434. $x^2+y^2=cz$, $z=c$, относительно оси OZ.

435. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$ относительно оси OZ.

436. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1$ относительно оси OZ.

437. $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha$ $(z\geqslant 0\ x^2+y^2\leqslant z^2\operatorname{tg}^2\alpha,\ \alpha<\pi/2)$ относительно оси OZ.

438. $x^2+y^2+z^2=3$, $x^2+y^2=2z$, $z\geqslant 0$, относительно оси OZ.

439. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ относительно оси OZ.

440. $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyza^3$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$ относительно оси OZ.

441. Найти момент инерции однородного тела плотностью ρ, ограниченного поверхностью тора $x=(a+r\cos u)\cos v$, $y=(a+r\cos u)\sin v$, $z=r\sin u$, $0\leqslant r\leqslant b<a$, $0\leqslant u\leqslant 2\pi$, $0\leqslant v\leqslant 2\pi$, относительно осей координат.

Найти момент инерции относительно заданных плоскостей однородного тела плотностью ρ, ограниченного заданными поверхностями

442. $x^2+y^2=k^2z^2$, $z=h$, относительно XZ и XY.

443. $az=a^2-x^2-y^2$, $z=0$ относительно XZ и XY.

444. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ $(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0)$ относительно YZ.

445. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2xy$, $x>0$, $y>0$ относительно XY.

446. $a^2=x^2+y^2+z^2$, $b^2=x^2+y^2+z^2$, $x^2+y^2=z^2$, $z\geqslant 0$ $(x^2+y^2<z^2)$ относительно XY.

447. $x^2+y^2+z^2=2az$, $x^2+y^2=3z^2$ $(x^2+y^2<3z^2)$ относительно XY.

448. Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса плотностью ρ, радиус основания которого равен R, а высота равна H относительно его оси.

449. Найти момент инерции однородного шара массой M и радиусом R относительно точки на его сфере.

450. Найти момент инерции относительно начала координат тела, ограниченного поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=4,\ y=0,\ y=x/\sqrt{3}\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0),$$

если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

451. Найти момент инерции относительно оси симметрии кругового конуса, если высота конуса — H, радиус основания — R; плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от этой точки до оси симметрии конуса.

Найти координаты центра масс однородного тела, ограниченного поверхностями

452. $z=0,\ x^2+y^2=2x,\ z=x^2+y^2.$

453. $az=a^2-x^2-y^2,\ z=0.$

454. $x+y=1,\ z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

455. $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (x>0,\ y>0,\ z>0).$

456. $x^2+y^2=3z^2,\ z=H.$

457. $\frac{z}{c}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\pm 1,\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\pm 1,\ z=0.$

458. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

459. $z=x^2+y^2,\ 2z=x^2+y^2,\ x+y=\pm 1,\ x-y=\pm 1.$

460. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/3}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/3}=1,\ x=0,\ y=0,$

$z=0\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ \alpha<\pi/2).$

461. $z^2=xy,\ x=a,\ y=b,\ z=0\ (z>0).$

462. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=a(a-2z),\ (x^2+y^2<a(a-2z)).$

463. $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=z^2\operatorname{tg}^2\alpha,\ (z\geqslant 0).$

464. $(x^2+y^2+z^2)^2=axyz\quad (x>0,\ y>0).$

465. $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z.$

466. $x+y+z=2a,\ x=a,\ y=a,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

467. $x^2+y^2+z^2=3a^2,\ x^2+y^2=2az,\ (x^2+y^2\leqslant 2az).$

468. $x^2+y^2=z,\ x^2+y^2=2z,\ xy=1,\ xy=4,\ y=x,$

$y=2x\ (x\geqslant 0,\ y\geqslant 0).$

469. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=3,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{2z}{c}\ (z>0).$

470. Найти положение центра масс однородного шарового сегмента плотностью ρ, радиус основания которого равен r_0, а высота равна h.

471. Найти координаты центра масс однородного прямого кругового конуса плотностью ρ, радиус основания которого равен R, а высота равна H:

$$R^2(z-H)^2 \geqslant H^2(x^2+y^2),\ 0 \leqslant z \leqslant H.$$

472. Найти массу и определить положение центра масс шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2az$, если плотность в точках шара:

а) обратно пропорциональна расстоянию этих точек от начала координат;

б) обратно пропорциональна квадрату расстояния этих точек от начала координат.

473. Найти силу, с которой однородный цилиндр плотностью ρ притягивается к центру своего основания, если радиус основания цилиндра равен R и высота равна H.

474. Найти силу, с которой однородный конус плотностью ρ притягивается его вершиной, если радиус основания конуса равен R, а длина образующей равна l.

§ 9. Вычисление n-мерного интеграла

Вычислить интеграл

475. $$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 (x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

476. $$\iint\limits_{\substack{x_1 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0, \\ x_1+x_2+\ldots+x_n \leqslant 1}} \ldots \int \sqrt{x_1+x_2+\ldots+x_n}\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

477. $$\int_0^1 \int_0^1 \ldots \int_0^1 (x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

478. Пусть $f=f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывная функция в области $0 \leqslant x_i \leqslant x$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

Доказать равенство

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f dx_n = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \ldots \int_{x_2}^x f dx_1.$$

479. Доказать, что если f — непрерывная функция, то

$$\int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} f(t_1) f(t_2) \ldots f(t_n)\, dt_n = \frac{1}{n!} \left\{ \int_0^t f(\tau)\, d\tau \right\}^n.$$

480. Найти объем части n-мерного шара $M=\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\leqslant a^2,\ x_n^2+x_{n-2}^2\leqslant 3x_{n-2}^2,\ x_{n-2}\geqslant 0\}$, $(n>2)$.

481. Доказать равенство ($f\in C[0, x]$)

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \ldots \int_0^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \int_0^x f(u)\, \frac{(x-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, du.$$

482. Доказать формулу Лиувилля

$$\iint\limits_{\substack{x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0, \ldots, x_n\geqslant 0,\\ x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1}} \ldots \int f(x_1+x_2+\ldots+x_n)\, x_1^{p_1-1} x_2^{p_2-1} \ldots x_n^{p_n-1}\, dx_1 \ldots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(p_1)\,\Gamma(p_2)\ldots\Gamma(p_n)}{\Gamma(p_1+p_2+\ldots+p_n)} \int_0^1 f(u)\, u^{p_1+p_2+\ldots+p_n-1}\, du,$$

где $f(u)$ — непрерывная функция, $p_i>0$ $(i=1, 2, \ldots, n)$.

483. Вычислить потенциал на себя однородного шара радиусом R и плотностью ρ_0, т. е. найти интеграл

$$\frac{\rho_0^2}{2} \iiint\limits_{\substack{x_1^2+y_1^2+z_1^2\leqslant R^2,\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2\leqslant R^2}} \frac{dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2}{r_{1,2}},$$

где $r_{1,2}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$.

484. Пользуясь формулой

$$|S| = \int_D \sqrt{|\det G|}\, du,$$

где

$$S=\{r: r(u),\ u\in D\},\ r: R^k\to R^n\ (k<n),$$

$D\subset D^k$, область D жорданова,

G — матрица Грамма $(G=(g_{ij}),\ g_{ij}=(r'_{u_i}, r'_{u_j})$, найти площадь поверхности n-мерного шара:

$$M = \left\{x=(x_1, x_2, \ldots, x_n): \sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant a^2\right\}.$$

§ 10. Несобственный кратный интеграл

Исследовать сходимость интегралов

485. $\displaystyle\iint\limits_{R^2} \frac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^p}\, dxdy.$

486. $\iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^p}\,dxdy.$

487. $\iint\limits_{|x|+|y|+|z|<1} \frac{x+y+z+2}{|x|^p+|y|^q+|z|^r}\,dxdy \quad (p>0,\ q>0,\ r>0).$

488. $\iint\limits_{-x<y<x,\,x>0} \frac{4x^2-y^2}{(2x+y+1)^p}\,dxdy.$

489. $\iiint\limits_D \frac{\cos(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^p},$

$D=\{(x,\ y,\ z): x+y+z>1,\ x>0,\ y>0,\ z>0\}.$

490. $\iiint\limits_D \frac{(x+y+z)\,dxdydz}{(x^p+y^q+z^r)\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$

$D=\{(x,\ y,\ z): x+y+z>1,\ x<0,\ y>0,\ z>0\}.$

491. $\iiint\limits_D \frac{x+y-z}{(x^2+y^2+z^2)^p}\,dxdydz,$

$D=\{(x,\ y,\ z): |x|+|y|+|z|<1\}.$

492. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x^2+y^2+z^2)^{2p}},$

$D=\left\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2\leqslant\frac{a^6z^2}{x^2+y^2}\right\}.$

Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость

493. $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>1,\ -1<y<1\}.$

494. $\iint\limits_D \frac{y}{x}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>1,\ -1<xy<1\}.$

495. $\iint\limits_D \frac{x^3-y^3}{x^5+y^5}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ y>0,\ x+y>1\}.$

496. $\iint\limits_D \frac{x^3-y^3}{x^6+y^6}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ y>0,\ x+y>1\}.$

497. $\iint\limits_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ 0<xy<1\}.$

498. $\iint\limits_D \frac{e^{-x}}{\sqrt{y}}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ 0<x^2y<1\}.$

499. $\iint\limits_D e^{-x^2y}\sin 2xy\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>1,\ y>0\}.$

500. $\iint\limits_D e^{-xy}\sin 2xy\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>1,\ y>0\}.$

501. $\iint\limits_D \frac{x^3+y}{x^6+y^2}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ mx<y<nx\},\ 0<m<n.$

502. $\iint\limits_D \frac{x^3+y}{x^6+y^2}\,dxdy,\ D=\{(x,\ y): x>0,\ y>0\}.$

503. $\iiint\limits_{R^3} \frac{1-\cos(x+y-z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dxdydz.$

504. $\iiint\limits_{x^2+y^2<az-a} \frac{x-y}{z^3}\,dxdydz.$

505. $\iiint\limits_{x>1,\ y>1,\ z>1} \frac{x-y}{z^3}\,dxdydz.$

506. $\iiint\limits_D \frac{1-x-y-z}{\sqrt{xyz}}\,dxdydz,\ D=\{(x,\ y,\ z): x>0,\ y>0,$

$z>0,\ x+y+z<1\}.$

507. $\iiint\limits_D \frac{1-x-y-z}{xyz}\,dxdydz,\ D=\{(x,\ y,\ z): x+y+z<1,$

$x>0,\ y>0,\ z>0\}.$

508. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt[4]{(x^2+y^2+z^2)^3}},\ D=\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2\leqslant$

$\leqslant a^2z^2/(x^2+y^2)\}.$

509. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ D=\left\{(x,\ y,\ z): x^2+y^2+z^2\leqslant\frac{a^2z^2}{x^2+y^2}\right\}.$

510. $\iiint\limits_{x>0,\ y>0,\ z>0} e^{-(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)}\,dxdydz.$

511. $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{\sqrt{yz}},$

D — часть тела, полученного при вращении трактрисы $x = a(\ln \operatorname{tg}(t/2) + \cos t)$, $y = a \sin t$ относительно оси OX, лежащая в I октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$).

512. $\iiint\limits_D yx^2 e^{xyz}\,dxdydz$, $D = \{(x, y, z) : y > 1,\ z > 1,\ 0 < xyz < 1\}$.

513. $\iiint\limits_s \frac{\sin(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^{7/4}}\,dxdydz$.

514. $\iiint\limits_{R^3} \frac{\sin(x+y+z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dxdydz$.

515. $\iiint\limits_D \sqrt{\frac{1+x^2+y^2+z^2}{1-x^2-y^2-z^2}}\,dxdydz$, $D = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2<1\}$.

ОТВЕТЫ

1. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} f(x, y)\,dx$.

2. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-x}^{x} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-y}^1 f(x, y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y)\,dx$.

3. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-1/2}^{1/2} dy \int\limits_{1/2-\sqrt{1/4-y^2}}^{1/2+\sqrt{1/4-y^2}} f(x, y)\,dx$.

4. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{1} f(x, y)\,dx$.

5. $\int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_{-x-1}^{x+1} f(x, y)\,dy + \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x-1}^{1-x} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-1}^0 dy \int\limits_{-y-1}^{y+1} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y-1}^{1-y} f(x, y)\,dx$.

6. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y)\,dx$.

7. $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{2} f(x, y)\,dx$.

