важно) при комплексных значениях времени. Об этой теории см., например, книгу В. В. Голубева «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений» (М.: Гостехиздат, 1950).

5. Теорема о выпрямлении. Эта теорема — очевидное следствие теоремы T'_r . Перед доказательством вспомним два простых геометрических предложения. Пусть L_1 и L_2 — два линейных подпространства третьего линейного пространства L (рис. 228). Подпространства L_1 и L_2 называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство L : $L_1 + L_2 = L$. Например, прямая в \mathbb{R}^3 трансверсальна плоскости, если пересекает ее под ненулевым углом.

Предложение 1. Для каждого k -мерного подпространства \mathbb{R}^k в \mathbb{R}^n найдется трансверсальное ему $(n - k)$ -мерное (притом даже среди C_n^k координатных плоскостей пространства \mathbb{R}^n).

Доказательство см. в курсах линейной алгебры (*теорема о ранге матрицы*).

Предложение 2. Если линейное отображение $A: L \rightarrow M$ отображает какие-либо два трансверсальные подпространства на трансверсальные, то оно — на все пространство M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$AL = AL_1 + AL_2 = M.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ВЫПРЯМЛЕНИИ: НЕАВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ (см. гл. 2, § 8, п. 1).

Рассмотрим отображение G области прямого произведения $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в расширенное фазовое пространство уравнения

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

заданное формулой $G(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}))$, где $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ — решение уравнения (1) с начальным условием $\mathbf{g}(t_0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Покажем, что G в окрестности точки (t_0, \mathbf{x}_0) — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) *Отображение G дифференцируемо* (класса C^{r-1} , если $\mathbf{v} \in C^r$) по теореме T'_r .

б) *Отображение G оставляет t на месте:* $G(t, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{g}(t, \mathbf{x}))$.

в) *Отображение G_* переводит стандартное векторное поле e ($\dot{\mathbf{x}} = 0, t = 1$) в данное поле:* $G_* e = (1, \mathbf{v})$ (так как $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ — решение уравнения (1)).

г) *Отображение G в окрестности точки (t_0, \mathbf{x}_0) — диффеоморфизм.* Действительно, сосчитаем сужения линейного оператора $G_*|_{t_0, \mathbf{x}_0}$ на трансверсальные плоскости \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^1 (рис. 229). Находим:

$$G_*|_{\mathbb{R}^n: t=t_0} = E, \quad G_*|_{\mathbb{R}^1: \mathbf{x}=\mathbf{x}_0} e = \mathbf{v} + e.$$

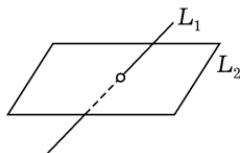


Рис. 228. Прямая L_1 трансверсальна плоскости L_2 в пространстве \mathbb{R}^3

Плоскость \mathbb{R}^n и прямая с направляющим вектором $v + e$ трансверсальны. Итак, G_* есть линейное отображение \mathbb{R}^{n+1} на \mathbb{R}^{n+1} , следовательно, изоморфизм (якобиан G_* в точке (t_0, \mathbf{x}_0) отличен от 0). По теореме об обратной функции G — локальный диффеоморфизм.

Теорема доказана.

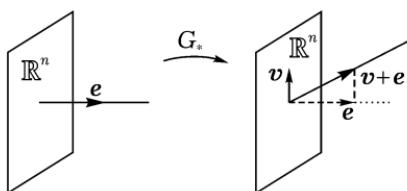


Рис. 229. Производная отображения G в точке (t_0, x_0)

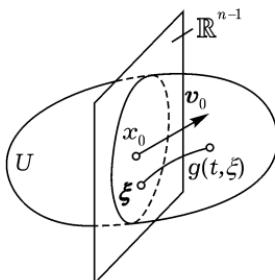


Рис. 230. Построение диффеоморфизма, выпрямляющего векторное поле

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ О ВЫПРЯМЛЕНИИ: АВТОНОМНЫЙ СЛУЧАЙ (§ 7, II. 1).

Рассмотрим автономное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n. \quad (6)$$

Пусть вектор \mathbf{v}_0 фазовой скорости в точке \mathbf{x}_0 отличен от 0 (рис. 230). Тогда существует $(n-1)$ -мерная гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, проходящая через \mathbf{x}_0 , и трансверсальная \mathbf{v}_0 (точнее, соответствующая плоскость в касательном пространстве $T_{x_0}U$ трансверсальна прямой \mathbb{R}^1 направления \mathbf{v}_0).

Определим отображение G области $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, где $\mathbb{R}^{n-1} = \{\xi\}$, $\mathbb{R} = \{t\}$, в область \mathbb{R}^n формулой $G(t, \xi) = g(t, \xi)$, где ξ лежит на \mathbb{R}^{n-1} вблизи \mathbf{x}_0 , а $g(t, \xi)$ есть значение решения уравнения (6) с начальным условием $\varphi(0) = \xi$ в момент t . Покажем, что в достаточно малой окрестности точки $(\xi = \mathbf{x}_0, t = 0)$ отображение G^{-1} — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) *Отображение G дифференцируемо ($G \in C^{r-1}$, если $\mathbf{v} \in C^r$) по теореме T'_r .*

б) *Отображение G^{-1} выпрямляющее*, так как G_* переводит стандартное векторное поле e ($\xi = 0, t = 1$) в $G_*e = v$, поскольку $g(t, \xi)$ удовлетворяет уравнению (6).

в) *Отображение G есть локальный диффеоморфизм.* Действительно, считаем линейный оператор $G_*|_{t_0, x_0}$ на трансверсальных плоскостях \mathbb{R}^{n-1} и \mathbb{R}^1 . Находим $G_*|_{\mathbb{R}^{n-1}} = E$, $G_*|_{\mathbb{R}^1} e = v_0$.

Итак, оператор $G_*|_{t_0, x_0}$ переводит пару трансверсальных подпространств \mathbb{R}^{n-1} и $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^n$ в пару трансверсальных подпространств. Поэтому $G_*|_{t_0, x_0}$ — линейное отображение \mathbb{R}^n на \mathbb{R}^n , следовательно, — изоморфизм. По теореме об обратной функции G — локальный диффеоморфизм. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Поскольку теорема о дифференцируемости доказана с потерей одной производной ($v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$), то и у выпрямляющих диффеоморфизмов мы также гарантируем лишь класс гладкости C^{r-1} . В действительности построенный выпрямляющий диффеоморфизм имеет класс C^r ; доказательство приведено ниже.

6. Последняя производная. В теореме о дифференцируемости (п. 2) мы предполагали поле v дважды непрерывно дифференцируемым. В действительности достаточно однократной непрерывной дифференцируемости.

Теорема. *Если правая часть $v(t, x)$ дифференциального уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ непрерывно дифференцируема, то решение $g(t, x)$ с начальным условием $g(t_0, x) = x$ зависит от начальных условий непрерывно дифференцируемо:*

$$v \in C^1 \Rightarrow g \in C_x^1. \quad (7)$$

Следствия.

1) $v \in C^r \Rightarrow g \in C^r$ при $r \geq 1$.

2) *Построенные в п. 5 выпрямляющие диффеоморфизмы r раз непрерывно дифференцируемы, если $v \in C^r$.*

Следствия выводятся из соотношения (7) дословным повторением рассуждений пп. 3, 4, 5. Доказательство же самой теоремы (7) требует некоторых ухищрений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ.

Начнем со следующих замечаний.

Лемма 1. Решение линейного уравнения $\dot{y} = A(t)y$ с непрерывно зависящей от t правой частью существует, непрерывно, определяется начальными условиями $\varphi(t_0) = y_0$ однозначно и зависит от y_0 и t непрерывно.

Действительно, доказательство теорем существования, единственности и непрерывности (§ 31) использовало только дифференцируемость по x при фиксированном t (фактически даже только условие Липшица по x). Поэтому доказательство сохраняет силу, если зависимость от t предполагать лишь непрерывной. Лемма доказана.

Заметим, что от y_0 решение зависит линейно, а от t — непрерывно дифференцируемо, поэтому принадлежит классу C^1 по y_0 и t вместе.

Лемма 2. Если линейный оператор A в лемме 1 зависит еще от параметра α , так что функция $A(t, \alpha)$ непрерывна, то и решение будет непрерывной функцией от y_0 , t и α .

Действительно, решение можно построить как предел последовательности пикаровских приближений. Каждое приближение непрерывно зависит от y_0 , t и α . Последовательность приближений сходится равномерно относительно y_0 , t и α , меняющихся в достаточно малой окрестности любой точки (y_0, t_0, α_0) . Поэтому предел — непрерывная функция от y_0 , t и α .

Лемма 2 доказана.

Применим лемму 2 к уравнению в вариациях.

Лемма 3. Система уравнений в вариациях

$$\dot{x} = v(t, x), \quad \dot{y} = v_*(t, x)y$$

имеет решение, которое определяется своими начальными данными однозначно и зависит от них непрерывно, если только поле v класса C^1 .

Действительно, первое уравнение системы имеет решение по теореме существования § 31. Это решение определено своими начальными условиями (t_0, x_0) однозначно и зависит от них непрерывно. Подставим это решение во второе уравнение. Получим линейное уравнение относительно y . Его правая часть непрерывно зависит от t и — как от параметра — от начального условия x_0 рассматриваемого решения первого уравнения. По лемме 2 это линейное уравнение имеет решение, которое определяется своими начальными данными y_0 и является непрерывной функцией от t , y_0 и параметра x_0 .

Лемма 3 доказана.

Таким образом, уравнения в вариациях разрешимы и в случае $v \in C^1$. Заметим, что в случае $v \in C^2$ мы доказали, что производная решения по начальным данным удовлетворяет уравнению в вариациях (3). Теперь же мы не можем этого утверждать: ведь мы еще не знаем, существует ли такая производная.

Чтобы доказать дифференцируемость решения по начальным условиям, рассмотрим сперва частный случай.

Лемма 4. *Если векторное поле $v(t, x)$ класса C^1 равно 0 в точке $x = 0$ при всех t вместе со своей производной v_* , то решение уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ дифференцируемо по начальным условиям в точке $x = 0$.*

Действительно, по условию $|v(t, x)| = o(|x|)$ в окрестности точки $x = 0$. Оценим погрешность приближения $x = x_0$ к решению $x = \varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ по формуле п. 3 § 30. При достаточно малых $|x_0|$ и $|t - t_0|$ находим

$$|\varphi - x_0| \leq \frac{1}{1-\lambda} \left| \int_{t_0}^t v(\tau, x_0) d\tau \right| \leq K \max_{t_0 \leq \tau \leq t} v(\tau, x_0),$$

где константа K не зависит от x_0 .

