то

$$\int_L (x+y)\,dx-(x-y)\,dy=-\int_{-\pi/6}^{\pi/6} a^2\cos 3\varphi\,(6\sin 3\varphi+2\cos 3\varphi)\,d\varphi=$$

$$=-a^2\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi=-\frac{a^2\pi}{3}.$$

Пример. Вычислим

$$\int_{\breve{AB}} zdx+2xdy-ydz,$$

где $\breve{AB}$ — кривая

$$x^2+y^2=2ax,\ az=xy,\ z\geqslant 0,\ A=(0,\ 0,\ 0),\ B=(2a,\ 0,\ 0)\ (a>0).$$

Решение. Так как на кривой $\breve{AB}$ имеем $x\geqslant 0$, $z\geqslant 0$, то и $y\geqslant 0$. Следовательно, кривая AB может быть параметризована следующим образом:

$$x=x,\ y=\sqrt{2ax-x^2},\ z=\frac{x}{a}\sqrt{2ax-x^2},\ x\in[0,\ 2a].$$

Запишем $\breve{AB}$ как ориентированное многообразие

$$\breve{AB}=\left\{x=x,\ \ y=\sqrt{2ax-x^2},\ z=\frac{x}{a}\sqrt{2ax-x^2},\ x\in[0,\ 2a]\right\}.$$

Тогда

$$dy=\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx,\ dz=\left(\frac{(a-x)\,x}{a\sqrt{2ax-x^2}}+\frac{\sqrt{2ax-x^2}}{a}\right)dx=$$

$$=\frac{3ax-2x^2}{a\sqrt{2ax-x^2}}\,dx.$$

Делая перенос формы, получаем, что

$$\varphi^*\omega=\frac{x}{a}\sqrt{2ax-x^2}\,dx+\frac{2x\,(a-x)}{\sqrt{2ax-x^2}}\,dx-\frac{3ax-2x^2}{a}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int_{\breve{AB}} zdx+2xdy-ydz=\int_0^{2a}\left(\frac{x-a}{a}\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx+\right.$$

$$+\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx+2\sqrt{a^2-(x-a)^2}\,dx-\frac{2a\,(x-a)}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\,dx-$$

$$\left.-\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-(x-a)^2}}\,dx-3xdx+\frac{2x^2}{a}\,dx\right)=$$

$$= \int_{-a}^{a} \left(\frac{t}{a} \sqrt{a^2 - t^2} + 3\sqrt{a^2 - t^2} - \frac{2at}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}} \right) dt -$$

$$-6a^2 + \frac{16}{3} a^2 = -\frac{\pi a^2}{2} - \frac{2}{3} a^2.$$

Заметим, что при этой параметризации функции $y(x)$ и $z(x)$ не являются гладкими на $(0, 2a)$, так что формально мы здесь не имели права применять рассмотренные выше соотношения. Но, как уже не раз отмечалось в аналогичных ситуациях, если в этих соотношениях вместо интеграла Римана появляется несобственный абсолютно сходящийся интеграл, то они остаются в силе. Этим утверждением будем пользоваться и в дальнейшем.

Можно параметризировать кривую $\overset{\smile}{AB}$ и так, чтобы все функции были гладкими. Например, положим

$$x = a(1 + \cos t), \quad y = a \sin t, \quad z = a \sin t (1 + \cos t).$$

Тогда точке $A = (0, 0, 0)$ отвечает значение $t = \pi$, точке $B = (2a, 0, 0)$ — значение $t = 0$; делая перенос формы, получаем

$$\varphi^* \omega = a^2 (-\sin^2 t - \sin^2 t \cos t + 2 \cos t + 2 \cos^2 t - \sin t \cos t -$$

$$-2 \sin t \cos^2 t + \sin^3 t)\, dt = a^2 [\cos t (2 - \sin^2 t - \sin t) +$$

$$+ \sin t (1 - 2\cos^2 t) + 3\cos^2 t - 1]\, dt.$$

Следовательно,

$$\int_{\overset{\smile}{AB}} z dx + 2x dy - y dz = a^2 \int_{\pi}^{0} \Big[(2 - \sin^2 t - \sin t) \cos t +$$

$$+ (2\cos^2 t - 1)(-\sin t) + \frac{3}{2} \cos 2t + \frac{1}{2} \Big] dt =$$

$$= a^2 \left(\frac{2}{3} \cos^3 t - \cos t \right) \Big|_{\pi}^{0} - \frac{\pi a^2}{2} = -\frac{2}{3} a^2 - \frac{\pi a^2}{2}.$$

Пример. Вычислим

$$\int_L \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

где L — окружность $x^2 + y^2 = a^2$ с положительным направлением обхода $(a > 0)$.

Решение. Запишем уравнение окружности L в параметрическом виде: $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, при этом положительному направлению обхода соответствует изменение t от 0 до 2π. Делая

перенос формы, получаем, что $\varphi^*\omega = \frac{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}{a^2}\,dt$. Следовательно,

$$\int\limits_L \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Полученное равенство еще раз показывает, что замкнутая в области $D: \left\{\frac{a^2}{2} < x^2+y^2 < 2a^2\right\}$ форма $\omega = \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$ (см. с. 248)) не является точной, так как в противном случае интеграл $\int\limits_L \omega = \int\limits_L \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$ должен был быть равен нулю в силу того, что $L \subset D$ и в силу свойства криволинейного интеграла второго рода (см. с. 248).

Пример. Найдем функцию $f: R^3 \to R$, если

$$df = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz.$$

Решение. Поскольку точность формы

$$\omega = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$$

дана в условии, то в силу свойства 4 криволинейного интеграла второго рода (см. с. 248) имеем

$$f(x_0, y_0, z_0) = f(B) = f(A) + \int\limits_{\breve{AB}} \omega.$$

В этом равенстве символ $\breve{AB}$ обозначает произвольную кусочно-гладкую кривую, не выходящую за пределы той области, в которой $\omega = df$. В данном примере не дано ограничений на значения x, y, z и форма ω является гладкой на всем пространстве R^3, поэтому можно считать равенство $\omega = df$ заданным всюду в R^3. Точка A выбирается произвольно, — положим $A = (0, 0, 0)$. Так как равенство $df = \omega$ определяет функцию f с точностью до произвольного слагаемого, то значение $f(A)$ выбирается произвольно. В качестве кривой $\breve{AB}$ при решении задач этого типа берется ломаная, составленная из отрезков, параллельных осям координат. Такой выбор обусловлен тем, что на таких отрезках все координаты, кроме одной, постоянны и, следовательно, их дифференциалы равны нулю, поэтому сужение формы ω на эти отрезки получается наиболее просто. Итак,

$$\breve{AB} = AM + MN + NB,$$

где $A = (0, 0, 0)$, $M = (x_0, 0, 0)$, $N = (x_0, y_0, 0)$, $B = (x_0, y_0, z_0)$. Обозначая $\omega|_{AM}$, $\omega|_{MN}$, $\omega|_{NB}$ сужение формы ω на AM, MN, NB соответственно, получаем, что $\omega|_{AM} = 0\,dx$, $\omega|_{MN} = x_0 dy$, $\omega|_{NB} = (x_0 + y_0)\,dz$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\widetilde{AB}} \omega = \int\limits_{AM} \omega + \int\limits_{MN} \omega + \int\limits_{NB} \omega = \int\limits_0^{x_0} 0dx + \int\limits_0^{y_0} x_0 dy + \int\limits_0^{z_0} (x_0 + y_0)\, dz =$$

$$= x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0.$$

В силу произвольности точки (x_0, y_0, z_0) получаем, что

$$f(x, y, z) = xy + xz + yz + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример. Найдем функцию $f: R^3 \to R$, если

$$df = -\frac{x}{y^2}\, dx + \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2}\right) dy - \frac{y^2}{z^3}\, dz.$$

Решение. В данном примере форма

$$\omega = -\frac{x}{y^2}\, dx + \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2}\right) dy - \frac{y^2}{z^3}\, dz$$

является определенной и гладкой в области D, замыкание которой не пересекается с плоскостями $y=0$ и $z=0$, и, следовательно, функция f определяется в точках (x, y, z), не принадлежащих этим плоскостям. Примем для определенности, что $y>0$ и $z<0$. В качестве начальной возьмем точку $A=(0, 1, -1)$, тогда для любой точки $B=(x_0, y_0, z_0)$, $y_0>0$, $z_0<0$, ломаная $AMNB$, где $M=(0, 1, z_0)$, $N=(0, y_0, z_0)$, лежит в области гладкости формы ω. Следовательно,

$$f(B) = f(A) + \int\limits_{\widetilde{AB}} \omega = f(A) + \int\limits_{AM} \omega + \int\limits_{MN} \omega + \int\limits_{NB} \omega =$$

$$= f(A) + \int\limits_{-1}^{z_0} \frac{-dz}{z^3} + \int\limits_1^{y_0} \frac{y}{z_0^2}\, dy + \int\limits_0^{x_0} \frac{-x}{y_0^2}\, dx =$$

$$= f(A) + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{1}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2} = f(A) - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2}.$$

В силу произвольности точки (x_0, y_0, z_0), $y_0>0$, $z_0<0$, получаем, что

$$f(x, y, z) = \frac{y^2}{2z^2} - \frac{x^2}{2y^2} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Если дифференциальная 1-форма от n переменных $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x) \times dx_i$ точна, то функция $f: R^n \to R$, удовлетворяющая условию $df=\omega$, находится по такой же схеме. Если I — брус в R^n и $df=\omega$

в I, то для любых двух точек $A=(y_1, y_2, \ldots, y_n)\in I$ и $B=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in I$ имеем равенство:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(B)=f(A)+\int_{y_1}^{x_1} a_1(t_1, y_2, \ldots, y_n)\,dt_1+$$

$$+\int_{y_2}^{x_2} a_2(x_1, t_2, y_3, \ldots, y_n)\,dt_2+\ldots+\int_{y_i}^{x_i} a_i(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t_i,$$

$$y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dt_i+\ldots+\int_{y_n}^{x_n} a_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t_n)\,dt_n.$$

Пример. Найдем функцию $f: R^5\to R$, если

$$df=(2x_1x_2+x_5^2)\,dx_1+(x_1^2-2x_2x_3)\,dx_2+(2x_3x_4-x_2^2)\,dx_3+$$

$$+(x_3^2-2x_4x_5)\,dx_4+(2x_1x_5-x_4^2)\,dx_5.$$

Решение. Положив $A=(0, 0, 0, 0, 0)$, получаем, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=f(A)+\int_0^{x_1} 0\cdot dt_1+\int_0^{x_2} x_1^2\,dt_2-$$

$$-\int_0^{x_3} x_2^2\,dt_3+\int_0^{x_4} x_3^2\,dt_4+\int_0^{x_5}(2x_1t_5-x_4^2)\,dt_5=$$

$$=x_1^2x_2-x_2^2x_3+x_3^2x_4-x_4^2x_5+x_1x_5^2.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=x_1^2x_2-x_2^2x_3+x_3^2x_4-x_4^2x_5+x_1x_5^2+C,$$

где C — произвольная постоянная.

§ 4. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Еще раз обратим внимание на то, что материал, изложенный в этом параграфе, рассмотрен в § 3* в терминологии векторных полей. Читателю полезно сравнить определения, основные свойства рассматриваемых понятий и ход решения примеров.

Простая гладкая поверхность

$$S=\{r: r=r(u, v),\ (u, v)\in\overline{D}\},\ D\subset R^2,\ r\in C^1(\overline{D}),\ [r_u'\times r_v']\neq 0,$$

как уже говорилось, является простым гладким многообразием второго порядка. Как многообразие второго порядка, поверхность S ориентируется заданием ориентации в области значений пара-

метров — области $D \subset R^2$. Записью поверхности S с противоположными ориентациями являются выражения

$$S = \{r : r = r(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\}$$

и

$$\widetilde{S} = \{r : r = r(u, v),\ (v, u) \in \overline{D}\}.$$

Поставим в соответствие ориентированной поверхности S векторное поле нормалей $N = \left\{ \frac{[r'_u \times r'_v]}{|r'_u \times r'_v|} \right\}$, а ориентированной поверхности $\widetilde{S}$ — поле $\widetilde{N} = \left\{ \frac{[r'_v \times r'_u]}{|r'_u \times r'_v|} \right\}$. Поскольку выбор порядка параметров (u, v) или (v, u) взаимно однозначно определяет выбор поля N или $\widetilde{N}$, то понятие ориентации простой гладкой поверхности как двумерного многообразия совпадает с введенным в § 1 понятием ориентации поверхности. Если S — простая гладкая поверхность, то под термином «ориентированная поверхность S» будем понимать поверхность S с фиксированной ориентацией как в том, так и в другом смысле. Кроме того, будем пользоваться введенными в § 1 понятиями ориентированной кусочно-гладкой поверхности, положительного обхода контура на незамкнутой кусочно-гладкой ориентируемой поверхности и терминологией указания ориентации поверхности.

В частности, выражение

$$S = \{r : r(x, y) = (x, y, z(x, y)),\ (x, y) \in \overline{D}\}$$

задает верхнюю, а выражение

$$S = \{r : r(x, y) = (x, y, z(x, y)),\ (y, x) \in \overline{D}\}$$

— нижнюю сторону поверхности, определенной явной функцией $z = z(x, y)$; выражение

$$S = \{r : r(y, z) = \{x(y, z), y, z\},\ (y, z) \in \overline{D}\}$$

задает правую, а выражение

$$S = \{r : r(y, z) = \{x(y, z), y, z\},\ (z, y) \in \overline{D}\}$$

— левую сторону поверхности, определенной явной функцией $x = x(y, z)$.

Определение. Пусть S — кусочно-гладкая ориентированная поверхность, $S = \bigcup_{q=1}^{Q} S_q$, где S_q, $1 \leqslant q \leqslant Q$, — простые гладкие ориентированные многообразия (простые гладкие ориентированные поверхности) без общих внутренних точек. Интеграл от

2-формы ω по поверхности S или поверхностный интеграл второго рода обозначается $\iint\limits_S \omega$ и определяется равенством $\iint\limits_S \omega = \sum\limits_{q=1}^{Q} \iint\limits_{S_q} \omega$.