8. $$\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{2x} f(x, y)\,dy + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{1/x} f(x, y)\,dy = \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{y/2}^{2y} f(x, y)\,dx +$$
$$+ \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dy \int_{y/2}^{1/y} f(x, y)\,dx.$$

9. $$\int_{-1}^{1} dx \int_{x^2}^{x^2/2+1/2} f(x, y)\,dy = \int_0^{1/2} dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx +$$
$$+ \int_{1/2}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{2y-1}} f(x, y)\,dx + \int_{1/2}^{1} dy \int_{\sqrt{2y-1}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

10. $$\int_0^{1/2} dx \int_{1/2-x^2}^{1/2+x^2/2} f(x, y)\,dy + \int_{1/2}^{1} dx \int_{x^2}^{1/2+x^2/2} f(x, y)\,dy =$$
$$= \int_{1/4}^{1/2} dy \int_{\sqrt{1/2-y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int_{1/2}^{1} dy \int_{\sqrt{2y-1}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx.$$

11. $$\int_0^{1} dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{2-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_1^{2} dx \int_{\sqrt{1-(x-2)^2}}^{2-\sqrt{1-(x-2)^2}} f(x, y)\,dy =$$
$$= \int_0^{1} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{2-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_1^{2} dy \int_{\sqrt{1-(y-2)^2}}^{2-\sqrt{1-(y-2)^2}} f(x, y)\,dx.$$

12. $$\int_{-2a}^{0} dx \int_{-\sqrt{4a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-(x+a)^2}} f(x, y)\,dy + \int_{-2a}^{0} dx \int_{\sqrt{a^2-(x+a)^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2}} f(x, y)\,dy +$$
$$+ \int_0^{2a} dx \int_{-\sqrt{4a^2-x^2}}^{-\sqrt{a^2-(x-a)^2}} f(x, y)\,dy + \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2}} f(x, y)\,dy =$$
$$= \int_{-2a}^{-a} dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_{-a}^{a} dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{-a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx +$$
$$+ \int_{-a}^{a} dy \int_{-a+\sqrt{a^2-y^2}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int_{-a}^{a} dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f(x, y)\,dx +$$
$$+ \int_a^{2a} dy \int_{-\sqrt{4a^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

13. $$\int\limits_{a\sqrt{2}}^{2a} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2-2a^2}}^{\sqrt{x^2-2a^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{2a}^{2\sqrt{2}\,a} dx \int\limits_{-\sqrt{4a^2-x^2/2}}^{\sqrt{4a^2-x^2/2}} f(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-a\sqrt{2}}^{a\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{2a^2+y^2}}^{\sqrt{8a^2-2y^2}} f(x,\ y)\,dx.$$

14. $$\int\limits_{-a\sqrt{6}}^{-a} dx \int\limits_{-\sqrt{8a^2-x^2/2}}^{-\sqrt{x^2-a^2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{-a\sqrt{6}}^{a} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{8a^2-x^2/2}} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{8a^2-x^2/2}}^{\sqrt{8a^2-x^2/2}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{a}^{a\sqrt{6}} dx \int\limits_{-\sqrt{8a^2-x^2/2}}^{-\sqrt{x^2-a^2}} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{a}^{a\sqrt{6}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-a^2}}^{\sqrt{8a^2-x^2/2}} f(x,\ y)\,dy = \int\limits_{-2a\sqrt{2}}^{-a\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{16a^2-2y^2}}^{\sqrt{16a^2-2y^2}} f(x,\ y)\,dx +$$

$$+ \int\limits_{-a\sqrt{5}}^{a\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2+x^2}}^{\sqrt{a^2+x^2}} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{2a\sqrt{2}}^{a\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{16a^2-2y^2}}^{\sqrt{16a^2-2y^2}} f(x,\ y)\,dx.$$

15. $$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-1+\sqrt{y}}^{\frac{1}{2}\sin \pi y} f(x,\ y)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{(1+x)^2} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{\frac{1}{\pi}\operatorname{ascsin} 2x}^{1-\frac{1}{\pi}\arcsin 2x} f(x,\ y)\,dy.$$

16. $$\int\limits_{-1/2}^{1/2} dy \int\limits_{y^2-1/4}^{\cos \pi y} f(x,\ y)\,dx = \int\limits_{-1/4}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{x+1/4}}^{\sqrt{x+1/4}} f(x,\ y)\,dy +$$

$$+ \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\frac{1}{\pi}\arccos x}^{\frac{1}{\pi}\arccos x} f(x,\ y)\,dy.$$

17. $$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x,\ y)dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-x}^{-2\sqrt{x-1}} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{2\sqrt{x-1}}^{x} f(x,\ y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{-2}^{0} dy \int\limits_{-y}^{(y^2+4)/4} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{(y^2+4)/4} f(x,\ y)\,dx.$$

18. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{\cos(\pi x/2)} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{\cos(\pi x/2)} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-1-y}^{y+1} f(x, y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\frac{2}{\pi}\arccos y}^{\frac{2}{\pi}\arccos y} f(x, y)\,dx.$$

19. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-\sqrt{1-(x-1)^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y)\,dx.$$

20. $$\int_{0}^{a} dx \int_{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy = \int_{0}^{a} dy \int_{a-\sqrt{a^2-(y-a)^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

21. $$\int_{-1/2}^{0} dx \int_{-\sqrt{2x+1}}^{\sqrt{2x+1}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{(y^2-1)/2}^{y+1} f(x, y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{(y^2-1)/2}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

22. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{1-(x+1)^2}}^{1} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{\sqrt{1-(x-1)^2}}^{1} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-1+\sqrt{1-y^2}}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

23. $$\int_{a/2}^{a} dx \int_{-\sqrt{a^2-ax/2}}^{-\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{a/2}^{a} dx \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-ax/2}} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int_{a}^{2a} dx \int_{-\sqrt{a^2-ax/2}}^{\sqrt{a^2-ax/2}} f(x, y)\,dy = \int_{-a\sqrt{3}/2}^{a\sqrt{3}/2} dy \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{(2a^2-2y^2)/a} f(x, y)\,dx.$$

24. $$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x, y)\,dy + \int_{-1}^{2} dx \int_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{2} dy \int_{y^2-2}^{y} f(x, y)\,dx.$$

25. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1-\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

26. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{1-x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

27. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{-x-1}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{-1}^{0} dy \int_{-1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)dx + \int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\,dx.$$

28. $$\int_{0}^{1} dx \int_{-x/2}^{x/2} f(x, y)\,dy + \int_{1}^{2/\sqrt{3}} dx \int_{-x/2}^{-\sqrt{x^2-1}} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int_{1}^{2/\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-1}}^{x/2} f(x, y)\,dy = \int_{-1/\sqrt{3}}^{0} dy \int_{-2y}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_{0}^{1/\sqrt{3}} dy \int_{2y}^{\sqrt{1+y^2}} f(x, y)\,dx.$$

29. $$\int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{1-\sqrt{1-(x+1)^2}} f(x, y)\,dy + \int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{1} dy \int_{-1+\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx.$$

30. $$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f(x, y)\,dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{-\sqrt{2x+4}}^{-\sqrt{4x+4}} f(x, y)\,dy +$$

$$+ \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt{4x+4}}^{\sqrt{2x+4}} f(x, y)\,dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{(y^2-4)/2}^{(y^2-4)/4} f(x, y)\,dx.$$

31. $$\int_{0}^{a} dy \int_{y}^{a} f(x, y)\,dx.$$ **32.** $$\int_{1}^{3} dy \int_{0}^{2y-2} f(x, y)\,dx + \int_{3}^{7} dy \int_{0}^{7-y} f(x, y)\,dx.$$

33. $\int\limits_{-1}^{5} dy \int\limits_{y+1}^{\sqrt{6y+6}} f(x, y)\,dx$. **34.** $\int\limits_{-4}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x/2}}^{2} f(x, y)\,dy +$

$+ \int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{2-x/2}}^{\sqrt{4-x}} f(x, y)\,dy$. **35.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{y}}^{\sqrt[4]{y}} f(x, y)\,dx$.

36. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x}}^{1} f(x, y)\,dy$. **37.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{(1+x)^2} f(x, y)\,dy +$

$+ \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi}\arccos x} f(x, y)\,dy$.

38. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{1-\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1+\sqrt{y}}^{2} f(x, y)\,dx$.

39. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{4} dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x, y)\,dx$.

40. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{y^2/9}^{1-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2} f(x, y)\,dx +$

$+ \int\limits_{1}^{3\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2/9}^{2} f(x, y)\,dx$. **41.** $\int\limits_{-2}^{6} dx \int\limits_{-3-\sqrt{16-(x-2)^2}}^{-3+\sqrt{16-(x-2)^2}} f(x, y)\,dy$.

42. $\int\limits_{0}^{1/2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{1/2}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{1} f(x, y)\,dy +$

$+ \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\,dy$.

43. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{3\sqrt{x}} f(x, y)\,dy$. **44.** $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{9/x}^{10-x} f(x, y)\,dy$.

45. $\int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{-x}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy$.

46. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{1-\sqrt{y}}^{1+\sqrt{y}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{5-y^2}} f(x, y)\,dx$.

47. $\int\limits_0^a dy \int\limits_{-a\,\mathrm{tg}(\pi y/4a)}^{a\,\mathrm{tg}(\pi y/4a)} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{-\sqrt{2a^3/y-a^2}}^{\sqrt{2a^3/y-a^2}} f(x,\ y)\,dx.$

48. $\int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{\arccos y}^{\pi-\arcsin y} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{-1}^{-1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{\arccos y}^{2\pi-\arccos y} f(x,\ y)\,dx +$

$+ \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,\ y)\,dx.$

49. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,\ y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{(3-x)/2} f(x,\ y)\,dy.$

50. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x,\ y)\,dx.$ **51.** $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{\sqrt{9-x^2}}^{3} f(x,\ y)\,dy +$

$+ \int\limits_3^4 dy \int\limits_0^3 f(x,\ y)\,dy + \int\limits_4^5 dx \int\limits_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$

52. $\int\limits_0^{\frac{a}{2}\sqrt{3}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{\frac{a}{2}\sqrt{3}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,\ y)\,dx.$

53. $\int\limits_0^a dy \int\limits_0^{a-\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_0^{\sqrt{2ay-y^2}} f(x,\ y)\,dx.$

54. $\int\limits_0^a dx \int\limits_{(a^2-x^2)/2a}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,\ y)\,dy.$ **55.** $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x,\ y)\,dy.$

56. а) $\ln\frac{25}{24}$; б) $\ln\frac{25}{24}$. **57.** а) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} 2$; б) $\frac{2\pi}{3}$. **58.** $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$.

59. $-\frac{1}{24}$. **60.** 0. **61.** $\frac{1}{3}$. **62.** $\frac{a^4}{80}$. **63.** 4. **64.** π.

65. $4+\pi$. **66.** $9-\frac{5\pi}{4}$.

67.* $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a f_1(r,\ \varphi)\,r\,dr.$ **68.** $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^a r f_1(r,\ \varphi)\,dr.$

69. $\int\limits_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r f_1(r,\ \varphi)\,dr.$ **70.** $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r f_1(r,\ \varphi)\,dr.$

---

* **В задачах** 67—96 $f_1(r,\ \varphi)$ обозначает $f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$.

71. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sin\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 72. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_{\sin\varphi}^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 73. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/(\cos\varphi+\sin\varphi)} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

74. $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 75. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

76. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

77. $\int\limits_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 78. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 79. $\int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

80. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{1/\cos\varphi}^{2\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 81. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_1^{2\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

82. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{5\pi/6}^{7\pi/6} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{3\pi/2}^{11\pi/6} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

83. $\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{5\pi/6}^{7\pi/6} d\varphi \int\limits_a^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

84. $\int\limits_{\pi/18}^{5\pi/18} d\varphi \int\limits_a^{2a\sin 3\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{13\pi/18}^{17\pi/18} d\varphi \int\limits_a^{2a\sin 3\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr +$

$+ \int\limits_{25\pi/18}^{29\pi/18} d\varphi \int\limits_a^{2a\sin 3\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$. 85. $\int\limits_{-2\pi/3}^{2\pi/3} d\varphi \int\limits_a^{2a(1+\cos\varphi)} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

86. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^{1/\cos\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_1^{1/\sin\varphi} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

87. $\int\limits_{\operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_1^{2} rf_1(r, \varphi)\,dr$.

88. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_0^{1} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

89. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$ **90.** $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

91. $\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi/2}} rf_1(r,\ \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi/2}} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

92. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} d\varphi \int\limits_0^{2/(\cos\varphi-\sin\varphi)} rf_1(r,\ \varphi)\,dr + \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2/(\cos\varphi+\sin\varphi)} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

93. $\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_a^{a(1+\sin\varphi)} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$ **94.** $\int\limits_0^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{a\,\mathrm{tg}\,\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

95. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2a\sin\varphi} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

96. $\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{3a(1-\cos\varphi)}^{2a} rf_1(r,\ \varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/3}^{5\pi/3} d\varphi \int\limits_{a(1+\cos\varphi)}^{2a} rf_1(r,\ \varphi)\,dr.$

97. $\pi\sin a^2$. **98.** $\pi\,[(1+a^2)\ln(1+a^2)-a^2]$. **99.** $3\pi a^2/16$. **100.** $\frac{4}{9}a^3$.

101. $\frac{32}{45}R^5$. **102.** $\frac{2}{3}a^2$. **103.** $\frac{3}{2}+\frac{7}{6}\ln 3$. **104.** $\frac{26\ln 2}{3}$. **105.** $\frac{17}{18}$.

106. 3. **107.** $215/2^7$. **108.** 0. **109.** $\frac{5}{48}(a^{-6/5}-b^{-6/5})(q^{8/5}-p^{8/5})$.

110. $\frac{1}{40}(b^4-a^4)(\alpha^{-10}-\beta^{-10})$. **111.** $\frac{\sin pb-\sin pa}{p}-\frac{\sin qb-\sin qa}{q}$.

112. $\frac{2}{21}ab$. **113.** $\frac{1}{840}\frac{a^{10}b^6}{c^{12}}$. **114.** $\frac{2}{15}$. **117.** $\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)}{\Gamma(p+q+r+3)}$.

118. $\frac{5}{8}\pi a^2$. **119.** $\frac{3}{4}\pi a^2$. **120.** $\frac{1}{2}\pi a^2$. **121.** $\frac{a^2\pi}{8}+$
$+\frac{b^2-a^2}{4}\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\frac{ab}{4}$. **122.** $\frac{a^2b^2}{2c^2}$. **123.** $\frac{\pi}{2}ab(a^2+b^2)$.

124. $\frac{\pi}{2}\frac{a^3b}{c^2}$. **125.** $\frac{7\pi}{512}\frac{a^9b^3}{c^{10}}$. **126.** $\frac{3}{8}\pi ab\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$.

127. $\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\frac{a^5b^3}{c^6}$. **128.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)ab$. **129.** $\frac{2}{3}\pi ab\left(\frac{a^4}{h^4}+\frac{b^4}{k^4}\right)$.

130. $\frac{1}{12}ab$. **131.** $\frac{1}{10}\frac{a^5b}{h^4}$. **132.** $\frac{a^3}{4h^2}\,\frac{b}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$.

133. $\frac{a^5bk}{8h^3(ak+bh)^3}(a^2k^2+3abhk+3b^2h^2)$. **134.** $\frac{1}{8}ab\left(\frac{a^3}{h^3}+\frac{b^3}{k^3}\right)$.

135. $ab\,\frac{(n!)^2}{(2n)!}$. **136.** $\frac{(2n+1)!}{2^n\,(n!)^2}\,\pi ab$. **137.** $\frac{\pi}{n}\,\frac{c^3}{\sqrt{ab}}$, $n=2k+1$; $\frac{\pi}{2n}\,\frac{c^3}{\sqrt{ab}}$, $n=2k$. **138.** $\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{2n}}\left(\frac{b}{a}\right)^{1/2n}\left(\frac{c^3}{b}+\frac{d^3}{a}\right)$.

139. $\frac{a^2}{210}$. **140.** $\frac{a^2}{60}$. **141.** $\frac{a^2}{1260}$. **142.** $\frac{1}{3}(q-p)\ln\frac{b}{a}$.

143. $\frac{1}{2}(q-p)\ln\frac{b}{a}$. **144.** $\frac{1}{6}(q^2-p^2)(b^3-a^3)$.

145. $\frac{5}{12}(q^{4/5}-p^{4/5})(a^{-3/5}-b^{-3/5})$. **146.** $\frac{2}{3}(a-b)(c-d)$.

