

$$\frac{D(z_2, x)}{D(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z_2}{\partial y} & \frac{\partial z_2}{\partial x} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 4y & 4x \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{4y}{a},$$

$$\frac{D(y, z_2)}{D(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial x} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4y & 4x \end{vmatrix} = \frac{4x}{a},$$

то

$$\begin{aligned} & \iint_S y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy - x^2 dy \wedge dz = \\ & = \iint_D \left[\frac{-2y^3}{a} + \frac{1}{a^2} (x^2 + y^2 + a^2)^2 + \frac{2x^3}{a} + \frac{4y^3}{a} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{4}{a^2} (x^2 + y^2)^2 - \frac{4x^3}{a} \right] dx dy = \frac{1}{a^2} \iint_D [2ay^3 - 2ax^3 - \\ & \quad - 3(x^2 + y^2)^2 + a^4 + 2a^2x^2 + 2a^2y^2] dx dy = \\ & = \frac{1}{a^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^a [2ar^4 (\sin^3 \varphi - \cos^3 \varphi) - 3r^5 + ra^4 + 2a^2r^3] dr = \\ & = \frac{1}{a^2} \cdot \pi \cdot \left[-\frac{1}{2} a^6 + \frac{a^6}{2} + \frac{1}{2} a^6 \right] + \frac{2}{5} \cdot \frac{a^6}{a^2} \cdot \frac{4}{3} = a^4 \left(\frac{\pi}{2} + \frac{8}{15} \right). \end{aligned}$$

§ 4*. ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Еще раз обратим внимание на то, что материал, изложенный в этом параграфе, рассмотрен в § 5 в терминологии дифференциальных форм. Читателю полезно сравнить определения, основные свойства рассматриваемых понятий и ход решения примеров.

Пусть в области $D \subset R^3$ задано векторное поле $A\{P, Q, R\}$. Порядком гладкости поля A назовем наименьший из порядков гладкости функций P, Q, R в области D . В дальнейшем, если не оговорено противное, всегда будем подразумевать, что рассматривается векторное поле достаточного порядка гладкости (не менее второго).

Определение. Если $A=\{P, Q, R\}$ — векторное поле, заданное в области D , то скаляр $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ называется дивергенцией поля A и обозначается $\operatorname{div} A$.

Определение. Если $A = \{P, Q, R\}$ — векторное поле, заданное в области D , то вектор

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = i \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + j \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + k \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

называется ротором (вихрем) поля A и обозначается $\operatorname{rot} A$.

Определение. Векторное поле A , заданное в области $D \subset \subset \mathbb{R}^3$, называется потенциальным в D , если существует функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ — потенциал поля A , такая, что

$$\operatorname{grad} u = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\} = A.$$

Определение. Векторное поле A , заданное в области $D \subset \subset \mathbb{R}^3$, называется соленоидальным, если в области D существует векторное поле W (называемое векторным потенциалом поля A), такое, что $\operatorname{rot} W = A$.

Как указывалось выше, для силового поля $A = \{P, Q, R\}$ интеграл $\int_L P dx + Q dy + R dz$ представляет работу этой силы при перемещении по ориентированной кривой L . Принято называть интеграл $\int_L P dx + Q dy + R dz$ работой поля $A = \{P, Q, R\}$ вдоль кривой L для любого векторного поля, безотносительно к его физической характеристике. Если кривая L является контуром, то этот интеграл обычно называют циркуляцией поля вдоль контура L в данном направлении.

Точно так же безотносительно к физической характеристике поля $A = \{P, Q, R\}$ интеграл

$$\iint_S P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

принято называть потоком поля A через ориентированную поверхность S в данном направлении.

Определение. Кривая L называется векторной линией поля A , если в каждой точке $M \in L$ вектор поля касателен к L .

Из определения следует, что векторными линиями поля $A = \{P, Q, R\}$ являются интегральные кривые системы уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$.

Определение. Область, ограниченная поверхностью S , называется векторной трубкой поля A , если в каждой точке $M \in S$ вектор поля ортогонален вектору n — нормали к S .

Из определения следует, что поток $\iint_S (A \cdot n) dS$ поля A через поверхность S векторной трубы равен нулю.

Свойство 4 криволинейного интеграла второго рода в терминах векторного анализа выглядит так: для того чтобы векторное поле A , заданное в области $D \subset R^3$, было потенциальным, необходимо и достаточно равенство нулю работы этого поля вдоль любого контура $L \subset D$. Если поле $A = \{P, Q, R\}$ потенциально, то работа его вдоль кривой L равна разности значений потенциала поля u в начальной и конечной точке этой кривой:

$$\int\limits_{A \rightarrow B} P dx + Q dy + R dz = u(B) - u(A).$$

Теорема (формула Грина). Пусть область D лежит в R^2 и граница ∂D области D состоит из конечного числа кусочно-гладких контуров $\partial D = \bigcup_{q=1}^Q L_q$ (см. рис. 49). Пусть функции P, Q и $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в \bar{D} . Тогда

$$\int\limits_{\partial D} P dx + Q dy = \sum_{q=1}^Q \int\limits_{L_p} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

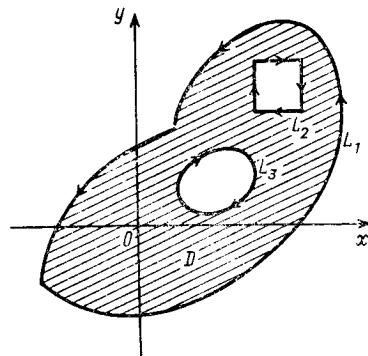


Рис. 49

где все контуры $L_q, 1 \leq q \leq Q$, ориентированы так, что при обходе области D остается слева.

Если контур L лежит на поверхности S , то назовем часть S , ограниченную L , поверхностью, натянутой на контур L . Напомним, что ориентации контура L и поверхности, натянутой на L , согласованы, если при обходе L по соответствующей стороне поверхности S часть S , ограниченная L , остается слева.

Теорема (формула Стокса). Пусть 1) область D лежит в R^3 ; 2) функции $P, Q, R \in C^1(\bar{D})$; 3) ориентированный контур (L, T) и натянутая на L ориентированная поверхность (S, N) лежат

в D ; 4) ориентация поверхности (S, N) согласована с ориентацией контура (L, T) . Тогда

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \\ &+ \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Используя формулу связи поверхностных интегралов первого и второго рода, правую часть формулы Стокса записывают в виде

$$\begin{aligned} \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS, \end{aligned}$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ — координаты единичного вектора $n \in N$. Кратко подынтегральная функция в этом интеграле записывается в виде

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

В терминах векторного анализа формула Стокса выглядит так:

Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$, ориентированный контур (L, T) и ориентированная поверхность (S, N) удовлетворяют сформулированным выше условиям. Тогда циркуляция вдоль контура L векторного поля \vec{A} , заданного в D , равна потоку $\operatorname{rot} A$ через поверхность S :

$$\int_L (A \cdot \tau) ds = \iint_S (\operatorname{rot} A \cdot n) dS.$$

Формулы Грина можно рассматривать как формулу Стокса для плоского векторного поля $\{P, Q, 0\}$.

Теорема (формула Остроградского — Гаусса). Пусть область D лежит в \mathbb{R}^3 ; граница ∂D области D состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей; функции $P, Q, R \in C^1(\bar{D})$. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_{\partial D} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy &= \\ = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz, \end{aligned}$$

где поверхностный интеграл берется по внешней стороне поверхности.

В терминах векторного анализа формула Остроградского — Гаусса выглядит так:

Пусть область D удовлетворяет сформулированному выше условию. Тогда поток векторного поля A через поверхность ∂D в сторону внешней нормали n равен интегралу от $\operatorname{div} A$ по D :

$$\iint_D (A \cdot n) dS = \iiint_D \operatorname{div} A dx dy dz.$$

Определение. Область $D \subset R^2$ называется односвязной, если для любого контура $L \subset D$ область $D_L \subset R^2$, ограниченная L , целиком лежит в D .