Определение поверхностного интеграла второго рода корректно, т. е. его величина не зависит от представления S в виде объединения непересекающихся многообразий.

Основные свойства поверхностного интеграла второго рода

1. Если S и $\tilde{S}$ есть обозначения одной и той же поверхности с противоположными ориентациями, то $\iint\limits_S \omega = -\iint\limits_{\tilde{S}} \omega$ (направленность интеграла).

2. $\iint\limits_S \alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2 = \alpha_1 \iint\limits_S \omega_1 + \alpha_2 \iint\limits_S \omega_2$,

где α_1 и α_2 — константы (линейность интеграла).

3. Если $S = S_1 \cup S_2$, поверхности S_1 и S_2 не имеют общих внутренних точек и их ориентации согласованы, то

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_{S_1} \omega + \iint\limits_{S_2} \omega \text{ (аддитивность интеграла).}$$

4. Пусть S — ориентированная гладкая поверхность, $N = \{n\}$ — ее ориентирующее поле нормалей. Тогда

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S (a_1 \cos\alpha + a_2 \cos\beta + a_3 \cos\gamma)\, dS,$$

где α, β, γ — углы вектора $n \in N$ с осями OX, OY, OZ соответственно, т. е. $n = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ (связь поверхностных интегралов первого и второго рода), $w = a_1 dy \wedge dz + a_2 dz \wedge dx + a_3 dx \wedge \wedge dy$.

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S yz dy \wedge dz + x^2 dz \wedge dx + yz dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \geqslant 0$ $(a > 0)$.

Решение. Поскольку $y \geqslant 0$, то уравнение полусферы S записывается в явном виде:

$$x = x,\ z = z,\ y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2},\ (x, z) \in \overline{D},$$

где область параметров $D = \{(x, z) : x^2 + z^2 < a^2\}$. Для отображения $\varphi : D \to R^3 : x = x,\ y = \sqrt{a^2 - x^2 - z^2},\ z = z$ имеем

$$\varphi'_x = \left(1, \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 0\right),\ \varphi'_z = \left(0, \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, 1\right),$$

$$[\varphi'_x \times \varphi'_z] = \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}, -1, \frac{-z}{\sqrt{a^2 - x^2 - z^2}}\right).$$

Следовательно, ориентация (x, z) области D определяет вектор нормали к S, направленный к центру полусферы, т. е. эта ориентация противоположна заданной. Итак, в нашем случае ориентированная полусфера записывается в виде

$$S=\{x=x,\ y=\sqrt{a^2-x^2-z^2},\ z=z,\ (z,\ x)\in D\}.$$

Согласно определениям находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω:

$$dy=\frac{-xdx-zdz}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},\quad \varphi^*\omega=-xzdx\wedge dz+$$

$$+x^2dz\wedge dx-z^2dx\wedge dz=(x^2+z^2+xz)\,dz\wedge dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \omega=\iint\limits_S yzdy\wedge dz+x^2dz\wedge dx+yzdx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D (x^2+z^2+xz)\,dz\wedge dx=\iint\limits_D (x^2+z^2+xz)\,dzdx=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a r^3(1+\cos\varphi\sin\varphi)\,dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S (4x^2+z^2)\,dy\wedge dz+4xydz\wedge dx+z^2dx\wedge dy,$$

где S — правая сторона части гиперболического цилиндра $4x^2-y^2=a^2$, лежащей внутри конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$ $(a>0)$.

Решение. Поскольку задана правая сторона поверхности S, выразим ее в виде $S=\{(x,\ y,\ z),\ x=x(y,\ z),\ y=y,\ z=z,\ (y,\ z)\in D\}$. Используя условие $x\geqslant 0$, получаем, что $x(y,\ z)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+y^2}$. Область D значений параметров является проекцией заданной части цилиндра $4x^2-y^2=a^2$ на плоскость ZY, границу ее находим как проекцию линии пересечения поверхностей $4x^2-y^2=a^2$ и $x=\sqrt{y^2+z^2}$, исключая, переменную x из этих двух уравнений: $a^2+y^2=4(y^2+z^2)$ или $3y^2+4z^2=a^2$. Итак,

$$S=\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+y^2},\ y=y,\ z=z,\ (y,\ z)\in D,\right.$$

$$\left. D=\{(y,\ z):4z^2+3y^2<a^2\}\right\}.$$

Согласно определению находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω:

$$dx = \frac{ydy}{2\sqrt{a^2+y^2}}, \quad \varphi^*\omega = (a^2+y^2+z^2)\,dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dy =$$
$$= (a^2+z^2)\,dy \wedge dz.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S (4x^2+z^2)dy \wedge dz + 4xydz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy =$$
$$= \iint\limits_D (a^2+z^2)\,dy \wedge dz = \iint\limits_D z^2 dydz + \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}}.$$

В полученном двойном интеграле сделаем замену:

$$y = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin\varphi, \quad z = \frac{a}{2}\cos\varphi.$$

Тогда

$$\iint\limits_D z^2 dydz = \frac{a^2}{2\sqrt{3}} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{a^2}{4} r^3 \cos^2\varphi dr = \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}}.$$

Итак, окончательно

$$\iint\limits_S \omega = \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}} + \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi a^4\, 17}{32\sqrt{3}}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S xdy \wedge dz - ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона части конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащей выше плоскости $z=0$ и внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

Решение. Внешняя нормаль к поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$ направлена от оси OZ, и в точках конуса, лежащих выше плоскости $z=0$, образует с этой осью тупой угол (см. рис. 47). Следовательно, задана нижняя сторона конуса. Используя условие $z\geqslant 0$ запишем S в виде $S=\{x=x,\ y=y,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ (y,\ x)\in D\}$. Областью D значений параметров является круг $\{(x,\ y):\ x^2+y^2<a^2\}$. Находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω:

$$dz = \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \varphi^*\omega = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \wedge dx -$$
$$- \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \wedge dx + \sqrt{x^2+y^2}\,dx \wedge dy = \frac{-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \wedge dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S xdy \wedge dz - ydz \wedge dx + zdx \wedge dy =$$

$$= -\iint\limits_D \frac{2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \wedge dx = -2\iint\limits_D \frac{y^2 dy dx}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= -2\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^a r^2 \sin^2 \varphi dr = -\frac{2\pi a^3}{3}.$$

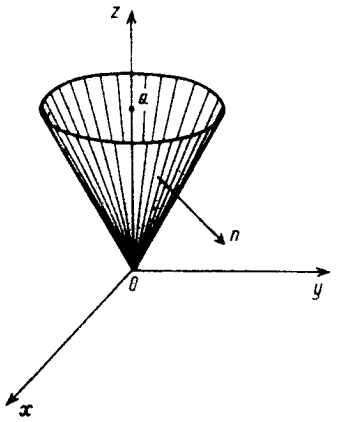

Рис. 47

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + xzdx \wedge dy,$$

где S — левая сторона поверхности

$$x = u^3 - v^3,\ y = u^2 v,\ z = uv^2,\ (u,\ v) \in I_{(0,0),\,(1,1)}.$$

Решение. Проверим сначала корректность задания стороны поверхности S, т. е. проверим, что существует непрерывное поле N нормалей к S, такое, что $\cos(n,\ OX) \leqslant 0$ для любого вектора $n \in N$. Обозначим через $\varphi: R^2 \to R^3$ отображение $x = u^3 - v^3$, $y = u^2 v$, $z = uv^2$, тогда

$$\varphi'_u = (3u^2,\ 2uv,\ v^2),\ \varphi'_v = (-3v^2,\ u^2,\ 2uv),$$

$$[\varphi'_u \times \varphi'_v] = (3u^2 v^2,\ -3v^4 - 6u^3 v,\ 3u^4 + 6uv^3).$$

Отсюда видим, что

$$S = (x = u^3 - v^3,\ y = u^2 v,\ z = uv^2,\ (v,\ u) \in I_{(0,0),\,(1,1)})$$

есть задание поверхности S с указанной в условии ориентацией. Находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω:

$$dy \wedge dz = \begin{vmatrix} u^2 & 2uv \\ 2uv & v^2 \end{vmatrix} dv \wedge du = -3u^2v^2 dv \wedge du,$$

$$dz \wedge dx = \begin{vmatrix} 2uv & -3v^2 \\ v^2 & 3u^2 \end{vmatrix} dv \wedge du = (6u^3v + 3v^4)\, dv \wedge du,$$

$$dx \wedge dy = \begin{vmatrix} -3v^2 & u^2 \\ 3u^2 & 2uv \end{vmatrix} dv \wedge du = (-6uv^3 - 3u^4)\, dv \wedge du,$$

$$\varphi^*\omega = -3u^2v^2u^2v\,(u^3 - v^3)\, dv \wedge du + u^3v^3\,(6u^3v + 3v^4)\, dv \wedge du -$$
$$- uv^2\,(u^3 - v^3)\,(6uv^3 + 3u^4)\, dv \wedge du = (-3u^7v^3 + 3u^4v^6 +$$
$$+ 6u^6v^4 + 3u^3v^7 - 3u^5v^5 + 6u^2v^8 - 3u^8v^2)\, dv \wedge du.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S xydy \wedge dz + yzdz \wedge dx + xzdx \wedge dy =$$
$$= \iint\limits_{I(0,0),\,(1,1)} (-3u^7v^3 + 3u^4v^6 + 6u^6v^4 + 3u^3v^7 - 3u^5v^5 +$$
$$+ 6u^2v^8 - 3u^8v^2)\, dv \wedge du = \int\limits_0^1 du \int\limits_0^1 (6u^2v^8 + 3u^3v^7 + 3u^4v^6 - 3u^5v^5 +$$
$$+ 6u^6v^4 - 3u^7v^3 - 3u^8v^2)\, dv = \int\limits_0^1 \left(\frac{6}{9} u^2 + \frac{3}{8} u^3 + \frac{3}{7} u^4 - \frac{3}{6} u^5 + \right.$$
$$\left. + \frac{6}{5} u^6 - \frac{3}{4} u^7 - u^8 \right) du = \frac{2}{9} + \frac{3}{32} + \frac{3}{35} - \frac{1}{12} + \frac{6}{35} -$$
$$- \frac{3}{32} - \frac{1}{9} = \frac{359}{1260}.$$

Пример. Вычислим $\iint\limits_S y^2dz \wedge dx + z^2dx \wedge dy - x^2dy \wedge dz$, где S — часть поверхности тела

$$V = \{(x,\ y,\ z) : 2x^2 + 2y^2 \leqslant az \leqslant x^2 + y^2 + a^2\} \quad (a > 0),$$

удовлетворяющая условию $y \geqslant 0$, и вектор нормали n, характеризующий ориентацию S в точке $M(0,\ a/2,\ 5a/4)$, образует острый угол с осью OZ.

Решение. Ориентация поверхности S, определенная вектором n, была подробно проанализирована в примере на с. 226. Этой ориентации соответствует верхняя сторона части параболо-

ида $S_1=\{(x, y, z): az=x^2+y^2+a^2,\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}$ и нижняя сторона части параболоида $S_2=\{(x, y, z): az=2x^2+2y^2,\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}$. Следовательно, ориентированная поверхность $S=S_1\cup S_2$, где

$$S_1=\left\{r: r(x, y)=\left\{x, y, \frac{x^2+y^2+a^2}{a}\right\},\ (x, y)\in\overline{D}\right\}$$

и

$$S_2=\left\{r: r(x, y)=\left\{x, y, \frac{2x^2+2y^2}{a}\right\},\ (y, x)\in\overline{D}\right\},$$

$$D=\{(x, y): x^2+y^2<a^2,\ y>0\}.$$

Находим $\varphi_1{}^*\omega$ — перенос формы

$$\omega=y^2dz\wedge dx-x^2dy\wedge dz+z^2dx\wedge dy$$

с S_1 на D:

$$dz=\frac{1}{a}(2xdx+2ydy),\quad \varphi_1^*\omega=-\frac{2x^3}{a}dy\wedge dx+\frac{2y^3}{a}dy\wedge dx+$$

$$+\frac{(x^2+y^2+a^2)^2}{a^2}dx\wedge dy=\frac{1}{a^2}(2ax^3-2ay^3+(x^2+y^2+a^2)^2)\,dx\wedge dy;$$

$\varphi_2^*\omega$ — перенос формы

$$\omega=y^2dz\wedge dx-x^2dy\wedge dz+z^2dx\wedge dy$$

с S_2 на D:

$$dz=\frac{4}{a}(xdx+ydy),$$

$$\varphi_2^*\omega=\frac{4}{a}(y^3dy\wedge dx)-\frac{4}{a}x^3dy\wedge dx+\frac{4}{a^2}(x^2+y^2)^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\frac{4}{a^2}(ay^3-ax^3-(x^2+y^2)^2)\,dy\wedge dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S\omega=\iint\limits_{S_1}\omega+\iint\limits_{S_2}\omega=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D[2ax^3-2ay^3+(x^2+y^2+a^2)^2]\,dx\wedge dy+$$

$$+\frac{4}{a^2}\iint\limits_D[ay^3-ax^3-(x^2+y^2)^2]\,dy\wedge dx=\frac{1}{a^2}\iint\limits_D[2ax^3-2ay^3+$$

$$+(x^2+y^2+a^2)^2+4ay^3-4ax^3-4(x^2+y^2)^2]\,dxdy=$$

$$=\frac{1}{a^2}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^a[r^4(2a\sin^3\varphi-2a\cos^3\varphi)+ra^4+2r^3a^2-3r^5]\,dr=$$

$$=\frac{a^6}{a^2}\left(\frac{4}{3}\,\frac{2}{5}+\pi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right)=a^4\left(\frac{8}{15}+\pi/2\right).$$

§ 5. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Еще раз обратим внимание на то, что материал, изложенный в этом параграфе, рассмотрен в § 4* в терминологии векторных полей. Читателю полезно сравнить определения, основные свойства рассматриваемых понятий и ход решения примеров.