147. $\frac{1}{15}(a^5-b^5)\left(\frac{1}{d^3}-\frac{1}{c^3}\right)$. **148.** $\frac{1}{12}(a^6-b^6)\left(\frac{1}{d^4}-\frac{1}{c^4}\right)$.

149. $\frac{3}{5}(c^2-d^2)\ln\frac{a}{b}$. **150.** $\frac{1}{4}(a^2-b^2)\left[\frac{(\alpha-\beta)(1-\alpha\beta)}{(1+\alpha^2)(1+\beta^2)}+\operatorname{arctg}\frac{\alpha-\beta}{1+\alpha\beta}\right]$.

151. $\frac{1}{3}(\sqrt{q}-\sqrt{p})(\sqrt{r}-\sqrt{q})(\sqrt{r}-\sqrt{p})(\sqrt{p}+\sqrt{r}+\sqrt{q})$.

152. а) 3π. Указание: сделать замену $x+2y=v$, $2x+y=u$; б) 10π.

153. 32. **154.** $a^3/18$. **155.** 1/6. **156.** $\frac{a^4}{24b}$. **157.** $\frac{2}{5}a^2\sqrt{2ap}$.

158. $\frac{1}{20}\,\frac{a^5}{pq}$. **159.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **160.** 1/8. **161.** $4\pi a^3$. **162.** $\frac{a^3}{12}(9\pi+10)$.

163. $a^3(\pi/4+1)$. **164.** $\pi a^4/4b$. **165.** $16ab^2/3$. **166.** 88/5. **167.** 8/15.

168. $45\pi a^4/32$. **169.** $\pi a^3\left(\frac{2}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})-\frac{1}{4}\right)$. **170.** $\pi h^4/2a$.

171. πa^3. **172.** $\frac{88}{105}\,\frac{b^4}{a}$. **173.** $\frac{\pi a h^2}{16}$. **174.** $\frac{b^5}{140a^3h}(7a^2+5b^2)$.

175. $\pi a^3/6$. **176.** 1/27. **177.** 8. **178.** $\frac{7}{3}a^3$. **179.** $\frac{\pi a^3}{2}$. **180.** $\frac{32}{15}$.

181. $4\sqrt{2}\,\pi a^3$. **182.** $\frac{a^3}{3}(8\pi-6\sqrt{3})$.

183. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(b^3-a^3)\,\Gamma^2\left(\frac{3}{4}\right)$. **184.** $\frac{\pi}{12}a^3$. **185.** а) $\frac{4}{3}\pi(c-a)^3$; б) $\frac{4}{3}\pi(c-a)^3$. **186.** πabc. **187.** $2\pi abc$. **188.** Объем части тела, расположенного над n-м кольцом есть $(8n-6)\,abc$.

189. $\pi/4\,abc$. **190.** $\frac{4}{\pi^2}abc$. **191.** $\frac{(1-3^{1-k})(1-3^{1-l})}{(k-1)(l-1)\,a^{k-1}b^{l-1}}$.

192. $\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^4})$. **193.** $\frac{4\pi}{9\sqrt{3}}(1-e^{-R^3})$. **194.** $\frac{m^3-n^3}{12\pi}[\cos\pi\beta^4-\cos\pi\alpha^4]$. **195.** $\frac{(\beta^3-\alpha^3)(n^2-m^2)+(n^3-m^3)(\beta^2-\alpha^2)}{12c^2}$.

196. $\frac{2a^3}{27}(3\pi-4)$. **197.** а) $\frac{a^3}{16}(8-\pi)$; б) $\frac{\pi a^3}{16}+a^3\left(\frac{1}{2}-\frac{7\sqrt{3}}{32}\right)$.

198. $\frac{4\sqrt{2}}{3}(a+b)\sqrt{ab}$. **199.** $\pi\sqrt{2}\,a^2$. **200.** 13. **201.** $\frac{1}{9}c^2[20-3\pi]$.

202. $\frac{1423}{9720}\pi c^2$. **203.** $\frac{1}{9}a^2(20-3\pi)$. **204.** $\frac{\pi a^2}{12}(2\sqrt{2}-1)$.

205. $\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(\frac{4c}{a}-3\right)^{3/2}-1\right]$. **206.** $\frac{1}{2}\pi R^2(\sqrt{2}-1)$.

207. $4\pi R^2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\pi R^2\sin\alpha$. **208.** $16a^2(\sqrt{2}-1)$.

209. $4\pi abR/\sqrt{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}$. **210.** $4a^2(\sqrt{2}-1)$.

211. $\frac{\pi a^2}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **212.** $8a\left[a\arcsin(a/b)-b+\sqrt{b^2-a^2}\right]$.

213. $4a^2$. **214.** $2a\left[(2a-b)\arcsin\sqrt{a/b}+\sqrt{a(b-a)}\right]$. **215.** $16a^2$.

216. $4\pi a^2$. **217.** $8\sqrt{2}\,ab$. **218.** $2\pi a^2$. **219.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\pi a^2$. **220.** $16a\sqrt{ap}$.

221. $\frac{24}{7}a\sqrt{2ap}$. **222.** $\frac{24}{5}a^2$. **223.** $\frac{\alpha c^2}{3}(3\sqrt{3}-1)$. **224.** $4ac$.

225. а) $\frac{1}{3}[(1+h^2)^{3/2}-h^3]$; б) $\frac{h^3}{3}+\frac{(\pi^2+16h^2)^{3/2}}{392}+$
$+\frac{h^2}{2}\left[\frac{\pi}{4}\ln\left(\frac{\pi}{4h}+\sqrt{\frac{\pi^2}{16h^2}+1}\right)\right]-\frac{h^2}{2}\sqrt{h^2+\frac{\pi^2}{16}}$.

226. $\pi(15+16\ln 2)$. **227.** $\frac{\pi^2}{8}ab+b^2$. **228.** $\frac{\pi a^2}{2}$. **229.** $\frac{\pi a^2}{2}$.

230. $\frac{133}{10}$. **231.** $V=16a^3(3\pi-4)/9$; $S=8\pi a^2$. **232.** $V=\frac{16}{3}a^3$;
$S=16a^2$. **233.** $V=\frac{\pi^2}{16}aR^2$; $S=\frac{\pi}{4}\left[R\sqrt{a^2+R^2}+\right.$
$\left.+a^2\ln\frac{R+\sqrt{a^2+R^2}}{a}\right]+\frac{R}{8}a\pi^2+\frac{aR\pi}{2}+\frac{\pi R^2}{4}$.

234. $V=\frac{7\pi\sqrt{2}\,a^3}{6}$; $S=\pi a^2(3+2\sqrt{2})$. **235.** $V=\frac{5}{6}\pi a^3$; $S=$
$=\pi a^2\sqrt{2}+\frac{2\pi a^2}{6}(5\sqrt{5}-1)$. **236.** $\frac{79}{12}$. **237.** $21\frac{1}{3}$.

238. $2\pi-4$. **239.** 8. **240.** 1620π. **241.** $\frac{52}{3}$. **242.** $\frac{a^3b}{8}\left(\pi/4+\frac{2}{3}\right)$.

243. $\frac{2\pi}{3}\rho_0R^2$. **244.** $\frac{52\pi}{3}$. **245.** $2\pi k(R-r)$, где k — коэффициент пропорциональности. **246.** $\frac{4}{3}a^2\rho_0$. **247.** $\frac{1}{2}ab^2\rho$; $\frac{1}{2}a^2b\rho$.

248. $\frac{7}{4}\pi a^3\rho$. **249.** $\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}\right)\rho$. **250.** $\frac{3R^2M}{2}$. **251.** $\frac{MR^2}{4}$.

252. $\frac{5MR^2}{4}$. **253.** $\frac{Mb^2}{4}$; $\frac{Ma^2}{4}$. **254.** $\frac{M}{36}(44-9\pi)$.

255. $\frac{47Ma^2}{14}$; $\frac{7}{10}Ma^2$. **256.** $\frac{36}{35}Mp^2$; $\frac{36}{35}Mp^2$.

257. $\frac{7}{16}Ma^2$. **258.** $\frac{3\pi-8}{48}Ma^2$. **259.** $\frac{6M}{\ln 2}$.

260. $k\left(\frac{a^5b}{5}+\frac{a^3b^3}{9}\right)$; $k\left(\frac{b^5a}{5}+\frac{a^3b^3}{9}\right)$,

где k — коэффициент пропорциональности. **261.** $\frac{\pi\rho 3^4}{8}$. **262.** (3/4; 0).

263. На оси симметрии сектора на расстоянии $\frac{4R}{3\alpha}\sin(\alpha/2)$ от вершины. **264.** (13/8; 39/10). **265.** (23/50; 2/5). **266.** (1; 12/5).

267. (1; $4/3\pi$). **268.** (2/5; 0). **269.** (45/28; 279/70).

270. ($49/3\pi$; $4b/3\pi$). **271.** (0; $4b/3\pi$). **272.** ($44/(3\pi-6)$; $22/(\pi-2)$).

273. ($7a/12$; $35b/36$). **274.** ($5a/8$; 0). **275.** ($256a/315\pi$; $256a/315\pi$).

276. ($\pi/2+8a/9\pi$; $5a/6$). **277.** (πa; $5a/6$). **278.** ($\pi a/8$; $\pi a/8$).

279. ($4\sqrt{3}\pi a/27$; $4\sqrt{3}\pi a/27$). **280.** ($3\pi a/64$; $3\pi b/64$).

281. $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\frac{a^3b}{c^3};\ \frac{1}{4}\frac{a^2b^2}{c^3}\right)$. **282.** $\left(\frac{64}{147\pi}\frac{a^5b}{c^5};\ \frac{33}{448}\frac{a^4b^2}{c^5}\right)$.

283. $\left(\frac{5a}{6};\ \frac{16a}{9\pi}\right)$. **284.** $\left(\frac{5a}{6};\ 0\right)$. **285.** $\left(\frac{\pi a}{4\sqrt{2}};\ \frac{a}{6}\left(1+\frac{5}{\sqrt{2}}\ln 3\right)\right)$.

286. $\left(\frac{133}{26};\ 0\right)$. **287.** $\left(\frac{\pi\sqrt{2}a}{8};\ \frac{a}{12}(3\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-2)\right)$.

288. $\frac{ab}{2}$; $\left(\frac{ab}{12};\ \frac{a^2}{6}\right)$. **289.** $\frac{21}{5}$. **290.** $\frac{33}{5}$. **291.** $\frac{1040}{3}$.

292. $\frac{2\gamma mMa}{R^2}$,

где γ — гравитационная постоянная. **293.** $\frac{ah^2}{6}$.

294. $\frac{1}{2}a^2\gamma_0\pi(2c-l\cos\alpha)$; $\frac{1}{2}a^2\gamma_0\pi(2c+l\cos\alpha)$.

295. $\gamma_0 a^3\left(\frac{1}{2}\pi-\frac{2}{3}\right)$. **296.** aH^2. **297.** $\frac{9}{2}$. **298.** $\frac{7}{36}$.

299. $\frac{\pi}{8}(1-\ln 2)$. **300.** $\frac{1}{2}(1-\sin 1)$. **301.** 0. **302.** $2\ln 3-\frac{4}{3}$.

303. $$\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}f(x,y,z)dy=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dz\int_0^{1-x-y}f(x,y,z)\,dx=$$
$$=\int_0^1 dy\int_0^{1-y}dx\int_0^{1-x-y}f(x,y,z)\,dz=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dx\int_0^{1-x-z}f(x,y,z)\,dy=$$
$$=\int_0^1 dz\int_0^{1-z}dy\int_0^{1-z-y}f(x,y,z)\,dx.$$

304. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dz \int\limits_z^x f(x, y, z)\, dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 dx \int\limits_0^y f(x, y, z)\, dz =$

$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y dz \int\limits_y^1 f(x, y, z)\, dx = \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dx \int\limits_z^x f(x, y, z)\, dy =$

$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^1 dy \int\limits_y^1 f(x, y, z)\, dx.$ **305.** $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{4-x} dz \int\limits_0^{4-x-z} f(x, y, z)\, dy =$

$= \int\limits_0^3 dy \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{4-x-y} f(x, y, z)\, dz + \int\limits_3^5 dy \int\limits_{-1}^{4-y} dx \int\limits_0^{4-x-y} f(x, y, z)\, dz =$

$= \int\limits_0^3 dz \int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{4-x-z} f(x, y, z)\, dy + \int\limits_3^5 dz \int\limits_{-1}^{4-z} dx \int\limits_0^{4-z-x} f(x, y, z)\, dy =$

$= \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-y} dz \int\limits_{-1}^1 f(x, y, z)\, dx + \int\limits_0^3 dy \int\limits_{3-y}^{5-y} dz \int\limits_{-1}^{4-y-z} f(x, y, z)\, dx +$

$+ \int\limits_3^5 dy \int\limits_0^{5-y} dz \int\limits_{-1}^{4-y-z} f(x, y, z)\, dx = \int\limits_0^3 dz \int\limits_0^{3-z} dy \int\limits_{-1}^1 f(x, y, z)\, dx +$

$+ \int\limits_0^3 dz \int\limits_{3-z}^{5-z} dy \int\limits_{-1}^{4-y-z} f(x, y, z)\, dx + \int\limits_3^5 dz \int\limits_0^{5-z} dy \int\limits_{-1}^{4-z-y} f(x, y, z)\, dx.$

306. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x, y, z)\, dz + \int\limits_0^1 dx \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x, y, z)\, dz =$

$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^{2-z} f(x, y, z)\, dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^1 dx \int\limits_z^{2-z} f(x, y, z)\, dy =$

$= \int\limits_0^1 dz \int\limits_z^{2-z} dy \int\limits_0^1 f(x, y, z)\, dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^y f(x, y, z)\, dz +$

$+ \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-y} f(x, y, z)\, dz = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y dz \int\limits_0^1 f(x, y, z)\, dx +$

$+ \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} dz \int\limits_0^1 f(x, y, z)\, dx.$

307. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{x+1} f(x, y, z)\, dz + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^{3-x} f(x, y, z)\, dz =$

$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1+x} dz \int\limits_0^3 f(x, y, z)\, dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{3-x} dz \int\limits_0^3 f(x, y, z)\, dy =$