Теорема. Пусть область $D \subset R^2$ односвязна и функции $P, Q \in C^1(\bar{D})$. Тогда условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, $(x, y) \in D$ необходимо и достаточно для существования функции $u \in C^1(D)$, такой, что $du = Pdx + Qdy$. Пусть область $D \subset R^3$ такова, что любой контур $L \subset D$ можно непрерывно стянуть в точку, не выходя из области D , и функции $P, Q, R \in C^1(\bar{D})$. Тогда условия $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ необходимо и достаточно для существования функции $u \in C^1(D)$, такой, что $du = Pdx + Qdy + Rdz$.

В терминах векторного анализа эта теорема выглядит так:

Пусть область $D \subset R^3$ ($D \subset R^2$) такова, что любой контур $L \subset D$ непрерывно стягивается в точку, не выходя из D . Тогда гладкое векторное поле, заданное в D , потенциально тогда и только тогда, когда $\operatorname{rot} A = 0$ всюду в D .

Необходимость условия теоремы есть просто условие равенства смешанных производных второго порядка функции $u \in C^2(D)$.

Чтобы проанализировать достаточность условий теоремы, рассмотрим выражение $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$. В области $D = \{(x, y) : \frac{a^2}{4} < x^2 + y^2 < 4a^2\}$ ($a > 0$) функции $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ и $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ бесконечно гладкие и удовлетворяют равенству

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Условием существования в области D функции $u \in C^1(D)$, для которой $du = Pdx + Qdy = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, является равенство нулю интеграла $\int_L P dx + Q dy = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ по любому замкнутому контуру $L \subset D$. Покажем, что это условие не выполняется. Действительно, пусть L — окружность радиусом a с положительным

направлением обхода $L = \{(x, y) : x = a \cos t, y = a \sin t, t \in [0, 2\pi]\}$.

Тогда $L \subset D$ и $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \frac{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t}{a^2} dt = 2\pi$. Итак,

функции $u \in C^1(D)$, удовлетворяющей условию $du = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, не существует. Такой результат получился потому, что область

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{a^2}{4} < x^2 + y^2 < 4a^2 \right\}$$

не является односвязной. Если же рассматривать односвязную область $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4a^2\}$, то нарушается условие гладкости функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Можно показать, что при любом доопределении этих функций в точке $(0, 0)$ получаются разрывные в этой точке функции.

Естественная область применения формул Грина и Остроградского — Гаусса — это вычисление интегралов второго рода по контурам на плоскости и замкнутым поверхностям в пространстве. Но иногда, особенно в пространстве, вычисление интеграла второго рода по незамкнутой кривой или поверхности упрощается, если замкнуть эту кривую или поверхность и вычислять данный интеграл как разность соответствующих интегралов по замкнутой кривой или поверхности и по замыкающему множеству. В качестве замыкающего множества обычно берутся отрезки прямых или части плоскостей, параллельных координатным, поскольку по таким множествам интеграл второго рода вычисляется наиболее просто. В частности, этот метод дает возможность заменить достаточно сложную процедуру ориентации кусочно-гладкой поверхности путем согласования ориентаций ее гладких составляющих более простым выбором внутренней или внешней стороны замкнутой поверхности.

Пример. Вычислим указанным способом интеграл

$$\iint_S y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — часть поверхности тела

$$V = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2\} \quad (a > 0),$$

удовлетворяющая условию $y \geq 0$, и вектор нормали, определяющий ориентацию S , в точке $M = (0, a/2, 5a/4)$ образует острый угол с осью OZ .

Решение. Замкнем поверхность S частью плоскости $y=0$. Тогда полученная поверхность \tilde{S} будет границей тела: $\tilde{V} = \{(x, y, z) : y \geq 0, 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2\}$. Точка $M = (0, a/2, 5a/4)$ лежит на верхней границе тела \tilde{V} , и нормаль в этой точке направлена вверх, следовательно, интеграл берется по внешней стороне по-

верхности $\partial\tilde{V}$. Часть плоскости $y=0$, входящая в ∂V , есть поверхность

$$S_1 = \{r : r(x, z) = \{x, 0, z\}, (x, z) \in D\},$$

$$D = \{(x, z) : 2x^2 < az < x^2 + a^2\}.$$

Внешняя по отношению к телу \tilde{V} нормаль n на S_1 направлена противоположно оси OY . Так как в данном случае

$$r'_x = \{1, 0, 0\}, r'_z = \{0, 0, 1\}, [r'_x \times r'_z] = \{0, -1, 0\}, \text{ то } n = [r'_x \times r'_z].$$

Так как плоскость $y=0$ параллельна как оси OX , так и оси OZ , то в силу следствия 1 свойства 4 поверхностных интегралов второго рода имеем

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy &= \iint_{S_1} y^2 dz \wedge dx = \\ &= \iint_D 0 \cdot dz dx = 0. \end{aligned}$$

(Так что определение ориентации здесь оказалось ненужным.)

В силу полученного равенства и аддитивности интеграла имеем, что

$$\begin{aligned} \iint_S y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy &= \iint_{\tilde{S}} y^2 dz \wedge dx - \\ &- x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Так как

$$\tilde{V} = \{(x, y, z) : 2x^2 + 2y^2 \leq az \leq x^2 + y^2 + a^2, (x, y) \in D\},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < a^2, y > 0\},$$

то, применяя к последнему интегралу формулу Остроградского — Гаусса, окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \iint_S y^2 dz \wedge dx - x^2 dy \wedge dz + z^2 dx \wedge dy &= \\ &= \iiint_{\tilde{V}} (2y - 2x + 2z) dx dy dz = 2 \iint_D dx dy \int_{\frac{2x^2+2y^2}{a}}^{\frac{x^2+y^2+a^2}{a}} (y - x + z) dz = \\ &= \frac{2}{a^2} \iint_D \left[a(y-x)(a^2 - x^2 - y^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (3x^2 + 3y^2 + a^2)(a^2 - x^2 - y^2) \right] dx dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{a^2} \int_0^\pi d\varphi \int_0^a \left[(a^3 r^2 - ar^4)(-\cos \varphi + \sin \varphi) + \frac{1}{2}(a^4 r + 2a^2 r^3 - 3r^5) \right] dr = \\
&= a^4 \left[\frac{8}{15} + \frac{\pi}{2} \right].
\end{aligned}$$

Пример. Найдем поток вектора $A = x^3 i + y^3 j + z^3 k$ через

а) боковую поверхность конуса

$$K = \{(x, y, z) : H^2(x^2 + y^2) \leq z^2 R^2, 0 \leq z \leq H\} \quad (R > 0)$$

(в сторону внешней нормали);

б) через полную поверхность этого конуса (в сторону внешней нормали).

Решение. Начнем с п. б). В силу формулы Остроградского — Гаусса поток вектора A через полную границу ∂K конуса K есть

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} (A \cdot n) dS &= \iiint_K \operatorname{div} A \, dx \, dy \, dz = \\
&= \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ \frac{H}{R} \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}}} dx \, dy \int_{\frac{H}{R}}^H (3x^2 + 3y^2 + 3z^2) \, dz = \\
&= 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r \, dr \int_{\frac{Hr}{R}}^H (r^2 + z^2) \, dz = 6\pi \int_0^R \left[r^3 \left(H - \frac{Hr}{R} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{3} \left(H^3 - \frac{H^3 r^3}{R^3} \right) \right] dr = 2\pi \int_0^R \left[3Hr^3 - r^4 \left(\frac{3H}{R} + \frac{H^3}{R^3} \right) + rH^3 \right] dr = \\
&= 2\pi \left[\frac{3}{4} HR^4 - \frac{1}{5} (3HR^4 + H^3 R^2) + \frac{1}{2} H^3 R^2 \right] = \frac{3\pi HR^2}{10} (R^2 + 2H^2).
\end{aligned}$$

Перейдем к п. а).

Вычисление потока вектора A через боковую поверхность конуса K проведем двумя способами.