Пусть в области $D \subset R^3$ задано векторное поле $A=\{A_x, A_y, A_z\}$.

Определение. Если координаты A_x, A_y, A_z векторного поля A являются гладкими функциями в D, то

1. скаляр $\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$ называется дивергенцией поля A и обозначается $\operatorname{div} A$;

2. вектор

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = i\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+$$

$$+k\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

называется ротором (вихрем) поля A и обозначается $\operatorname{rot} A$;

3. дифференциальная 1-форма

$$\omega^1 = A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

называется формой работы поля A и обозначается $\omega_A{}^1$;

4. дифференциальная 2-форма

$$\omega^2 = A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy$$

называется формой потока поля A и обозначается $\omega_A{}^2$.

Определение. Пусть в области D заданы векторное поле $A=\{A_x, A_y, A_z\}$ и ориентированная кривая L. Обозначим через τ единичный вектор касательной к L, направленный соответственно ориентации L. Интеграл

$$\int_L \omega_A^1 \equiv \int_L (A \cdot \tau)\, ds$$

называется работой поля A вдоль кривой L. Если кривая L замкнута, то этот интеграл обычно называют циркуляцией поля вдоль кривой L.

Определение. Пусть в области D заданы векторное поле $A=\{A_x, A_y, A_z\}$ и ориентированная поверхность S. Обозначим через n единичный вектор нормали, характеризующий ориентацию S. Интеграл

$$\int_S \omega_A^2 = \iint_S (A \cdot n)\, dS$$

называется потоком поля A через поверхность S.

Определение. Кривая L называется векторной линией поля A, если в каждой точке $M \in L$ вектор поля касателен к L.

Из определения следует, что векторными линиями поля $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ являются интегральные кривые системы уравнений

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}.$$

Определение. Область, ограниченная поверхностью S, называется векторной трубкой поля A, если в каждой точке $M \in S$ вектор поля ортогонален вектору n нормали к S.

Из определения следует, что поток поля A через поверхность векторной трубки равен нулю.

Определение. Векторное поле A, заданное в области $D \subset R^3$, называется потенциальным, если существует функция $u: D \to R$, такая, что $\operatorname{grad} u = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\} = A$. Функция u называется потенциалом поля A.

Потенциальность поля A эквивалентна точности формы $\omega_A{}^1$ работы этого поля: $\omega_A{}^1 = du$. Следовательно, работа потенциального поля вдоль кривой $\overset{\smile}{AB}$ равна разности значения потенциала в конечной и начальной точках этой кривой:

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (A \cdot \tau)\, ds = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} A_x dx + A_y dy + A_z dz = u(B) - u(A).$$

Необходимым и достаточным условием потенциальности поля является равенство нулю работы его вдоль любого кусочно-гладкого контура $L \subset D$ (см. свойство криволинейного интеграла второго рода).

Определение. Векторное поле A, заданное в области $D \subset R^3$, называется соленоидальным, если в области D существует векторное поле W, такое, что $\operatorname{rot} W = A$. Поле W называется векторным потенциалом поля A.

Соленоидальность поля A эквивалентна точности формы потока этого поля: $\omega_A^2 = d(\omega_A^1)$. Следовательно, для соленоидального поля справедливо равенство $\operatorname{div} A = 0$, так как

$$d\omega_A^2 = d(A_x dy \wedge dz + A_y dz \wedge dx + A_z dx \wedge dy) =$$

$$= \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Теорема Пуанкаре показывает, что если область D такова, что любую замкнутую поверхность, лежащую в D, можно непрерывно стянуть в точку, не выходя из D, то поле A, определенное в этой области и удовлетворяющее условию $\operatorname{div} A = 0$, соленоидально. Так как для потенциального поля F имеем, что $d\omega_F^1 = d(du) = 0$, то векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до слагаемого, являющегося потенциальным по-

лем. Один из векторных потенциалов $W=\{W_x, W_y, W_z\}$ соленоидального поля $A=\{A_x, A_y, A_z\}$ получают следующим образом: полагают $W_x=0$; за W_y берут одну из первообразных функций A_z относительно переменной x; тогда W_z будет та из первообразных функций $-A_y$ относительно переменной x, которая отвечает уравнению

$$\frac{\partial W_z}{\partial y}-\frac{\partial W_y}{\partial z}=A_x.$$

Запишем это так:

$$W_y=\int A_z dx,\ W_z=-\int A_y dx+\varphi(y, z),$$

где функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=A_x+\frac{\partial}{\partial z}W_y+\frac{\partial}{\partial y}\int A_y dx.$$

Выбирая одно из решений этого уравнения, окончательно определяем функции

$$W_x=0,\ W_y,\ W_z.$$

Пример. Проверив, что поле $A=\{x-y+z,\ y+z-x,\ x+y-2z\}$ соленоидально, найдем его векторный потенциал.

Решение. Поле A соленоидально, так как

$$\operatorname{div} A=\frac{\partial}{\partial x}(x-y+z)+\frac{\partial}{\partial y}(y+z-x)+\frac{\partial}{\partial z}(x+y-2z)=$$
$$=1+1-2=0.$$

Одним из векторных потенциалов поля A является поле $W=\{W_x, W_y, W_z\}$, где

$$W_x=0,$$

$$W_y=\int(x+y-2z)\,dx=\frac{x^2}{2}+yx-2zx,$$

$$W_z=\int(x-y-z)\,dx+\varphi(y, z)=\frac{x^2}{2}-yx-zx+\varphi(y, z),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=x-y+z+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^2}{2}+yx-2zx\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x^2}{2}+yx+zx\right),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-y+z,$$

$$\varphi=-\frac{y^2}{2}+zy.$$

Итак, векторным потенциалом поля $A=\{x-y+z,\ y+z-x,\ x+y-2z\}$ является векторное поле $F=W+\operatorname{grad} u$, где

$$W=\left\{0,\ \frac{x^2}{2}+yx-2xz,\ \frac{x^2-y^2}{2}-xy-xz+zy\right\}$$

и u — произвольная функция класса C^2.

Теорема (формула Грина). *Пусть область D лежит в R^2 и граница ∂D области D состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров $\partial D=\bigcup\limits_{q=1}^{Q} L_q$. Обозначим через ∂D^+ объединение контуров L_q $(1\leqslant q\leqslant Q)$, ориентированных так, чтобы при их обходе область D оставалась слева. Тогда если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то*

$$\int\limits_{\partial D^+} P dx+Q dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy.$$

Если через ω обозначить форму $Pdx+Qdy$, то формула Грина запишется в виде

$$\int\limits_{\partial D^+}\omega=\iint\limits_D d\omega.$$

Если контур L лежит на поверхности S, то назовем часть S, ограниченную L, поверхностью, натянутой на контур L. Если поверхность S ориентируема и контур L ориентирован, то ориентацию S, при которой заданный обход контура L положителен, назовем согласованной с ориентацией L.

Теорема (формула Стокса). *Пусть область D лежит в R^3; функции P, Q, $R\in C^1(\bar{D})$; ориентированный контур $L\subset D$ и $S\subset D$ — натянутая на L ориентированная поверхность, ориентация которой согласована с ориентацией L. Тогда*

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

На практике поверхностный интеграл второго рода, стоящий справа, часто переводят в поверхностный интеграл первого рода и пользуются формулой Стокса в виде

$$\int\limits_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\iint\limits_S\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора нормали к S, характеризующего ориентацию S.

Если через ω обозначить форму $Pdx+Qdy+Rdz$, то формула Стокса запишется в виде

$$\int_L \omega = \iint_S d\omega.$$

В терминах векторного анализа формула Стокса выглядит так. Пусть область D, контур L и поверхность S удовлетворяют сформулированным выше условиям; n — единичный вектор нормали к S, характеризующий ориентацию S, τ — единичный вектор касательной к L, направленный соответственно ориентации L. Тогда циркуляция гладкого в D векторного поля A вдоль контура L равна потоку $\operatorname{rot} A$ через поверхность S

$$\int_L (A\cdot\tau)ds = \int_L A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = \iint_S (\operatorname{rot} A\cdot n)\,dS =$$

$$= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} dS.$$

Теорема (формула Остроградского — Гаусса). *Пусть область D лежит в R^3 и граница ∂D области D состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей. Тогда если функции P, Q, $R\subset C^1(\bar{D})$, то*

$$\iint_{\partial D} P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dy\wedge dx =$$

$$= \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где первый интеграл берется по внешней относительно D стороне ∂D.

Если через ω обозначить форму

$$P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dy\wedge dx,$$

то формула Остроградского — Гаусса запишется в виде

$$\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D d\omega.$$

В терминах векторного анализа формула Остроградского — Гаусса выглядит так. Пусть область D удовлетворяет сформулированному выше условию. Тогда поток гладкого в D векторного поля A через поверхность ∂D равен интегралу от $\operatorname{div} A$ по D:

$$\iint\limits_{\partial D} (A\cdot n)\, dS = \iint\limits_{\partial D} A_x\, dy \wedge dz + A_y\, dz \wedge dx + A_z\, dx \wedge dy =$$

$$= \iiint\limits_{D} \operatorname{div} A\, dx\, dy\, dz.$$

Область $D \subset R^2$ называется односвязной, если для любого контура $L \subset D$ область $D_L \subset R^2$, ограниченная L, целиком лежит в D.

Если область D односвязна, то любой контур $L \subset D$ можно непрерывно стянуть в точку, не выходя из D.

Теорема. *Пусть область $D \subset R^3$ ($D \subset R^2$) такова, что любой контур $L \subset D$ непрерывно стягивается в точку, не выходя из области D. Тогда гладкая замкнутая дифференциальная 1-форма ω, заданная в D, точна в этой области.*

В терминах векторного анализа это утверждение выглядит так:

Пусть область $D \subset R^3$ ($D \subset R^2$) такова, что любой контур $L \subset D$ непрерывно стягивается в точку, не выходя из D. Тогда гладкое векторное поле, заданное в D, потенциально тогда и только тогда, когда всюду в D $\operatorname{rot} A = 0$. Поле, удовлетворяющее условию $\operatorname{rot} A \equiv 0$, называют безвихревым полем.

Естественная область применения формул Грина и Остроградского — Гаусса — это интегралы второго рода по замкнутым контурам на плоскости и замкнутым поверхностям в пространстве. Но иногда, особенно в пространстве, вычисления упрощаются, если замкнуть незамкнутую поверхность или кривую и считать данный интеграл как разность преобразованного интеграла по замкнутой поверхности или кривой и соответствующего интеграла по замыкающему множеству. В качестве такого множества обычно берутся отрезки прямых или части плоскостей, параллельных координатным, поскольку по таким множествам интеграл второго рода вычисляется наиболее просто.

Пример. Вычислим указанным способом интеграл из примера на с. 261:

$$\iint\limits_{S} y^2\, dz \wedge dx - x^2\, dy \wedge dz + z^2\, dx \wedge dy,$$

где S — часть поверхности тела $V = \{x,\ y,\ z) : 2x^2 + 2y^2 \leqslant az \leqslant x^2 + y^2 + a^2\}$ $(a > 0)$, вырезанная условием $y \geqslant 0$, и нормаль, характеризующая ориентацию S, в точке $M = (0,\ a/2,\ 5a/4)$ образует острый угол с осью OZ.

Решение. Замкнем поверхность S частью плоскости $y = 0$. Тогда полученная поверхность $\tilde{S}$ будет границей тела: $\tilde{V} = \{(x,\ y,\ z) : y \geqslant 0,\ 2x^2 + 2y^2 \leqslant az \leqslant x^2 + y^2 + a^2\}$. Точка $M = (0,\ a/2,\ 5a/4)$ лежит на верхней границе тела $\tilde{V}$ и нормаль в этой точке направлена вверх, следовательно, интеграл берется по внешней стороне поверхности $\partial\tilde{V}$. На поверхности S_1 — части плоскости $y = 0$, входящей в $\tilde{V}$, внешняя нормаль направлена противоположно оси

OY, следовательно, запись ориентированной поверхности S_1 есть

$$S_1=\{x=x,\ y=0,\ z=z,\ (x,\ z)\in D,\ D=\{(x,\ z):2x^2\leqslant az\leqslant x^2+a^2\}\}.$$

Итак, в силу формулы Остроградского — Гаусса

$$\iint\limits_S y^2\,dz\wedge dx-x^2\,dy\wedge dz+z^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_{\partial\widetilde{V}} y^2\,dz\wedge dx-x^2\,dz\wedge dy+z^2\,dx\wedge dy-$$

$$-\iint\limits_{S_1} y^2\,dz\wedge dx-x^2\,dz\wedge dy+z^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\iiint\limits_V(2y-2x+2z)dxdydz-\iint\limits_{S_1} y^2\,dz\wedge dx-x^2\,dy\wedge dz+z^2\,dx\wedge dy.$$

Находим сужение $\varphi^*\omega$ формы $\omega=y^2dz\wedge dx+x^2dz\wedge dy+z^2dx\wedge dy$ на $S_1: dy=0$, $\varphi^*\omega=0$. Так как

$$V:\{(x,\ y,\ z):x^2+y^2\leqslant a^2,\ 2x^2+2y^2\leqslant az\leqslant x^2+y^2+a^2,\ y\geqslant 0\},$$

то, следовательно,

$$\iint\limits_S y^2\,dz\wedge dx-x^2\,dy\wedge dz+z^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\iiint\limits_V(2y-2x+2z)\,dx\,dy\,dz=2\iint\limits_D dx\,dy\int\limits_{\frac{2x^2+2y^2}{a}}^{\frac{x^2+y^2+a^2}{a}}(y-x+z)\,dz=$$

$$=\frac{2}{a^2}\iint\limits_D\Big[a(-x+y)(a^2-x^2-y^2)+$$

$$+\frac{1}{2}(3x^2+3y^2+a^2)(a^2-x^2-y^2)\Big]\,dx\,dy=$$

$$=\frac{2}{a^2}\int\limits_0^{\pi}d\varphi\int\limits_0^a\Big[(a^3r^2-ar^4)(-\cos\varphi+\sin\varphi)+\frac{1}{2}(a^4r+2a^2r^3-3r^5)\Big]\,dr=$$

$$=a^4\left(\frac{8}{15}+\frac{\pi}{2}\right).$$

Пример. Найдем поток вектора $A=x^3i+y^3j+z^3k$ через:
а) боковую поверхность конуса

$$D=\{(x,\ y,\ z):H^2(x^2+y^2)\leqslant z^2R^2,\ 0\leqslant z\leqslant H\}\ (R>0);$$

б) через полную поверхность этого конуса.