$= \int\limits_0^3 dy \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^2 f(x, y, z)\, dx + \int\limits_0^3 dy \int\limits_1^2 dz \int\limits_{z-1}^{3-z} f(x, y, z)\, dx =$

$$=\int_0^3 dy\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,\ y,\ z)\,dz+\int_0^3 dy\int_1^2 dx\int_0^{3-x} f(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^2 dx\int_0^3 f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_1^2 dz\int_{z-1}^{3-z} dx\int_0^3 f(x,\ y,\ z)\,dy=$$

$$=\int_0^1 dz\int_0^3 dy\int_0^2 f(x,\ y,\ z)\,dx+\int_1^2 dz\int_0^3 dy\int_{z-1}^{3-z} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

308. $$\int_0^R dx\int_0^{x^2} dz\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^R dx\int_{x^2}^{R^2} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=$$

$$=\int_0^R dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\int_0^{x^2+y^2} f(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int_0^R dy\int_0^{y^2} dz\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx+\int_0^R dy\int_{y^2}^{R^2} dz\int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx=$$

$$=\int_0^{R^2} dz\int_0^{\sqrt{z}} dx\int_{\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+\int_0^{R^2} dz\int_{\sqrt{z}}^{R} dx\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=$$

$$=\int_0^{R^2} dz\int_0^{\sqrt{z}} dy\int_{\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx+\int_0^{R^2} dz\int_{\sqrt{z}}^{R} dy\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx.$$

309. $$\int_{-R}^{R} dy\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx\int_0^{R-\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dz=$$

$$=\int_{-R}^{R} dx\int_0^{R-\sqrt{R^2-x^2}} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+$$

$$+\int_{-R}^{R} dx\int_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R} dz\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-x^2-(R-z)^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy+$$

$$+\int_{-R}^{R} dx\int_{R-\sqrt{R^2-x^2}}^{R} dz\int_{\sqrt{R^2-x^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,\ y,\ z)\,dy=$$

$$=\int_{-R}^{R} dy\int_0^{R-\sqrt{R^2-y^2}} dz\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx+$$

$$+\int_{-R}^{R} dy\int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{R} dz\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{-\sqrt{R^2-y^2-(R-z)^2}} f(x,\ y,\ z)\,dx+$$

$$+\int_{-R}^{R} dy \int_{R-\sqrt{R^2-y^2}}^{R} dz \int_{\sqrt{R^2-y^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx =$$

$$=\int_{0}^{R} dz \int_{-R}^{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{-\sqrt{R^2-(z-R)^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(z-R)^2}} dx \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x, y, z)\, dy =$$

$$=\int_{0}^{R} dz \int_{-R}^{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-(R-z)^2}}^{\sqrt{R^2-(R-z)^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{-\sqrt{R^2-(z-R)^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx +$$

$$+\int_{0}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-(z-R)^2}}^{\sqrt{R^2-(z-R)^2}} dy \int_{\sqrt{R^2-(z-R)^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

310. $$\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz =$$

$$=\int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dz =$$

$$=\int_{0}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x, y, z)\, dy =$$

$$=\int_{-R}^{R} dx \int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} f(x, y, z)\, dy =$$

$$=\int_{-R}^{R} dy \int_{0}^{\sqrt{R^2-y^2}} dz \int_{-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-y^2-z^2}} f(x, y, z)\, dx.$$

В дальнейшем во всех примерах, где делается замена $x=x(u, v, w)$, $y=y(u, v, w)$, $z=z(u, v, w)$, через $f^*(u, v, w)$ обозначена функция $f^*(u, v, w)=f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$.

311. $$\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rf^*(r, \varphi, z)\,dr = \int_0^H dz \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_0^H f^*(r, \varphi, z)\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^R rf^*(r, \varphi, z)dr =$$
$$= \int_0^R rdr \int_0^H dz \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi = \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H f^*(r, \varphi, z)\,dz.$$

312. $$\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{kz} rf^*(r, \varphi, z)\,dr = \int_0^H dz \int_0^{kz} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{kH} rdr \int_{r/k}^H f^*(r, \varphi, z)\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \int_0^{kz} rf^*(r, \varphi, z)\,dr =$$
$$= \int_0^{kH} rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r/k}^H f^*(r, \varphi, z)\,dz = \int_0^{kH} rdr \int_{r/k}^H dz \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi.$$

313. $$\int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rf^*(r, \varphi, z)\,dr + \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \times$$
$$\times f^*(r, \varphi, z)\,dr + \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rf^*(r, \varphi, z)\,dr =$$
$$= \int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi +$$
$$+ \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^R dr \int_0^{2\pi} rf^*(r, \varphi, z)\,d\varphi +$$
$$+ \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi =$$
$$= \int_0^R rdr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, z)\,d\varphi =$$
$$= \int_0^R rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r, \varphi, z)\,dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R rdr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r, \varphi, z)\,dz =$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-2R}^{-\sqrt{3}R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-r^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr+$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{3}R}^{\sqrt{3}R} dz \int_0^{R} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr+$$

$$+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{3}R}^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr.$$

314. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} rdr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{a} dz \int_0^{z} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr+\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^{2a} dz \int_0^{\sqrt{az-z^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr=$$

$$=\int_0^{a} dz \int_0^{z} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r,\ \varphi,\ zd\varphi)+\int_a^{2a} dz \int_0^{\sqrt{az-z^2}} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{a} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{z} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr+\int_a^{2a} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{az-z^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr=$$

$$=\int_0^{a} rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz=\int_0^{a} rdr \int_r^{a+\sqrt{a^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,d\varphi.$$

315. $$\int_R^{2R} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr=\int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rdr \int_0^{2\pi} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}R} rdr \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz=$$

$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{2R} dz \int_0^{\sqrt{4R^2-z^2}} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}R} rdr \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_0^{2\pi} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,d\varphi=$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}R} rdr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz.$$

316. $$\int_0^{2R} rdr \int_{-\arccos(r/2R)}^{\arccos(r/2R)} d\varphi \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz=$$

$$=\int_0^{2R} rdr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} dz \int_{-\arccos(r/2R)}^{\arccos(r/2R)} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,d\varphi=$$

$$= \int_{-2R}^{2R} dz \int_{0}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r dr \int_{-\arccos(r/2R)}^{\arccos(r/2R)} f^*(r, \varphi, z)\, d\varphi =$$

$$= \int_{-2R}^{2R} dz \int_{-\pi/2}^{-\arccos\sqrt{4R^2-z^2}/2R} d\varphi \int_{0}^{2R\cos\varphi} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{-2R}^{2R} dz \int_{-\arccos\sqrt{4R^2-z^2}/2R}^{\arccos\sqrt{4R^2-z^2}/2R} d\varphi \int_{0}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^*(r, \varphi, z)\, dr =$$

$$= \int_{-2R}^{2R} dz \int_{\arccos\sqrt{4R^2-z^2}/2R}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{2R\cos\varphi} r f^*(r, \varphi, z)\, dr =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{2R\cos\varphi} r dr \int_{-\sqrt{4R^2-r^2}}^{\sqrt{4R^2-r^2}} f^*(r, \varphi, z)\, dz =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{-2R}^{2R\sin\varphi} dz \int_{0}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{-2R}^{2R\sin\varphi} dz \int_{0}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{2R\sin\varphi}^{-2R\sin\varphi} dz \int_{0}^{2R\cos\varphi} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{-2R\sin\varphi}^{2R\sin\varphi} dz \int_{0}^{2R\cos\varphi} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{-2R\sin\varphi}^{2R} dz \int_{0}^{\sqrt{4R^2-r^2}} r f^*(r, \varphi, z)\, dr +$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{2R\sin\varphi}^{2R} dz \int_{0}^{\sqrt{4R^2-z^2}} r f^*(r, \varphi, z)\, dr.$$

317. $$\int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_{0}^{4a\sin\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{2a} r^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{a}^{4a} r^2 dr \int_{\arcsin(r/4a)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi\, d\psi \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{4a\sin\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{4a\sin\psi} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2a} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_{2a}^{4a} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(r/4a)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi =$$

$$= \int_0^{a} r^2 dr \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_{2a}^{4a} r^2 dr \int_{\arcsin(r/4a)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi.$$

318. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_{R/3\sin\psi}^{R} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R/3}^{R} r^2 dr \int_{\arcsin(R/3r)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi =$$

$$= \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R/3\sin\psi}^{R} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_{\arcsin(1/3)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_{R/3\sin\psi}^{R} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi =$$

$$= \int_{R/3}^{R} r^2 dr \int_{\arcsin(R/3r)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi =$$

$$= \int_{R/3}^{R} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arcsin(R/3r)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi.$$

319. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\operatorname{arctg}(H/R)} \cos\psi d\psi \int_0^{R/\cos\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\operatorname{arctg}(H/R)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{H/\sin\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R} r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_R^{H} r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_H^{\sqrt{R^2+H^2}} r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg}(H/R)} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{R/\cos\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr +$$

$$+ \int_{\operatorname{arctg}(H/R)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{H/\sin\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\, dr =$$

$$= \int_0^{\operatorname{arctg}(H/R)} \cos\psi d\psi \int_0^{R/\cos\psi} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_{\operatorname{arctg}(H/R)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{H/\sin\psi} r^2 dr \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_R^H r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi +$$

$$+ \int_H^{\sqrt{H^2+R^2}} r^2 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos\psi f^*(r, \varphi, \psi)\, d\psi =$$

$$= \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_R^H r^2 dr \int_{\arccos(R/r)}^{\pi/2} \cos\psi d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi +$$

$$+ \int_H^{\sqrt{H^2+R^2}} r^2\, dr \int_{\arccos(R/r)}^{\arcsin(H/r)} \cos\psi\, d\psi \int_0^{2\pi} f^*(r, \varphi, \psi)\, d\varphi.$$

320. $\displaystyle\int_0^4 dz \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{(4-z)/4[(\cos\varphi)/2+(\sin\varphi)/3)]} rf^*(r, \varphi, z)\, dr.$

321. $\displaystyle\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{z}} rf^*(r, \varphi, z)\, dr.$ **322.** $\displaystyle\int_0^1 dz \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{1/\cos\varphi} rf^*(r, \varphi, z)\, dr +$

$$+ \int_0^1 dz \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{1/\sin\varphi} rf^*(r, \varphi, z)\, dr.$$

323. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2R\sin\varphi} r\, dr \int_{-\sqrt{2rR\sin\varphi-r^2}}^{\sqrt{2rR\sin\varphi-r^2}} f^*(r, \varphi, z)\, dz +$

$$+ \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R\cos\varphi} r\, dr \int_{-\sqrt{2rR\cos\varphi-r^2}}^{\sqrt{2rR\cos\varphi-r^2}} f^*(r, \varphi, z)\, dz.$$

324. $$\int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz +$$

$$+ \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{a} r\,dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz +$$

$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \int_0^{(a^2-r^2)/a} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz.$$

325. $$\int_0^6 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{2z/(3+\cos^2\varphi)}}^{\sqrt{(48-z^2)/(3+\cos^2\varphi)}} r f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr.$$

326. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} r\,dr \int_{-\sqrt{r^2+1}}^{\sqrt{r^2+1}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{3}}^{5/\sqrt{3}} r\,dr \int_{r\sqrt{3}-5}^{5-r\sqrt{3}} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz.$$

327. $$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_0^{12/(6\cos\varphi\cos\psi+4\sin\varphi\cos\psi+3\sin\psi)} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

328. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_{R\sin\psi}^{4R\sin\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

329. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/6} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2R\sin\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_0^{R} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

330. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_R^{2R\sin\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

331. $$\int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2R\sin\varphi\cos\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr +$$

$$+ \int_0^{\pi} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2R\sin\varphi\cos\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

332. $$\int_0^{\pi} d\varphi \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2R\sin\varphi\cos\psi} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr.$$

333. $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_{4\sin\psi-\sqrt{16\sin^2\psi-8}}^{4\sin\psi+\sqrt{16\sin^2\psi-8}} r^2 f^*(r,\ \varphi,\ \psi)\,dr$$

334. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-x}^{x} dy \int\limits_0^{4-x^2} f(x, y, z)\,dz.$ **335.** $\int\limits_{-1}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{2x+2}}^{\sqrt{2x+2}} dy \int\limits_0^{4-x} f(x, y, z)\,dz$

336. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-(x-2)^2}} dy \int\limits_0^{(4-x^2-y^2)/4} f(x, y, z)\,dz +$

$+\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-\sqrt{4-(x-2)^2}}^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} f(x, y, z)\,dz.$

337. $\int\limits_{-2}^{0} dx \int\limits_{-2-x}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_0^{4-x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz + \int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{2-x} dy \times$

$\times \int\limits_0^{4-x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz.$ При замене $x=(u+v)/\sqrt{2}$, $y=$

$=(u-v)/\sqrt{2}$ имеем $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} du \int\limits_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} dv \int\limits_0^{4-u^2-v^2} f^*(u, v, z)\,dz.$

338. При замене $x=x$, $y=r\cos\varphi$, $z=r\sin\varphi$ имеем $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \times$

$\times \int\limits_1^4 r\,dr \int\limits_{(4+r^2)/5}^{r} f(r, \varphi, x)\,dx$ или $\int\limits_1^4 dx \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_x^{\sqrt{5x-4}} rf(r, \varphi, x)\,dr.$

339. $\int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} r\,dr \int\limits_0^{4r^2/a} f^*(r, \varphi, z)\,dz.$

340. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{(1-x)/4(1+x)} dy \int\limits_0^{4xy} f(x, y, z)\,dz +$

$+\int\limits_0^1 dx \int\limits_{(1-x)/4(1+x)}^{(1-x)/4} dy \int\limits_0^{1-x-4y} f(x, y, z)\,dz.$

341. $\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{3/\sqrt{1+\sin^2\varphi}} r\,dr \int\limits_0^{3-r\sqrt{1+\sin^2\varphi}} f^*(r, \varphi, z)\,dz.$

При замене $x=3r\cos\varphi$, $y=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\,r\sin\varphi$ имеем

$\dfrac{9}{\sqrt{2}} \int\limits_{\operatorname{arctg}2}^{\pi+\operatorname{arctg}2} d\varphi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_0^{3-3r} f^*(r, \varphi, z)\,dz.$

342. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dx \int\limits_{y^2}^{4} f(x, y, z)\,dz.$

343. $$\int_0^{1/3} dx \int_{-x}^{x} dy \int_0^{x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz + \int_{1/3}^{1} dx \int_{2x-1}^{x} dy \int_0^{x^2-y^2} f(x, y, z)\,dz.$$

344. $$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_a^b r\,dr \int_{-r\sqrt{\cos 2\varphi}}^{r\sqrt{\cos 2\varphi}} f^*(r, \varphi, z)\,dz.$$