Итак, $|\varphi - x_0| = o(|x_0|)$, откуда следует, что φ дифференцируемо по x_0 в нуле, что и требовалось доказать.

А теперь мы сведем общий случай к специальной ситуации леммы 4: для этого достаточно выбрать в расширенном фазовом пространстве подходящую систему координат. Прежде всего, мы всегда можем считать рассматриваемое решение нулевым:

Лемма 5. *Пусть $x = \varphi(t)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ с правой частью класса C^1 , заданной в области расширенного фазового пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Тогда существует C^1 -диффеоморфизм расширенного фазового пространства, сохраняющий время $((t, x) \mapsto (t, x_1(t, x)))$ и переводящий решение φ в $x_1 \equiv 0$.*

Действительно, достаточно сделать сдвиг $x_1 = x - \varphi(t)$, поскольку $\varphi \in C^1$. Лемма 5 доказана.

В системе координат (t, x_1) правая часть нашего уравнения равна 0 в точке $x_1 = 0$. Покажем, что производную правой части по x_1 можно также обратить в нуль при помощи подходящей линейной по x замены координат.

Лемма 6. *В предположениях леммы 5 координаты (t, x_1) можно выбрать так, что уравнение $\dot{x} = v(t, x)$ будет эквивалентно уравнению $\dot{x}_1 = v_1(t, x_1)$, где поле v_1 равно 0 в точке $x_1 = 0$ вместе со своей производной $\partial v_1 / \partial x_1$. Притом функцию $x_1(t, x)$ можно выбрать линейной (не обязательно однородной) относительно x .*

Согласно лемме 5 можно считать, что $v_1(t, 0) = 0$.

Чтобы доказать лемму 6 рассмотрим сперва ее частный случай:

Лемма 7. *Утверждение леммы 6 справедливо для линейного уравнения $\dot{x} = A(t)x$.*

Действительно, достаточно принять за x_1 значение решения с начальным условием $\varphi(t) = x$ в фиксированный момент t_0 . Согласно лемме 1 $x_1 = B(t)x$, где $B(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейный оператор класса C^1 по t . В координатах (t, x_1) наше линейное уравнение принимает вид $\dot{x}_1 = 0$.

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 6. Линеаризуем уравнение $\dot{x} = v(t, x)$ в нуле, т. е. составим уравнение в вариациях $\dot{x} = A(t)x$, где $A(t) = v_*(t, 0)$.

По условию, $v \in C^1$, поэтому $A \in C^0$. По лемме 7 можно выбрать C^1 -координаты $x_1 = B(t)x$ так, что в новых координатах линеаризованное уравнение примет вид $\dot{x}_1 = 0$. Легко проверить, что в этой системе координат правая часть исходного нелинейного уравнения будет иметь нулевую линейную часть.

Действительно, введем обозначения $V = Ax + R$ (тогда $R = o(|x|)$) и $x = Cx_1$ (тогда $C = B^{-1}$). Дифференциальное уравнение для x_1 получается из $\dot{x} = v$ подстановкой $x = Cx_1$. Получаем

$$\dot{C}x_1 + C\dot{x}_1 = ACx_1 + R.$$

Но, по определению C , первые (линейные по x_1) слагаемые слева и справа равны. Итак,

$$\dot{x}_1 = C^{-1}R(t, Cx_1) = o(|x_1|).$$

Лемма 6 доказана.

Соединяя леммы 6 и 4, приходим к следующему заключению:

Лемма 8. *Решение дифференциального уравнения $\dot{x} = v(t, x)$ с правой частью класса C^1 дифференцируемо зависит от начального условия. Производная z решения по начальному условию удовлетворяет системе уравнений в вариациях*

$$\dot{x} = v(t, x), \quad \dot{z} = v_*(t, x)z, \quad z(t_0) = E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Для доказательства леммы 8 достаточно записать уравнение в системе координат леммы 6 и применить лемму 4.

Для доказательства теоремы осталось убедиться в непрерывности производной решения по начальному условию. Согласно лемме 8 это производная существует и удовлетворяет системе уравнений в вариациях. Из леммы 3 следует непрерывная зависимость решений этой системы от x_0 и t .

Итак, теорема доказана.

ГЛАВА 5

Дифференциальные уравнения на многообразиях

В этой главе определяются дифференцируемые многообразия и доказывается теорема о существовании фазового потока, заданного векторным полем на многообразии.

В теории дифференциальных уравнений на многообразиях получено много интересных и глубоких результатов, о которых нельзя было успеть рассказать в настоящей главе, являющейся лишь кратким введением в эту область на стыке анализа и топологии.

§ 33. Дифференцируемые многообразия

Понятие дифференцируемого, или гладкого, многообразия играет в геометрии и в анализе столь же фундаментальную роль, как в алгебре понятия группы и линейного пространства.

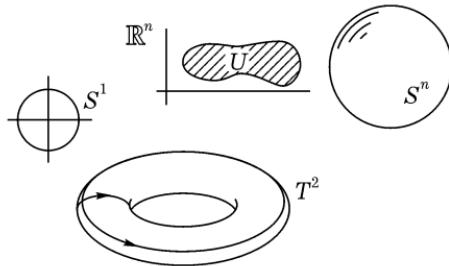


Рис. 231. Примеры многообразий

1. Примеры многообразий. Когда ниже будет дано определение многообразия, то многообразиями окажутся, например, следующие объекты (рис. 231):

1. Линейное пространство \mathbb{R}^n или любая его область (открытое подмножество) U .

2. Сфера S^n , заданная в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n+1} уравнением

$$x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1.$$

В частности, окружность S^1 .

3. Тор $T^2 = S^1 \times S^1$ (ср. § 24).

4. Проективное пространство $\mathbb{RP}^n = \{(x_0 : x_1 : \dots : x_n)\}$. Вспомним, что точками этого пространства являются прямые, проходящие через начало координат в \mathbb{R}^{n+1} . Такая прямая задается любой своей (отличной от 0) точкой. Координаты этой точки (x_0, \dots, x_n) в \mathbb{R}^{n+1} называются однородными координатами соответствующей точки проективного пространства.

Последний пример особенно поучителен. При рассмотрении следующих определений полезно иметь в виду аффинные координаты в проективном пространстве (см. пример 3 п. 3 ниже).

2. Определения. Дифференцируемое многообразие M — это множество M вместе со структурой дифференцируемого многообразия в нем.

В множестве M введена *структура многообразия*, если задан *атлас*, состоящий из карт, которые *согласованы*.

Определение 1. Картой называется область $U \subset \mathbb{R}^n$ вместе с взаимно однозначным отображением $\varphi: W \rightarrow U$ подмножества W множества M на U (рис. 232). Мы назовем $\varphi(x)$ *изображением* точки $x \in W \subset M$ на карте U .

Рассмотрим карты (рис. 233) $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ и $\varphi_j: W_j \rightarrow U_j$. Если множества W_i и W_j пересекаются, то их пересечение $W_i \cap W_j$ имеет изображения на обеих картах:

$$U_{ij} = \varphi_i(W_i \cap W_j), \quad U_{ji} = \varphi_j(W_j \cap W_i).$$

Переход с одной карты на другую задается отображением *подмножеств линейных пространств*

$$\varphi_{ij}: U_{ij} \rightarrow U_{ji}, \quad \varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Определение 2. Две карты $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$, $\varphi_j: W_j \rightarrow U_j$ называются *согласованными*, если

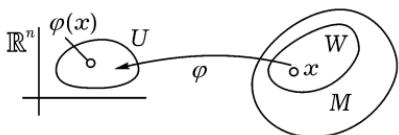


Рис. 232. Карта

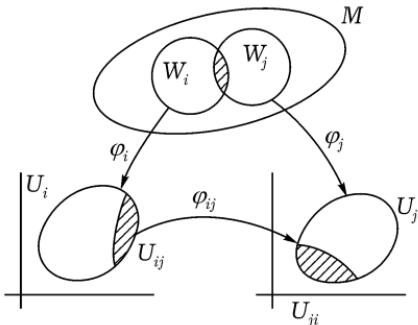


Рис. 233. Согласованные карты

- 1) множества U_{ij} , U_{ji} открыты (быть может, пусты);
- 2) отображения φ_{ij} и φ_{ji} (определенные, если $W_i \cap W_j$ непусто) являются дiffeоморфизмами областей \mathbb{R}^n .

Замечание. В зависимости от класса гладкости отображений φ_{ij} получаются разные классы многообразий.

Если под диффеоморфизмом понимать диффеоморфизм класса C^r , $1 \leq r \leq \infty$, то многообразие (которое мы определим ниже) будет называться *дифференцируемым многообразием класса C^r* . Если положить $r = 0$, т. е. требовать лишь, чтобы φ_{ij} были гомеоморфизмами, получится определение *топологического многообразия*. Если требовать, чтобы φ_{ij} были аналитическими¹, то получим *аналитические многообразия*.

Есть и другие возможности. Например, если фиксировать в \mathbb{R}^n ориентацию и требовать, чтобы диффеоморфизмы φ_{ij} ее сохраняли (якобиан φ_{ij} в каждой точке положителен), то получится определение *ориентированного многообразия*.

Определение 3. Атласом на M называется совокупность карт $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$, если

- 1) любые две карты согласованы;
- 2) любая точка $x \in M$ имеет изображение хоть на одной карте.

¹Функция аналитична, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки.

Определение 4. Два атласа на M эквивалентны, если их объединение есть снова атлас (т. е. если любая карта первого атласа согласована с любой картой второго).

Легко видеть, что определение 4 действительно задает отношение эквивалентности.

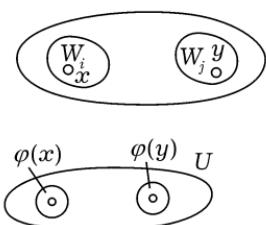


Рис. 234. Отделимость

Определение 5. Структурой дифференцируемого многообразия на M называется класс эквивалентных атласов.

Отметим здесь же два условия, часто накладываемые на многообразия, чтобы избежать патологий.

1. *Отделимость*: у любых двух точек $x, y \in M$ есть непересекающиеся окрестности (рис. 234). То есть либо существуют две карты $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ и $\varphi_j: W_j \rightarrow U_j$ с непересекающимися W_i, W_j , содержащими x и y соответственно, либо существует карта, на которой изображены обе точки x, y .