Решение. Обозначим через n единичный вектор внешней нормали к границе ∂D конуса D.

Начнем с п. б). В силу формулы Остроградского — Гаусса поток вектора A через поверхность ∂D есть

$$\int\limits_{\partial D}(A\cdot n)\,dS=\iiint\limits_{D}\operatorname{div}A\,dx\,dy\,dz=\iint\limits_{x^2+y^2<R^2}dx\,dy\int\limits_{\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{H}(3x^2+3y^2+$$

$$+3z^2)\,dz=3\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{R}r\,dr\int\limits_{Hr/R}^{H}(r^2+z^2)\,dz=$$

$$=6\pi\int\limits_{0}^{R}\left[r^3\left(H-\frac{Hr}{R}\right)+\frac{r}{3}\left(H^3-\frac{H^3r^3}{R^3}\right)\right]dr=$$

$$=2\pi\int\limits_{0}^{R}\left[3Hr^3-r^4\left(\frac{3H}{R}+\frac{H^3}{R^3}\right)+rH^3\right]dr=$$

$$=2\pi\left[\frac{3}{4}HR^4-\frac{1}{5}(3HR^4+H^3R^2)+\frac{1}{2}H^3R^2\right]=$$

$$=\frac{3\pi}{10}R^2H(R^2+2H^2).$$

Вычисление потока вектора A через боковую поверхность конуса D проведем двумя способами.

1. Обозначим через S_1 и S_2 соответственно внешнюю сторону боковой и верхней поверхности конуса D. Тогда вектор n, характеризующий ориентацию S_2, сонаправлен оси OZ, следовательно, запись ориентированной поверхности S_2 есть

$$S_2=\{(x,\ y,\ z):x=x,\ y=y,\ z=H,\ (x,\ y)\in D,$$

$$D=\{(x,\ y):x^2+y^2<R^2\}\}.$$

Находим сужение $\varphi^*\omega$ формы

$$\omega=(A\cdot n)\,dS=x^3\,dy\wedge dz+y^3\,dz\wedge dx+z^3\,dx\wedge dy$$

на $S_2:dz=0,\ \varphi^*\omega=H^3\,dx\wedge dy$. Следовательно,

$$\iint\limits_{S_1}(A\cdot n)\,dS=\iint\limits_{\partial D}(A\cdot n)\,dS-\iint\limits_{S_2}(A\cdot n)\,dS=$$

$$=\frac{3\pi R^2H}{10}(R^2+2H^2)-\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}H^2\,dx\,dy=$$

$$=\frac{3\pi R^2H}{10}(R^2+2H^2)-\pi R^2H^3=\frac{\pi R^2H}{10}(3R^2-4H^2).$$

2. Вектор n, характеризующий ориентацию S_1 — боковой поверхности конуса D, образует с осью OZ тупой угол, т. е. внешней стороной поверхности S_1 является нижняя сторона. Поэтому запишем ориентированную поверхность S_1 так:

$$S_1 = \left\{(x,\ y,\ z) : x = x,\ y = y,\ z = \frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2},\ (y,\ x) \in D,\right.$$

$$\left. D = \{(x,\ y) : x^2+y^2 < R^2\}\right\}.$$

Находим сужение $\varphi^*\omega$ формы

$$\omega = (A\cdot n)\,dS = x^3\,dy \wedge dz + y^3\,dz \wedge dx + z^3\,dx \wedge dy$$

на S_1: $dz = \dfrac{H}{R}\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

$$\varphi^*\omega = \frac{H}{R}\frac{x^4\,dy \wedge dx}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{H}{R}\frac{y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy \wedge dx +$$

$$+ \frac{H^3}{R^3}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,dx \wedge dy = \frac{H}{R}\left(-\frac{H^2}{R^2}(x^2+y^2)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy \wedge dx.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{S_1}(A\cdot n)\,dS = \iint\limits_{S_1} x^3\,dy \wedge dz + y^3\,dz \wedge dx + z^3\,dx \wedge dy =$$

$$= \frac{H}{R}\iint\limits_{D}\left(-\frac{H^2}{R^2}(x^2+y^2)^{3/2} + \frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy \wedge dx =$$

$$= \frac{H}{R^3}\iint\limits_{D}\left[-H^2(x^2+y^2)^{3/2} + R^2\cdot\frac{x^4+y^4}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]dy\,dx =$$

$$= \frac{H}{R^3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R}\left[-H^2 + R^2(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)\right]r^4\,dr = \frac{\pi H R^2}{10}(3R^2 - 4H^2).$$

Пример. Вычислим

$$\int\limits_L (\cos y + y\sin x + y^2)\,dx - (\cos x + x\sin y + x^2)\,dy,$$

где L — часть кривой $r = a(1+\cos\varphi)$ $(a>0)$ от точки $A = (2a,\ 0)$ до точки $O = (0,\ 0)$, лежащая в верхней полуплоскости (декартова и полярная системы координат совмещены).

Решение. Замкнем кривую $\overset{\smile}{AO}$ отрезком $\overset{\smile}{OA}$ оси OX (рис. 48). Направление кривой $\overset{\smile}{AO}$ индуцирует обход полученного контура так, что область $D=\{(r, \varphi): 0<\varphi<\pi, 0<r<a(1+$

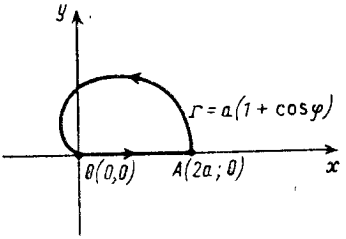

Рис. 48

$+\cos\varphi)\}$, ограниченная им, остается слева. Следовательно, применяя формулу Грина, получаем, что

$$\int\limits_L (\cos y + y\sin x + y^2)\,dx - (\cos x + x\sin y + x^2)\,dy +$$

$$+\int\limits_{OA} (\cos y + y\sin x + y^2)\,dx - (\cos x + x\sin y - x^2)\,dy =$$

$$= \iint\limits_D (\sin y - \sin x - 2y + \sin x - \sin y - 2x)\,dx\,dy =$$

$$= -2\iint\limits_D (x+y)\,dx\,dy = -2\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\,dr =$$

$$= -\frac{2}{3}a^3\int\limits_0^{\pi} [(1+\cos\varphi)^3\sin\varphi + \cos\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos^3\varphi +$$

$$+\cos^4\varphi]\,d\varphi = -\frac{2}{3}a^3\cdot\frac{1}{4}(1+\cos\varphi)^4\Big|_{\pi}^{0} - \frac{2}{3}a^3\times$$

$$\times\left[3\,\frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)}\right] = -8/3a^3 - \frac{5\pi a^3}{4}.$$

Так как $OA=\{x=x,\ y=0,\ 0\leqslant x\leqslant 2a\}$, то сужением $\varphi^*\omega$ формы $\omega=(\cos y + y\sin y + y^2)\,dx - (\cos x + x\sin y + x^2)\,dy$ на OA является форма $\tilde{\omega}=dx$. Следовательно,

$$\int\limits_{OA} (\cos y + y\sin y + y^2)\,dx - (\cos x + x\sin y + x^2)\,dy = \int\limits_0^{2a} dx = 2a$$

и, окончательно,

$$\int_L (\cos y + y \sin y + y^2)\, dx - (\cos x + x \sin y + x^2)\, dy =$$

$$= -\frac{8}{3} a^3 - \frac{5\pi a^3}{4} - 2a.$$

В дополнение к свойству 5 криволинейного интеграла второго рода (см. с. 248) выведем еще одну формулу связи криволинейных интегралов первого и второго рода.

Пусть L — простой гладкий контур, лежащий в R^2; $\tau = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ — единичный вектор касательной, направленный соответственно положительному обходу L, и $n = \{\cos\beta, \sin\beta\}$ — единичный вектор внешней нормали к L. Так как вектор n направлен вправо от вектора τ, то угол поворота от τ к n равен $(-\pi/2)$. Отсюда получаем, что $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = -\cos\alpha$ и, следовательно, в силу свойства 5 для функций $a_1 : R^2 \to R$, $a_2 : R^2 \to R$ имеем равенство

$$\int_L (a_1 \cos\beta + a_2 \sin\beta)\, ds = \int_L (-a_2 \cos\alpha + a_1 \sin\alpha)\, ds = \int_L a_1\, dy - a_2\, dx.$$

Пример. Пусть D — односвязная область в R^2, кусочно-гладкий контур L лежит в D и $f \in C^2(D)$. Преобразуем в двойной интеграл криволинейный интеграл $\int_L \frac{\partial f}{\partial n}\, ds$, где n — вектор внешней нормали к контуру L.

Решение. Не ограничивая общности, можно считать вектор n единичным, тогда $n = \{\cos\beta, \sin\beta\}$ и $\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\beta$. Применяя полученное выше равенство, получаем в силу формулы Грина, что

$$\int_L \frac{\partial f}{\partial n}\, ds = \int_L \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\beta \right) ds =$$

$$= \int_L \frac{\partial f}{\partial x}\, dy - \frac{\partial f}{\partial y}\, dx = \iint_{D_L} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx\, dy,$$

где D_L — область, ограниченная контуром L.

Пример. Вычислим интеграл Гаусса

$$u(x_0, y_0) = \int_L \frac{\cos(r, n)}{|r|}\, ds,$$

где L — простой гладкий контур в R^2, $r = \{x - x_0, y - y_0\}$ — вектор из точки $M_0 = (x_0, y_0)$, не лежащей на L, в точку $M = (x, y)$ контура L и n — вектор внешней нормали к L.

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0=0$, $y_0=0$ и $n=\{\cos\beta, \sin\beta\}$ — единичный вектор. Тогда

$$\cos(r, n)=\frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{|r|}$$

и в силу полученного выше равенства

$$\int\limits_L \frac{\cos(r, n)}{|r|}\,ds=\int\limits_L \frac{x\cos\beta+y\sin\beta}{x^2+y^2}\,ds=\int\limits_L \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Дифференциальная 1-форма $\omega=\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}$ рассматривалась на с. 252. Эта форма замкнута в любой области, не содержащей начала координат, и

$$\int\limits_{C_a^+} \frac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int\limits_{C_a^+}\omega=2\pi,$$

где C_a^+ — окружность $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$ с положительным направлением обхода.

Если начало координат лежит вне области D, ограниченной контуром L, то в D форма ω гладкая и, следовательно, применима формула Грина, в силу которой имеем, что

$$\int\limits_L \frac{xdy-y\,dx}{x^2+y^2}=\int\limits_L\omega=\iint\limits_D d\omega=0.$$

Если же начало координат лежит внутри области D, ограниченной контуром L, то возьмем область D_a, границей которой ∂D_a является контур L и окружность $C_a: x^2+y^2=a^2$. Число $a>0$ берется достаточно малым, чтобы окружность C_a лежала внутри D. Область D_a лежит слева от контура L при положительном его обходе и слева от окружности C_a при отрицательном ее обходе. Обозначим через C_a^+ окружность C_a с положительным направлением обхода и через C_a^- — с отрицательным.

В области D_a форма ω — гладкая, следовательно, применима формула Грина, в силу которой имеем, что

$$\int\limits_L\omega+\int\limits_{C_a^-}\omega=\int\limits_{\partial D_a}\omega=\iint\limits_{D_a} d\omega=0.$$

Отсюда получаем, что

$$\int\limits_L\omega=-\int\limits_{C_a^-}\omega=\int\limits_{C_a^+}\omega=2\pi.$$

Итак, интеграл Гаусса $u(x_0, y_0)$ равен нулю для любой точки $M=(x_0, y_0)$, лежащей вне области, ограниченной контуром L, и

равен 2π для любой точки $M=(x_0, y_0)$, лежащей внутри этой области.

Область применения формулы Стокса — это вычисление криволинейных интегралов второго рода $\int\limits_L \omega$, когда кривая L задана как пересечение двух поверхностей $L: F_1(x, y, z)=0$, $F_2(x, y, z)=0$. Во-первых, при таком условии уже определена поверхность, натянутая на L; во-вторых, переход к параметрическому заданию L и нахождение соответствующего сужения $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω требует нетривиальных преобразований.

Пример. Найдем циркуляцию вектора $A=\{x(y+z), y(x+z), z(x+y)\}$ вдоль кривой $L: \{x^2+y^2+z^2=2Rx,$

$$x^2+y^2=2rx,\ z\geqslant 0\ \ (0<r<R)\},$$

положительно ориентированной на внешней стороне сферы

$$x^2+y^2+z^2=2Rx.$$

Решение. Кривая L лежит как на сфере $x^2+y^2+z^2=2Rx$, так и на цилиндре $x^2+y^2=2rx$, но условиям применения формулы Стокса удовлетворяет только часть сферы, поскольку она является гладкой поверхностью, натянутой на L (см. с. 223).