345. $$\int_{-1}^{0} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\sqrt{3}z}^{\sqrt{2+z^2}} rf^*(r, \varphi, z)dr + \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{3}z}^{\sqrt{2+z^2}} rf^*(r, \varphi, z)\,dr.$$

346. При замене $y = r\sin\psi$, $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $z = r\cos\psi\sin\varphi$ имеем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/3} \cos\psi\,d\psi \int_0^{2a\sin\psi} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\,dr.$$

347. $$\int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \int_{-\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}}^{\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}} f^*(r, \varphi, z)\,dz +$$

$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^a r\,dr \int_{-\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}}^{\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}} f^*(r, \varphi, z)\,dz +$$

$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r\,dr \int_{-\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}}^{\sqrt{2ar\cos\varphi - r^2}} f^*(r, \varphi, z)\,dz.$$

348. а) $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr \int_{2r}^{1+r} f^*(r, \varphi, z)\,dz;$$

б) $$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\operatorname{arctg} 2}^{\pi/2} \cos\psi\,d\psi \int_{1/(\sin\psi + \cos\psi)}^{1/(\sin\psi - \cos\psi)} r^2 f^*(r, \varphi, \psi)\,dr,$$

или

$$\int_{2/3}^{1} dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1-z}^{z/2} rf^*(r, \varphi, z)\,dr + \int_1^2 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z-1}^{z/2} rf^*(r, \varphi, z)\,dr.$$

349. $$\int_{-R}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} f(x, y, z)\,dy, \text{ или}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r\,dr \int_{-\sqrt{R^2-r^2\cos\varphi}}^{\sqrt{R^2-r^2\cos\varphi}} f^*(r, \varphi, y)\,dy.$$

350. $$\int_{-\sqrt{3}R}^{0} dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3R^2-x^2}} rf^*(r, \varphi, x)\,dr +$$

$$+ \int_0^{\sqrt{3}R/2} dx \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\sqrt{Rx/2}}^{\sqrt{3R^2-x^2}} rf^*(r, \varphi, x)\,dr.$$

351. $\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{-a\cos\varphi} r\,dr \int\limits_{0}^{(r+a\cos\varphi)/\cos\varphi} f^*(r,\ \varphi,\ z)\,dz$, или

$\int\limits_{0}^{a} dz \int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{-(a-z)\cos\varphi} rf^*(r,\ \varphi,\ z)\,dr.$

352. $\int\limits_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dy \int\limits_{0}^{(a-y^2)/2} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,\ y,\ z)\,dz +$

$+ \int\limits_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dy \int\limits_{(a-y^2)/2}^{a-y^2} dx \int\limits_{0}^{a-x-y^2} f(x,\ y,\ z)\,dz.$

353. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{a} r\,dr \int\limits_{0}^{(2a^2-r^2)/a} f^*(r, \varphi,\ z)\,dz +$

$+ \int\limits_{a}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a}^{4a/3} r\,dr \int\limits_{0}^{4a-3r} f^*(r, \varphi,\ z)\,dz.$

354. $\frac{16\pi}{3}$. **355.** $-\frac{1}{3}$. **356.** $\frac{a^3h}{6}$. **357.** $\frac{9a^6}{1280}$. **358.** $\frac{\pi R^5}{5}(3-\sqrt{2})$.

359. $\frac{\pi R^2h^2}{4}$. **360.** $\frac{\pi}{4}\,\frac{abc^{m+1}}{m+3}$. **361.** $\frac{\pi}{4}abc^2$.

362. $\frac{4\pi c^3}{9ab}(6\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})-7)$. **363.** $\frac{51}{64}\pi R^5$.

364. $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$. **365.** $\frac{1}{32}(a^2-a_1^2)(b^2-b_1^2)(c^2-c_1^2)$.

366. $\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$.

367. $\frac{2}{3}(b\sqrt{b}-a\sqrt{a})\,\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{\sqrt{d}}\ln\frac{n}{m}$.

368. $\frac{29\pi\sqrt{2}\,a^3}{192}$. **369.** $\frac{\pi\sqrt{2}\,a^3}{12}(3+2\sqrt{5})$. **370.** $\frac{9\pi a^3}{2}(2-\sqrt{2})$.

371. $\frac{4}{3}\pi R^3(\cos^4\alpha-\cos^4\beta)$. **372.** $\frac{5\pi R^3}{12}$. **373.** $\frac{1}{3}\pi a^3$. **374.** $\frac{a^3}{6}$.

375. $\frac{1}{360}a^3$. **376.** $\frac{\pi a^3}{60}$. **377.** $\frac{4\pi a^3}{21}$. **378.** $\frac{\pi a^3}{168}$. **379.** $\frac{32}{315}a^3$.

380. $\frac{5\sqrt{2}}{24}\pi a^3$. **381.** $\frac{1}{3}a^3$. **382.** $\frac{\pi a^3}{12}$. **383.** $\frac{\pi}{3}(1-e^{-1})a^3$.

384. $\frac{8}{3}a^3$. **385.** $\frac{\pi^2a^3}{6}$. **386.** $\frac{2}{3}\pi a^3$. **387.** $\frac{2\pi^2a^3}{3\sqrt{3}}$. **388.** $\frac{2\pi\sqrt{3}\,a^3}{27}$.

389. $\frac{a^3}{60}$. **390.** $\frac{3\pi}{5}$. **391.** $\frac{3\pi ab}{5p}\sqrt[3]{\frac{k^8}{p^2}}$. **392.** $\frac{4}{9}\pi^2a^3$.

393. $\frac{\pi^2a^3}{12}$. **394.** $\frac{1}{360}\,\frac{a^4b^4c^4}{h^9}$. **395.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}\,\frac{a^2bc}{k}$. **396.** $\frac{4}{3}\,\frac{abc^2}{k}$.

397. $\frac{\pi^2}{3}\frac{abc^3}{k^2}$. **398.** $\frac{\pi}{80}\frac{abc^2}{h}$. **399.** $\frac{1}{3}\pi abc\left(\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi^3}\right)$.

400. $\frac{1}{3k}abc$. **401.** $\frac{1}{18}abc$. **402.** $\frac{\pi}{64}abc\left(\frac{a}{h}+\frac{b}{k}\right)\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

403. $\frac{\pi}{64}abc\frac{\left(\frac{a}{h}\right)^4}{\frac{a}{h}+\frac{b}{k}}$. **404.** $\frac{\pi^2\sqrt{3}}{27}\frac{abc^2}{p}\left(\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}\right)$.

405. $\frac{4\pi\sqrt{3}}{27}\frac{abc^2}{p}\left[\frac{ac}{hk}+\left(\frac{a^2}{h^2}-\frac{b^2}{k^2}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

406. $\frac{49}{864}a^3$. **407.** $\frac{1}{4}(b^4-a^4)\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **408.** $\frac{5\pi^2}{8}a^3$.

409. $\frac{\pi}{4}a^3$. **410.** $\frac{\pi^2}{64}(a+b)(5a^2-2ab+5b^2)$. **411.** πabc^2.

412. $\frac{4\pi}{35}abc$. **413.** $\frac{11\pi}{3}$. **414.** 54π. **415.** $\frac{\pi}{2}$. **416.** $\frac{4}{3}$.

417. $\frac{17^{3/2}-1}{2}$. **418.** $\frac{92\pi}{3}$. **419.** $\frac{a^4}{12}$. **420.** $\frac{31}{24}\pi a^5$. **421.** a^5.

422. $\frac{2}{3}\pi a^4$. **423.** $12\pi\rho_0 a^3$. **424.** $\frac{HR^4}{10}$. **425.** $\frac{\pi R^2 H}{6}(3R^2+2H^2)$.

426. $\frac{4\pi\rho a^4}{3}(\cos^6\alpha-\cos^6\beta)$. **427.** $\frac{1}{24}\rho$. **428.** $M=abc\rho$; $\mathcal{J}_{OX}=$
$=\frac{M}{3}(b^2+c^2)$; $\mathcal{J}_{OY}=\frac{M}{3}(a^2+c^2)$; $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{M}{3}(a^2+b^2)$.

429. $\mathcal{J}_{OX}=\frac{2^8\cdot 101}{63}\rho$; $\mathcal{J}_{OY}=\frac{2^{10}\cdot 41}{315}\rho$, $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{2^9\cdot 41}{315}\rho$.

430. $M=\frac{4}{3}\pi abc\rho$; $\mathcal{J}_{OX}=\frac{1}{5}M(b^2+c^2)$; $\mathcal{J}_{OY}=\frac{1}{5}M(a^2+c^2)$;
$\mathcal{J}_{OZ}=\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$. **431.** $M=\frac{8\sqrt{2}\,a^3}{15}\rho$; $\mathcal{J}_{OX}=\frac{8a^2}{21}M$;
$\mathcal{J}_{OY}=\frac{80}{3}a^2M$; $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{4}{9}a^2M$. **432.** $\mathcal{J}_{OX}=\frac{5\pi\rho}{6}$.

433. $\mathcal{J}_{OZ}=4\pi\rho$. **434.** $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{\pi c^5\rho}{6}$. **435.** $\frac{abc\rho(a^2+b^2)}{60}$.

436. $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{4abc\pi\rho}{715}(a^2+b^2)$. **437.** $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{R^5\rho}{15}(1-\sin\alpha)^2(2+\sin\alpha)$.

438. $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{2\pi\rho}{15}(6\sqrt{3}-10)$. **439.** $\frac{9\pi a^5\rho}{140}$.

440. $M=\frac{a^3\rho}{8}$; $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{2\sqrt[3]{9}\,\Gamma^3\left(\frac{1}{3}\right)}{405}$. **441.** $M=2\pi^2a^2b\rho$; $\mathcal{J}_{OX}=\mathcal{J}_{OY}=$
$=\frac{b}{8a}(4a^2+5b^2)$; $\mathcal{J}_{OZ}=\frac{a}{4b}(4a^2+3b^2)$. **442.** $M=\frac{\pi H^3k^2}{3}\rho$;

$\mathcal{J}_{XY}=\frac{\pi h^5k^2}{5}=\frac{3h^2}{5}M$; $\mathcal{J}_{XZ}=\frac{3h^2k^2}{20}M$. **443.** $M=\frac{\pi\rho a^3}{2}$; $\mathcal{J}_{XZ}=\mathcal{J}_{XY}=\frac{Ma^2}{6}$. **444.** $M=\frac{1}{6}abc\rho$; $\mathcal{J}_{YZ}=\frac{Ma^2}{10}$.

445. $M=\frac{a^3\sqrt{\pi}\,\rho}{648}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$; $\mathcal{J}_{XY}=\frac{16Ma^2}{627}$.

446. $M=\pi\frac{b^3-a^3}{3}(2-\sqrt{2})\rho$; $\mathcal{J}_{XY}=\frac{8-5\sqrt{2}}{30}(b^5-a^5)\rho$.

447. $M=\frac{5\pi a^3\rho}{4}$; $\mathcal{J}_{XY}=\frac{51}{40}a^2M$. **448.** $M=\frac{\pi R^2H}{3}\rho$; $\mathcal{J}=\frac{MR^2}{10}$.

449. $\mathcal{J}=\frac{MR^2}{20}$. **450.** $M=\frac{2\pi k}{3}$, $\mathcal{J}=2M$, где k—коэффициент пропорциональности. **451.** $M=\pi HRk$, $\mathcal{J}=\frac{R^2M}{6}$, где k—коэффициент пропорциональности. **452.** $x_0=\frac{4}{3}$; $y_0=0$; $z_0=\frac{10}{9}$. **453.** $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{a}{3}$. **454.** $x_0=y_0=\frac{2}{5}$, $z_0=\frac{7}{30}$.

455. $x_0=y_0=z_0=\frac{R}{2}$. **456.** $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{2}{3}H$. **457.** $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{7}{30}c$. **458.** $x_0=\frac{1}{4}a$, $y_0=\frac{1}{4}b$, $z_0=\frac{1}{4}c$. **459.** $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{7}{20}$. **460.** $x_0=\frac{21}{128}a$, $y_0=\frac{21}{128}b$, $z_0=\frac{21}{128}c$.

461. $x_0=\frac{3}{5}a$, $y_0=\frac{3}{5}b$, $z_0=\frac{9}{32}\sqrt{ab}$. **462.** $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{1}{2}a$.

463. $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3}{8}R(1+\cos\alpha)$. **464.** $x_0=y_0=z_0=\frac{9\pi a}{448}$.

465. $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{9a}{20}$. **466.** $x_0=y_0=\frac{5a}{12}$, $z_0=\frac{7}{12}a$.

467. $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{5}{83}(6\sqrt{3}+5)a$. **468.** $M=\frac{45\rho}{16}$, $x_0=\frac{124}{675}(11\sqrt{2}-8)$, $y_0=\frac{248}{675}(\sqrt{2}+4)$, $z_0=\frac{21(15+16\ln 2)\ln 2}{90}$.

469. $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{5(6\sqrt{3}+5)}{83}a$. **470.** На перпендикуляре, опущенном из центра шара на основание сегмента на расстоянии $r_0^2/2h$ от центра шара. **471.** $x_0=y_0=0$; $z_0=\frac{3H}{4}$.

472. а) $M=\frac{4}{3}\pi ka^2$, $x_0=y_0=0$, $z_0=\frac{4}{5}a$; б) $M=2\pi ka$, $x_0=y_0=0$, где k—коэффициент пропорциональности. $z_0=\frac{a}{2}$.

473. $F_z = 2\pi\rho\left(R+h-\sqrt{R^2-h^2}\right)$. **474.** $F_z = \frac{2\pi h\rho}{l}(l-h)$. **475.** $\frac{n}{3}$.

476. $\frac{2}{(n-1)!\,(2n+1)}$. **477.** $\frac{n(n-1)}{8}$. **480.** $\frac{\pi^{n/2}a^n}{n\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

483. $\frac{16}{15}\pi^2\rho_0^2R^5$. **484.** $\frac{2a^{n-1}(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$. **485.** Сходится при $1<p<2$, расходится при $p\in(-\infty,\ 1]\cup[2,\ +\infty)$. **486.** Сходится при $p<2$, расходится при $p\geqslant 2$. **487.** Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$, расходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\leqslant 1$. **488.** Сходится при $p>3$, расходится при $p\leqslant 3$. **489.** Сходится при $p>3/2$, расходится при $p\leqslant 3/2$. **490.** Сходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}<1$, расходится при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geqslant 1$. **491.** Сходится при $p<2$, расходится при $p\geqslant 2$. **492.** Сходится при $-3/2<p<3$, расходится при $p\in(-\infty,\ -3/2]\cup[3,\ +\infty)$. **493.** Расходится. **494.** 0. **495.** Расходится. **496.** 0. **497.** $2\sqrt{\pi}$. **498.** Расходится. **499.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2$. **500.** Расходится. **501.** $2\pi\left(\sqrt{2n}-\sqrt{2m}\right)$.