Если не требовать отделимости, то многообразием будет множество, полученное из двух прямых $\mathbb{R} = \{x\}$, $\mathbb{R} = \{y\}$ отождествлением точек с равными отрицательными координатами x, y . На таком многообразии неверна теорема единственности продолжения решений дифференциального уравнения, хотя локальная теорема единственности и верна.

2. *Счетность*: существует атлас M из не более чем счетного числа карт.

Далее слово «многообразие» означает дифференцируемое многообразие, удовлетворяющее условиям отделимости и счетности.

3. Примеры атласов.

1. Сферу S^2 , заданную уравнением $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ в \mathbb{R}^3 , можно снабдить атласом из двух карт, например — в стереографической проекции (рис. 235). Здесь

$$W_1 = S^2 \setminus N, \quad U_1 = \mathbb{R}_1^2;$$

$$W_2 = S^2 \setminus S, \quad U_2 = \mathbb{R}_2^2.$$

Задача 1. Написать формулы для отображений $\varphi_{1,2}$ и проверить, что наши две карты согласованы.

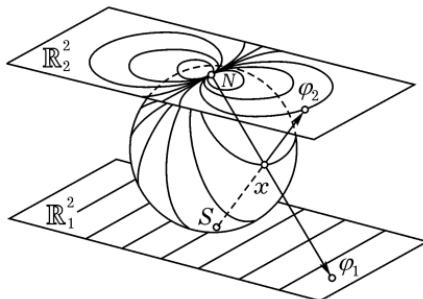


Рис. 235. Атлас сферы. Семейство касающихся в точке N окружностей, лежащих на сфере, изображается на нижней карте семейством параллельных прямых, а на верхней — семейством касающихся окружностей

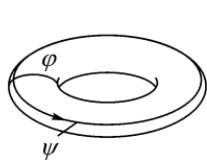


Рис. 236. Атлас тора

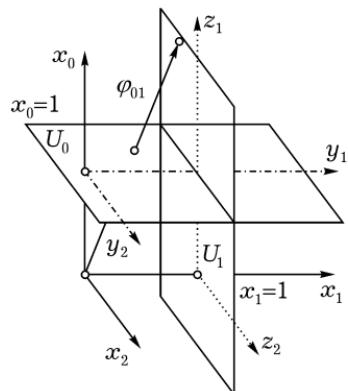
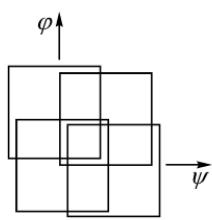


Рис. 237. Аффинные карты проективной плоскости

Аналогичным образом, дифференцируемую структуру S^n можно задать атласом из двух карт.

2. Атлас тора T^2 строится с помощью угловых координат: широты φ и долготы ψ (рис. 236). Например, можно рассмотреть 4 карты, соответствующие изменениям φ и ψ в интервалах

$$0 < \varphi < 2\pi, \quad -\pi < \varphi < \pi;$$

$$0 < \psi < 2\pi, \quad -\pi < \psi < \pi.$$

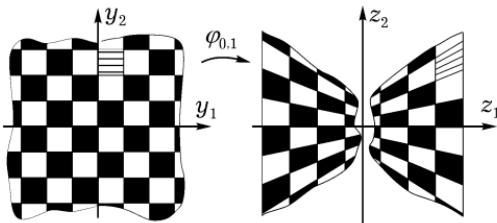


Рис. 238. Согласованность карт проективной плоскости

3. Атлас проективной плоскости \mathbb{RP}^2 можно составить из трех «аффинных карт» (рис. 237):

$$\begin{aligned} & y_1 = \frac{x_1}{x_0}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_0}, \quad \text{если } x_0 \neq 0, \\ & x_0 : x_1 : x_2 \xrightarrow[\varphi_2]{\varphi_1} z_1 = \frac{x_0}{x_1}, \quad z_2 = \frac{x_2}{x_1}, \quad \text{если } x_1 \neq 0, \\ & u_1 = \frac{x_0}{x_2}, \quad u_2 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \text{если } x_2 \neq 0. \end{aligned}$$

Эти карты согласованы. Например, согласованность φ_0 и φ_1 означает, что отображение $\varphi_{0,1}$ области $U_{0,1} = \{y_1, y_2: y_1 \neq 0\}$ плоскости (y_1, y_2) на область $U_{1,0}: z_1 \neq 0$ плоскости (z_1, z_2) , заданное формулами $z_1 = y_1^{-1}$, $z_2 = y_2 y_1^{-1}$, является диффеоморфизмом (рис. 238).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$y_1 = z_1^{-1}, \quad y_2 = z_2 z_1^{-1}.$$

Аналогичным образом, дифференцируемая структура в проективном пространстве \mathbb{RP}^n задается атласом из $n+1$ аффинной карты.

4. Компактность.

Определение. Подмножество G многообразия M называется *открытым*, если его изображение $\varphi(W \cap G)$ на каждой карте $\varphi: W \rightarrow U$ является открытым подмножеством области и линейного пространства (рис. 239).

Задача 1. Докажите, что пересечение двух и объединение любого числа открытых подмножеств многообразия открыто.

Определение. Подмножество K многообразия M называется *компактным*, если из всякого покрытия множества K открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

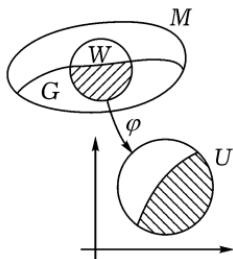


Рис. 239. Открытое подмножество

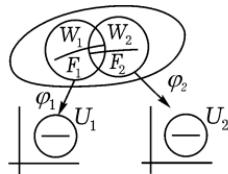


Рис. 240. Компактное подмножество

Задача 2. Докажите, что сфера S^n компактна. Компактно ли проективное пространство \mathbb{RP}^n ?

Указание. Для решения можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. Пусть подмножество F многообразия M (рис. 240) является объединением конечного числа подмножеств F_i , каждое из которых имеет компактное изображение на одной из карт $F_i \subset W_i$, $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$, $\varphi_i(F_i)$ — компакт в \mathbb{R}^n . Тогда F компактно.

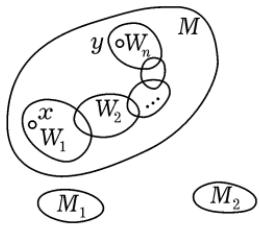
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\{G_j\}$ — открытое покрытие множества F . Тогда $\{\varphi_i(G_j \cap W_i)\}$ при каждом i есть открытое покрытие компакта $\varphi_i(F_i)$. Выбираем из него конечное подпокрытие. Заставляя j пробегать полученное конечное множество значений, получаем конечное число G_j , покрывающих F .

5. Связность и размерность.

Определение. Многообразие M называется *связным* (рис. 241), если для любых двух его точек x, y существует конечная цепочка карт $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ таких, что W_1 содержит x , W_n содержит y и $W_i \cap W_{i+1} \neq \emptyset$ для всех i .

Если многообразие M не связно, то оно естественным образом распадается на компоненты связности M_1, M_2 .

Рис. 241. Связное многообразие M и несвязное $M_1 \cup M_2$

¹ То есть любые две точки U_i можно соединить ломаной в $U_i \subset \mathbb{R}^n$

Задача 1. Связны ли многообразия, заданные уравнениями в \mathbb{R}^3 (в \mathbb{RP}^3)

$$x^2 + y^2 - z^2 = C, \quad C \neq 0?$$

Задача 2. Множество всех матриц порядка n с отличным от 0 определителем имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия (область в \mathbb{R}^n). Сколько компонент связности имеет это многообразие?

Теорема. Пусть M — связное многообразие, $\varphi_i: W_i \rightarrow U_i$ — его карты. Тогда размерности всех линейных пространств \mathbb{R}^n , областями которых являются U_i , одинаковы.

Доказательство.

Это следует из того, что диффеоморфизм между областями линейных пространств возможен лишь при равных размерностях пространств, и из того, что всякие две области W_i и W_j связного многообразия M можно соединить конечной цепочкой попарно пересекающихся областей.

Определенное в теореме число n называется *размерностью* многообразия M и обозначается $\dim M$ (от англ. «dimension»).

Например, $\dim \mathbb{R}^n = \dim S^n = \dim T^n = \dim \mathbb{RP}^n = n$.

Несвязное многообразие называется n -мерным, если все его компоненты связности имеют одинаковую размерность n .

Задача 3. Снабдить множество $O(n)$ всех ортогональных матриц порядка n структурой дифференцируемого многообразия. Найти его компоненты связности и их размерность.

Ответ. $O(n) = SO(n) \times \mathbb{Z}_2$, $\dim O(n) = \frac{n(n-1)}{2}$.

6. Дифференцируемые отображения.

Определение. Отображение $f: M_1 \rightarrow M_2$ одного C^r -многообразия в другое называется *дифференцируемым* (класса C^r), если в локальных координатах на M_1 и M_2 оно задается дифференцируемыми функциями (класса C^r).

Иными словами, пусть $\varphi_1: W_1 \rightarrow U_1$ — карта M_1 , изображающая точку $x \in W_1$, $\varphi_2: W_2 \rightarrow U_2$ — карта M_2 , изображающая точку $f(x) \in W_2$ (рис. 242). Тогда заданное в окрестности точки $\varphi_1(x)$ отображение областей евклидовых пространств $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ должно быть дифференцируемым класса C^r .

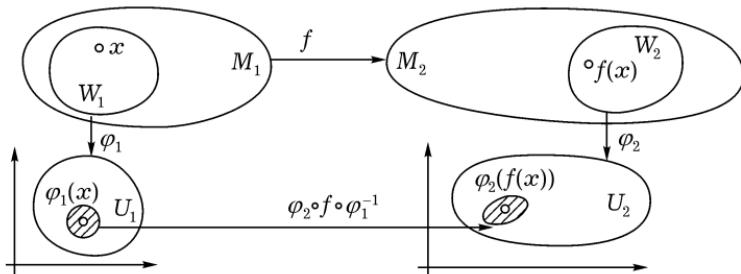


Рис. 242. Дифференцируемое отображение

ПРИМЕР 1. Проекция сферы на плоскость (рис. 243) есть дифференцируемое отображение $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Мы видим, что образ дифференцируемого отображения — не обязательно дифференцируемое многообразие.

ПРИМЕР 2. *Кривой*¹ на многообразии M , выходящей в момент t_0 из точки $x \in M$, называется дифференцируемое отображение $f: I \rightarrow M$ содержащего t_0 интервала I вещественной оси t в многообразие M , при чем $f(t_0) = x$.