1. Обозначим через (S_1, N_1) внешнюю сторону верхней части поверхности ∂K . Тогда

$$S_1 = \{r : r(x, y) = \{x, y, H\}, (x, y) \in D\},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Вектор $n \in N_1$ направлен вверх. Так как $r'_x = \{1, 0, 0\}$, $r'_y = \{0, 1, 0\}$, $[r'_x \times r'_y] = \{0, 0, 1\}$, то $n = [r'_x \times r'_y]$. Так как S_1 параллельна как оси

OX , так и оси OY , то в силу следствия 1 свойства 4 поверхностных интегралов второго рода получаем, что

$$\iint_{S_1} (A \cdot n) dS = \iint_{S_1} z^3 dx \wedge dy = \iint_D H^3 dx dy = \pi R^2 H^3.$$

Пользуясь аддитивностью интеграла и результатом предыдущего п. б), окончательно получаем, что

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} (A \cdot n) dS &= \iint_{\partial K} (A \cdot n) dS - \iint_{S_2} (A \cdot n) dS = \\ &= \frac{3\pi R^2 H}{10} (R^2 + 2H^2) - \pi R^2 H^3 = \frac{\pi R^2 H}{10} (3R^2 - 4H^2). \end{aligned}$$

2. Обозначим через (S_2, N_2) внешнюю сторону боковой части ∂K .

Вектор $n \in N_2$ образует с осью OZ тупой угол, т. е. рассматривается нижняя сторона S_2 . Условие $z \geq 0$ позволяет записать S_2 в виде

$$S_2 = \left\{ r : r(x, y) = \left\{ x, y, \frac{H}{R} \sqrt{x^2 + y^2} \right\}, (x, y) \in \bar{D} \right\},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}.$$

Так как вектор $n \in N_2$, определяющий нижнюю сторону поверхности S_2 , равен $\frac{[r'_y \times r'_x]}{|[r'_y \times r'_x]|}$, то

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} (A \cdot n) dS &= \iint_{S_2} x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy = \\ &= \iint_D \left[x^3 \frac{D(y, z)}{D(y, x)} + y^3 \frac{D(z, x)}{D(y, x)} + \frac{H^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \frac{D(x, y)}{D(y, x)} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{D(y, z)}{D(y, x)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{Hy}{R \sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{Hx}{R \sqrt{x^2 + y^2}} \end{vmatrix} = \frac{Hx}{R \sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \frac{D(z, x)}{D(y, x)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{Hy}{R \sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{Hx}{R \sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{Hy}{R \sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\iint_{S_2} (A \cdot n) dS = \iint_D \left[\frac{H(x^4 + y^4)}{R \sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{H^3}{R^3} (x^2 + y^2)^{3/2} \right] dx dy =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{H}{R^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R [R^2(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) - H^2] r^4 dr = \\
&= \frac{H}{R} \cdot \frac{R^6}{5} \cdot 4 \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} - \frac{H^3}{R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi = \frac{[\pi HR^2]}{10} [3R^2 - 4H^2].
\end{aligned}$$

Предоставляем читателю сравнить достоинства и недостатки каждого из способов и остановиться на том или другом.

Пример. Вычислим

$$\int_L (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy,$$

где L — часть кривой $r=a(1+\cos \varphi)$, $y \geq 0$ от точки $A(2a, 0)$ до точки $O(0, 0)$ (декартова и полярная системы координат совмещены) ($a>0$).

Решение. Замкнем кривую \widetilde{AO} отрезком $[OA]$ оси OX (см. рис. 48). Направление кривой \widetilde{AO} индуцирует обход полученного контура так, что область $D=\{(r, \varphi) : 0<\varphi<\pi, 0<r<a(1+\cos \varphi)\}$, ограниченная им, остается слева. Следовательно, используя аддитивность интеграла и формулу Грина, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\int_L (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy = \\
&= \int_{L \cup [OA]} (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy - \\
&- \int_{[OA]} (\cos y + y \sin x + y^2) dx - (\cos x + x \sin y + x^2) dy = \\
&= - \int_0^{2a} dx + \iint_D (\sin x - \sin y - 2x + \sin y - \sin x - 2y) dx dy = \\
&= -2a - 2 \iint_D (x + y) dx dy = -2a - 2 \int_0^\pi d\varphi \int_0^{a(1+\cos\varphi)} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) dr = \\
&= -2a - \frac{2}{3} a^3 \int_0^\pi [(1 + \cos \varphi)^3 \sin \varphi + \cos \varphi + 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^3 \varphi + \\
&+ \cos^4 \varphi] d\varphi = -2a - \frac{2}{3} a^3 \cdot \frac{1}{4} (1 + \cos \varphi)^4 \Big|_0^\pi - \\
&- \frac{2}{3} a^3 \left[3 \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(2)} + \frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} \right] = -2a - \frac{8}{3} a^3 - \frac{5\pi a^3}{4}.
\end{aligned}$$

Пусть (L, T) — гладкий контур с положительным направлением обхода и $n = \{\cos \beta, \sin \beta\}$ — единичный вектор внешней нормали к L . Так как вектор n направлен вправо от вектора $\tau = \{\cos \alpha, \sin \alpha\} \in T$, то угол поворота от τ к n равен $-\pi/2$. Отсюда получаем, что для плоского вектора $A = \{P, Q\}$

$$(A \cdot n) = P \cos \beta + Q \sin \beta = -Q \cos \alpha + P \sin \alpha = (\tilde{A}, \tau),$$

где вектор $\tilde{A} = \{-Q, P\}$ и $\int_L (A \cdot n) ds = \int_L (\tilde{A} \cdot \tau) ds = \int_L P dy - Q dx$.

Пример. Односвязная область $D \subset R^2$. Преобразуем к двойному интегралу криволинейный интеграл первого рода $\int_L \frac{\partial f}{\partial n} ds$,

где функция $f \in C^2(D)$; кусочно-гладкий контур $L \subset D$; n — единичный вектор внешней нормали к L .

Решение. Применяя полученное выше равенство и формулу Грина, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_L \frac{\partial f}{\partial n} ds &= \int_L (\operatorname{grad} f \cdot n) ds = \int_L \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx = \\ &= \iint_{D_L} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy, \end{aligned}$$

где D_L — область, ограниченная контуром L .

Пример. Вычислим интеграл Гаусса

$$u(x_0, y_0) = \int_L \frac{\cos(r, n)}{|r|} ds,$$

где $L \subset R^2$ — гладкий контур; $r = \{x - x_0, y - y_0\}$ — вектор из точки $M_0(x_0, y_0)$, не лежащей на L , в точку $M = (x, y)$ контура L ; n — единичный вектор внешней нормали к L .

Решение. Не ограничивая общности, можно считать, что $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$. Тогда $\cos(r, n) = \frac{(r \cdot n)}{|r|}$. Применяя полученное выше равенство, получаем

$$\int_L \frac{\cos(r, n)}{|r|} ds = \int_L \frac{(r \cdot n)}{|r|^3} ds = \int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Выше было показано (см. с. 252), что интеграл

$$\int_{C_a^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi,$$

где C_a^+ — окружность $x^2 + y^2 = a^2$ ($a > 0$) с положительным направле-

нием обхода. Функции $P = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ и $Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$ в любой области, не содержащей начала координат, являются бесконечно гладкими и удовлетворяют равенству $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Отсюда следует, что если начало координат лежит вне замкнутой области D , ограниченной контуром L , то к интегралу $\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ применима формула Грина, и он равен нулю.

Если же начало координат лежит внутри области D , ограниченной контуром L , то возьмем область D_a , границей ∂D_a , которой является контур L и окружность $C_a : x^2 + y^2 = a^2$. Число $a > 0$ берется так, чтобы окружность C_a лежала внутри D . Область D_a лежит слева от контура L при положительном его обходе и справа от окружности C_a при отрицательном ее обходе (см. рис. 50).