Следовательно,

$$\int\limits_L A_x\,dx+A_y\,dy+A_z\,dz=\int\limits_L x(y+z)\,dx+y(x+z)\,dy+z(x+y)\,dz=$$

$$=\iint\limits_S d(x(y+z)\,dx+y(x+z)\,dy+z(x+y)\,dz)=$$

$$=\iint\limits_S (z-y)\,dy\wedge dz+(x-z)\,dz\wedge dx+(y-x)\,dx\wedge dy,$$

где S есть часть внешней стороны верхней полусферы $x^2+y^2+z^2=2Rx$, $z\geqslant 0$, лежащая внутри цилиндра $x^2+y^2=2rx$. Поскольку на верхней полусфере внешняя сторона является одновременно верхней стороной, то, выразив явно зависимость z от x и y, получаем запись ориентированной поверхности S:

$$S=\{(x, y, z): x=x,\ y=y,\ z=\sqrt{2xR-x^2-y^2},\ (x, y)\in D,$$

$$D=\{(x, y): x^2+y^2<2rx\}\}.$$

Находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы ω:

$$dz=\frac{(R-x)\,dx-y\,dy}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}=\frac{(R-x)\,dx-y\,dy}{z},$$

$$\varphi^*\omega=(z-y)\frac{R-x}{z}\,dy\wedge dx-(x-z)\frac{y}{z}\,dy\wedge dx+$$

$$+(y-x)\,dx\wedge dy=\left(\frac{yR}{z}-R\right)dx\wedge dy.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S \omega = \iint\limits_S (z-y)\,dy \wedge dz + (x-z)\,dz \wedge dx + (y-x)\,dx \wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D \left(\frac{yR}{z} - R\right) dx \wedge dy = \iint\limits_D \left(\frac{yR}{z} - R\right) dx\,dy.$$

Так как D симметрична относительно оси OX, а функция $f(x, y, z) = \frac{yR}{z} = \frac{yR}{\sqrt{2Rx - x^2 - y^2}}$ нечетна относительно y, то $\iint\limits_D \frac{yR}{z}\,dx\,dy = 0$ и следовательно,

$$\int\limits_L A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz = -R|D| = -\pi R r^2.$$

Пример. Применяя формулу Стокса, вычислим интеграл

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} z\,dx + 2x\,dy - y\,dz, \text{ где } \overset{\smile}{AB} \text{ — кривая}$$

$$x^2 + y^2 = 2ax,\ az = xy,\ z \geqslant 0,\ A = (0,\ 0,\ 0),\ B = (2a,\ 0,\ 0)\ \ (a > 0).$$

Решение. Так как отрезок BA оси OX лежит на поверхности параболоида $az=xy$, то, объединяя его с кривой AB, получим замкнутый контур L, лежащий на поверхности $az=xy$. Обход полученного контура положителен, если рассматривать его на нижней стороне параболоида. Итак, натянутая на контур L часть параболоида с согласованной ориентацией есть

$$S = \Big\{(x,\ y,\ z) : x = x,\ y = y,\ z = \frac{xy}{a},\ \ (y,\ x) \in D,\ D =$$

$$= \{(x,\ y) : x^2 + y^2 < 2ax,\ y > 0\}\Big\}.$$

Перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы

$$\omega = z\,dx + 2x\,dy - y\,dz$$

на отрезок BA в силу того, что $z=0$, $dy=0$ и $dz=0$, дает нулевую форму, следовательно,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} z\,dx + 2x\,dy - y\,dz = \int\limits_L z\,dx + 2x\,dy - y\,dz = \int\limits_L \omega.$$

Применяя формулу Стокса, получаем, что

$$\int\limits_L \omega = \iint\limits_S d\omega = \iint\limits_S dz \wedge dx + 2dx \wedge dy - dy \wedge dz.$$

Находим соответствующий перенос $\varphi^*\omega$ подынтегральной формы

$$\omega = dz \wedge dx + 2dx \wedge dy - dy \wedge dz,$$

$$dz = \frac{1}{a}(x\,dy + y\,dx),$$

$$\varphi^*\omega = \frac{1}{a} x\,dy \wedge dx + 2dx \wedge dy - \frac{1}{a} y\,dy \wedge dx =$$

$$= \frac{1}{a}(x - y - 2a)\,dy \wedge dx;$$

$$\iint\limits_S dz \wedge dx + 2dx \wedge dy - dy \wedge dz = \frac{1}{a}\iint\limits_D (x - y - 2a)\,dy \wedge dx =$$

$$= \frac{1}{a}\iint\limits_D (x - y - 2a)\,dy\,dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2a\cos\varphi} r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,dr - a^2\pi =$$

$$= \frac{8a^2}{3}\int\limits_0^{\pi/2} (\cos^4\varphi - \sin\varphi\cos^3\varphi)\,d\varphi - a^2\pi =$$

$$= \frac{8a^2}{3}\left[\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(5/2)\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} - \frac{1}{4}\right] - a^2\pi =$$

$$= -\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi - a^2\pi = -\frac{2}{3}a^2 - \frac{\pi a^2}{2}$$

Пример. Проверим, что дифференциальная 1-форма

$$\omega = (\cos y + y\cos x)\,dx + (\sin x - x\sin y)\,dy$$

точна и найдем функцию $f(x, y)$, для которой $df = \omega$.

Решение. Так как форма $\omega = (\cos y + y\cos x)\,dx + (\sin x - x\sin y)\,dy$ является гладкой на всей плоскости R^2, то необходимым и достаточным условием ее точности является ее замкнутость, т. е. справедливость равенства $d\omega = 0$. Действительно,

$$d\omega = dy \wedge dx(-\sin y + \cos x) + dx \wedge dy(\cos x - \sin y) = 0,$$

функцию $f(x, y)$ находим по уже рассмотренному правилу (см. с. 254):

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) + \int\limits_0^{x_0} dx + \int\limits_0^{y_0} (\sin x_0 - x_0\sin y)\,dy =$$

$$= x_0 + y_0\sin x_0 + x_0\cos y_0 - x_0 = y_0\sin x_0 + x_0\cos y_0,$$

откуда $f(x, y) = y\sin x + x\cos y + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Проверим, что векторное поле

$$A=\left\{\sqrt{z}+\frac{y}{2\sqrt{x}},\ \sqrt{x}+\frac{z}{2\sqrt{y}},\ \sqrt{y}+\frac{x}{2\sqrt{z}}\right\}$$

потенциально в первом октанте ($x>0$, $y>0$, $z>0$) и найдем его потенциал.

Решение. Необходимым и достаточным условием потенциальности поля является выполнение равенства $\operatorname{rot} A=0$. Действительно,

$$\operatorname{rot} A=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{z}+\frac{y}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x}+\frac{z}{2\sqrt{y}} & \sqrt{y}+\frac{x}{2\sqrt{z}} \end{vmatrix}=$$

$$=i\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)+j\left(\frac{1}{2\sqrt{z}}-\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)+k\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\equiv 0.$$

Поэтому существует функция $u(x, y, z)$, такая, что $\operatorname{grad} u=A$, т. е.

$$du=\left(\sqrt{z}+\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)dx+\left(\sqrt{x}+\frac{z}{2\sqrt{y}}\right)dy+\left(\sqrt{y}+\frac{x}{2\sqrt{z}}\right)dz.$$

Функцию u находим, пользуясь рассмотренным выше правилом:

$$u(x_0, y_0, z_0)=u(1, 1, 1)+\int_1^{x_0}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx+$$

$$+\int_1^{y_0}\left(\sqrt{x_0}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)dy+\int_1^{z_0}\left(\sqrt{y_0}+\frac{x_0}{2\sqrt{z}}\right)dz=$$

$$=x_0-1+\sqrt{x_0}-1+y_0\sqrt{x_0}-\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}-1+z_0\sqrt{y_0}-\sqrt{y_0}+$$

$$+x_0\sqrt{z_0}-x_0+u(1, 1, 1)=y_0\sqrt{x_0}+z_0\sqrt{y_0}+x_0\sqrt{z_0}-$$

$$-3+u(1, 1, 1).$$

Итак, потенциалом поля A является функция $u(x, y, z)=x\sqrt{z}+z\sqrt{y}+y\sqrt{x}+C$, где C — произвольная постоянная.

§ 2*. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Еще раз обратим внимание на то, что материал, изложенный в этом параграфе, рассмотрен в § 3 в терминологии дифференциальных форм. Читателю полезно сравнить определения, основные свойства рассматриваемых понятий и ход решения примеров.

Определение. Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ заданы непрерывное векторное поле $A=(P, Q, R)$ и ориентированная кусочно-гладкая кривая $\overset{\smile}{AB}=(L, T)$ *. Тогда интеграл

$$\int_L (A\cdot\tau)\,ds \left(\int_{\overset{\smile}{AB}} (A\cdot\tau)\,ds \right)$$

называется криволинейным интегралом второго рода и обозначается символом

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz \left(\int_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx+Q\,dy+R\,dz \right).$$

Поясним происхождение символа $\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz$. Вектор τ для простой гладкой кривой $L=\{x(t), y(t), z(t)\}$ имеет координаты

$$\left\{ \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds} \right\},$$

где s — длина дуги L, следовательно,

$$(A\cdot\tau)=P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}$$

и формальное преобразование выражения $(A\cdot\tau)\,ds$ дает следующее соотношение:

$$(A\cdot\tau)\,ds=\left(P\frac{dx}{ds}+Q\frac{dy}{ds}+R\frac{dz}{ds}\right)ds=P\,dx+Q\,dy+R\,dz.$$

Заметим, что скалярное произведение $(A\cdot\tau)$ при данных условиях является кусочно-непрерывной и ограниченной функцией, определенной на L, за исключением, может быть, конечного множества точек, поэтому интеграл

$$\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=\int_L (A\cdot\tau)\,ds$$

имеет смысл.

Если поле $A=\{P, Q, R\}$ интерпретировать как силовое поле, то криволинейный интеграл второго рода $\int_L P\,dx+Q\,dy+R\,dz=$ $=\int_L (A\cdot\tau)\,ds$ представляет работу этого поля при перемещении по ориентированной кривой (L, T).

---

* Поле T есть поле единичных касательных векторов τ, согласованных с ориентацией L (см. с. 220).

Основные свойства криволинейного интеграла второго рода

(Всюду предполагаем, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в некоторой области $D \subset R^3$, содержащей кривую L.)

1. $$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = -\int\limits_{\overset{\smile}{BA}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

(направленность интеграла).

2. $$\int\limits_{L} (\alpha P_1 + \beta P_2)\,dx + (\alpha Q_1 + \beta Q_2)\,dy + (\alpha R_1 + \beta R_2)\,dz =$$

$$= \alpha \int\limits_{L} P_1\,dx + Q_1\,dy + R_1\,dz + \beta \int\limits_{L} P_2\,dx + Q_2\,dy + R_2\,dz,$$

α, β — постоянны (линейность интеграла).

3. Если $\overset{\smile}{AB} \cap \overset{\smile}{BC} = \{B\}$, то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz + \int\limits_{\overset{\smile}{BC}} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\overset{\smile}{AC}} Pdx + Qdy + Rdz$$

(аддитивность интеграла).

4. Если в области $D \subset R^3$ существует такая дифференцируемая функция $f(M)$, что $df = Pdx + Qdy + Rdz$, то для $\overset{\smile}{AB} \subset D$

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = f(B) - f(A).$$

В частности, в этом случае для любого контура $L \subset D$

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0.$$

Обратно, если для любого контура $L \subset D$ верно равенство

$$\int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz = 0,$$

то в области D существует дифференцируемая функция $f(M)$, для которой $df = Pdx + Qdy + Rdz$.

5. Если $\overset{\smile}{AB} = L = \{(x, y, z) : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [a, b]\}$, где $a < b$ и $x(t), y(t), z(t) \in C^1[a, b]$,

$$(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2 > 0,\ A = (x(a),\ y(a),\ z(a)),$$

$$B = (x(b),\ y(b),\ z(b)),$$

то

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz =$$

$$= \int\limits_a^b [P(x(t), y(t), z(t))\,x'_t + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'_t +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t))\,z'_t]\,dt.$$

Для упрощения выкладок полезно заметить, что при любой параметризации отрезка $L=[A, B]$, параллельного оси OX, функции $y(t)$ и $z(t)$ постоянны, следовательно, $y_t'=0$, $z_t'=0$, и поэтому

$$\int\limits_{[A,B]} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{[A,B]} Pdx,$$

точно так же для отрезка $[C, D]$, параллельного оси OY,

$$\int\limits_{[C,D]} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{[C,D]} Qdy,$$

и для отрезка $[M, N]$, параллельного оси OZ,

$$\int\limits_{[M,N]} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{[M,N]} Rdz.$$

Свойства 3 и 5 дают формулы вычисления криволинейного интеграла II рода для гладких и кусочно-гладких кривых.

Пример. Вычислим

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy,$$

где $\overset{\smile}{AB}$ — дуга параболы $y=x^2$ от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

Решение. Запишем кривую $L=\overset{\smile}{AB}$ как простую гладкую ориентированную кривую $L=\{(x, y) : x=x,\ y=x^2,\ x\in[1, 2]\}$. Так как $x'_x=1$, $y'_x=2x$, то, применяя свойство 5, получим, что

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (y^2 + 2xy)\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy = \int\limits_1^2 [(x^4 + 2x^3) + (x^2 - 2x^3)\cdot 2x]\,dx =$$

$$= \int\limits_1^2 (4x^3 - 3x^4)\,dx = 15 - \frac{3}{5}\cdot 31 = -\frac{18}{5}.$$

Пример. Вычислим $\int\limits_L (xy + x^2 + y^2)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy$, где L — контур треугольника OAB: $O=(0, 0)$, $A=(1, 2)$, $B=(0, 2)$ с положительным направлением обхода (см. рис. 46).