ПРИМЕР 3. *Дiffeоморфизмом* $f: M_1 \rightarrow M_2$ многообразия M_1 на многообразие M_2 называется дифференцируемое отображение f , обратное к которому $f^{-1}: M_2 \rightarrow M_1$ существует и дифференцируемо.

Многообразия M_1 и M_2 *дiffeоморфны*, если существует диффеоморфизм одного на другое. Например, сфера и эллипсоид диффеоморфны.

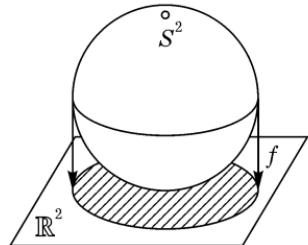
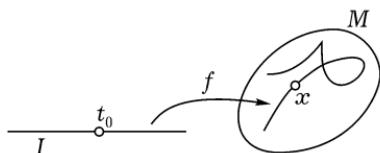


Рис. 243. При проектировании сферы на плоскость получается замкнутый круг

Рис. 244. Кривая на многообразии M

¹Или *параметризованной кривой*, так как кривыми на M иногда называют также одномерные подмногообразия многообразия M (определение см. ниже. в п. 8). У параметризованной кривой могут быть точки самопересечения, точки возврата и т. п. (рис. 244).

7. Замечание. Легко видеть, что всякое связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности (если оно компактно) или прямой (если оно не компактно).

Примерами двумерных многообразий являются сфера, тор (диффеоморфный «сфере с одной ручкой») и «сфера с n ручками» (рис. 245).

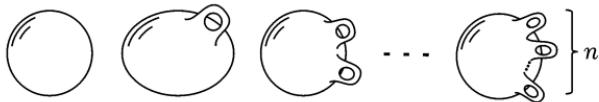


Рис. 245. Недиффеоморфные двумерные многообразия

В курсах топологии доказывается, что всякое двумерное компактное связное ориентируемое многообразие диффеоморфно сфере с $n \geq 0$ ручками. О трехмерных многообразиях известно мало. Например, неизвестно, всякое ли компактное односвязное¹ трехмерное многообразие диффеоморфно сфере S^3 (*гипотеза Пуанкаре*) или хотя бы гомеоморфно ей.

В больших размерностях дифференцируемая и топологическая классификация многообразий не совпадают. Например, существует ровно 28 гладких многообразий, гомеоморфных сфере S^7 , но не диффеоморфных друг другу. Они называются *сферами Милнора*.

Сферу Милнора можно задать в \mathbb{C}^5 с координатами z_1, \dots, z_5 следующими двумя уравнениями:

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \quad |z_1|^2 + \dots + |z_5|^2 = 1.$$

При $k = 1, 2, \dots, 28$ получаем 28 сфер Милнора². Одно из этих 28 многообразий диффеоморфно сфере S^7 .

8. Подмногообразия. Сфера в \mathbb{R}^3 , заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, доставляет пример подмножества евклидова пространства, наследующего от него естественную структуру дифференцируемого многообразия — структуру *подмногообразия* \mathbb{R}^3 . Общее определение подмногообразия следующее:

Определение. Подмножество V многообразия M (рис. 246) называется *подмногообразием*, если каждая точка $x \in V$ имеет такую

¹Многообразие односвязно, если всякий замкнутый путь в нем можно непрерывно стянуть в точку.

²См. Е. Брискорн. Примеры из дифференциальной топологии особенностей. — сб. пер. «Математика», 1967, 11, 6, стр. 132–143.

окрестность W в M и такую карту $\varphi: W \rightarrow U$, что $\varphi(W \cap U)$ является областью некоторого аффинного подпространства того аффинного пространства \mathbb{R}^n , в котором лежит U .

Подмногообразие V само имеет естественную структуру многообразия ($W' = W \cap V$, $U' = \varphi(W')$).

Следующий фундаментальный факт приводится без доказательства и не будет использоваться в дальнейшем.

Теорема. Всякое многообразие M^n диффеоморфно подмногообразию евклидова пространства достаточно большой размерности \mathbb{R}^N (например, достаточно $N > 2n$, где $n = \dim M^n$).

Таким образом, абстрактное понятие многообразия в действительности охватывает не больший круг объектов, чем « n -мерные поверхности в N -мерном пространстве». Преимущество абстрактного подхода состоит в том, что он сразу охватывает и те случаи, когда заранее не дано никакого вложения в евклидово пространство, а его привлечение привело бы лишь к ненужным усложнениям (пример: проективное пространство \mathbb{RP}^n). Положение здесь такое же, как с конечномерными линейными пространствами (они все изоморфны координатному пространству $\{(x_1, \dots, x_n)\}$, но привлечение координат часто лишь усложняет дело).

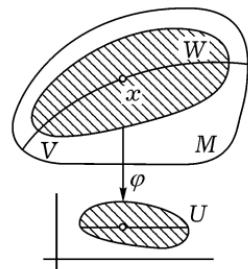


Рис. 246. Подмногообразие

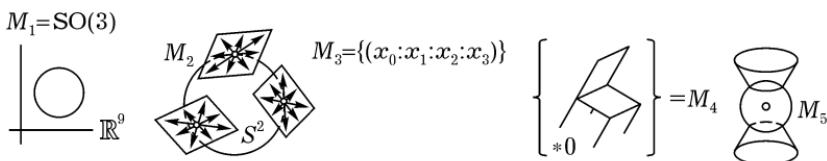


Рис. 247. Примеры трехмерных многообразий

9. Пример. Рассмотрим в заключение пять интересных многообразий (рис. 247). $M_1 = \text{SO}(3)$ есть группа ортогональных матриц третьего порядка с определителем +1. Поскольку матрица имеет 9 элементов, M_1 есть подмножество пространства \mathbb{R}^9 . Легко видеть, что это подмножество является в действительности подмногообразием.

$M_2 = T_1 S^2$ есть множество всех касательных векторов длины 1 к сфере S^2 в трехмерном евклидовом пространстве. Ввести структуру дифференцируемого многообразия в этом множестве предоставляется читателю (ср. § 34).

$M_3 = \mathbb{RP}^3$ — это трехмерное проективное пространство.

M_4 — конфигурационное пространство твердого тела, закрепленного в неподвижной точке O .

M_5 — подмногообразие пространства $\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}\mathbb{C}^3$, заданное уравнениями

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0, \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2.$$

ЗАДАЧА*1. Какие из многообразий M_1 — M_5 диффеоморфны?

§ 34. Касательное расслоение. Векторные поля на многообразии

С каждым гладким многообразием M связано другое многообразие (вдвое большей размерности), называемое *касательным расслоением*¹ M и обозначаемое TM . Касательное расслоение позволит нам сразу перенести на многообразия всю теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Касательное пространство. Пусть M — гладкое многообразие. *Касательным к M в точке x вектором* ξ называется класс эквивалентности выходящих из x кривых; две кривые (рис. 248)

$$\gamma_1: I \rightarrow M, \quad \gamma_2: I \rightarrow M$$

эквивалентны, если их изображения на какой-либо карте $\varphi\gamma_1: I \rightarrow U$, $\varphi\gamma_2: I \rightarrow U$ эквивалентны.

Заметим, что понятие эквивалентности кривых не зависит от выбора карты атласа (см. § 5): из эквивалентности на карте φ_i следует эквивалентность на любой другой φ_j , так как переход с одной карты на другую, φ_{ij} , есть диффеоморфизм.

Множество векторов, касательных к M в x , имеет структуру линейного пространства, не зависящую от выбора карты (см. § 5). Это линейное пространство называется *касательным пространством* к M в x и обозначается $T_x M$. Его размерность равна размерности M .

¹Касательное расслоение — частный случай векторного расслоения; еще более общее понятие — расслоенное пространство. Все эти понятия относятся к числу основных в топологии и в анализе, но мы ограничимся лишь касательным расслоением, которое особенно важно для теории *обыкновенных* дифференциальных уравнений.

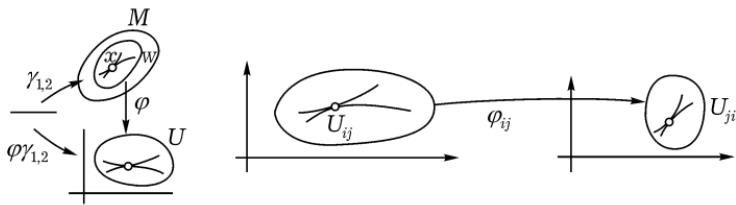


Рис. 248. Касательный вектор

ПРИМЕР 1. Пусть M^n — подмногообразие аффинного пространства \mathbb{R}^N (рис. 249). Тогда $T_x M^n$ можно представить себе в виде n -мерной плоскости в \mathbb{R}^N , проходящей через x . При этом, однако, следует помнить, что *касательные пространства к M в разных точках x, y не пересекаются*: $T_x M \cap T_y M = \emptyset$.

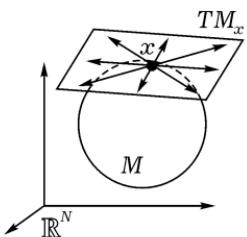


Рис. 249. Касательное пространство

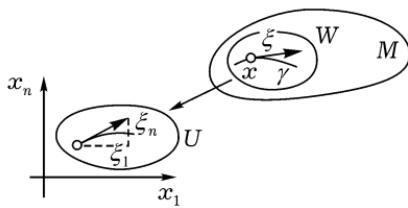


Рис. 250. Координаты касательного вектора

2. Касательное расслоение. Рассмотрим объединение касательных пространств к многообразию M во всех его точках $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$.

Множество TM имеет естественную структуру гладкого многообразия.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь карту на многообразии M , и пусть $(x_1, \dots, x_n): W \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n$ (рис. 250) — локальные координаты в окрестности W точки x , задающие эту карту. Всякий вектор ξ , касательный к M в точке $x \in W$, задается набором своих компонент (ξ_1, \dots, ξ_n) в указанной системе координат. Именно, если $\gamma: I \rightarrow M$ — кривая, выходящая из x по направлению ξ в момент t_0 , то $\xi_i = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} x_i(\gamma(t))$. Таким образом, всякий вектор ξ касательный к M в одной из точек области W , задается набором $2n$ чисел $(x_1, \dots, x_n), (\xi_1, \dots, \xi_n)$ — n координат «точки

приложения» x и n «компонент» ξ_i . Мы получили карту части множества TM :

$$\psi: TW \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, \quad \psi(\xi) = (x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n).$$

Различные карты TM , соответствующие разным картам атласа M , согласованы (класса C^{r-1} , если M класса C^r). Действительно, пусть (y_1, \dots, y_n) — другая локальная система координат на M и (η_1, \dots, η_n) — компоненты вектора в этой системе; тогда

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n), \quad \eta_i = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) \xi_j \quad (i = 1, \dots, n)$$

— гладкие функции от x_j и ξ_j .