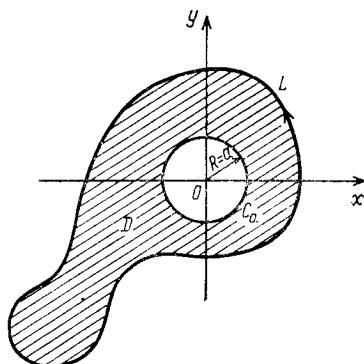


Рис. 50

Обозначим через C_a^+ окружность C_a с положительным направлением обхода и через C_a^- — с отрицательным. Так как начало координат лежит вне D_a , то, как уже получено,

$$\int_{L \cup C_a^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 0.$$

Отсюда, пользуясь аддитивностью и направленностью криволинейного интеграла второго рода, получаем, что

$$\int_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = - \int_{C_a^-} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_{C_a^+} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

Итак, интеграл Гаусса $u(x_0, y_0)$ равен нулю для любой точки $M = (x_0, y_0)$, лежащей вне заданной области, ограниченной контуром L , и равен 2π для любой точки $M = (x_0, y_0)$, лежащей внутри этой области.

Область применения формулы Стокса — это вычисление криволинейных интегралов второго рода в случае, когда кривая интегрирования L задана как пересечение двух поверхностей.

При таком задании кривой L , во-первых, как правило, уже определена поверхность, наложенная на L , а, во-вторых, нет необходимости производить параметризацию кривой L , что часто требует нетривиальных преобразований.

Пример. Найдем циркуляцию вектора $A = \{x(y+z), y(x+z), z(x+y)\}$ вдоль кривой $L : x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $x^2 + y^2 = 2rx$, $z \geq 0$, $(0 < r < R)$, положительно ориентированной на внешней стороне сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$.

Решение. Ориентированный контур (L, T) лежит как на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, так и на цилиндре $x^2 + y^2 = 2rx$, но условиям применения формулы Стокса удовлетворяет только часть сферы, поскольку она является простой гладкой поверхностью. Рассмотрим два способа решения: сведение криволинейного интеграла второго рода а) к поверхностному интегралу второго рода и б) сведение к поверхностному интегралу первого рода.

Первый способ. Обозначим через (S, N) часть внешней стороны полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $z \geq 0$, лежащую внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2rx$. Так как для верхней полусферы внешняя сторона является одновременно и верхней стороной, то

$$S = \{r : r(x, y) = \sqrt{2Rx - x^2 - y^2}\}, (x, y) \in \bar{D},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2rx\}$$

и

$$n = \frac{[r'_x \times r'_y]}{\|r'_x \times r'_y\|} \in N.$$

Применяя формулу Стокса, получим, что

$$\begin{aligned} \int_L (A \cdot \tau) ds &= \int_L x(y+z) dx + y(x+z) dy + z(x+y) dz = \\ &= \iint_S (z-y) dy \wedge dz + (x-z) dz \wedge dx + (y-x) dx \wedge dy = \\ &= \iint_D \left[(z(x, y) - y) \frac{D(y, z)}{D(x, y)} + (x - z(x, y)) \frac{D(z, x)}{D(x, y)} + \right. \\ &\quad \left. + (y - x) \frac{D(x, y)}{D(x, y)} \right] \cdot dx dy. \end{aligned}$$

Дифференцируя $z(x, y)$ как неявную функцию, получаем, что

$$\frac{D(y, z)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{R-x}{z} & -\frac{y}{z} \end{vmatrix} = \frac{x-R}{z},$$

$$\frac{D(z, x)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial x}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{R-x}{z} & -\frac{y}{z} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{y}{z}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L (A \cdot \tau) ds &= \iint_D \left[(z-y) \frac{x-R}{z} + (x-z) \frac{y}{z} + y-x \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left(\frac{yR}{z} - R \right) dx dy. \end{aligned}$$

Так как область D симметрична относительно оси OX , а функция $f(x, y, z) = \frac{Ry}{z} = \frac{Ry}{\sqrt{2Rx-x^2-y^2}}$ нечетна относительно y , то $\iint_D \frac{Ry}{z} dx dy = 0$ и, следовательно, $\int_L (A \cdot \tau) ds = -R \iint_D dx dy = -\pi R r^2$.

Второй способ. Единичный вектор n внешней нормали к сфере $x^2+y^2+z^2=2Rx$ равен $\left\{ \frac{x-R}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right\}$. Часть верхней полусферы, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2 \leqslant 2rx$, как и в первом случае, запишем в виде

$$\begin{aligned} S &= \{r, r(x, y) = \{x, y, \sqrt{2Rx-x^2-y^2}\}, (x, y) \in \bar{D}\}, \\ D &= \{(x, y) : x^2+y^2 \leqslant 2rx\}. \end{aligned}$$

Применяя формулу Стокса, получим, что

$$\begin{aligned} \int_L (A \cdot \tau) ds &= \int_L x(y+z) dx + y(x+z) dy + z(x+y) dz = \\ &= \iint_S \begin{vmatrix} \frac{x-R}{R} & \frac{y}{R} & \frac{z}{R} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x(y+z) & y(x+z) & z(x+y) \end{vmatrix} dS = \\ &= \iint_S \left[\frac{x-R}{R}(z-y) + \frac{y}{R}(x-z) + \frac{z}{R}(y-x) \right] dS = \iint_S (y-z) dS. \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2} dx dy = \sqrt{1+\frac{(R-x)^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} dx dy = \\ &= \frac{R}{z} dx dy, \end{aligned}$$

$$\int_L (A \cdot \tau) ds = R \iint_D \left(\frac{y-z}{z} \right) dx dy = -\pi R r^2.$$

Пример. Вычислим интеграл

$$\int_{AB} z dx + 2x dy - y dz, \quad \text{где } A \bar{B} \text{ — кривая } x^2 + y^2 = 2ax \quad (a > 0),$$

$az = xy, z \geq 0, A = (0, 0, 0), B = (2a, 0, 0)$, используя формулу Стокса.

Решение. Так как отрезок $[BA]$ оси OX лежит на поверхности параболоида $az = xy$, то, объединяя его с кривой \bar{AB} , получим контур L , лежащий на поверхности $az = xy$. Обход полученного контура, индуцированный направлением кривой \bar{AB} , положителен, если рассматривать его на нижней стороне параболоида. Итак, натянутая на контур (L, T) часть (S, N) параболоида $az = xy$ с согласованной ориентацией есть

$$S = \left\{ r : r(x, y) = \left\{ x, y, \frac{xy}{a} \right\}, (x, y) \in D \right\},$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 2ax, y > 0\}$$

и

$$n = \frac{[\vec{r}_y \times \vec{r}_x]}{\|\vec{r}_x \times \vec{r}_y\|} \in N.$$

Так как

$$\int_{[BA]} z dx + 2x dy - y dz = \int_{[BA]} z dx = 0,$$

то в силу аддитивности интеграла имеем, что

$$\begin{aligned} \int_{AB} z dx + 2x dy - y dz &= \int_L z dx + 2x dy - y dz - \\ &- \int_{[BA]} z dx + 2x dy - y dz = \int_L z dx + 2x dy - y dz. \end{aligned}$$

Как и в предыдущем примере, проведем два вычисления интеграла по контуру L .

Первый способ. Применяя формулу Стокса и учитывая указанную сторону поверхности параболоида, получаем, что

$$\begin{aligned} \int_L z dx + 2x dy - y dz &= \iint_S dz \wedge dx + 2dx \wedge dy - dy \wedge dz = \\ &= \iint_D \left[-\frac{D(y, z)}{D(y, x)} + \frac{D(z, x)}{D(y, x)} + 2 \frac{D(x, y)}{D(y, x)} \right] dx dy. \end{aligned}$$

Далее,

$$\frac{D(z, x)}{D(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{x}{a} & \frac{y}{a} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{x}{a}.$$

$$\frac{D(y, z)}{D(y, x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{x}{a} & \frac{y}{a} \end{vmatrix} = \frac{y}{a}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L z \, dx + 2x \, dy - y \, dz &= \iint_D \left(\frac{x}{a} - 2 - \frac{y}{a} \right) dx \, dy = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} r^2 (\cos\varphi - \sin\varphi) dr - a^2\pi = \\ &= \frac{8a^2}{3} \int_0^{\pi/2} (\cos^4\varphi - \sin\varphi \cos^3\varphi) d\varphi - a^2\pi = \\ &= \frac{4a^2}{3} \left[\frac{\Gamma(5/2)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3)} - \frac{1}{4} \right] - a^2\pi = \\ &= -\frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \pi - a^2\pi = -\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2\pi}{2}. \end{aligned}$$

Второй способ. Так как $r'_x = \{1, 0, y/a\}$, $r'_y = \{0, 1, x/a\}$, то $n = \frac{\{y, x, -a\}}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_L z \, dx + 2x \, dy - y \, dz &= \\ &= \iint_S \left| \begin{array}{ccc} \frac{y}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} & \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} & \frac{-a}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z & 2x & -y \end{array} \right| dS = \\ &= \iint_S \left(\frac{-y}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}} - 2a \right) dS. \end{aligned}$$

Так как

$$dS = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx \, dy = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} dx \, dy,$$

то

$$\int_L z \, dx + 2x \, dy - y \, dz = \frac{1}{a} \iint_D (x - y - 2a) \, dx \, dy = -\frac{2a^2}{3} - \frac{a^2\pi}{2}.$$

Пример. Проверим, что выражение $(\cos y + y \cos x)dx + (\sin x - x \sin y)dy$ является полным дифференциалом, и найдем все функции, для которых это выражение является дифференциалом.