Решение. Кривая L — кусочно-гладкая. Она состоит из трех гладких ориентированных кусков: отрезков OA, AB, BO. Запишем каждый из них как простую гладкую ориентированную кривую, проходящуюся при возрастании параметра:

$$OA=\{(x,\ y): x=x,\ y=2x,\ x\in[0,\ 1]\},$$

$$AB=\{(x,\ y): x=1-t,\ y=2,\ t\in[0,\ 1]\},$$

$$BO=\{(x,\ y): x=0,\ y=2-t,\ t\in[0,\ 2]\}.$$

На отрезке OA имеем $x_x'=1$, $y_x'=2$, следовательно, в силу свойства 5

$$\int\limits_{OA}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int\limits_0^1[(2x^2+x^2+4x^2)+$$

$$+(x^2-4x^2)\cdot 2]\,dx=\int\limits_0^1 x^2dx=1/3.$$

На отрезке AB имеем $x_t'=-1$, $y_t'=0$, следовательно,

$$\int\limits_{AB}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int\limits_0^1(2(1-t)+(1-t)^2+4)(-1)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^1(4t-7-t^2)\,dt=2-7-1/3=-\frac{16}{3}.$$

На отрезке BO имеем $x_t'=0$, $y_t'=-1$, следовательно,

$$\int\limits_{BO}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int\limits_0^2-(2-t)^2(-1)\,dt=$$

$$=\int\limits_0^2(2-t)^2\,dt=8/3.$$

Применяя свойство 3, получаем, что

$$\int\limits_L(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\int\limits_{OA}(xy+x^2+y^2)\,dx+$$

$$+(x^2-y^2)\,dy+\int\limits_{AB}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy+$$

$$+\int\limits_{BO}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{3}-\frac{16}{3}+8/3=-7/3.$$

Выкладки становятся проще, если использовать свойство 1, тогда отпадает необходимость вводить параметр так, чтобы кри-

вая проходилась именно при возрастании параметра. Покажем это.

Если отрезок AB параметрически представить как

$$\{(x,\ y);\ x=x,\ y=2,\ x\in[0,\ 1]\},$$

то он будет проходиться при убывании параметра x от 1 до 0, а отрезок BA будет проходиться при возрастании параметра x от 0 до 1. Следовательно,

$$\int\limits_{AB}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=-\int\limits_{BA}(xy+x^2+y^2)\,dx+$$

$$+(x^2-y^2)\,dy=-\int\limits_0^1(2x+x^2+4)\,dx=-\left(1+\frac{1}{3}+4\right)=-\frac{16}{3}.$$

Аналогично

$$OB=\{(x,\ y):x=0,\ y=y,\ y\in[0,\ 2]\}$$

и

$$\int\limits_{BO}(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=-\int\limits_{OB}(xy+x^2+y^2)\,dx+$$

$$+(x^2-y^2)\,dy=-\int\limits_0^2(-y^2)y=\frac{8}{3}.$$

Применяя свойство 3, получаем, что

$$\int\limits_L(xy+x^2+y^2)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=\frac{1}{3}-\frac{16}{3}+\frac{8}{3}=-\frac{7}{3}.$$

Пример. Вычислим $\int\limits_L ydx-xdy$, где L — астроида $x^{2/3}+$ $+y^{2/3}=a^{2/3}$ с положительным направлением обхода $(a>0)$.

Решение. Запишем уравнение астроиды в параметрическом виде: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$. Тогда положительному направлению обхода соответствует возрастание параметра t от 0 до 2π. Итак,

$$L=\{(x,\ y):x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ t\in[0,\ 2\pi]\}.$$

Отсюда получаем, что

$$x'_t=-3a\cos^2 t\sin t,\ y'_t=3a\sin^2 t\cos t,$$

и в силу свойства 5

$$\int\limits_L ydx-xdy=\int\limits_0^{2\pi}(-a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t-a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t)\,dt=$$

$$= -3a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin^2 t \cdot (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = -12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= -6a^2 \frac{\Gamma(3/2)\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(3)} = -3a^2 \cdot \frac{1}{4}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3a^2\pi}{4}.$$

На практике удобно преобразование подынтегрального выражения вести отдельно.

Пример. Вычислим

$$\int_L (x+y)\,dx - (x-y)\,dy,$$

где L — петля кривой $r = a\cos 3\varphi$ $(a>0)$, пересекающая полярную ось, с положительным направлением обхода (декартова и полярная система координат совмещены).

Решение. Запишем уравнение кривой L в параметрическом виде: $x = a\cos 3\varphi \cos\varphi$, $y = a\cos 3\varphi \sin\varphi$, тогда положительному направлению обхода заданной петли соответствует возрастание параметра от $-\pi/6$ до $\pi/6$. Итак,

$$L = \{(x,\ y) : x = a\cos 3\varphi \cos\varphi,\ y = a\cos 3\varphi \sin\varphi,\ \varphi \in [-\pi/6,\ \pi/6]\}.$$

Отсюда получаем, что

$$x'_\varphi = -a(\sin 2\varphi + 2\sin 4\varphi),\quad y'_\varphi = a(2\cos 4\varphi - \cos 2\varphi);$$

$$(x+y)\,dx - (x-y)\,dy = [-a^2(\cos\varphi + \sin\varphi)\cos 3\varphi(\sin 2\varphi + 2\sin 4\varphi) -$$

$$- a^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\cdot\cos 3\varphi(2\cos 4\varphi - \cos 2\varphi)]\,d\varphi =$$

$$= -a^2\cos 3\varphi(6\sin 3\varphi + 2\cos 3\varphi)\,d\varphi$$

Следовательно,

$$\int_L (x+y)\,dx - (x-y)\,dy = -\int_{-\pi/6}^{\pi/6} a^2\cos 3\varphi(6\sin 3\varphi + 2\cos 3\varphi)\,d\varphi =$$

$$= -a^2\int_{-\pi/6}^{\pi/6}(1+\cos 6\varphi)\,d\varphi = -\frac{a^2\pi}{3}.$$

Пример. Вычислим $\int_{\overset{\smile}{AB}} z\,dx + 2x\,dy - y\,dz$,

где $\overset{\smile}{AB}$ — кривая:

$$x^2 + y^2 = 2ax,\ az = xy,\ z \geqslant 0;\ A = (0,\ 0,\ 0),\ B = (2a,\ 0,\ 0),\ a > 0.$$

Решение. Для точек кривой $\overset{\smile}{AB}$ из первого уравнения получаем условие $x \geqslant 0$; из условия $z \geqslant 0$ и второго уравнения сле-

дует, что $y \geqslant 0$. Отсюда получаем, что кривая $\overset{\smile}{AB}$ может быть параметризована следующим образом:

$$x = x, \quad y = \sqrt{2ax - x^2}, \quad z = \frac{x}{a}\sqrt{2ax - x^2}, \quad x \in [0, 2a]$$

и заданной ориентации соответствует возрастание параметра x от 0 до $2a$. Итак,

$$L = \left\{(x, y, z) : x = x, \ y = \sqrt{2ax - x^2}, \ z = \frac{x}{a}\sqrt{2ax - x^2}, \ x \in [0, 2a]\right\}.$$

Отсюда получаем, что

$$x'_x = 1, \quad y'_x = \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}}, \quad z'_x = \frac{3ax - 2x^2}{a\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Следовательно,

$$zdx + 2xdy - ydz = \left(\frac{x}{a}\sqrt{2ax - x^2} + \right.$$

$$\left. + 2x \cdot \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} - \sqrt{2ax - x^2} \cdot \frac{3ax - 2x^2}{a\sqrt{2ax - x^2}}\right) dx =$$

$$= \left[\frac{x + 2a}{a}\sqrt{2ax - x^2} - \frac{2ax}{\sqrt{2ax - x^2}} - 3x + \frac{2x^2}{a}\right] dx.$$

Итак,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} zdx + 2xdy - ydz = \int\limits_0^{2a} \left[\frac{x - a}{a}\sqrt{a^2 - (x - a)^2} + \right.$$

$$+ 3\sqrt{a^2 - (x - a)^2} - \frac{2a(x - a)}{\sqrt{a^2 - (x - a)^2}} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - (x - a)^2}} -$$

$$\left. - 3x + \frac{2x^2}{a}\right] dx = \int\limits_{-a}^{a} \left[\frac{t}{a}\sqrt{a^2 - t^2} + 3\sqrt{a^2 - t^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2at}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - t^2}}\right] dt - 6a^2 + \frac{16}{3}a^2 =$$

$$= \frac{3}{2}\left[t\sqrt{a^2 - t^2} - \frac{1}{2}a^2 \arcsin\frac{t}{a}\right]\Bigg|_{-a}^{a} - \frac{2}{3}a^2 = -\frac{\pi a^2}{2} - \frac{2}{3}a^2.$$

Заметим, что в этом примере при такой параметризации кривой AB функции $y(x)$ и $z(x)$ не являются гладкими на $[0, 2a]$, так что формально мы здесь не имели права применять рассмотренные выше соотношения. Но, как уже не раз отмечалось в аналогичных ситуациях, если в этих соотношениях вместо интеграла Римана поставить несобственный абсолютно сходящийся инте-

грал, то они остаются в силе. Этим утверждением будем пользоваться и дальше.

Можно параметризировать кривую $\overset{\smile}{AB}$ и так, чтобы все функции были гладкими. Именно положим: $x=a(1+\cos t)$, $y=a\sin t$, $z=a\sin t(1+\cos t)$; тогда точке $A=(0, 0, 0)$ отвечает значение $t=\pi$, точке $B=(2a, 0, 0)$ — значение $t=0$. Итак,

$$\overset{\smile}{AB}=L=\{(x,\ y,\ z): x=a(1+\cos t),\ y=a\sin t,$$
$$z=a\sin t(1+\cos t),\ t\in[0,\ \pi]\},$$

кривая $\overset{\smile}{AB}$ проходится при убывании параметра t от π до 0. Отсюда получаем, что

$$x'_t=-a\sin t,\ y'_t=a\cos t,\ z'_t=a(\cos t+\cos^2 t-\sin^2 t);$$

следовательно,

$$zdx+2xdy-ydz=[a^2(-\sin^2 t-\sin^2 t\cos t+2\cos t+2\cos^2 t-$$
$$-\cos t\sin t-\cos^2 t\sin t+\sin^3 t)]\,dt=a^2[\cos t(2-\sin^2 t-\sin t)+$$
$$+\sin t(1-2\cos^2 t)+3\cos^2 t-1]\,dt$$

и

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} zdx+2xdy-ydz=a^2\int\limits_{\pi}^{0}[(2-\sin^2 t-\sin t)\cos t+$$
$$+(2\cos^2 t-1)(-\sin t)+3/2\cos 2t+1/2]\,dt=$$
$$=a^2\left[\frac{2}{3}\cos^3 t-\cos t\right]\Bigg|_{\pi}^{0}-\frac{\pi a^2}{2}=-\frac{\pi a^2}{2}-\frac{2a^2}{3}.$$

Если известно, что выражение $Pdx+Qdy+Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции $f: R^3\to R$, т. е. $df=Pdx+Qdy+Rdz$, то в силу свойства 4

$$f(B)-f(A)=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} df,$$

где $\overset{\smile}{AB}$ есть произвольная кусочно-гладкая кривая, лежащая в той области D, где справедливо равенство

$$df=Pdx+Qdy+Rdz$$

(об условиях, при которых такое выражение является полным дифференциалом, будет сказано ниже).

Фиксируя точку $A\in D$, получаем значение $f(B)=\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} df+f(A)$,

где B — произвольная точка рассматриваемой области D. Так как равенство $df=Pdx+Qdy+Rdz$ определяет функцию f с точностью

до произвольного слагаемого, то значение $f(A)$ выбирается произвольно. В качестве кривой $\overset{\smile}{AB}$ при решении задач этого типа берется ломаная, составленная из отрезков, параллельных осям координат. Такой выбор обусловлен тем, что на таких отрезках (св. 9) все координаты, кроме одной, постоянны, следовательно, производные этих координат при любой параметризации равны нулю и, как указано после свойства 5, криволинейный интеграл второго рода наиболее просто преобразуется в одномерный интеграл.

Пример. Найдем функцию $f: R^3 \to R$, если

$$df = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz.$$

Решение. Функции

$$P(x, y, z) = y+z,\ Q(x, y, z) = z+x,\ R(x, y, z) = x+y$$

непрерывны на всем пространстве R^3, поэтому естественно считать равенство $df = (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz$ заданным всюду в R^3. Возьмем произвольную точку B с координатами (x_0, y_0, z_0).

Положим

$$A = (0, 0, 0),\ M = (x_0, 0, 0),\ N = (x_0, y_0, 0),$$

тогда

$$AM = \{(x, y, z): x = x,\ y = 0,\ z = 0,\ x \in [0, x_0]\},$$

$$MN = \{(x, y, z): x = x_0,\ y = y,\ z = 0,\ y \in [0, y_0]\},$$

$$NB = \{(x, y, z): x = x_0,\ y = y_0,\ z = z,\ z \in [0, z_0]\}.$$

Отсюда получаем, что

$$f(x_0, y_0, z_0) = f(B) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} df + f(A) = \int\limits_{\overset{\smile}{AM}} (y+z)\,dx +$$

$$+ (z+x)\,dy + (x+y)\,dz + \int\limits_{MN} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz +$$

$$+ \int\limits_{NB} (y+z)\,dx + (z+x)\,dy + (x+y)\,dz + f(A) =$$

$$= \int\limits_0^{x_0} 0\,dx + \int\limits_0^{y_0} x_0\,dy + \int\limits_0^{z_0} (x_0 + y_0)\,dz = x_0 y_0 + x_0 z_0 + y_0 z_0 + f(A).$$

В силу произвольности точки $B(x_0, y_0, z_0)$ и того факта, что функция f определяется с точностью до константы, заключаем, что $f(x, y, z) = xy + xz + yz + C$.

Подчеркнем, что в этом параграфе не решается вопрос, будет выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ полным дифференциалом некоторой функции $f: R^3 \to R$ или нет. В задачах этого типа подразумевает-

ся, что условие $df=Pdx+Qdy+Rdz$ верно для всех точек, в которых непрерывны все три функции P, Q, R.