Итак, множество TM всех касательных к M векторов получило структуру гладкого многообразия размерности $2n$.

Определение. Многообразие TM называется *касательным расслоением*¹ многообразия M .

Существуют естественные отображения $i: M \rightarrow TM$ (*нулевое сечение*) и $p: TM \rightarrow M$ (*проекция*): $i(x)$ есть нулевой вектор $T_x M$, а $p(\xi)$ есть та точка x , в которой ξ касается M (рис. 251).

Задача 1. Докажите, что отображения i, p дифференцируемы, что i является диффеоморфизмом M на $i(M)$ и что $p \circ i: M \rightarrow M$ — тождественное отображение.

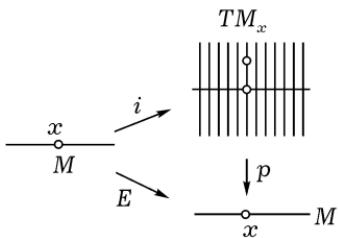
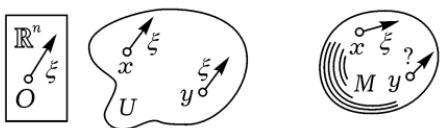
Прообразы точек $x \in M$ при отображении $p: TM \rightarrow M$ называются *слоями* расслоения TM . Каждый слой имеет структуру линейного пространства. Многообразие M называется *базой* расслоения TM .

3. Замечание о параллелизуемости. Касательное расслоение аффинного пространства \mathbb{R}^n или его области U имеет еще дополнительную структуру прямого произведения: $TU = U \times \mathbb{R}^n$.

Действительно, касательный вектор к U можно задать парой (x, ξ) , где $x \in U$, а ξ — вектор линейного пространства \mathbb{R}^n , для которого указан линейный изоморфизм с $T_x U$ (рис. 252).

Можно выразить это иначе, сказав, что аффинное пространство *параллелизовано*: для касательных векторов к области U пространства \mathbb{R}^n в разных точках x и y определено равенство.

¹Мы будем использовать это краткое название вместо более педантичного термина *пространство касательного расслоения*.

Рис. 251. Касательное рас-
слоениеРис. 252. Параллелизованное и непа-
раллелизуемое многообразия

Касательное расслоение многообразия вовсе не прямым произведением, и, вообще говоря, нельзя делить равенство векторов, приложенных в разных образия M .

Положение здесь такое же, как с листом Мёбиуса (рис. 253), который является расслоением с базой окружность и слоем прямая, но не является прямым произведением окружности на прямую.

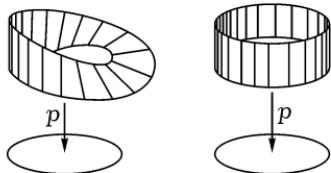
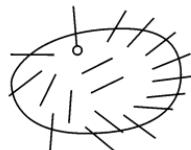
Рис. 253. Расслоение, не являю-
щееся прямым произведением

Рис. 254. Теорема о еже

Определение. Многообразие M называется *параллелизованным*, если в его касательном расслоении введена структура прямого произведения, т. е. задан диффеоморфизм $TM^n \cong M^n \times \mathbb{R}^n$, линейно переводящий $T_x M$ в $x \times \mathbb{R}^n$. Многообразие *параллелизуемо*, если оно может быть параллелизовано.

ПРИМЕР 1. Любая область в евклидовом пространстве естественно параллелизована.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что тор T^n параллелизуем, а лист Мёбиуса нет.

Теорема*. Из сфер S^n параллелизуемы только следующие три: S^1, S^3, S^7 . В частности, двумерная сфера непараллелизуема:

$$TS^2 \neq S^2 \times \mathbb{R}^2.$$

(Отсюда вытекает, например, что ежа нельзя причесать: хоть одна игла будет перпендикулярна поверхности (рис. 254).)

Читатель, решивший задачу в конце § 33, легко докажет непараллелизуемость S^2 (указание: $\mathbb{RP}^3 \not\cong S^2 \times S^1$). Параллелизация окружности S^1 очевидна. Параллелизовать S^3 — поучительное упражнение (указание: S^3 — это группа, а именно группа кватернионов с модулем 1). Полное доказательство сформулированной теоремы требует довольно глубокого проникновения в топологию; оно было получено относительно недавно.

Аналитики склонны считать все расслоения прямыми произведениями и все многообразия параллелизуемыми. Этой ошибки следует остерегаться.

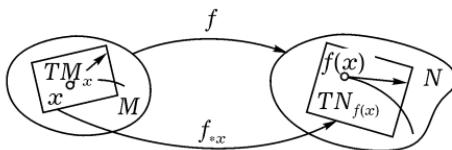


Рис. 255. Производная отображения f в точке x

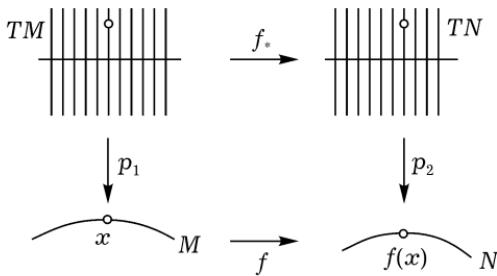


Рис. 256. Касательное отображение

4. Касательное отображение. Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение многообразия M в многообразие N (рис. 255). Обозначим через f_{*x} индуцированное отображение касательных пространств. Оно определяется, как в § 6, и является линейным отображением одного

линейного пространства в другое:

$$f_{*x} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N.$$

Пусть x пробегает M . Предыдущая формула определяет отображение

$$f_{*x} : TM \rightarrow TN, \quad f_{*}|_{T_x M} = f_{*x}$$

касательного расслоения M в касательное расслоение N . Это отображение дифференцируемо (почему?) и линейно отображает слои TM в слои TN (рис. 256).

Отображение f_* называется *касательным отображением* к f (употребляется также обозначение $Tf: TM \rightarrow TN$).

ЗАДАЧА 1. Пусть $f: M \rightarrow N$ и $g: N \rightarrow K$ — гладкие отображения, $g \circ f: M \rightarrow K$ — их суперпозиция. Доказать, что $(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*)$, т. е. что



ТЕРМИНОЛОГИЧЕСКОЕ ЗАМЕЧАНИЕ. В анализе эта формула называется правилом дифференцирования сложной функции, в алгебре — функториальностью (ковариантной) перехода к касательному отображению.

5. Векторные поля. Пусть M — гладкое (класса C^{r+1}) многообразие, TM — его касательное расслоение (рис. 257).

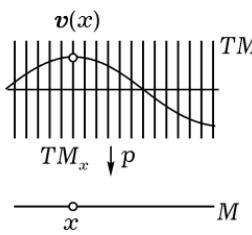


Рис. 257. Векторное поле

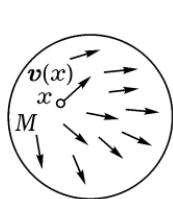


Рис. 258. Поле скоростей

Определение. Векторное поле¹ (класса C^r) v на M есть гладкое (класса C^r) отображение $v: M \rightarrow TM$ такое, что отображение $p \circ v: M \rightarrow M$ — тождественное: диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & TM & \\ v \nearrow & \downarrow p & \\ M & \xrightarrow{E} & M \end{array}$$

коммутативна, т. е. $p(v(x)) = x$.

Замечание. Если M — область пространства \mathbb{R}^n с координатами x_1, \dots, x_n , то это определение совпадает со старым (§ 5).

Однако в новом определении никакая специальная система координат не участвует.

ПРИМЕР. Рассмотрим семейство g^t вращений сферы S^2 вокруг оси SN на угол t (рис. 258). Каждая точка сферы $x \in S^2$ описывает при вращении кривую (параллель) и имеет скорость

$$v(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x \in T_x S^2.$$

Мы получаем отображение $v: S^2 \rightarrow TS^2$; очевидно, $p v = E$, т. е. v — векторное поле на S^2 .

Вообще, если $g^t: M \rightarrow M$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M , то возникает векторное поле фазовой скорости на M , точь-в-точку как в § 5.

Вся локальная теория (нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений немедленно переносится на многообразия, так как мы позаботились своевременно (в § 5) о независимости основных понятий от системы координат.

В частности, на многообразия переносится основная локальная теорема о выпрямлении векторного поля и локальные теоремы существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости по начальным условиям. Специфика многообразия проявляется лишь при рассмотрении нелокальных вопросов. Простейшими из них являются вопросы о продолжении решений и о существовании фазового потока с данным полем фазовой скорости.

¹Употребляется также термин *сечение касательного расслоения*.

§ 35. Фазовый поток, заданный векторным полем

Доказанная ниже теорема является простейшей теоремой качественной теории дифференциальных уравнений: она дает условия, при которых имеет смысл ставить вопрос о поведении решений дифференциального уравнения на бесконечном интервале времени.

Из этой теоремы вытекает, в частности, непрерывность и дифференцируемость решения по начальным данным в целом (т. е. на любом конечном интервале времени). Эта теорема полезна также как технический метод для конструирования диффеоморфизмов. Например, с ее помощью можно доказать, что всякое замкнутое многообразие, имеющее гладкую функцию лишь с двумя критическими точками, гомеоморфно сфере.

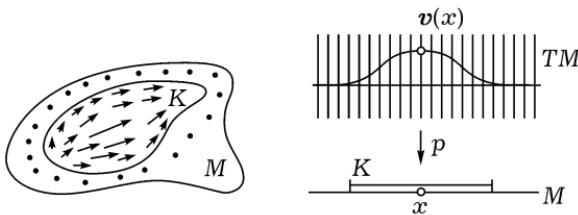


Рис. 259. Векторное поле, равное 0 вне компакта K

1. Теорема. Пусть M — гладкое (класса C^r , $r \geq 2$) многообразие (рис. 259), $v: M \rightarrow TM$ — векторное поле. Пусть вектор $v(x)$ отличен от нулевого вектора $T_x M$ только лишь в компактной части K многообразия M . Тогда существует однопараметрическая группа диффеоморфизмов $g^t: M \rightarrow M$, для которой поле v является полем фазовой скорости:

$$\frac{d}{dt} g^t x = v(g^t x). \quad (1)$$

Следствие 1. Всякое векторное поле v на компактном многообразии M является полем фазовой скорости некоторой однопараметрической группы диффеоморфизмов.