Решение. Так как функции $P = \cos y + y \cos x$ и $Q = \sin x - x \sin y$ непрерывно дифференцируемы на всей плоскости R^2 , то из равенства $\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos x - \sin y = \frac{\partial P}{\partial y}$ следует существование функции $f: R^2 \rightarrow R$, для которой $df = Pdx + Qdy = (\cos y + y \cos x) \times dx + (\sin x - x \sin y)dy$.

Функцию $f(x, y)$ находим по уже рассмотренному правилу (см. с. 254). Рассмотрим две точки $A = (0, 0)$ и $B = (x_0, y_0)$, тогда

$$f(x_0, y_0) = f(0, 0) + \int_0^{x_0} dx + \int_0^{y_0} (\sin x_0 - x_0 \sin y) dy = \\ = x_0 + y_0 \sin x_0 + x_0 \cos y_0 - x_0 = y_0 \sin x_0 + x_0 \cos y_0.$$

В силу произвольности точки $B = (x_0, y_0)$ находим множество функций $f(x, y) = x \cos y + y \sin x + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример. Проверим, что векторное поле $A = \{\sqrt{z} + y/2\sqrt{x}, \sqrt{x} + z/2\sqrt{y}, \sqrt{y} + x/2\sqrt{z}\}$ потенциально в первом октанте $x > 0, y > 0, z > 0$, и найдем его потенциал.

Решение. Условием потенциальности поля A является равенство $\operatorname{rot} A = 0$. Проверим справедливость этого равенства для данного поля:

$$\operatorname{rot} A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}} & \sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}} & \sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}} \end{vmatrix} = \\ = i \left(\frac{1}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) + j \left(\frac{1}{2\sqrt{z}} - \frac{1}{2\sqrt{z}} \right) + k \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 0.$$

Потенциалом поля A является функция $u(x, y, z)$, удовлетворяющая условию $\operatorname{grad} u = A$ или

$$du = \left(\sqrt{z} + \frac{y}{2\sqrt{x}} \right) dx + \left(\sqrt{x} + \frac{z}{2\sqrt{y}} \right) dy + \left(\sqrt{y} + \frac{x}{2\sqrt{z}} \right) dz.$$

По уже рассмотренному правилу получаем, что

$$\begin{aligned}
 u(x_0, y_0, z_0) &= u(1, 1, 1) + \int_1^{x_0} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx + \\
 &+ \int_1^{y_0} \left(\sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \right) dy + \int_1^{z_0} \left(\sqrt{y_0} + \frac{x_0}{2\sqrt{z}} \right) dz = \\
 &= x_0 - 1 + \sqrt{x_0} - 1 + y_0 \sqrt{x_0} - \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} - 1 + z_0 \sqrt{y_0} - \sqrt{y_0} + \\
 &+ x_0 \sqrt{z_0} - x_0 = y_0 \sqrt{x_0} + z_0 \sqrt{y_0} + x_0 \sqrt{z_0} - 3.
 \end{aligned}$$

Итак, потенциалом поля A является функция

$$u(x, y, z) = x\sqrt{z} + z\sqrt{y} + y\sqrt{x} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Непосредственная проверка показывает, что дивергенция соленоидального поля A тождественно равна нулю. Верно и обратное утверждение: если $\operatorname{div} A = 0$ в области $D \subset \mathbb{R}^3$, то в этой области поле A соленоидально. Так как $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u) = 0$, то векторный потенциал соленоидального поля определяется с точностью до слагаемого, являющегося потенциальным полем. Один из векторных потенциалов $W = \{W_x, W_y, W_z\}$ соленоидального поля $A = \{A_x, A_y, A_z\}$ получают следующим образом: 1) полагают $W_x = 0$; 2) за W_y берут одну из первообразных функций A_z относительно переменной x ; 3) W_z будет та из первообразных функций — A_y относительно переменной x , которая отвечает уравнению

$$\frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} = A_x.$$

Запишем это так:

$$W_y = \int A_z dx, \quad W_z = - \int A_y dx + \varphi(y, z),$$

где функция $\varphi(y, z)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = A_x + \frac{\partial}{\partial z} W_y + \frac{\partial}{\partial y} \int A_y dx$. Выбирая одно из решений этого уравнения, окончательно определяем функции $W_x = 0, W_y, W_z$.

Пример. Проверив, что поле $A = \{x-y+z, y+z-x, x+y-2z\}$ соленоидально, найдем его векторный потенциал.

Решение. Поле A соленоидально, так как $\operatorname{div} A = \frac{\partial}{\partial x}(x-y+z) + \frac{\partial}{\partial y}(y+z-x) + \frac{\partial}{\partial z}(x+y-2z) = 1+1-2=0$. Одним из векторных потенциалов поля A является поле $W = \{W_x, W_y, W_z\}$, где

$$W_x = 0,$$

$$W_y = \int (x+y-2z) dx = \frac{x^2}{2} + yx - 2zx,$$

$$W_z = \int (x-y+z) dx + \varphi(y, z) = \frac{x^2}{2} - yx - zx + \varphi(y, z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x - y + z + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x^2}{2} + yx - 2zx \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x^2}{2} + yx + zx \right) = -y + z,$$

$$\varphi = -\frac{y^2}{2} + zy.$$

Итак, векторным потенциалом поля $A = \{x-y+z, y+z-x, x+y-2z\}$ является векторное поле $F = W + \operatorname{grad} u$, где

$W = \left\{ 0, \frac{x^2}{2} + yx - 2zx, \frac{x^2 - y^2}{2} - yx - zx + zy \right\}$ и u — произвольная функция класса C^2 .

ЗАДАЧИ

§ 1. Алгебраические и дифференциальные формы

1. Найти значение формы

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 - 3\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4 - \pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 + 2\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$$

на векторах $\xi_1 = (2, 2, -1, 1)$, $\xi_2 = (4, 3, -1, 2)$, $\xi_3 = (-1, 0, 2, 3)$.

2. Найти значение формы

$$\pi_1 \wedge \pi_2 + 2\pi_2 \wedge \pi_3 - 5\pi_1 \wedge \pi_3$$

на векторах $\xi_1 = (1, 4, 1)$, $\xi_2 = (2, 0, 3)$.

3. Привести к координатному виду форму

$$(2\pi_1 + \pi_2 - \pi_3 + 2\pi_4) \wedge (\pi_1 \wedge \pi_2 - 3\pi_2 \wedge \pi_4).$$

4. Привести к координатному виду форму

$$(2\pi_1 \wedge \pi_3 - 3\pi_1 \wedge \pi_4 + \pi_3 \wedge \pi_4) \wedge (5\pi_1 - 2\pi_2 + 3\pi_3 + \pi_4).$$

5. Найти значение дифференциальной формы

$$x_2^2 x_4^2 dx_1 \wedge dx_2 + x_1^2 x_3^2 dx_1 \wedge dx_4 + x_3^2 x_4^2 dx_2 \wedge dx_3 + x_1^2 x_2^2 dx_2 \wedge dx_4$$

на векторах $\xi_1 = (1, -1, 0, 2)$ и $\xi_2 = (3, 1, -1, 0)$ из пространства $TD_{(1, 2, -1, -2)}$.