502. Расходится. **503.** π^2. Указание. Использовать, что $\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\alpha$. **504.** 0. **505.** Расходится. **506.** $\frac{8\pi}{15}$.

507. Расходится. **508.** $\frac{\sqrt{\pi}}{3}a^{3/2}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. **509.** Расходится.

510. $\frac{\sqrt{\pi}}{16}\Gamma^3\left(\frac{1}{4}\right)$. **511.** $\frac{a^2\pi}{8}\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)$. **512.** $\left(\frac{e}{2}-1\right)$. **513.** 0.

514. Расходится. **515.** $2\pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$.

ГЛАВА II
КРИВОЛИНЕЙНЫЙ И ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО РОДА

§ 1. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Определение. Пусть $L=\overset{\smile}{AB}$ — кусочно-гладкая кривая в R^3 с концевыми точками A и B. Набор несовпадающих точек этой кривой $a_0, a_1, \ldots, a_n$, занумерованных в порядке следования от A к $B: a_0=A,\ a_n=B$ или от B к $A: a_0=B,\ a_n=A$, называется разбиением кривой L и обозначается T.

Пусть функция $f: L\to R$ определена и ограничена на кусочно-гладкой кривой $L\subset R^3$ и $T: a_0, a_1, \ldots, a_n$ — разбиение L. Введем обозначения: $|\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}|$ — длина дуги $\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}$.

$$M_i=\sup_{x\in(\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i})} f(x),\quad m_i=\inf_{x\in\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}} f(x),$$

$$S(f, T)=\sum_{i=1}^{n} M_i|\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}| \text{ — верхняя сумма Дарбу;}$$

$$s(f, T)=\sum_{i=1}^{n} m_i|\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}| \text{ — нижняя сумма Дарбу;}$$

$$\overline{\mathcal{J}}(f, L)=\inf_T S(f, T) \text{ — верхний интеграл Дарбу;}$$

$$\underline{\mathcal{J}}(f, L)=\sup_T s(f, T) \text{ — нижний интеграл Дарбу.}$$

Определение. Функция $f: L\to R$, определенная и ограниченная на кусочно-гладкой кривой $L\subset R^3$, интегрируема по кривой L, если $\overline{\mathcal{J}}(f, L)=\underline{\mathcal{J}}(f, L)$. В этом случае общее значение интегралов Дарбу называется криволинейным интегралом первого рода от функции f по кривой $L=\overset{\smile}{AB}$ и обозначается $\int\limits_L f\,ds$, или $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} f\,ds$.

Обратим внимание на то, что поскольку в определении сумм Дарбу используются величины длин дуг $\overset{\smile}{a_{i-1}, a_i}$, то эти суммы не зависят от того, в каком порядке следования нумеровались точки кривой $L=\overset{\smile}{AB}$ при ее разбиении — от A к B или от B к A. Из этого следует, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от порядка следования точек разбиения, или, как принято говорить, не зависит от ориентации кривой L.

Как видно, определение криволинейного интеграла первого рода дословно повторяет определение интеграла Римана функции

f по отрезку $[a, b] \subset R$. Оно является переносом определения интеграла с прямолинейного отрезка на криволинейный. Единственным различием интегралов $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f\,dx$ и $\int_L f\,ds = \int_{\overset{\smile}{AB}} f\,ds$ является «направленность» интеграла $\int_{[a,b]} f\,dx$, т. е. равенство $\int_{[a,b]} f\,dx = -\int_{[b,a]} f\,dx$ и «ненаправленность» интеграла $\int_{\overset{\smile}{AB}} f\,ds$, т. е. равенство $\int_{\overset{\smile}{AB}} f\,ds = \int_{\overset{\smile}{BA}} f\,ds$.

Основные свойства криволинейного интеграла первого рода

1. Если функция f непрерывна вдоль кривой L, т. е. бесконечно малому сдвигу по L отвечает бесконечно малое приращение функции f, то функция f интегрируема по L.

Заметим, что из непрерывности функции f в области D следует, что f непрерывна вдоль L, $L \subset D$, но не наоборот.

2. Если функции f_1 и f_2 интегрируемы по кривой L, то функции $g = f_1 \cdot f_2$ и $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ при любых числах α_1, α_2 интегрируемы по L, причем

$$\int_L f\,ds = \int_L (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\,ds = \alpha_1 \int_L f_1\,ds + \alpha_2 \int_L f_2\,ds$$

(линейность интеграла).

3. Назовем две кривые L_1 и L_2 неперекрывающимися, если их пересечение содержит конечное множество точек (может быть, и пустое). Если функция f интегрируема по двум неперекрывающимся кривым L_1 и L_2, то f интегрируема по $L = L_1 \cup L_2$ и $\int_L f\,ds = \int_{L_1} f\,ds + \int_{L_2} f\,ds$ (аддитивность интеграла).

4. $\int_L 1 \cdot ds = |L|$,

где $|L|$ — длина кривой L.

5. Если функция f интегрируема по кривой L, то функция $|f|$ интегрируема по L и $\left|\int_L f\,ds\right| \leqslant \int_L |f|\,ds$.

6. Если функции f и g интегрируемы по кривой L и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in L$, то $\int_L f\,ds \leqslant \int_L g\,ds$ (монотонность интеграла).

7. Теорема о среднем. Если функции f и g интегрируемы по кривой L, $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in L$,

$$a = \inf_{x \in L} f(x), \quad b = \sup_{x \in L} f(x),$$

то

$$a\int_L g\,ds \leqslant \int_L gf\,ds \leqslant b\int_L g\,ds,$$

в частности, $a|L| \leqslant \int_L f\,ds \leqslant b|L|$.

Если к тому же функция f непрерывна вдоль кривой L, то существует точка $x_0 \in L$, такая, что

$$\int_L gf\,ds = f(x_0)\int_L g\,ds.$$

8. Если L — простая гладкая кривая, т. е.

$L = \{r = (x,\ y,\ z),\ r = r(t) = \{x(t),\ y(t),\ z(t)\},\ t \in [a,\ b]\}$,

$r \in C^1[a,\ b],\ |r'(t)| \neq 0$

и функция f непрерывна вдоль L, то

$$\int_L f\,ds = \int_L f(x,\ y,\ z)\,ds = \int_a^b f(x(t),\ y(t),\ z(t))\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt.$$

Пример. Вычислим криволинейный интеграл первого рода $\int_L y\,ds$, где $L = \overset{\smile}{AB}$ — дуга кривой $y = x^2 + |x^2 - x|$, $A = (-1,\ 3)$, $B = (2,\ 6)$ (см. рис. 38).

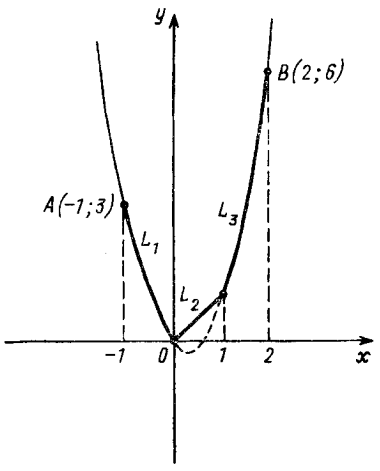

Рис. 38

Решение. Дуга L — кусочно-гладкая. Представим ее как объединение неперекрывающихся гладких кусков: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$

$L_1 = \{(x,\ y) : y = 2x^2 - x,\ x \in [-1,\ 0]\}$,

$$L_2=\{(x,\ y):y=x,\ x\in[0,\ 1]\},$$

$$L_3=\{(x,\ y):y=2x^2-x,\ x\in[1,\ 2]\}.$$

По свойству 3 имеем, что

$$\int\limits_L y\,ds=\int\limits_{L_1} y\,ds+\int\limits_{L_2} y\,ds+\int\limits_{L_3} y\,ds.$$

Интегралы по гладким кускам L_1, L_2, L_3 вычисляются на основании свойства 8. Соответственно имеем, что

$$\int\limits_{L_1} y\,ds=\int\limits_{-1}^{0}(2x^2-x)\sqrt{1+(4x-1)^2}\,dx=\frac{1}{32}\int\limits_{-5}^{-1}(t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{32\cdot 8}\left[(2t^3-3)\sqrt{t^2+1}+3\ln\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)\right]\Big|_{-5}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{2^8}\left[-5\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}-1)+247\sqrt{26}-3\ln(\sqrt{26}-5)\right];$$

$$\int\limits_{L_2} y\,ds=\int\limits_0^1 x\sqrt{1+1}\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\int\limits_{L_3} y\,ds=\int\limits_1^2(2x^2-x)\sqrt{1+(4x-1)^2}\,dx=\frac{4}{32}\int\limits_3^7(t^2-1)\sqrt{t^2+1}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2^8}\left[683\sqrt{50}+3\ln(7+\sqrt{50})-51\sqrt{10}-3\ln(3+\sqrt{10})\right].$$

Откуда получаем, что

$$\int\limits_L y\,ds=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2^8}\left[247\sqrt{26}+3410\sqrt{2}-51\sqrt{10}\right]+$$

$$+3\ln\left[(\sqrt{26}+5)(7+5\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)(\sqrt{10}-3)\right].$$

Формула вычисления криволинейного интеграла первого рода и другие формулы, которые появятся позже, требуют представления кривой в параметрическом виде (параметризации кривой). Рассмотрим некоторые наиболее часто употребляемые методы параметризации.

Пусть уравнение кривой $F(x,\ y)=0$ имеет явную форму $y=y(x)$, $x\in[a,\ b]$ или $x=x(y)$, $y\in[c,\ d]$ (или аналитически приводится к такой форме, т. е. разрешается относительно одного из переменных). Тогда в качестве параметра обычно берется аргумент полученной явной функции. В первом случае $y=y(x)$, $x\in[a,\ b]$ получаем параметрическое представление кривой: $L=\{(x,\ y):x=x,\ y=y(x),\ x\in[a,\ b]\}$, во втором — параметрическое представление: $L=\{(x,\ y):x=x(y),\ y=y,\ y\in[c,\ d]\}$.

Пусть функция $F(x, y)$ представляет собой линейную комбинацию двух однородных алгебраических функций от x и y. Тогда, обозначая через t отношение y/x, получаем параметрическое представление координат x и y кривой L как алгебраических функций $x=x(t)$, $y=y(t)$. При этом необходимо только проверить, что не потеряна точка вида $(0, y_0)$, принадлежащая L. Иногда эта точка соответствует несобственному значению параметра: $0=\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$, $y_0=\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$ $(t\to+\infty,\ t\to-\infty)$.

Пусть уравнение $F(x, y)=0$ после перехода к полярным координатам $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ или обобщенным полярным координатам $x=ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y=br\sin^{\alpha}\varphi$ разрешается относительно r, т. е. приводится к явной форме $r=r(\varphi)$, $\varphi_0\leqslant\varphi\leqslant\varphi_1$. Тогда, принимая в качестве параметра переменную φ и подставляя выражение r через φ в формулы $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, либо $x=ar\cos^{\alpha}\varphi$, $y=br\sin^2\varphi$, получаем параметрическое представление кривой $L=\{(x, y): x=r(\varphi)\cos\varphi,\ y=r(\varphi)\sin\varphi,\ \varphi\in[\varphi_0, \varphi_1]\}$, или $L=\{x, y): x=ar(\varphi)\cos^{\alpha}\varphi,\ y=br\sin^{\alpha}\varphi,\ \varphi\in[\varphi_0, \varphi_1]\}$.

Таким же образом получается параметрическое представление кривой L, заданной в совмещенной декартовой системе координат, если кривая L задана на плоскости в полярной системе координат.

Насколько полученная параметризация кривой L удобна для вычислений, зависит от конкретного вида функции $F(x, y)$.

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной уравнением $x^3+2x^2+y^2=3$ и условием $y\geqslant 0$.

Решение. Условие $y\geqslant 0$ дает возможность явно выразить $y(x): y=\sqrt{3-x^3-2x^2}$. Многочлен $3-x^3-2x^2$ убывает на $(-\infty, -3/4)$, в точке $(-3/4)$ принимает значение $147/64>0$, затем возрастает на $(-3/4, 0)$ и убывает на $(0, +\infty)$. Поскольку этот многочлен обращается в нуль при $x=1$, то функция $y(x)$ определена для всех $x\in(-\infty, 1]$. Итак, $L=\{(x, y): x=x,\ y=\sqrt{3-x^3-2x^2},\ x\in(-\infty, 1]\}$.

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной уравнением $\ln x-y+\sin y=0$.

Решение. Уравнение $\ln x-y+\sin y=0$ аналитически разрешимо относительно $x: x=e^{y-\sin y}$. Функция $\varphi(y)=e^{y-\sin y}$ представляет собой биективное отображение $R\to R$. Отсюда получаем, что $L=\{(x, y): x=e^{y-\sin y},\ y=y,\ y\in R\}$.

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной уравнением $x(x-y)^2+y=0$ и условием $x\geqslant 0$.

Решение. Функция $F(x, y)=x(x-y)^2+y$ является суммой двух однородных многочленов от x и y — третьей и первой степени. Поскольку равенство $x(x-y)^2+y=0$ и условие $x\geqslant 0$ показывают, что значения y неположительны, то обозначим через t отношение $-y/x$. Тогда переменные x и t связаны равенством $x^3(1+t)^2=xt$.

Учитывая условие $x \geqslant 0$, отсюда получаем, что

$$L = \{(x,\ y) : x = \sqrt{t}/(1+t),\ y = -t\sqrt{t}/(1+t),\ t \geqslant 0\}.$$

Точка (0, 0) соответствует значению $t=0$.

Пример. Записать параметрическое представление кривой L, заданной уравнением $x^4-y^4-6x^2y=0$ и условиями $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$.