В частности, в условиях теоремы или в условиях следствия 1 имеет место

Следствие 2. *Всякое решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M \tag{2}$$

можно продолжать вперед и назад неограниченно. При этом значение решения $g^t x$ в момент t зависит от t и от начального условия x гладко.

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие компактности нельзя отбросить.

ПРИМЕР 1. $M = \mathbb{R}$, $\dot{x} = x^2$ (см. § 1. п. 7): решения нельзя продолжать неограниченно.

ПРИМЕР 2. $M = \{x: 0 < x < 1\}$, $\dot{x} = 1$.

Приступаем к доказательству теоремы.

2. Построение дiffeоморфизмов g^t при малых t . Для каждой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки y из U и для любого t с $|t| < \varepsilon$ решение $g^t y$ уравнения (2) с начальным условием y (при $t = 0$) существует, единствено, дифференцируемо зависит от t и от y и удовлетворяет условию

$$g^{t+s} = g^t g^s y, \tag{3}$$

если $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$, $|s + t| < \varepsilon$.

Действительно, точка x изображается на некоторой карте, а для уравнений в области аффинного пространства наше утверждение доказано (см. гл. 2 и гл. 4)¹.

Итак, компактное множество K покрыто окрестностями U . Мы можем выбрать конечное покрытие $\{U_i\}$.

Пусть ε_i — соответствующие числа ε ; возьмем $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$.

Тогда при $|t| < \varepsilon_0$ определены в целом дiffeоморфизмы $g^t: M \rightarrow M$, $g^{t+s} = g^t g^s$, если $|s|, |t|, |s + t| < \varepsilon$, $g^t x = x$ при x вне K .

¹Доказательство единственности требует небольшого дополнительного рассуждения: нужно проверить, что из единственности решения с данными начальными условиями на каждого фиксированной карте вытекает единственность на многообразии. На неотделимом многообразии единственности может и не быть (пример: уравнение $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 1$ на многообразии, полученном из двух прямых $\{x\}$, $\{y\}$ отождествлением точек с равными отрицательными координатами). Если же многообразие M отдельимо, то проходит доказательство единственности из § 7, п. 6. (Отделимость используется при доказательстве совпадения значений решений $\varphi_1(T)$ и $\varphi_2(T)$ в первой точке T , начиная с которой они не совпадают.)

Действительно, хотя определенные с помощью разных карт решения уравнения (2) с начальным условием x (при $t = 0$) a priori различны, они совпадают при $|t| < \varepsilon_0$ ввиду выбора ε_0 и локальной теоремы единственности.

Далее, по локальной теореме дифференцируемости точки $g^t x$ зависит дифференцируемо от t и x , а поскольку $g^t g^{-t} = E$, то отображение $g^t: M \rightarrow M$ — диффеоморфизм. Заметим, что $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t x = v(x)$.

3. Построение g^t при любых t . Представим t в виде $n\varepsilon_0/2 + r$, где n — целое и $0 \leq r < \varepsilon_0/2$. Такое представление существует и единственno. Диффеоморфизмы $g^{\varepsilon_0/2}$ и g^r уже определены.

Положим $g^t = (g^{\varepsilon_0/2})^n g^r$. Это диффеоморфизм M на M . При $|t| < \varepsilon_0/2$ новое определение согласуется с предыдущим (см. п. 2) определением. Поэтому $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t x = v(x)$.

Легко видеть, что при любых s, t

$$g^{s+t} = g^s g^t. \quad (4)$$

Действительно, пусть

$$s = \frac{m\varepsilon_0}{2} + p, \quad t = \frac{n\varepsilon_0}{2} + q, \quad s + t = \frac{k\varepsilon_0}{2} + r.$$

Тогда левая и правая части равенства (4) принимают вид

$$(g^{\varepsilon_0/2})^k g^r \quad \text{и} \quad (g^{\varepsilon_0/2})^m g^p (g^{\varepsilon_0/2})^n g^q.$$

Возможны два случая:

$$1) m + n = k, \quad p + q = r, \quad 2) m + n = k - 1, \quad p + q = r + (\varepsilon_0/2).$$

Заметим, что поскольку $|p| < \varepsilon_0/2$, $|q| < \varepsilon_0/2$, то диффеоморфизмы $g^{\varepsilon_0/2}$, g^p и g^q коммутируют. Отсюда вытекает формула (4) как в первом случае, так и во втором ($(g^{\varepsilon_0/2})^k g^r = g^p g^q$, так как $|p|, |q|, |r| < \varepsilon_0/2$, $p + q = \varepsilon_0/2 + r$.)

Остается проверить, что точка $g^t x$ зависит от t и x дифференцируемо. Это следует, например, из того, что $g^t = (g^{t/N})^N$, а $g^{t/N}$ при достаточно больших N зависит дифференцируемо от t и x (см. п. 2).

Итак, g^t есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия M ; соответствующее поле фазовой скорости есть v , и теорема доказана.

4. Замечание. Из доказанной теоремы легко вывести, что *каждое решение неавтономного уравнения*

$$\dot{x} = v(t, x), \quad x \in M, \quad t \in \mathbb{R},$$

заданного зависящим от времени t векторным полем v на компактном многообразии M , можно продолжать неограниченно.

Этим объясняется, в частности, возможность неограниченного продолжения решений линейного уравнения

$$\dot{x} = v(t, x), \quad v(t, x) = A(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

В самом деле, будем рассматривать \mathbb{R}^n как аффинную часть проективного пространства \mathbb{RP}^n . Пространство \mathbb{RP}^n получается из своей аффинной части добавлением бесконечно удаленной плоскости: $\mathbb{RP}^n = \mathbb{R}^n \cup \mathbb{RP}^{n-1}$.

Пусть v — линейное векторное поле в \mathbb{R}^n ($v(x) = A(x)$). Легко проверяется

Лемма. *Векторное поле v на \mathbb{R}^n можно единственным образом продолжить до гладкого поля v' на \mathbb{RP}^n . Поле v' на бесконечно удаленной плоскости \mathbb{RP}^{n-1} касается \mathbb{RP}^{n-1} .*

В частности, продолжим (при каждом t) поле $v(t)$, задающее уравнение (5), до поля $v'(t)$ на \mathbb{RP}^n . Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v'(t, x), \quad x \in \mathbb{RP}^n, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Проективное пространство компактно. Следовательно, каждое решение уравнения (6) можно продолжать неограниченно (рис. 260).

Решение с начальным условием в \mathbb{RP}^{n-1} всегда остается в \mathbb{RP}^{n-1} , так как поле v' касается \mathbb{RP}^{n-1} .

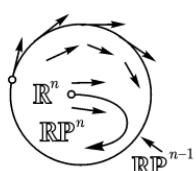
Рис. 260. Продолжение линейного векторного поля на проективное пространство

По теореме единственности решения уравнения с начальными условиями в \mathbb{R}^n остаются в пределах \mathbb{R}^n при всех t . Но в пределах \mathbb{R}^n уравнение (6) имеет вид (5). Итак, каждое решение уравнения (5) продолжается неограниченно.

ЗАДАЧА 1. Доказать лемму.

РЕШЕНИЕ 1. Пусть (x_1, \dots, x_n) — аффинные координаты в \mathbb{RP}^n , (y_1, \dots, y_n) — другие аффинные координаты:

$$y_1 = x_1^{-1}, \quad y_k = x_k x_1^{-1} \quad (k = 2, \dots, n),$$



Уравнение \mathbb{RP}^{n-1} в новых координатах: $y_1 = 0$.

Дифференциальное уравнение (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \dots, n,$$

в новых координатах записывается в виде (рис. 261)

$$\frac{dy_1}{dt} = -y_1(a_{1,1} + \sum a_{1,k} y_k), \quad k > 1;$$

$$\frac{dy_k}{dt} = a_{k,1} + \sum a_{k,l} y_l - y_k(a_{1,1} + \sum a_{1,l} y_l),$$

$$k > 1, \quad l > 1.$$

Из этих формул, верных при $y_1 \neq 0$, видно, как доопределить поле при $y_1 = 0$.

При $y_1 = 0$ находим $\frac{dy_1}{dt} = 0$, что и доказывает лемму.

Решение 2. Аффинное преобразование можно рассматривать как проективное, оставляющее на месте бесконечно удаленную плоскость, но не ее точки. В частности линейные преобразования e^{At} продолжаются до диффеоморфизмов проективного пространства, оставляющих на месте бесконечно удаленную плоскость. Эти диффеоморфизмы образуют однопараметрическую группу; ее поле фазовой скорости есть v^r .

§ 36. Индексы особых точек векторного поля

Здесь рассмотрены простые применения топологии к исследованию дифференциальных уравнений.

1. Индекс кривой. Начнем с наглядных рассуждений; ниже они будут подкреплены точными определениями и доказательствами (см. п. 7). Рассмотрим векторное поле, заданное на ориентированной евклидовой плоскости. Пусть на плоскости дана замкнутая ориентированная кривая, не проходящая через особые точки поля (рис. 262). Пусть точка обходит кривую в положительном направлении. Вектор поля в рассматриваемой точке при движении точ-

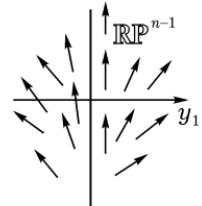


Рис. 261. Поведение продолженного поля вблизи бесконечно удаленной плоскости

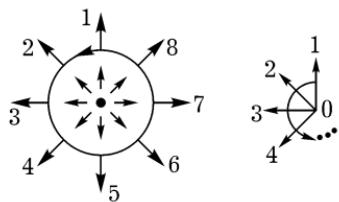


Рис. 262. Кривая индекса 1

ки будет непрерывно поворачиваться¹. Когда точка, обойдя кривую, вернется на место, вектор тоже вернется к исходному положению. Но при этом он может делать несколько оборотов в ту или другую сторону.

Число оборотов вектора поля при обходе кривой называется *индексом* кривой. При этом число оборотов берется со знаком плюс, если вектор вращается в сторону, заданную ориентацией плоскости (от первого орта ко второму), и со знаком минус в противном случае.

ПРИМЕР 1. Индексы кривых $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ на рис. 263 равны 1, 0, 2, и -1 соответственно.

ПРИМЕР 2. Пусть O — неособая точка поля. Тогда индекс всякой кривой, лежащей в достаточно малой окрестности точки O , равен 0.

Действительно, направление поля в точке O непрерывно и в достаточно малой ее окрестности меняется меньше чем, скажем, на $\pi/2$.