6. Найти значение дифференциальной формы

$$x_2x_3^2dx_1 \wedge dx_2 + 2x_1x_2x_3^2dx_1 \wedge dx_3 + x_1x_2x_3dx_2 \wedge dx_3$$

на векторах $\xi_1 = (1, 0, 1)$, $\xi_2 = (2, -1, 0)$ из пространства $TD_{(2, 2, 1)}$.

Привести к координатному виду дифференциальные формы.

7. $(x_2dx_3 \wedge dx_4 + x_1dx_2 \wedge dx_3 + x_3dx_1 \wedge dx_4 + x_4dx_1 \wedge dx_2) \wedge$
 $\wedge (x_1x_2dx_1 + x_2x_3dx_2 + x_3x_4dx_3 + x_4x_1dx_4).$

8. $d\left(\arctg \frac{x_1x_2}{x_3x_4}\right) \wedge d(x_3x_1 - x_2x_4).$

9. $d(2x_1^2x_2x_3dx_2 \wedge dx_4 + x_1^2x_2^2dx_3 \wedge dx_4 - 2x_1x_2^2x_4dx_1 \wedge dx_3).$

10. $d(2x_1x_2e^{x_3+x_4}dx_1 \wedge dx_3 + x_1^2e^{x_3+x_4}dx_2 \wedge dx_3 +$
 $+ 2x_1x_2e^{x_3+x_4}dx_1 \wedge dx_4 + x_1^2e^{x_3+x_4}dx_2 \wedge dx_4).$

11. $d(2x_1x_2x_3x_4dx_1 + x_1x_3^2x_4dx_2 + x_1^2x_2x_4dx_3 + x_1x_2x_3^2dx_4).$

12. $d(x(z^2 - y^2))dx + y(x^2 - z^2))dy + z(y^2 - x^2))dz).$

13. $d(xyz^2dx \wedge dy + x^2yzy \wedge dz + xy^2zdz \wedge dx).$

14. $d(\sin(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)dx_1 \wedge dx_3 + \sin(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \times$
 $\times dx_2 \wedge dx_4 - \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)dx_1 \wedge dx_2 +$
 $+ \sin(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)dx_3 \wedge dx_4).$

15. $d(x_1x_2dx_1 + x_2x_3dx_2 + x_3x_4dx_3 + x_1x_4dx_4) \wedge$
 $\wedge (x_4dx_1 + x_3dx_2 + x_2dx_3 + x_1dx_4).$

Выяснить, замкнуты или нет следующие формы:

16. $2zxdx + 2zydy + (x^2 + y^2)dz.$

17. $2xyzdx + (x^2z - z^2y)dy + x^2ydz.$

18. $(ye^{xyz} + xy^2ze^{xyz})dx + (xe^{xyz} + x^2yze^{xyz})dy + x^2y^2e^{xyz}dz.$

19. $(x_1^2 + x_2x_3 - x_3x_4)dx_1 \wedge dx_2 + (x_2^2 + 2x_3x_4 - x_2x_4)dx_1 \wedge dx_3 +$
 $+ 2x_1x_4dx_1 \wedge dx_4 + (x_1x_2 - x_3x_4)dx_2 \wedge dx_3 +$
 $+ (-2x_2x_4 + x_1x_3)dx_2 \wedge dx_4 + (x_1x_2 + x_2x_3 - 2x_1x_3)dx_3 \wedge dx_4.$

20. $z(x - y)\cos(x + y - z)dx \wedge dy + x(y + z)\cos(x + y - z)dy \wedge$
 $\wedge dz - y(x + z)\cos(x + y - z)dz \wedge dx.$

21. $(x_1x_2 + x_3x_4)dx_1 \wedge dx_2 + (x_1x_3 + x_2x_4)dx_1 \wedge dx_4 +$
 $+ (x_1x_4 + x_2x_3)dx_2 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)dx_3 \wedge dx_4.$

$$22. (x_4x_3 + x_2^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + x_1x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + \\ + (x_2x_4 - x_4^2)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + x_1x_2dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4.$$

$$23. 2x_3x_4x_5^2dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 - 2x_1^2x_2x_3dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \\ + (2x_3x_4^2x_5 - x_1x_2x_4x_5)dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_5 + (2x_1x_2x_3^2 + x_4x_5^3)dx_1 \wedge \\ \wedge dx_2 \wedge dx_4 - x_1x_3x_4x_5dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_5 - (x_2^2x_4^2 + 2x_1^2x_2x_3)dx_2 \wedge \\ \wedge dx_3 \wedge dx_4 + 3x_1x_4x_5^2dx_2 \wedge dx_4 \wedge dx_5 - x_1x_2x_3x_5dx_1 \wedge dx_4 \wedge dx_5.$$

Найти сужение формы ω на кривую L с указанной параметризацией:

$$24. \omega = (x + \sin x)dy - y(\cos x + 1)dx,$$

$$L = \{(x, y) : x = x, y = x \cos x\}.$$

$$25. \omega = ydx - xdy,$$

$$L = \{(x, y) : x = y \ln y, y = y\}.$$

$$26. \omega = yzdx - xzdy + xydz,$$

$$L = \{(x, y, z) : x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt\}.$$

$$27. \omega = xzdx + yzdy + (x^2 + y^2)dz,$$

$$L = \{(x, y, z) : x = at \sin t, y = at \cos t, z = bt^2\}.$$

Найти сужение формы ω на поверхность S с указанной параметризацией:

$$28. \omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = x, y = y, z = x \sin y + y \sin x\}.$$

$$29. \omega = -z(z^2 + y^2)dx \wedge dy + y(z^2 + y^2)dz \wedge dx + 2xdy \wedge dz,$$

$$S = \left\{ (x, y, z) : x = \operatorname{arctg} \frac{y}{z} + yz, y = y, z = z \right\}.$$

$$30. \omega = zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + 2ydz \wedge dx,$$

$$S = \{(x, y, z) : x = x, y = xz \ln(x^2 + z^2), z = z\}.$$

$$31. \omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy,$$

$$S - \text{сфера радиусом } R : S = \{(x, y, z) : x = R \cos \varphi \cos \psi, y = R \sin \varphi \cos \psi, z = R \sin \psi\}.$$

$$32. \omega = z^2(x + y)dx \wedge dy - z(x^2 + y^2)(dz \wedge dx + dy \wedge dz),$$

$$S - \text{геликоид} : S = \{(x, y, z) : x = au \cos v, y = au \sin v, z = bu\}.$$

33. $\omega = yzdy \wedge dz - xzdz \wedge dx + xydx + dx \wedge dy$,

S — top : $S = \{(x, y, z) : x = (b + a \cos \varphi) \cos \psi, y = (b + a \cos \varphi) \sin \psi, z = a \sin \varphi\}, a < b$.

34. $\omega = ydx \wedge dy - zdz \wedge dx + xdy \wedge dz$,

S — гиперболический параболоид

$$S = \{(x, y, z) : x = auv, y = a(u+v), z = a(u-v)\}.$$

35. $\omega = z(x^2 + y^2)dx \wedge dy - x(y^2 + z^2)dy \wedge dz + y(x^2 + z^2)dz \wedge dx$,

S — цилиндр, $S = \{(x, y, z) : x = R \cos \varphi + R, y = R \sin \varphi, z = h\}$.

§ 2. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычислить криволинейный интеграл второго рода, взятый вдоль ориентированной кривой L :

36. $\int_L (2-y)dx + xdy,$

$$L = \{(x, y) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq 2\pi\},$$

где кривая проходится при возрастании параметра.

37. $\int_L \frac{ydx + xdy}{1 + x^2y^2}$, где L есть отрезок AB , $A = (0, 0)$ и $B = (1, 1)$.

38. $\int_L (-x^2ydx + xy^2dy)$, $L = \{(x, y) : x^2 + y^2 = r^2\}$,

где окружность проходится в положительном направлении.