Пример. Найдем функцию $f: R^3 \to R$, если

$$df = -\frac{x}{y^2}dx + \left(\frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2}\right)dy - \frac{y^2}{z^3}dz.$$

Решение. Функции

$$P(x, y, z) = -\frac{x}{y^2},\ Q(x, y, z) = \frac{x^2}{y^3} + \frac{y}{z^2},\ R(x, y, z) = -\frac{y^2}{z^3}$$

определены и непрерывны, если $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Поэтому и функция $f(B)$ определяется для точек $B(x, y, z)$ при условии, что $y \neq 0$ и $z \neq 0$. Примем для определенности, что $y>0$ и $z<0$. Чтобы кусочно-гладкая кривая $\overset{\smile}{AB}$ не пересекала плоскостей $y=0$ и $z=0$, необходимо начальную точку A также взять в области $D=\{(x, y, z): y>0,\ z<0\}$. Положим $A=(0, 1, -1)$, тогда для любой точки $B=(x_0, y_0, z_0)$, $y_0>0$, $z_0<0$, ломаная $AMNB$, где $M=(0, 1, z_0)$, $N=(0, y_0, z_0)$, не пересекает плоскостей $y=0$ и $z=0$. Так как

$$AM = \{(x, y, z): x=0,\ y=1,\ z=z,\ z \in [-1, z_0]\},$$

$$MN = \{(x, y, z): x=0,\ y=y,\ z=z_0,\ y \in [1, y_0]\},$$

$$NB = \{(x, y, z): x=x,\ y=y_0,\ z=z_0,\ x \in [0, x_0]\},$$

то

$$\int\limits_{AM} df = \int\limits_{-1}^{z_0} \frac{-1}{z^3}dz,\ \int\limits_{MN} df = \int\limits_{1}^{y_0} \frac{y}{z_0^2}dy,\ \int\limits_{NB} df = \int\limits_{0}^{x_0} \frac{-x}{y_0^2}dx.$$

Следовательно,

$$f(x_0, y_0, z_0) = f(B) = f(A) + \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} df = f(A) + \int\limits_{AM} df + \int\limits_{MN} df + \int\limits_{NB} df =$$

$$= f(A) + \int\limits_{-1}^{z_0} \frac{-1}{z^3}dz + \int\limits_{1}^{y_0} \frac{y}{z_0^2}dy + \int\limits_{0}^{x_0} \frac{-x}{y_0^2}dx =$$

$$= f(A) + \frac{1}{2z_0^2} - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{1}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2} = f(A) - \frac{1}{2} + \frac{y_0^2}{2z_0^2} - \frac{x_0^2}{2y_0^2}.$$

Отсюда следует, что $f = \frac{y^2}{2z^2} - \frac{x^2}{2y^2} + C$, где C — произвольная постоянная.

Таким же образом находится по своему дифференциалу функция любого числа переменных. Если I — брус в R^n и в I имеем равенство

$$df = \Sigma a_i(x)dx_i,\ a_i: R^n \to R,\ 1 \leqslant i \leqslant n,$$

то для любых двух точек $A=(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I$ и $B=(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in I$ имеем равенство

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=f(B)=f(A)+\int_{y_1}^{x_1} a_1(t_1, y_2, \ldots, y_n)\,dt_1+$$

$$+\int_{y_2}^{x_2} a_2(x_1, t_2, y_3, \ldots, y_n)\,dt_2+\ldots+\int_{y_i}^{x_i} a_i(x_1, x_2, \ldots$$

$$\ldots, x_{i-1}, t_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)\,dt_i+\ldots+\int_{y_n}^{x_n} a_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t_n)\,dt_n.$$

Пример. Найдем функцию $f: R^5 \to R$, если

$$df=(2x_1x_2+x_5^2)\,dx_1+(x_1^2-2x_2x_3)\,dx_2+(2x_3x_4-x_2^2)\,dx_3+$$
$$+(x_3^2-2x_4x_5)\,dx_4+(2x_1x_5-x_4^2)\,dx_5.$$

Решение. Положив $A=(0, 0, 0, 0, 0)$, получаем, что

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)=f(A)+\int_0^{x_1} 0\cdot dt_1+\int_0^{x_2} x_1^2 dt_2-$$

$$-\int_0^{x_3} x_2^2 dt_3+\int_0^{x_4} x_3^2 dt_4+\int_0^{x_5}(2x_1t_5-x_4^2)\,dt_5=$$
$$=f(A)+x_1^2x_2-x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_1x_5^2-x_4^2x_5.$$

Отсюда следует, что

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_5)=x_1^2x_2-x_2^2x_3+x_3^2x_4+x_1x_5^2-x_4^2x_5+C.$$

§ 3*. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ВТОРОГО РОДА

Еще раз обратим внимание на то, что материал, изложенный в этом параграфе, рассмотрен в § 4 в терминологии дифференциальных форм. Читателю полезно сравнить определения, основные свойства рассматриваемых понятий и ход решения примеров.

Определение. Пусть в некоторой области $D \subset R^3$ заданы непрерывное векторное поле $A=\{P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\}$ и ориентированная кусочно-гладкая поверхность (S, N). Тогда интеграл

$$\iint_S (A\cdot n)\,dS$$

называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается символом

$$\iint\limits_S Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge dx.$$

Поясним происхождение символа $\iint\limits_S Pdx \wedge dy + Qdy \wedge dz + Rdz \wedge \wedge dx$. Если S — простая гладкая поверхность, т. е.

$$S = \{(x, y, z) : x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in \overline{D}\},$$

$$r = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\} \subset C'(\overline{D}),\ [r'_u \times r'_v] \neq 0,\ (u, v) \in \overline{D}$$

и

$$N = \left\{ n : n = \frac{[r'_u \times r'_v]}{|[r'_u \times r'_v]|} \right\},$$

то

$$(A \cdot n) = \frac{(A \cdot r'_u \cdot r'_v)}{|[r'_u \times r'_v]|} = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} \frac{1}{|[r'_u \times r'_v]|} =$$

$$= \left(P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right) \cdot \frac{1}{|[r'_u \times r'_v]|}.$$

Отсюда в силу свойств поверхностного интеграла первого рода получаем соотношение

$$\iint\limits_S (A \cdot n)\, dS = \iint\limits_D \left[P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] \times$$

$$\times \frac{|[r'_u \times r'_v]|}{|[r'_u \times r'_v]|} dudv = \iint\limits_D \left[P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} + Q \frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \right.$$

$$\left. + R \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right] dudv.$$

Для регулярного отображения $\varphi : D \to \tilde{D}$, $(u, v) \to (y(u, v), z(u, v))$, имеем равенство

$$\iint\limits_D P \frac{D(y, z)}{D(u, v)} dudv = \iint\limits_{\tilde{D}} Pdydz,$$

перенося формально это соотношение на отображение

$$r = \{x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)\},$$

в подынтегральном выражении поверхностного интеграла второго рода заменяем $P\frac{D(y, z)}{D(u, v)}dudv$ на $Pdydz$. Остается еще обратить внимание на то, что знак слагаемого $P\frac{D(y, z)}{D(u, v)}dudv$ меняется при перестановке местами функций $y(u, v)$ и $z(u, v)$. Поэтому вместо знака обычного умножения, как в кратном интеграле, между дифференциалами dy и dz ставится знак «внешнего умножения» $\wedge$, удовлетворяющий условию $\alpha\wedge\beta=-\beta\wedge\alpha$. Таким же рассуждением приходим к записи выражения

$$\left[Q\frac{D(z, x)}{D(u, v)}+R\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]dudv \text{ как } Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy.$$

Поскольку запись подынтегрального выражения в виде $Rdx\wedge\wedge dy+Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx$ уже определяет, что рассматривается поверхностный интеграл второго рода, то, чтобы не усложнять запись символа, вместо (S, N) пишется просто S. Указание ориентации поверхности S входит обязательным условием в задание поверхностного интеграла второго рода.

Заметим, что скалярное произведение $(A\cdot n)$ при данных условиях является кусочно-непрерывной и ограниченной функцией, определенной на S, за исключением, может быть, конечного множества кусочно-гладких кривых, лежащих на S, поэтому интеграл

$$\iint\limits_S (A\cdot n)\,dS=\iint\limits_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy$$

имеет смысл.

Если поле $A=\{P, Q, R\}$ интерпретировать как поле скоростей течения жидкости, то величина поверхностного интеграла второго рода

$$\iint\limits_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy=\iint\limits_S (A\cdot n)\,dS$$

представляет количество жидкости, протекшей за единицу времени через поверхность S (поток поля) в направлении нормали n.

Основные свойства поверхностного интеграла второго рода (всюду предполагаем, что функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны в некоторой области $D\subset R^3$, содержащей поверхность S).

1. Если $S=(S, N)$ и $\tilde{S}=(S, -N)$ обозначают одну поверхность с противоположными ориентациями, то

$$\iint\limits_S R\,dx\wedge dy+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx=$$

$$=-\iint\limits_{\tilde{S}} R\,dx\wedge dy+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx$$

(направленность интеграла).

2. $$\iint\limits_S (\alpha R_1+\beta R_2)\,dx\wedge dy+(\alpha P_1+\beta P_2)\,dy\wedge dz+$$

$$+(\alpha Q_1+\beta Q_2)\,dz\wedge dx=\alpha\iint\limits_S R_1\,dx\wedge dy+P_1\,dy\wedge dz+Q_1\,dz\wedge dx+$$

$$+\beta\iint\limits_S R_2\,dx\wedge dy+P_2\,dy\wedge dz+Q_2\,dz\wedge dx,$$

где α и β — постоянные (линейность интеграла).

3. Если $S=S_1\cup S_2$, поверхности S_1 и S_2 не имеют общих внутренних точек и их ориентации согласованы, то

$$\iint\limits_S R\,dx\wedge dy+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx=\iint\limits_{S_1} R\,dx\wedge dy+$$

$$+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+\iint\limits_{S_2} R\,dx\wedge dy+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx$$

(аддитивность интеграла).

4. Если

$$S=\{(x,\ y,\ z):x=x(u,\ v),\ y=y(u,\ v),\ z=z(u,\ v),\ (u,\ v)\in\overline{D}\},$$

область $D\subset R^2$ жорданова, отображение

$$r=\{x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v)\}\in C^1(D),\ [r'_u\times r'_v]\neq 0,$$

для любых $(u,\ v)\in D$ и $N=\left\{n:n=\dfrac{[r'_u\times r'_v]}{|[r'_u\times r'_v]|}\right\}$, то

$$\iint\limits_S R\,dx\wedge dy+P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx=$$

$$=\iint\limits_D\left[R(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\frac{D(x,\ y)}{D(u,\ v)}+P(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\right.$$

$$\left.z(u,\ v))\frac{D(y,\ z)}{D(u,\ v)}+Q(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\frac{D(z,\ x)}{D(u,\ v)}\right]du\,dv.$$

Следствие. Для гладкой цилиндрической поверхности S с образующими, параллельными оси OZ, единичный вектор нормали в точке $s=(x,\ y,\ z)\in S$ есть $n(x,\ y,\ z)=\{\cos\alpha(x,\ y),\ \cos\beta(x,\ y),\ 0\}$. Поэтому независимо от выбора ориентации S справедливо равенство

$$\iint\limits_S R\,dx\wedge dy=\iint\limits_S (A\cdot n)\,dS=0,\ \text{так как}\ A=\{0,\ 0,\ R\}.$$

Точно так же для гладких цилиндрических поверхностей S_1 и S_2 с образующими, параллельными соответственно оси OX и оси OY, справедливы равенства

$$\iint\limits_{S_1} P\,dy \wedge dz = 0, \quad \iint\limits_{S_2} Q\,dz \wedge dx = 0.$$

Следствие. Если поверхность S задана явной функцией $z=z(x, y)$, т. е.

$$S=\{r : r(x, y)=\{x, y, z(x, y)\}, (x, y)\in \overline{D}\}, \; z=z(x, y)\in C^1(\overline{D}),$$

то, как было сказано выше, поля $N=\left\{n : n=\dfrac{[r'_x\times r'_y]}{|[r'_x\times r'_y]|}\right\}$ и $\widetilde{N}=$ $=\left\{n : n=\dfrac{[r'_y\times r'_x]}{|[r'_x\times r'_y]|}\right\}$ задают соответственно верхнюю и нижнюю сторону поверхности S. Поэтому для верхней стороны S имеем равенство

$$\iint\limits_{S} R\,dx \wedge dy = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\frac{D(x, y)}{D(x, y)}\,dx\,dy =$$

$$= \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

а для нижней — равенство

$$\iint\limits_{S} R\,dx \wedge dy = \iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\frac{D(x,y)}{D(y,x)}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint\limits_{D} R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy.$$

Точно так же для правой стороны поверхности

$$S=\{r : r(y, z)=\{x(y, z), y, z\}, (y, z)\in \overline{D}\}, \; x=x(y, z)\in C^1(\overline{D})\}$$

справедливо равенство

$$\iint\limits_{S} P\,dy \wedge dz = \iint\limits_{D} P(x(y, z), y, z)\,dy\,dz,$$

а для левой — равенство

$$\iint\limits_{S} P\,dy \wedge dz = -\iint\limits_{D} P(x(y, z), y, z)\,dy\,dz.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dy \wedge dz,$$

где S — левая сторона поверхности, полученной вращением дуги кривой $L=\{(x,\ y),\ x=x,\ y=\cos x,\ x\in[0,\ \pi/2]\}$ относительно оси OX.