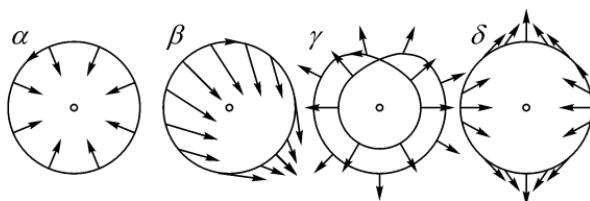


Рис. 263. Кривые с разными индексами

ЗАДАЧА 1. Зададим векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ без точки O формулой $v(z) = z^n$ (n — целое число, не обязательно положительное). Сосчитать индекс окружности $z = e^{i\varphi}$, ориентированной в сторону возрастания φ (плоскость ориентирована репером $1, i$).

ОТВЕТ. n .

2. Свойства индекса.

Свойство 1. При непрерывной деформации замкнутой кривой ее индекс не меняется, пока кривая не проходит через особые точки.

Действительно, направление вектора поля вне особых точек меняется непрерывно; поэтому число оборотов также непрерывно зависит от кривой. Будучи целым числом, оно постоянно.

¹Чтобы следить за поворотом вектора, удобно снести все векторы в одну точку O , следуя естественной параллелизации плоскости.

Свойство 2. *Индекс кривой не меняется при непрерывной деформации векторного поля, если только при этом на кривой во все время деформации нет особых точек поля.*

Из этих двух свойств, интуитивно достаточно очевидных¹, вытекает множество глубоких теорем.

3. Примеры.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим векторное поле на плоскости. Пусть D — круг, а S — его окружность².

Теорема. *Если индекс кривой S отличен от 0, то внутри ограниченной ею области D есть хоть одна особыя точка.*

В самом деле, если особых точек нет, то S можно внутри D деформировать непрерывно и не проходя через особые точки, так что после деформации получится сколь угодно близкая к одной точке O кривая (можно даже просто деформировать S в точку O). Индекс полученной маленькой кривой равен 0. Но при деформации индекс не меняется: значит, и вначале он был равен 0.

ЗАДАЧА 1. Докажите, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = x + P(x, y), \quad \dot{y} = y + Q(x, y),$$

где P и Q — ограниченные на всей плоскости функции, имеет по меньшей мере одно положение равновесия.

ПРИМЕР 2. Докажем основную теорему алгебры:

Всякое уравнение $z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ имеет по меньшей мере один комплексный корень.

Рассмотрим векторное поле v на плоскости комплексного переменного z , заданное формулой $v(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$. Особые точки поля v — это корни нашего уравнения.

Лемма. *Индекс окружности достаточно большого радиуса в построенном поле равен n (ориентации — как в задаче п. 1).*

¹Аккуратная формулировка и доказательство сформулированных утверждений требуют некоторой топологической техники: гомотопий, гомологий или чего-нибудь в этом роде (далее мы воспользуемся с этой целью формулой Грина). См., например, книгу Н. Стинрода и У. Чина, «Первые понятия топологии» (М.: Мир, 1967).

²Можно также рассмотреть более общий случай, когда D — любая плоская область, ограниченная простой замкнутой кривой S .

В самом деле, формула

$$\mathbf{v}_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + \dots + a_n), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

определяет непрерывную деформацию исходного поля в поле z^n . Пусть $r > 1 + |a_1| + \dots + |a_n|$. Тогда $r^n > |a_1|r^{n-1} + \dots + |a_n|$. Поэтому на окружности радиуса r во все времена деформации нет особых точек. По свойству 2 индекс этой окружности в исходном поле и в поле z^n одинаков. Но в поле z^n он равен n .

Лемма доказана.

По предыдущей теореме внутри круга радиуса r есть особые точки векторного поля, т. е. корни нашего уравнения.

Теорема доказана.

ПРИМЕР 3. Докажем следующую теорему о неподвижной точке:

Теорема. *Всякое гладкое¹ отображение $f: D \rightarrow D$ замкнутого круга в себя имеет хоть одну неподвижную точку.*

Будем считать, что на плоскости круга D введена структура линейного пространства с началом в центре круга (рис. 264). Неподвижные точки отображения f — это особые точки векторного поля $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$.

Предположим, что особых точек в D нет. Тогда их нет и на окружности.

Лемма. *Индекс окружности круга D в поле \mathbf{v} равен 1.*

Действительно, существует такая непрерывная деформация поля \mathbf{v} в поле $-\mathbf{x}$, что во все времена деформации на окружности нет особых точек (например, достаточно положить $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}) = tf(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$, $0 \leq t \leq 1$). Поэтому индексы окружности в полях $\mathbf{v}_0 = -\mathbf{x}$ и $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$ одинаковы. Но индекс окружности $|\mathbf{x}| = r$ в поле $-\mathbf{x}$ легко сосчитать непосредственно: он равен 1.

Лемма доказана.

По теореме примера 1 внутри круга есть особая точка поля \mathbf{v} , т. е. неподвижная точка отображения f .

¹Эта теорема справедлива для любого непрерывного отображения, но мы здесь считаем все отображения гладкими и докажем теорему (см. п. 7) только в этом предположении.

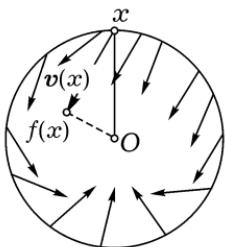
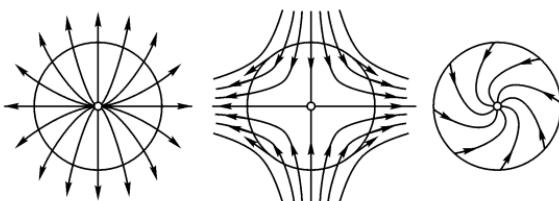


Рис. 264. Отображение круга в себя

Рис. 265. Индексы простых особых точек равны ± 1

4. Индекс особой точки векторного поля. Пусть O — изолированная особая точка векторного поля на плоскости, т. е. пусть в некоторой окрестности точки O нет других особых точек. Рассмотрим окружность достаточно малого радиуса с центром в точке O ; предположим, что плоскость ориентирована и что ориентация на окружности выбрана положительной (как в п. 1).

Теорема. *Индекс окружности достаточно малого радиуса с центром в изолированной особой точке O не зависит от радиуса окружности, лишь бы он был достаточно мал.*

В самом деле, две такие окружности можно непрерывно продеформировать одну в другую, не проходя через особые точки.

Заметим также, что вместо окружности можно было бы взять любую другую кривую, обходящую вокруг O один раз в положительном направлении.

Определение. Индекс какой-нибудь (и тогда любой) достаточно малой положительно ориентированной окружности с центром в изолированной особой точке векторного поля называется *индексом особой точки*.

ПРИМЕРЫ. Индексы особых точек типа узел, седло и фокус (или центр) равны $+1, -1, +1$ соответственно (рис. 265).

Особая точка векторного поля называется *простой*, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден. Простые особые точки на плоскости — это узлы, седла, фокусы и центры. Таким образом, индекс простой особой точки равен всегда ± 1 .

Задача 1. Построить векторное поле с особой точкой индекса n .

Указание. См., например, задачу п. 1.

Задача 2. Докажите, что индекс особом точки не зависит от выбора ориентации плоскости.

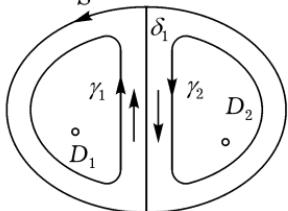
Указание. При изменении ориентации одновременно изменяются и положительное направление обхода окружности, и положительное направление счета числа оборотов.

5. Теорема о сумме индексов. Пусть D — компактная область на ориентированной плоскости, ограниченная простой кривой S . Ориентируем кривую S , как полагается ориентировать границу D (т. е. так, чтобы область D оставалась при обходе слева). Это значит, что репер, образованный вектором скорости обхода и вектором нормали, направленным внутрь D , должен задавать положительную ориентацию плоскости.

Пусть на плоскости задано векторное поле, не имеющее особых точек на кривой S и имеющее лишь конечное число особых точек в области D .

Теорема. Индекс кривой S равен сумме индексов особых точек поля, лежащих внутри D .

Для доказательства заметим, что индекс кривой обладает следующим свойством аддитивности.



Рассмотрим две ориентированные кривые γ_1, γ_2 , проходящие через одну точку. Можно образовать новую ориентированную кривую $\gamma_1 + \gamma_2$, пройдя сначала γ_1 , а потом γ_2 .

Лемма. Индекс кривой $\gamma_1 + \gamma_2$ равен сумме индексов кривых γ_1 и γ_2 .

Действительно, вектор поля сделает n_1 оборотов при обходе кривой γ_1 и еще n_2 оборотов при обходе кривой γ_2 , итого $n_1 + n_2$ оборотов. Лемма доказана.

Теперь разобьем D на части D_i так, чтобы внутри каждой из них было не больше одной особой точки поля (рис. 266), а на границах чтобы особых точек не было. Ориентируем

кривые γ_i , ограничивающие эти части, как полагается ориентировать границы (рис. 266); тогда по лемме

$$\operatorname{ind} \sum_i \gamma_i = \operatorname{ind} \left(S + \sum_j \operatorname{ind} \delta_j \right),$$

где δ_j — замкнутая кривая, представляющая часть границы области D_i , находящуюся внутри D и пройденную два раза в разные стороны.

Индекс каждой кривой δ_j равен 0, так как эта кривая стягивается в точку, минуя особые точки поля (см. п. 8). Индекс кривой γ_i равен индексу той особой точки, которую эта кривая охватывает (или 0, если в области D_i , охватываемой этой кривой, особых точек нет). Теорема доказана.

ЗАДАЧА 1. Пусть p — многочлен степени n от комплексного переменного z , D — область на плоскости переменного z , ограниченная кривой S .

Предположим, что на кривой S нет корней многочлена. Докажите, что число корней многочлена внутри D (с учетом кратностей) равно индексу кривой S в поле $v = p(z)$, т. е. числу оборотов вокруг 0 кривой $p(S)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы получаем тем самым способ решения проблемы Раяса—Гурвица (см. § 23):

Найти число n_- корней данного многочлена в левой полуплоскости.