39. $\int_L ydx - (y + x^2)dy$, L — дуга параболы $y = 2x - x^2$ от точки $A = (2, 0)$ до точки $B = (0, 0)$.

40. $\int_L xdy + 2ydx$, L — контур, составленный линиями $y = 0$, $y = x$, $y = \sqrt{1-x^2}$ с положительным направлением обхода.

41. $\int_L (x+y)dx - xydy$, где L — дуга кривой $x^{1/4} + y^{1/4} = a^{1/4}$ от точки $A = (0, a)$ до точки $B = (a, 0)$.

42. $\int_L x \cdot y^2dx - x^2ydy$, $L = \{(x, y) : 2(x+y) = (x-y)^2\}$, от точки $A = (0, 2)$ до точки $B = (2, 0)$.

- 43.** $\int\limits_L xydx - x^2dy$, где $L = \{(x, y) : x^4 - 2x^2y^2 + y^3 = 0\}$ от точки $A = (-1/4, -1/8)$ до точки $B = (0, 0)$.
- 44.** $\int\limits_L y^3dy - 2xy^2dx$, где L — часть кривой $x^3 + 2x^2 + y^2 = 3$ от точки $A = (-1, \sqrt{2})$ до точки $B = (1, 0)$.
- 45.** $\int\limits_L (y + \pi) dx + x \cos y dy$, где L — часть кривой $\pi \ln x - y + \sin y = 0$ от точки $A = (1, 0)$ до точки $B = (e, \pi)$.
- 46.** $\int\limits_L x^2dy - xydx$, где L — часть кривой $x^4 - y^4 = 6x^2y$ от точки $A = (-4\sqrt{2}, 4)$ до точки $B = (0, 0)$.
- 47.** $\int\limits_L xdy - ydx$, где L — часть кривой $x(x-y)^2 + y = 0$ от точки $A = (0, 0)$ до точки $B = (2/5, -8/5)$.
- 48.** $\int\limits_L xdy - ydx$, где L — петля кривой $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ с положительным направлением обхода.

Указание. Положить $y = xt$. При вычислении соответствующего интеграла сделать замену $z = 1/t$.

- 49.** $\int\limits_L xydx - x^3y^3dy$, где L — контур квадрата $|x-y| + |x+y| = 1$ с отрицательным направлением обхода.
- 50.** $\int\limits_L xzdx + axdy - x^2dz$, где L — часть кривой $az = xy$, $x + y + z = a$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ от точки $A = (0, a, 0)$ до точки $B(a, 0, 0)$.
- 51.** $\int\limits_L yzdx + aydz - azdy$, где L — часть кривой $x^2 + y^2 = z^2$, $y^2 + x^2 = ax$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ от точки $A = (0, 0, 0)$ до точки $B(a, 0, a)$.
- 52.** $\int\limits_L x^2y^3dx + dy + zdz$, где L — часть кривой $x^2 + y^2 = r^2$, $z = H$ от точки $(r, 0, H)$ до точки $(-r, 0, H)$, проходящая через точку $(0, r, H)$.

Для вычисления следующих интегралов удобно пользоваться формулами Грина и Стокса, замыкая, если нужно, кривую отрезком прямой. Все они могут быть вычислены и путем параметризации кривых, что полезно проделать для проверки, однако вычисления при этом, как правило, становятся существенно более громоздкими.

53. $\int_L (x^2 - y^2) dx + 2xy dy$, L — контур треугольника с вершинами $A = (1, 1)$, $B = (3, 1)$, $C = (3, 3)$ с положительным направлением обхода.

54. $\int_L xy dx + 2xy^2 dy$, L — контур треугольника с вершинами $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$, $C = (0, 0)$ с отрицательным направлением обхода.

55. $\int_L (x-y)^2 dx + (x+y)^2 dy$, L — ломаная ABC , где $A = (0, 0)$, $B = (2, 2)$, $C = (0, 1)$.

56. $\int_L x^3 y^3 dx + (x-y)^2 dy$, L — ломаная ABC , где $A = (2, 1)$, $B = (0, 3)$, $C = (-2, 1)$.

57. $\int_L (4xy - 15x^2y) dx + (2x^2 - 5x^3 + 7) dy$

а) L — часть кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от точки $A = (1 - \sqrt{3}, 0)$ до точки $B = (1, 0)$;

б) L — часть кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ от точки $A = (1 - \sqrt{3}, 0)$ до точки $B = (1 + \sqrt{3}, 0)$.

58. $\int_L x dy + y dx$, L — часть кривой,

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \frac{4}{\pi^2}, & x \neq 0; \\ \frac{4}{\pi^2}, & x = 0 \end{cases}$$

от точки $A = (0, 4/\pi^2)$ до точки $B = (2/\pi, 8/\pi^2)$.

59. $\int_L (xy + x + y) dx + (xy + x - y) dy$

а) L — часть окружности $x^2 + y^2 = ax$ ($y \leq 0$) от точки $A = (0, 0)$ до точки $B = (a, 0)$;

б) L — часть окружности $x^2 + y^2 = ax$ ($x \leq a/2$) от точки $A = (a/2, -a)$ до точки $B = (a/2, a)$.

60. $\int_L \left(1 - \frac{y}{2}\right) dx + \frac{x}{2} dy$, где L — верхняя ($y \geq 0$) полуокружность $x^2 + y^2 = a^2$ от точки $A = (a, 0)$ до точки $B = (-a, 0)$.

61. $\int_L (e^{-x} \cos y - y^2) dx + (e^{-x} \sin y - x^2) dy$,

где L — правая ($x \geq a$) полуокружность $x^2 + y^2 = 2ax$ от точки $A = (a, a)$ до точки $B = (a, -a)$.

$$62. \int_L y^{5/3} dx - x^{5/3} dy,$$

где L — положительно ориентированная кривая $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$.

$$63. \int_L xy^2 dx + (y^2 - x^2) dy,$$

где L — положительно ориентированная кривая $r = a(1 + \cos \varphi)$.

$$64. \int_L x^2 y dx - y^2 x dy,$$

где L — верхняя ($y \geq 0$) часть правой петли ($x \geq 0$) лемнискаты $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ от точки $A = (0, 0)$ до точки $B = (a, 0)$.

$$65. \int_L (x^2 + y) dx + (y^2 + z) dy + (z^2 + x) dz,$$

где L — эллипс $x^2 + y^2 = 4$, $x + z = 2$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

$$66. \int_L (xy + z) dx + (yz + x) dy + (xz + y) dz,$$

где L — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

$$67. \int_L (z^2 - y^2) dx + (x^2 - z^2) dy + (y^2 - x^2 + x) dz,$$

где L — эллипс $x^2 + y^2 = 8x$, $x + y + z = 0$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

$$68. \int_L 2xy dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

где L — эллипс $2x^2 + 2y^2 = z^2$, $x + z = a$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости.

69. Пусть K — куб, построенный на единичных положительных векторах осей координат. Вычислить

$$\int_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz,$$

если L есть:

а) контур сечения K плоскостью, проходящей через точки $O = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $A = (1, 1, 0)$, положительно ориентированный на правой стороне плоскости;

б) контур сечения K плоскостью, проходящей через точки $P=(1, 0, 0)$, $Q=(0, 1, 0)$, $R=(1, 0, 1)$, положительно ориентированный на правой стороне плоскости.

$$70. \int_L (y^2 + z^2) dx + (x^2 + z^2) dy + (y^2 + x^2) dz,$$

где L — верхняя ($z \geq 2$) петля кривой $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$, положительно ориентированная на внешней стороне верхней ($z \geq 2$) полусферы.

$$71. \int_L (z - x^2 - y) dx + (x + y + z) dy + (y + 2x + z^3) dz,$$

где L — кривая $y^2 + z^2 = x^2$, $x \geq 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2az$, положительно ориентированная на внешней стороне правой ($x \geq 0$) полусферы.

$$72. \int_L z^2 dx + x^2 dy + y^2 dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3}}$,

положительно ориентированная на внешней стороне конуса.

$$73. \int_L z^2 x dx + (z + x + y) dy + y^2 z dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 = ax$, $x^2 = y^2 + z^2$, положительно ориентированная на внешней стороне цилиндра.

$$74. \int_L xyz dx + y^2 z dy + zx^2 dz,$$

где L — кривая $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $x \geq 0$, положительно ориентированная на внешней стороне первого цилиндра.

$$75. \int_L (xy + z) dx + (yz + x) dy + y \sqrt{a^2 - x^2} dz,$$

где L — кривая $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$, $x^2 + y^2 = a^2$, положительно ориентированная на внутренней стороне цилиндра.