Решение. Поскольку в условии задана левая сторона поверхности S, представим ее с помощью явного задания функции $x=x(y,\ z)=\arccos\sqrt{y^2+z^2}$:

$$S=\{r : r=\{\arccos\sqrt{y^2+z^2},\ y,\ z\},\ (y,\ z)\in\overline{D}\},$$

$$D=\{(y,\ z) : y^2+z^2<1\}.$$

В силу следствия 2 свойства 4

$$\iint\limits_S (x^2+y^2+z^2)\,dy \wedge dz=-\iint\limits_D \left(\arccos^2\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2\right)dy\,dz=$$

$$=-\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r^3+r\arccos^2 r)\,dr=-2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} t^2\sin 2t\,dt\right)=$$

$$=-2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}-\frac{1}{2}\right)\right)=-\frac{\pi^3}{8}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S yz\,dy \wedge dz+x^2\,dz \wedge dx+yz\,dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона полусферы $x^2+y^2+z^2=a^2,\ y\geqslant 0\ \ (a>0)$.

Решение. Поскольку $y\geqslant 0$, то уравнение полусферы можно записать с помощью явно заданной функции $y(x,\ z)$:

$$S=\{r : r(x,\ y,\ z)=\{x,\ \sqrt{a^2-x^2-z^2},\ z\},\ (x,\ z)\in\overline{D}\},$$

где область значений параметров $D=\{(x,\ z) : x^2+z^2<a^2\}$. Для отображения $r : D\to R^3$ имеем

$$r'_x=\left\{1,\ \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},\ 0\right\},\quad r'_z=\left\{0,\ \frac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},\ 1\right\},$$

$$[r'_x\times r'_z]=\left\{\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}},\ -1,\ \frac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\right\}.$$

Таким образом, поле $N=\left\{n : n=\dfrac{[r'_x\times r'_z]}{|[r'_x\times r'_z]|}\right\}$ является полем нормалей, направленных к центру полусферы S, т. е. определяет ориентацию s, противоположную заданной. Следовательно, заданная

ориентация определяется полем $\widetilde{N}=\left\{n : n=\frac{[r_z'\times r_x']}{|[r_z'\times r_x']|}\right\}$. Применяя свойство 5, получаем, что

$$\iint\limits_S yz\,dy\wedge dz+x^2\,dz\wedge dx+yz\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D\left(z\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{D(y,\ z)}{D(z,\ x)}+x^2\frac{D(z,\ x)}{D(z,\ x)}+\right.$$

$$\left.+z\sqrt{a^2-x^2-z^2}\,\frac{D(x,\ y)}{D(z,\ x)}\right\}dx\,dz.$$

Далее,

$$\frac{D(y,\ z)}{D(z,\ x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\\ 1 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},\quad \frac{D(z,\ x)}{D(z,\ x)}=1,$$

$$\frac{D(x,\ y)}{D(z,\ x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial x}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{-z}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}} & \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{z}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S yz\,dy\wedge dz+x^2\,dz\wedge dx+yz\,dx\wedge dy=\iint\limits_D(xz+x^2+z^2)\,dx\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^3(1+\cos\varphi\sin\varphi)\,dr=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S(4x^2+z^2)\,dy\wedge dz+4xy\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy,$$

где S — правая сторона части гиперболического цилиндра $4x^2-y^2=a^2$, лежащей внутри конуса $x=\sqrt{y^2+z^2}$ $(a>0)$.

Решение. Поскольку $x\geqslant 0$, то уравнение поверхности можно записать с помощью явно заданной функции

$$S=\left\{r : r(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{y^2+a^2},\ y,\ z\right),\ (y,\ z)\in D\right\}.$$

Область D значений параметров является проекцией заданной части цилиндра на плоскость ZY. Границу D находим как проекцию линии пересечения поверхностей $4x^2-y^2=a^2$ и $x=\sqrt{y^2+z^2}$, исключая переменную x из этих двух уравнений, получаем

$$a^2+y^2=4(y^2+z^2), \text{ или } 3y^2+4z^2=a^2.$$

Итак,

$$S=\left\{r : r(x,\ y,\ z)=\left\{x=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+y^2},\ y,\ z\right\},\ (y,\ z)\in\overline{D}\right\},$$

$$D=\{(y,\ z) : 4z^2+3y^2<a^2\}.$$

Далее,

$$r'_y=\left\{\frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}},\ 1,\ 0\right\},\quad r'_z=\{0,\ 0,\ 1\},\quad [r'_y\times r'_z]=$$

$$=\left\{1,\ \frac{-y}{2\sqrt{a^2+y^2}},\ 0\right\}.$$

Следовательно, заданная ориентация поверхности S определяется полем $N=\left\{n : n=\frac{[r'_y\times r'_z]}{|[r'_y\times r'_z]|}\right\}$. В силу свойства 5

$$\iint\limits_S (4x^2+z^2)\,dy\wedge dz+4xy\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D\left[(a^2+y^2+z^2)\frac{D(y,\ z)}{D(y,\ z)}+2y\sqrt{a^2+y^2}\frac{D(z,\ x)}{D(y,\ z)}+\right.$$

$$\left.+z^2\frac{D(x,\ y)}{D(y,\ z)}\right]dy\,dz.$$

Далее,

$$\frac{D(z,\ x)}{D(y,\ z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1\\ \frac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}} & 0\end{vmatrix}=\frac{-y}{2\sqrt{a^2+y^2}},$$

$$\frac{D(x,\ y)}{D(y,\ z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{y}{2\sqrt{a^2+y^2}} & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S (4x^2+z^2)\,dy\wedge dz+4xy\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D (a^2+y^2+z^2-y^2)\,dy\,dz=\iint\limits_D (a^2+z^2)\,dy\,dz.$$

Имеем, что

$$\iint\limits_D a^2\,dy\,dz = a^2\,|D| = \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}}.$$

В интеграле $\iint\limits_D z^2\,dy\,dz$ сделаем замену: $y = \frac{a}{\sqrt{3}}\sin\varphi$, $z = \frac{a}{2}\cos\varphi$, тогда

$$\iint\limits_D z^2\,dy\,dz = \frac{a^2}{2\sqrt{3}}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{a^2}{4} r^3\cos^3\varphi\,dr = \frac{a^4}{8\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{4}\cdot\pi = \frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}}.$$

Итак, окончательно,

$$\iint\limits_S (4x^2+z^2)\,dy\wedge dz + 4xy\,dz\wedge dx + z^2\,dx\wedge dy = \frac{\pi a^4}{2\sqrt{3}} +$$

$$+\frac{\pi a^4}{32\sqrt{3}} = \frac{\pi a^4 17}{32\sqrt{3}}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S x\,dy\wedge dz - y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy,$$

где S — внешняя сторона части конуса $z^2=x^2+y^2$, лежащей выше плоскости $z=0$ и внутри цилиндра $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

Решение. Используя условие $z\geqslant 0$, записываем

$$S = \{r : r(x,\ y,\ z) = \{x,\ y,\ \sqrt{x^2+y^2}\},\ (x,\ y)\in\overline{D}\},$$

$$D = \{(x,\ y) : x^2+y^2 < a^2\}.$$

Внешняя нормаль к поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$ направлена от оси OZ и в точках конуса, лежащих выше плоскости $z=0$, образует с этой осью тупой угол (см. рис. 47). Следовательно, в условии задана нижняя сторона конуса, т. е.

$$N = \left\{n : n = \frac{[r'_y\times r'_x]}{|[r'_y\times r'_x]|}\right\}.$$

В силу свойства 5

$$\iint\limits_S x\,dy\wedge dz - y\,dz\wedge dx + z\,dx\wedge dy =$$

$$= \iint\limits_D \left[x\,\frac{D(y,\ z)}{D(y,\ x)} - y\,\frac{D(z,\ x)}{D(y,\ x)} + \sqrt{x^2+y^2}\,\frac{D(x,\ y)}{D(y,\ x)}\right] dx\,dy,$$

$$\frac{D(y,\ z)}{D(y,\ x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x}\\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{vmatrix}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{D(z,\ x)}{D(y,\ x)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x}\\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_S x\,dy\wedge dz-y\,dz\wedge dx+z\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-\sqrt{x^2+y^2}\right)dx\,dy=\iint\limits_D\frac{-2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy=$$

$$=-2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^a r^2\sin^2\varphi\,dr=-\frac{2a^3\pi}{3}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S xy\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+zx\,dx\wedge dy,$$

где S — левая сторона поверхности

$$S=\{r:r(u,\ v)=\{2u+v^2,\ u^2-2v,\ 2uv\},\ (u,\ v)\in D\},$$

$$D=\{(u,\ v):0<u<1,\ 0<v<1\}.$$

Решение. Проверим сначала корректность задания стороны поверхности S. Так как

$$r'_u=\{2,\ 2u,\ 2v\},\ r'_v=\{2v,\ -2,\ 2u\},$$

то для

$$n=\frac{[r'_u\times r'_v]}{|[r'_u\times r'_v]|}=\frac{4\{u^2+v,\ v^2-u,\ -1-uv\}}{|[r'_u\times r'_v]|}$$

получаем, что $\cos(n,\ OX)=\frac{4u^2+4v}{|[r'_u\times r'_v]|}\geqslant 0$. Отсюда следует, что поле $N=\left\{n:n=\frac{[r'_v\times r'_u]}{|[r'_v\times r'_u]|}\right\}$ определяет левую сторону поверхности S. В силу свойства 5

$$\iint\limits_S xy\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+zx\,dx\wedge dy=$$

$$=\iint\limits_D \Big[(2u+v^2)(u^2-2v)\frac{D(y,\ z)}{D(v,\ u)}+2uv(u^2-2v)\frac{D(z,\ x)}{D(v,\ u)}+$$

$$+2uv(2u+v^2)\frac{D(x,\ y)}{D(v,\ u)}\Big]\,du\,dv,$$

$$\frac{D(y,\ z)}{D(v,\ u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & 2u\\ 2u & 2v\end{vmatrix}=-4u^2-4v,$$

$$\frac{D(z,\ x)}{D(v,\ u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u & 2v\\ 2v & 2\end{vmatrix}=4u-4v^2,$$

$$\frac{D(x,\ y)}{D(v,\ u)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial u}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2v & 2\\ -2 & 2u\end{vmatrix}=4uv+4,$$

$$\iint\limits_S xy\,dy\wedge dz+yz\,dz\wedge dx+zx\,dx\wedge dy=$$

$$=4\iint\limits_D [(u^2+v)(2u+v^2)(2v-u^2)+2uv(u^2-2v)(u-v^2)+$$

$$+2uv(2u+v^2)(4v+1)]\,du\,dv=$$

$$=4\int\limits_0^1 dv\int\limits_0^1 [2v^4+u(4v^4+2v^3+4v^2)+u^2(4v-4v^2+v^3+2v^4)+$$

$$+u^3(2v+4v^2-2v^3)+u^4(2v-v^2)-2u^5]\,du=$$

$$=4\int\limits_0^1\Big[2v^4+2v^4+v^3+2v^2+\frac{4}{3}v-\frac{4}{3}v^2+\frac{1}{3}v^3+\frac{2}{3}v^4+$$

$$+\frac{1}{2}v+v^2-\frac{1}{2}v^3+\frac{2}{5}v-\frac{1}{5}v^2-\frac{1}{3}\Big]\,dv=\frac{869}{90}.$$

Пример. Вычислим

$$\iint\limits_S y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy-x^2\,dy\wedge dz,$$

где S — часть поверхности тела: $V=\{(x,\ y,\ z):2x^2+2y^2\leqslant az\leqslant x^2+y^2+a^2\}$ $(a>0)$, удовлетворяющая условию $y\geqslant 0$, и вектор нормали n, определяющий ориентацию S, в точке $M=(0,\ a/2,\ 5a/4)$ образует острый угол с осью OZ.

Решение. Ориентация поверхности S, определенная вектором n, была подробно проанализирована в примере на с. 226. Этой ориентации соответствует верхняя сторона поверхности $S_1=\{(x, y, z): az=x^2+y^2+a^2,\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}$ и нижняя сторона поверхности $S_2=\{(x, y, z): az=2x^2+2y^2,\ x^2+y^2\leqslant a^2,\ y\geqslant 0\}$. Следовательно, ориентирующее поле нормалей к S_1 есть

$$N_1=\left\{n: n=\frac{[r'_x\times r'_y]}{|[r'_x\times r'_y]|},\ r=r(x, y)=\left\{x, y, \frac{x^2+y^2+a^2}{a}\right\}\right\}$$

и ориентирующее поле нормалей к S_2 есть

$$N_2=\left\{n: n=\frac{[r'_y\times r'_x]}{|[r'_x\times r'_y]|},\ r=r(x, y)=\left\{x, y, \frac{2x^2+2y^2}{a}\right\}\right\}.$$

В силу свойств 3 и 5 имеем, что

$$\iint\limits_S y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy-x^2\,dy\wedge dz=$$

$$=\iint\limits_{S_1} y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy-x^2\,dy\wedge dz+$$

$$+\iint\limits_{S_2} y^2\,dz\wedge dx+z^2\,dx\wedge dy-x^2\,dy\wedge dz=$$

$$=\iint\limits_D\left[\left(y^2\frac{D(z_1, x)}{D(x, y)}+z_1^2\frac{D(x, y)}{D(x, y)}-x^2\frac{D(y, z_1)}{D(x, y)}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(y^2\frac{D(z_2, x)}{D(y, x)}+z_2^2\frac{D(x, y)}{D(y, x)}-x^2\frac{D(y, z_2)}{D(y, x)}\right)\right]dx\,dy,$$

где

$$z_1(x, y)=\frac{1}{a}(x^2+y^2+a^2),\ z_2(x, y)=\frac{1}{a}(2x^2+2y^2),$$

$$D=\{(x, y): x^2+y^2\leqslant a^2\}.$$

Так как

$$\frac{D(z_1, x)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y}\\ \dfrac{\partial x}{\partial x} & \dfrac{\partial x}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-\frac{2y}{a},$$

$$\frac{D(y, z_1)}{D(x, y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial x} & \dfrac{\partial y}{\partial y}\\ \dfrac{\partial z_1}{\partial x} & \dfrac{\partial z_1}{\partial y}\end{vmatrix}=\frac{1}{a}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2x & 2y\end{vmatrix}=-\frac{2x}{a},$$