С этой целью рассмотрим полукруг достаточно большого радиуса в левой полуплоскости с центром в точке $z = 0$ и с диаметром на мнимой оси. Число корней в левой полуплоскости равно индексу границы этого полукруга (если его радиус достаточно велик и у многочлена нет чисто мнимых корней). Для вычисления индекса кривой S достаточно сосчитать число ν оборотов образа мнимой оси, ориентированной от $-i$ к $+i$ вокруг начала координат. Действительно, легко проверить, что

$$n_- = \operatorname{ind} S = \nu + \frac{n}{2},$$

так как образ полуокружности достаточно большого радиуса при отображении p делает приблизительно $n/2$ оборотов вокруг начала координат (тем точнее $n/2$, чем больше радиус).

В частности, *все корни многочлена степени n лежат в левой полуплоскости, если и только если точка $p(it)$ при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ обходит начало координат $n/2$ раз (в сторону от 1 к i).*

6. Сумма индексов особых точек на сфере.

ЗАДАЧА*1. Докажите, что индекс особой точки векторного поля на плоскости сохраняется при диффеоморфизме.

Таким образом, индекс — понятие геометрическое, не зависящее от системы координат. Это обстоятельство позволяет определить индекс особой точки не только на плоскости, но и на любом двумерном многообразии. Действительно, достаточно рассмотреть индекс особой точки на какой-нибудь карте: на других картах он будет тем же самым.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ в евклидовом трехмерном пространстве. Векторное поле скорости вращения вокруг оси z ($\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$, $\dot{z} = 0$) имеет две особые точки: северный и южный полюсы (рис. 267). Индекс каждой из них равен $+1$.

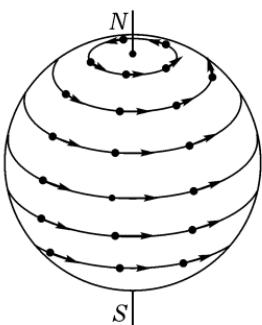


Рис. 267. Векторное поле на сфере, имеющее две особые точки индекса 1

Предположим, что на сфере дано векторное поле, имеющее лишь изолированные особые точки. Тогда их конечное число, так как сфера компактна.

Теорема*. *Сумма индексов всех особых точек поля на сфере не зависит от выбора поля.*

Из предыдущего примера видно, что эта сумма равна 2.

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Рассмотрим карту сферы, покрывающую ее всю, кроме одной точки, которую мы назовем полюсом. В евклидовой плоскости этой карты рассмотрим координатное векторное поле e_1 . Перенесем это поле на сферу. Тогда получим поле на сфере (не определенное в одном лишь полюсе), которое мы по-прежнему будем обозначать через e_1 .

Рассмотрим теперь карту окрестности полюса. На плоскости этой карты мы также можем нарисовать векторное поле на сфере e_1 не определенное лишь в одной точке O . Как оно будет выглядеть, показано на рис. 268.

Лемма. *Индекс замкнутой кривой, обходящей один раз точку O в построенном поле на плоскости, равен 2.*

Для доказательства леммы достаточно явно проделать описанные выше операции, взяв в качестве двух карт, например, карты сферы в стереографической проекции (рис. 235). Параллельные прямые первой карты перейдут на второй в окружности рис. 268, из которого ясно, что индекс равен 2.

Рассмотрим теперь векторное поле v на сфере. Выберем за полюс неособую точку поля. Тогда все особые точки поля изображаются на карте дополнения к полюсу. Сумма индексов всех особых точек поля равна индексу окружности достаточно большого радиуса на плоскости этой карты (по теореме п. 5). Перенесем эту окружность на сферу, а со сферы на карту окрестности полюса. На этой карте индекс полученной окружности в исследуемом поле равен 0, так как полюс — неособая точка поля. Оставаясь на этой новой карте, мы можем истолковать индекс окружности на первой карте как «число оборотов поля v относительно поля e_1 » при обходе окружности.

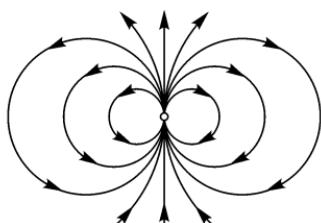


Рис. 268. Векторное поле, параллельное на одной карте сферы, но нарисованное на другой

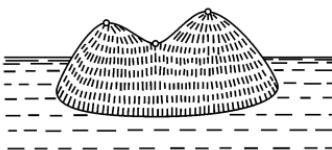


Рис. 269. На каждом острове сумма числа вершин с числом котловин на 1 больше числа перевалов

Это число равно +2, так как на новой карте при обходе по окружности вокруг точки O в положительную для первой карты сторону изображенное на новой карте поле e_1 совершает 2 оборота, а поле v — 0 оборотов.

Задача *2. Пусть $f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ — гладкая функция на сфере, все критические точки которой просты (т. е. второй дифференциал в каждой критической точке невырожден). Докажите, что $m_0 - m_1 + m_2 = 2$, где m_1 — число критических точек, у которых отрицательный индекс инерции второго дифференциала равен i .

Иными словами, если от числа минимумов отнять число седел и прибавить число максимумов, то всегда получится 2. Например, число всех горных вершин на Земле плюс число всех котловин на 2 больше, чем число перевалов. Если ограничиться одним островом или материком, т. е. рассматривать функции на круге без критических точек на краю, то $m_0 - m_1 + m_2 = 1$ (рис. 269).

Указание. Рассмотрите градиент функции f .

Задача*3. Докажите теорему Эйлера о многогранниках:

Для всякого выпуклого ограниченного многогранника с α_0 вершинами, α_1 ребрами и α_2 гранями $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$.

Указание. Эту задачу можно свести к предыдущей.

Задача*4. Докажите, что сумма индексов χ особых точек векторного поля на любом двумерном компактном многообразии не зависит от поля.

Число χ называется эйлеровой характеристикой многообразия. Например, выше мы видели, что эйлерова характеристика сферы $\chi(S^2)$ равна 2.

Задача 5. Найдите эйлерову характеристику тора, кренделя и сферы с n ручками (рис. 245).

Ответ. $0, -2, 2 - 2n$.

Задача*6. Перенесите результаты задач 2, 3 со сферы на любое двумерное компактное многообразие M :

$$m_0 - m_1 + m_2 = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(M).$$

7. Обоснование. Дадим теперь точное определение числа оборотов векторного поля.

Пусть v — гладкое векторное поле, заданное в области U плоскости с координатами (x_1, x_2) своими компонентами $v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)$. Система координат (x_1, x_2) задает на плоскости ориентацию и евклидову структуру.

Выкинем из области U особые точки поля и обозначим оставшуюся область через U' . Зададим отображение области U' на окружность формулой $f: U' \rightarrow S^1, f(x) = \frac{v(x)}{|v(x)|}$.

Это отображение гладкое (так как мы исключили особые точки поля). Рассмотрим какую-нибудь точку x области U' . На окружности

в окрестности образа $f(x)$ точки x можно ввести угловую координату φ . Мы получаем тогда определенную в окрестности точки x гладкую вещественную функцию $\varphi(x_1, x_2)$.

Сосчитаем ее полный дифференциал. Имеем при $v_1 \neq 0$

$$d\varphi = d \operatorname{arctg} \frac{v_2}{v_1} = \frac{v_2 dv_1 - v_1 dv_2}{v_1^2 + v_2^2}. \quad (1)$$

Левая часть равна правой и при $v_1 = 0, v_2 \neq 0$. Итак, хотя сама функция φ определена только локально и только с точностью до прибавления кратного 2π , ее дифференциал есть вполне определенная гладкая дифференциальная форма во всей области U' . Мы будем обозначать эту форму через $d\varphi$.

Определение. Индексом ориентированной замкнутой кривой $\gamma: S^1 \rightarrow U'$ называется интеграл формы (1) по кривой γ , поделенный на 2π :

$$\operatorname{ind} \gamma = \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma} d\varphi.$$

Теперь мы можем аккуратно доказывать приведенные выше теоремы. Докажем, например, теорему о сумме индексов (см. п. 5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть D — область с границей S , внутри которой данное поле v имеет конечное число особых точек. Обозначим через D' область, полученную из D выкидыванием малых круговых окрестностей особых точек. Тогда граница D' с учетом ориентации есть $\partial D' = S - \sum_i S_i$, где S_i — окружность, обходящая вокруг i -й особой точки в положительную сторону (рис. 270). Применим к области D' и интегралу (2) формулу Грина. Получим

$$\iint_{D'} 0 = \oint_S d\varphi - \sum_i \oint_{S_i} d\varphi.$$

Слева стоит 0, так как форма (1) локально является полным дифференциалом. Ввиду определения (2) получаем $\operatorname{ind} S = \sum \operatorname{ind} S_i$, что и требовалось доказать.

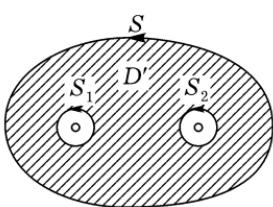


Рис. 270. Область, в которой применяется формула Грина

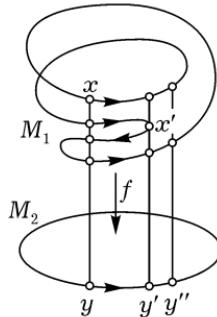


Рис. 271. Отображение степени 2

Задача*1. Докажите, что индекс замкнутой кривой — целое число.

Задача*2. Провести полностью доказательство утверждений п. п. 1, 2, 3, 4.

8. Многомерный случай. Многомерное обобщение понятия *число оборотов* называется степенью отображения.

Степень отображения — это число прообразов точки с учетом знаков, определяемых ориентациями. Например, степень отображения ориентированной окружности на ориентированную окружность, нарисованного на рис. 271, равна 2, так как число прообразов точки y , учитывая знаки, равно $1 + 1 - 1 + 1 = 2$.

Чтобы дать общее определение, поступаем следующим образом. Пусть $f: M_1^n \rightarrow M_2^n$ — гладкое отображение одного n -мерного ориентированного многообразия на другое такое же. Точка $x \in M_1$ многообразия-прообраза называется *регулярной точкой*, если производная отображения f в точке x есть невырожденный линейный оператор $f_{*x}: T_x M_1^n \rightarrow T_{f(x)} M_2^n$.

Например, точка x на рис. 271 регулярна, а точка x' нет.

Определение. Степенью отображения f в регулярной точке x называется число $\deg_x f$, равное $+1$ или -1 в зависимости от того, переводит ли f_{*x} заданную ориентацию пространства $T_x M_1^n$ в заданную ориентацию пространства $T_{f(x)} M_2^n$ или в противоположную.

Задача 1. Докажите, что степень линейного автоморфизма $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ во всех точках одинакова и равна $\deg_x A = \operatorname{sgn} \det A = (-1)^{m_-}$, где m_- —