Решение. Функция $F(x,\ y)=x^4-y^4-6x^2y$ является суммой двух однородных многочленов от x и y — четвертой и третьей степеней. Обозначая через t отношение y/x, получаем связывающее x и t равенство: $x^4(1-t^4)=6x^3t$, откуда следует, что $x(t)=6t/(1-t^4)$, $y(t)=6t^2/(1-t^4)$. Условия $x \leqslant 0$, $y \leqslant 0$ выполняются для $t>1$, при этом точка (0, 0) кривой L соответствует несобственному значению $t: 0=\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $0=\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Итак,

$$L = \{(x,\ y) : x(t) = 6t/(1-t^4),\ y(t) = 6t^2/(1-t^4),\ t > 1\}.$$

Параметрическое представление можно получить и переходом к полярным координатам. Замена $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$ превращает уравнение $x^4-y^4-6x^2y=0$ в уравнение $r^4\cos 2\varphi-3r^3\sin 2\varphi \times \times\cos\varphi=0$, следовательно, в совмещенной полярной системе координат кривая L имеет уравнение $r=3\operatorname{tg}2\varphi\cos\varphi$. Делая обратное преобразование, получаем, что

$$x = \frac{3}{2}\operatorname{tg}2\varphi(1+\cos 2\varphi),\ y = \frac{3}{2}\operatorname{tg}2\varphi\sin 2\varphi.$$

Условие $x \leqslant 0$ выполнено, если $\operatorname{tg}2\varphi \leqslant 0$, а условие $y \leqslant 0$, — если $\cos 2\varphi < 0$. Отсюда следует, что

$$L = \left\{(x,\ y) : x = \frac{3}{2}(\operatorname{tg}2\varphi + \sin 2\varphi),\ y = \frac{3}{2}\frac{\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi},\right.$$
$$\left.\varphi \in (5\pi/4,\ 3\pi/2]\right\}.$$

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной уравнением $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

Решение. Функция $F(x,\ y)=x^{2/3}+y^{2/3}$ является однородной алгебраической функцией x и y. Обозначая через t отношение y/x, получаем соотношение, связывающее x и t: $x^{2/3}(1+t^{2/3})= =a^{2/3}$. Это равенство определяет две однозначные функции $x_1(t)= =a/(1+t^{2/3})^{3/2}$ и $x_2(t)=-a/(1+t^{2/3})^{3/2}$. Таким образом, кривую L придется рассматривать как объединение:

$$L = L_1 \cup L_2,\ \text{где}\ L_1 = \{(x,\ y) : x(t) = a/(1+t^{2/3})^{3/2},\ y(t) =$$
$$= at/(1+t^{2/3})^{3/2},\ t \in R\}\ \text{и}\ L_2 = \{(x,\ y) : x = -a/(1+t^{2/3})^{3/2},$$
$$y(t) = -at/(1+t^{2/3})^{3/2},\ t \in R\}.$$

В данном случае удобнее воспользоваться переходом к обобщенной полярной системе координат. Положим $x=ar\cos^3\varphi$, $y=$

$=ar\sin^3\varphi$, тогда уравнение кривой L примет вид $r=1$. Обратный переход к x и y дает параметрическое представление кривой: $L=\{(x,\ y):x=a\cos^3\varphi,\ y=a\sin^3\varphi,\ \varphi\in[0,\ 2\pi)\}$.

Пример. Запишем параметрическое представление эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Положим $x=ar\cos\varphi$, $y=br\sin\varphi$, тогда уравнение эллипса примет вид $r=1$. Обратный переход к x и y дает параметрическое представление эллипса: $L=\{(x,\ y):\ x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\ 2\pi)\}$ (в частности, простейшим параметрическим представлением окружности радиусом a с центром в начале координат является:

$$L=\{(x,\ y):x=a\cos\varphi,\ y=a\sin\varphi,\ \varphi\in[0,\ 2\pi)\}).$$

Пусть кривая $L\subset R^3$ задана как пересечение двух поверхностей, т. е. системой $\begin{cases}F_1(x,\ y,\ z)=0,\\ F_2(x,\ y,\ z)=0\end{cases}$ и условиями вида

$$\varphi(x)\geqslant 0,\ \psi(y)\geqslant 0,\ \chi(z)\geqslant 0.$$

Чаще всего для параметризации заданной таким образом кривой исключают одну из переменных. Геометрически это означает, что находится проекция L^* кривой L на одну из координатных плоскостей. Плоскую кривую L^* параметризуют методами, рассмотренными выше. После этого любое из двух уравнений, определяющих L, дает параметрическое представление третьей координаты.

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной соотношениями $x^2+y^2+z^2=2ax$, $x^2+y^2=z^2$, $z\geqslant 0$.

Решение. Исключая из системы $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2ax,\\ x^2+y^2=z^2\end{cases}$ переменную z, получаем, что переменные x и y связаны соотношением $x^2+y^2=ax$, т. е. проекцией кривой L на плоскость XY является окружность $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{4}$. Простейшая параметрическая запись L^* есть $x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t$, $y=\frac{a}{2}\sin t$, $t\in[0,\ 2\pi)$.

Из уравнения $x^2+y^2=z^2$ и условия $z\geqslant 0$ получаем, что $z=\sqrt{\frac{a^2}{2}(1+\cos t)}=a\left|\cos\frac{t}{2}\right|$. Чтобы получить гладкое представление переменной z, заметим, что в параметрическом задании окружности L^* можно взять в качестве промежутка изменения параметра t любой отрезок длиной 2π; если $t\in[-\pi,\ \pi]$, то $\cos\frac{t}{2}\geqslant 0$ и, следовательно, $z=a\cos\frac{t}{2}$. Итак,

$$L=\left\{(x,\ y,\ z):x=\frac{a}{2}(1+\cos t),\ y=\frac{a}{2}\sin t,\ z=a\cos\frac{t}{2},\ -\pi\leqslant t\leqslant\pi\right\}.$$

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной соотношениями $x^2+z^2=a^2$, $y^2+z^2=a^2$, $x\geqslant 0$.

Решение. Поскольку каждое из уравнений, задающих кривую L, содержит только два переменных, то каждое из них есть уравнение проекции L на координатные плоскости: первое — на плоскость XZ, второе — на плоскость YZ. Так как на переменные y и z не дано дополнительных условий, то окружность $y^2+z^2=a^2$ параметризуется простейшим образом:

$$y=a\cos t,\ z=a\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi).$$

Из первого уравнения с учетом условия $x\geqslant 0$ получаем, что $x=a\,|\cos t|$. В отличие от предыдущего примера в данном случае не удалось избежать негладкого представления переменной x. Итак,

$$L=\{(x,\ y,\ z):x=a|\cos t|,\ y=a\cos t,\ z=a\sin t,\ t\in[0,\ 2\pi)\}.$$

Пример. Запишем параметрическое представление кривой L, заданной соотношениями $z^2=y^2+x^2$, $ax=zy$, $z\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

Решение. Исключая из системы $\begin{cases} z^2=y^2+x^2, \\ ax=zy \end{cases}$ переменную x, получаем, что переменные z и y связаны соотношением $a^2z^2=a^2y^2+z^2y^2$, т. е. проекцией L на плоскость ZY является кривая $L^*=\{(z,\ y):a^2z^2=a^2y^2+z^2y^2\}$. Учитывая условия $z\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, получаем, что кривая L^* записывается явным уравнением $y=az/\sqrt{a^2+z^2}$.

Из уравнения $ax=zy$ получаем, что $x=z^2/\sqrt{a^2+z^2}$. Итак,

$$L=\left\{(x,\ y,\ z):x=\frac{z^2}{\sqrt{a^2+z^2}},\ y=\frac{az}{\sqrt{a^2+z^2}},\ z=z,\ z\geqslant 0\right\}.$$

Пример. Вычислим $\int\limits_L (x+y)\,ds$, где $L=\overset{\smile}{AB}$ — дуга циклоиды:

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ A=(0,\ 0),\ B=(4a\pi,\ 0).$$

Решение. Кривая L состоит из двух гладких кусков — дуг циклоиды $L_1=\overset{\smile}{AC}$ и $L_2=\overset{\smile}{CB}$, где $C=(2a\pi,\ 0)$ (см. рис. 39). Поскольку

$$L_1=\{(x,\ y):x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[0,\ 2\pi]\},$$

$$L_2=\{(x,\ y):x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ t\in[2\pi,\ 4\pi]\},$$

то для обеих дуг имеем, что

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=a\sqrt{2-2\cos t}\,dt=2a\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt,$$

$$(x+y)\,ds=2a^2\left(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt.$$

Следовательно, в силу свойств 3 и 8

$$\int_L (x+y)\,ds=\int_{L_1}(x+y)\,ds+\int_{L_2}(x+y)\,ds=2a^2\int_0^{2\pi}\left(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\right.$$

$$\left.+\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt-2a^2\int_{2\pi}^{4\pi}\left(t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}+\sin^2\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\,dt=$$

$$=8a^2\left[\int_0^{\pi}2z\sin z\,dz-2\int_0^{\pi}\sin^2 z\cos z\,dz+\int_0^{\pi}(1-\cos^2 z)\sin z\,dz\right]+$$

$$+16\pi a^2=8a^2\left(2\pi+\frac{4}{3}\right)+16\pi a^2=\frac{32}{3}a^2(1+3\pi).$$

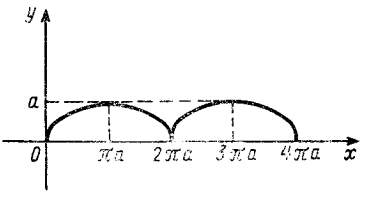

Рис. 39

Пример. Вычислим $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где L—петля кривой $r=a\sin 3\varphi$, лежащая в первом октанте $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ (декартова и полярная системы координат совмещены).

Решение. Пользуясь формулами связи совмещенных декартовых и полярных координат, получаем параметрическое выражение кривой L:

$$L=\{(x,\ y):x=a\sin 3\varphi\cos\varphi,\ \ y=a\sin 3\varphi\sin\varphi,\ \ \varphi\in[0,\ \pi/3]\}.$$

Для вычисления ds воспользуемся формулой из интегрального исчисления функции одной переменной:

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2_{\varphi}}\,d\varphi=a\sqrt{\sin^2 3\varphi+9\cos^2 3\varphi}\,d\varphi.$$

Итак,

$$\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,ds=\int_0^{\pi/3}a^2\sin 3\varphi\sqrt{1+8\cos^2 3\varphi}\,d\varphi=$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_{-1}^{1}\sqrt{1+8z^2}\,dz=\frac{a^2}{6\sqrt{2}}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+t^2}\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{6\sqrt{2}}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]\Bigg|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}=$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{6\sqrt{2}}\ln\left(3+2\sqrt{2}\right)\right).$$

Следует обратить внимание на то, что, вычисляя ds по формуле $ds=\sqrt{x_\varphi'^2+y_\varphi'^2}\,d\varphi$, получим, конечно, то же выражение: $ds=$ $=a\sqrt{\sin^2 3\varphi+9\cos^2 3\varphi}\,d\varphi$, но применение формулы $ds=\sqrt{r^2+r_\varphi'^2}\times$ $\times\, d\varphi$ существенно сокращает выкладки.

Пример. Вычислим $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,ds$, где

$$L=\{(x,\ y,\ z):x=a(t\cos t-\sin t),\ y=a(t\sin t+\cos t),\ z=bt^2,$$
$$t\in[0,\ 2\pi]\}.$$

Решение. Так как

$$x_t'=-at\sin t,\ y_t'=at\cos t,\ z_t'=2bt,\ t\geqslant 0,$$

то

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}\,dt=\sqrt{a^2+4b^2}t\,dt$$

и

$$\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,ds=\int\limits_0^{2\pi}(a^2+a^2t^2+b^2t^4)\sqrt{a^2+4b^2}\,t\,dt=$$

$$=\sqrt{a^2+4b^2}\left(2a^2\pi^2+4a^2\pi^4+\frac{32}{3}b^2\pi^6\right).$$

Пусть L — дуга линии $F(x,\ y)=0$ в плоскости XY и $\tilde{L}$ кривая в пространстве, полученная пересечением поверхностей $\Phi(x,\ y,\ z)=0$ и $F(x,\ y)=0$ (см. рис. 40). Тогда площадь части цилиндрической поверхности $F(x,\ y)=0$, ограниченной снизу дугой L и сверху кривой $\tilde{L}$, вычисляется по формуле

$$\int\limits_{\tilde{L}} z(x,\ y)\,ds,$$

где $z(x,\ y)$ — функция, определяемая соотношением $\Phi(x,\ y,\ z)=0$.

Пример. Найдем площадь цилиндрической поверхности x^2+ $+y^2=R^2$, ограниченной снизу поверхностью $z=\frac{xy}{2R}$, а сверху — плоскостью $x+y+z=2R$.

Решение. Площадь данной поверхности S найдем как разность следующих интегралов:

$$\oint\limits_{x^2+y^2=R^2} (2R-x-y)\,ds \quad \text{и} \quad \oint\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{xy}{2R}\,ds.$$

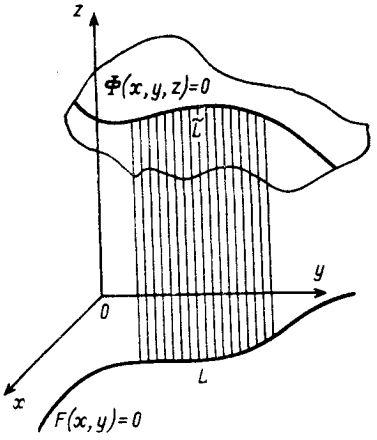

Рис. 40

Поэтому поскольку для окружности радиуса R имеем $ds=Rd\varphi$, то

$$S=\oint\limits_{x^2+y^2=R^2}\left[(2R-x-y)-\frac{xy}{2R}\right]ds=R\int\limits_0^{2\pi}\left(2R-R\cos\varphi-\right.$$

$$\left.-R\sin\varphi-\frac{R}{2}\cos\varphi\sin\varphi\right)d\varphi=R^2\left(\pi-\frac{17}{8}\right).$$

Пусть скалярная величина $P(L)$ (масса, заряд, количество теплоты и т. п.) распределена на кривой L с линейной плотностью $\rho=\rho(x, y, z)$, тогда $P(L)=\int\limits_L \rho(x, y, z)\,ds$.

Если ρ — плотность распределения массы на кривой L и $r(m)$ — расстояние точки $m\in L$ до некоторой плоскости или прямой Q, то интегралы

$$\mathcal{J}_Q^{(k)}=\int\limits_L \rho r^k\,ds, \quad k\in N,$$

называются моментами порядка k кривой L относительно соответствующей плоскости или прямой. Формально можно сказать, что масса кривой L является моментом $\mathcal{J}_L^{(0)}$ нулевого порядка кривой L относительно любой плоскости или прямой. Моменты первого порядка называются статическими моментами, моменты второго порядка — моментами инерции. Используя запись массы

как момента нулевого порядка, выпишем формулы для вычисления координат x_0, y_0, z_0 центра масс кривой L с плотностью ρ:

$$x_0=\frac{\mathcal{J}_{YZ}^{(1)}}{\mathcal{J}_{YZ}^{(0)}},\quad y_0=\frac{\mathcal{J}_{XZ}^{(1)}}{\mathcal{J}_{XZ}^{(0)}},\quad z_0=\frac{\mathcal{J}_{XY}^{(1)}}{\mathcal{J}_{XY}^{(0)}}.$$

Пример. Найдем координаты центра масс кривой Вивиани:

$$L=\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2=ax,\ x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geqslant 0\}$$

с плотностью $\rho(x, y, z)=z$.

Решение. Чтобы воспользоваться формулами для вычисления центра масс, необходимо записать данную кривую в параметрическом виде. Поскольку кривая лежит на цилиндре $x^2+y^2=ax$, начнем со стандартной параметризации цилиндра: окружность $x^2+y^2=ax$, $z=0$ может быть параметризована как $x=a\cos^2 t$, $y=a\cos t\sin t$, $t\in[-\pi/2,\ \pi/2]$ и, следовательно, параметрическое задание цилиндра может быть взято в виде

$$x=a\cos^2 t,\ y=a\cos t\sin t,\ z=z,\ t\in[-\pi/2,\ \pi/2],\ z\in R.$$

Связь параметров t и z на кривой Вивиани получим, используя то, что эта кривая лежит и на сфере $x^2+y^2+z^2=a^2$, откуда следует, что $z^2=a^2-a^2\cos^2 t$, и, таким образом, получаем параметрическое представление кривой L:

$$L=\{(x,\ y,\ z):x=a\cos^2 t,\ y=a\cos t\sin t,\ z=a|\sin t|,$$
$$t\in[-\pi/2,\ \pi/2]\}.$$

Из этого представления получаем, что

$$x_t'=-a\sin 2t,\ y_t'=a\cos 2t,\ z_t'=a\operatorname{sgn}(\sin t)\cos t,$$

$$ds=\sqrt{a^2+a^2\cos^2 t}\,dt=a\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt.$$

Следовательно,

$$\mathcal{J}_{XY}^{(0)}=\mathcal{J}_{YZ}^{(0)}=\mathcal{J}_{XZ}^{(0)}=\int\limits_L\rho\,ds=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}a^2|\sin t|\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2a^2\int\limits_0^1\sqrt{1+u^2}\,du=a^2\left(u\sqrt{1+u^2}+\ln\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\right)\Big|_0^1=$$

$$=a^2\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right),$$

$$\mathcal{J}_{YZ}^{(1)}=\int\limits_L\rho x\,ds=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}a^3\cos^2 t|\sin t|\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2a^3\int\limits_0^1 u^2\sqrt{1+u^2}\,du=\frac{a^3}{4}\left[(2u^3+u)\sqrt{1+u^2}-\right.$$

$$-\ln(u+\sqrt{1+u^2})]\Big|_0^1=\frac{a^3}{4}(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2})),$$

$$\mathcal{J}_{XZ}^{(1)}=\int\limits_L \rho y\,ds=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3\cos t\sin t|\sin t|\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=0,$$

$$\mathcal{J}_{XY}^{(1)}=\int\limits_L \rho z\,dz=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^3\sin^2 t\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt=$$

$$=2a^3\int\limits_0^1\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+u^2}\,du=2a^3\int\limits_0^1\sqrt{1-u^4}\,du=$$

$$=\frac{a^3}{2}\int\limits_0^1 v^{-3/4}(1-v)^{1/2}\,dv=\frac{a^3}{2}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{2}\right)=\frac{a^3}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/4)}=$$

$$=\frac{a^3}{4}\sqrt{\pi}\cdot\frac{4}{3}\frac{\Gamma^2(1/4)}{\Gamma(3/4)\cdot\Gamma(1/4)}=\frac{a^3\Gamma^2(1/4)}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Итак,

$$x_0=\frac{a^3(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))}{4a^3(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}=\frac{a(3\sqrt{2}-\ln(1+\sqrt{2}))}{4(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))},$$

$$y_0=0,$$

$$z_0=\frac{a^3\Gamma^2(1/4)}{3\sqrt{2\pi}\,4a^2(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}=\frac{a\Gamma^2(1/4)}{12\sqrt{2\pi}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2}))}.$$

Пример. Найдем момент инерции кривой

$$L=\{(x,\ y,\ z):\ y=2\cos x,\ z=\sin 2x,\ x\in[0,\ \pi/2]\}$$

с плотностью $\rho(x, y, z)=z$ относительно плоскости XZ.

Решение. Так как расстояние точки $m=(x, y, z)$ от плоскости XZ есть $|y|$, то

$$\mathcal{J}_{XZ}^{(2)}=\int\limits_L zy^2\,ds.$$

Для данной кривой имеем

$$ds=\sqrt{1+4\sin^2 x+4\cos^2 2x}=\sqrt{3+2\cos 2x+4\cos^2 2x}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_L zy^2\,ds=\int\limits_0^{\pi/2}\sin 2x\,4\cos^2 x\sqrt{3+2\cos 2x+4\cos^2 2x}\,dx=$$

$$=-\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2x)\sqrt{\frac{11}{4}+(2\cos 2x+1/2)^2}\,d(\cos 2x)=$$

$$= \int_{-1}^{1} (1+z) \sqrt{\frac{11}{4} + \left(2z + \frac{1}{2}\right)^2} dz = \frac{1}{3} (3 + 2z + 4z^2)^{3/2} \Big|_{-1}^{1} +$$

$$+ \frac{3}{8} \left[\left(2z + \frac{1}{2}\right) \sqrt{3 + 2z + 4z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{11}{4} \ln \left(2z + \frac{1}{2} + \sqrt{3 + 2z + 4z^2}\right) \right] \Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 9 - \frac{5}{3}\sqrt{5} + \frac{3}{8} \left(\frac{15}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{11}{4} \ln \frac{11}{2\sqrt{5} - 3} \right).$$

Пример. Найдем силу, с которой масса M, распределенная равномерно на окружности $x^2+y^2=a^2$, $z=0$, притягивает массу m, помещенную в точке A $(0, 0, b)$.

Решение. Согласно физическому закону две массы M_1 и M_2 притягиваются с силой

$$\vec{F} = gM_1M_2 \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3},$$

где g — гравитационная постоянная и r — расстояние между точками, в которых находятся массы.

В нашем случае из соображений симметрии можно сделать вывод, что $F_X=0$, $F_Y=0$, так как точка $A(0, 0, b)$ одинаково удалена от всех точек однородной окружности. В силу этого вектор $\vec{F}$ направлен вдоль оси OZ в отрицательном направлении. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит элементу окружности ds. Этот элемент действует на массу, помещенную в точке A с силой, вертикальная составляющая которой равна

$$\frac{g \frac{M}{2\pi a} ds\, mb}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Суммируя по всем элементам ds, имеем

$$|F| = \frac{gMmb}{2\pi a} \int_L \frac{ds}{(b^2 + x^2 + y^2)^{3/2}},$$

где $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = a^2\}$, переходя к параметрическому заданию окружности

$$L = \{(x, y) : x = a\cos t,\ y = a\sin t\},$$

получаем, что

$$|F| = \frac{gmMb}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{a}{(b^2 + a^2)^{3/2}} dt = \frac{gmMb}{(b^2 + a^2)^{3/2}}.$$

§ 2. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

Определение. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность, лежащая в R^3. Конечный набор кусочно-гладких кривых γ, лежащих на S, назовем разбиением T поверхности S. Части S_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ поверхности S, полученные при разбиении T, назовем участками разбиения.

Заметим, что как для поверхности S, так и для всех участков разбиения S_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, определены площади $|S|$ и $|S_i|$.

Пусть функция $f: S \to R$ определена и ограничена на кусочно-гладкой поверхности $S \in R^3$ и T — разбиение S. Введем обозначения:

$$M_i = \sup f(x),\ x \in S_i,\ m_i = \inf f(x),\ x \in S_i;$$

$$S(f, T) = \sum_{i=1}^{n} M_i |S_i| \text{ — верхняя сумма Дарбу;}$$

$$s(f, T) = \sum_{i=1}^{n} m_i |S_i| \text{ — нижняя сумма Дарбу;}$$

$$\overline{\mathcal{J}}(f, S) = \inf_T S(f, T) \text{ — верхний интеграл Дарбу;}$$

$$\underline{\mathcal{J}}(f, S) = \sup_T s(f, T) \text{ — нижний интеграл Дарбу.}$$

Определение. Функция $f: S \to R$, определенная и ограниченная на кусочно-гладкой поверхности $S \in R^3$, интегрируема по поверхности S, если $\overline{\mathcal{J}}(f, S) = \underline{\mathcal{J}}(f, S)$. В этом случае общее значение интегралов Дарбу называется поверхностным интегралом первого рода от функции f по поверхности S и обозначается $\iint\limits_S f dS$.

Определение поверхностного интеграла первого рода переносит определение двойного интеграла Римана по плоской лежащей в R^2, области на кусочно-гладкую поверхность S, лежащую в R^3.

Основные свойства поверхностного интеграла первого рода

1. Непрерывная на поверхности S функция f интегрируема по S.

2. Если функции f_1 и f_2 интегрируемы по поверхности S, то функции $g = f_1 f_2$ и $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ при любых числах α_1, α_2 интегрируемы по S, причем

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_S (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)\, dS = \alpha_1 \iint\limits_S f_1 dS + \alpha_2 \iint\limits_S f_2 dS$$

(линейность интеграла).

3. Назовем две поверхности S_1 и S_2 неперекрывающимися, если их пересечение представляет конечное множество кусочно-

гладких кривых (может быть, и пустое). Если функция f интегрируема по двум неперекрывающимся поверхностям S_1 и S_2, то f интегрируема по $S=S_1 \cup S_2$ и

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_{S_1} f dS + \iint\limits_{S_2} f dS \text{ (аддитивность интеграла).}$$

4. $\iint\limits_S 1 \cdot dS = |S|$,

где $|S|$ — площадь поверхности.

5. Если функция f интегрируема по поверхности S, то функция $|f|$ интегрируема по S и $\left|\iint\limits_S f dS\right| \leqslant \iint\limits_S |f|\, dS$.

6. Если функции f и g интегрируемы по поверхности S и $f(x) \leqslant g(x)$ для всех $x \in S$, то

$$\iint\limits_S f dS \leqslant \iint\limits_S g dS \text{ (монотонность интеграла).}$$

7. Если функции f и g интегрируемы по поверхности S, $g(x) \geqslant 0$ для всех $x \in S$, $a = \inf\limits_{x \in S} f(x)$, $b = \sup\limits_{x \in S} f(x)$, то $a \iint\limits_S g dS \leqslant \iint\limits_S g f dS \leqslant b \iint\limits_S g dS$, в частности

$$a\,|S| \leqslant \iint\limits_S f dS \leqslant b\,|S|.$$

Если к тому же функция f непрерывна вдоль поверхности S, то существует точка $x_0 \in S$, такая, что

$$\iint\limits_S g f dS = f(x_0) \iint\limits_S g dS \text{ (теорема о среднем).}$$

8. Пусть S — простая гладкая поверхность, т. е.

$$S = \{r = (x, y, z)\} : r = r(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}\,(u, v) \in D,$$

где D — жорданова область в R^2, $r \in C^1(\bar{D})$ и ранг $(r') = 2$ $(([r'_u \times r'_v]) \neq 0)$.

Если $f : S \to R$ непрерывна вдоль поверхности S, то

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2}\, du dv,$$

где

$$E = (r'_u \cdot r'_u) = |r'_u|^2,\ G = (r'_v \cdot r'_v) = |r'_v|^2,\ F = (r'_u \cdot r'_v).$$

В частности, если поверхность S задана явной функцией $z = z(x, y)$:

$$S = \{(x, y, z) : z = z(x, y),\ (x, y) \in \bar{D}\},$$

$D \subset R^2$ — квадрируемая область, $z \in C^1(\overline{D})$, то

$$\iint\limits_S f dS = \iint\limits_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\, dxdy.$$

Пусть скалярная величина $P(S)$ распределена на поверхности S с поверхностной плотностью $\rho=\rho(x, y, z)$, тогда

$$P(S) = \iint\limits_S \rho(x, y, z)\, dS.$$

Интегралы

$$\mathcal{J}_Q^{(k)} = \iint\limits_S \rho(x, y, z) r^k dS, \quad k \in N,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность распределения массы на поверхности S и $r(m)$ — расстояние точки от $m \in S$ до некоторой плоскости или прямой Q, называются моментами порядка k поверхности S относительно соответствующей плоскости или прямой. Массу поверхности можно считать моментом нулевого порядка относительно любой плоскости или прямой; моменты первого порядка называются статическими моментами, моменты второго порядка — моментами инерции. Координаты x_0, y_0, z_0 центра масс поверхности S с плотностью $\rho(x, y, z)$ вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{\mathcal{J}_{YZ}^{(1)}}{\mathcal{J}_{YZ}^{(0)}}, \quad y_0 = \frac{\mathcal{J}_{XZ}^{(1)}}{\mathcal{J}_{XZ}^{(0)}}, \quad z_0 = \frac{\mathcal{J}_{XY}^{(1)}}{\mathcal{J}_{XY}^{(0)}}.$$

Пример. Вычислим поверхностный интеграл первого рода $\iint\limits_S (x+y+z)\, dS$, где S — поверхность тела, ограниченного плоскостью $z=0$, полусферой $z=\sqrt{2a^2-x^2-y^2}$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ $(a>0)$.

Решение. Так как все поверхности, заданные в условии, являются поверхностями вращения относительно оси OZ, то сделаем чертеж меридионального сечения данного тела (см. рис. 41).

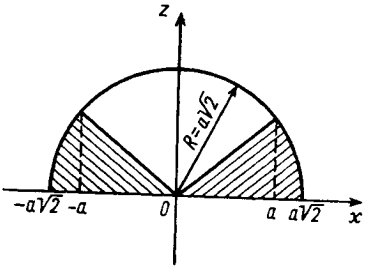

Рис. 41