Для вычисления следующих интегралов удобно привести их к криволинейному интегралу второго рода и применить формулу Грина:

$$76. \int_L \frac{\partial (x^2 + 3xy - 4y^2)}{\partial n} ds,$$

где L — кривая $4(x+a)^2 + (y-2a)^2 = 4a^2$, n — направление внешней нормали к L .

$$77. \int_L \frac{\partial (x^2 + 4y^2 - xy)}{\partial n} ds,$$

где L — кривая $(x-2)^2 + 4(y+1)^2 = 16$, n — направление внешней нормали к L .

$$78. \int_L \frac{\partial (x^2 - 5xy + 3y^2)}{\partial n} ds,$$

где L — контур, составленный правой $(x \geq a)$ полуокружностью $x^2 + y^2 = 2ax$ и прямой $x = a$, n — направление внешней нормали к L .

$$79. \int_L \left(\frac{\partial (xy)}{\partial n} \sqrt{x^2 + 4y^2} - \frac{\partial \sqrt{x^2 + 4y^2}}{\partial n} xy \right) ds,$$

где L — контур, составленный верхней $(y \geq 1)$ полуокружностью $x^2 + y^2 = 2y$ и прямой $y = 1$, n — направление внешней нормали к L .

Проверив, что подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал, вычислить интеграл:

$$80. \int_{(-1, -2)}^{(1, 0)} (2x - y) dx + (3y - x) dy.$$

$$81. \int_{(0, 1)}^{(1, 0)} (3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy) dy.$$

$$82. \int_{(1, 1)}^{(2, 3)} 2x(y^2 - 2) dx + 2y(x^2 + 1) dy.$$

$$83. \int_{(0, 0)}^{(1, 1)} x(1 + 6y^2) dx + y(1 + 6x^2) dy.$$

$$84. \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 3, 4)} (2xy + y^2 + yz^2) dx + (x^2 + 2xy + xz^2) dy + 2xyz dz.$$

$$85. \int_{(-1, 1, -1)}^{(1, 1, 2)} x(y^2 + z^2) dx + y(x^2 + z^2) dy + z(x^2 + y^2) dz.$$

$$86. \int_{(1, 1, 1)}^{(2, 2, 2)} yzx^{yz-1} dx + zx^{yz} \ln x dy + yx^{yz} \ln x dz.$$

$$87. \int_{(7, 2, 3)}^{(5, 3, 1)} \frac{xzdy + xydz - yzdx}{(x - yz)^2}$$

вдоль путей, не пересекающих поверхность $x = yz$.

88. $\int_{(-1, -2)}^{(-2, 3)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси ординат.

89. $\int_{(-1, 5)}^{(2, 2)} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$ вдоль путей, не пересекающих оси абсцисс.

Найти функцию U , если задан ее дифференциал:

90. $dU = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy.$

91. $dU = (1 + e^{x/y}) dx + \left(1 - \frac{x}{y}\right) e^{x/y} dy.$

92. $dU = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{xdy - ydx}{x^2}.$

93. $dU = \frac{x + y + z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \{(y^2 + z^2 - xy - xz) dx + (z^2 + x^2 - yz - yx) dy + (x^2 + y^2 - zx - zy) dz\}.$

94. $dU = \left[\sqrt{1 - y^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{y}{x^2 + y^2} \right] dx + \left(\sqrt{1 - x^2} - \frac{xy}{\sqrt{1 - y^2}} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{y} \right) dy.$

95. $dU = \left(\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} + \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \sin 2y + \frac{1}{\sin x} \right) dx + \left(\frac{y}{2\sqrt{1+xy}} - \frac{x}{x^2 + y^2} + 2e^x \cos 2y \right) dy.$

96. $dU = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2} + 2x\sqrt{1+y} - \frac{y}{1+x^2y^2} + \ln x \right) dx + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2} + \frac{x^2}{2\sqrt{1+y}} - \frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{1}{y\sqrt{1+y^2}} \right) dy.$

97. $dU = \left(\frac{yz}{1+(xyz)^2} + \frac{2x}{x^2 + z^2} + 2x \right) dx + \left(\frac{xz}{1+(xyz)^2} - \frac{1}{2\sqrt{yz}} - 1 \right) dy + \left(\frac{xy}{1+(xyz)^2} + \frac{2z}{x^2 + z^2} + \frac{\sqrt{y}}{2z\sqrt{z}} + 1 \right) dz.$

98. $dU = \left(2xyz + \frac{1}{z} \right) dx + \left(x^2z - \frac{1}{z^2} \right) dy + \left(x^2y - \frac{x}{z^2} + \frac{2y}{z^3} \right) dz.$

$$99. dU = (2xy + z^2 + yz) dx + (x^2 + 2yz + xz) dy + \\ + (y^2 + 2xz + xy) dz.$$

§ 3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода

Вычислить поверхностные интегралы второго рода

$$100. \iint_S (y^2 + z^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть верхней стороны цилиндра $z = \sqrt{a^2 - x^2}$, $0 \leq y \leq b$.

$$101. \iint_S (x^4 + y^4 + 2a^2 z^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть нижней стороны параболоида $az = xy$, лежащая в первом октанте и внутри цилиндра $(x^2 + y^2)^2 = bxy$.

$$102. \iint_S (x^2 + 6z - 2y^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть нижней стороны цилиндра $y^2 = 6z$, $0 \leq x \leq 3$, $z \leq 6$.

$$103. \iint_S (a^2 x + b y^2 + c z^2) dy \wedge dz,$$

где S — правая сторона цилиндра $y^2 = 2px$, $x \leq 2p$, $0 \leq z \leq q$.

$$104. \iint_S (x^2 + z^2) dy \wedge dz,$$

где S — часть внешней стороны цилиндра $x = \sqrt{9 - y^2}$, $0 \leq z \leq 2$.

$$105. \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dx \wedge dz,$$

где S — часть внешней стороны конуса $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $0 \leq y \leq b$.

$$106. \iint_S (y - z) dy \wedge dz + (z - x) dx \wedge dz + (x - y) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны верхней $z \geq 0$ полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, лежащая внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, $a < R$.

$$107. \iint_S x dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq a^2$, $-H \leq z \leq H$.

$$108. \iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — внутренняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

109. $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$

где а) S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z, z \leq H$;
 б) S — часть внешней стороны параболоида $x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq H$.

110. $\iint_S x^2 dy \wedge dz + y^2 dz \wedge dx + z^2 dx \wedge dy,$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq H$.

111. $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$

где S — внутренняя сторона поверхности тела $x + 2y + 3z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

112. $\iint_S (xy^2 + z^2) dy \wedge dz + (yz^2 + x^2) dz \wedge dx + (zx^2 + y^2) dx \wedge dy,$

где S — внешняя сторона верхней ($z \geq 0$) полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

113. $\iint_S xy dy \wedge dz + yz dz \wedge dx + xz dx \wedge dy,$

где S — часть внешней стороны конуса $x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq H$.

114. $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dy \wedge dz + \sqrt{x^2 + y^2} dz \wedge dx + \sqrt{z} dx \wedge dy,$

где S — правая сторона части поверхности тела $x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 \leq 2 - z, z \geq 0$, удовлетворяющая условию $x \geq 0$.

115. $\iint_S x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$

где S — правая сторона части цилиндра $y^2 + x = 1, 0 \leq z \leq 2, x \geq 0$.

116. $\iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z^3 dx \wedge dy,$

где S — верхняя сторона части параболоида $x^2 + y^2 = 2 - z, z \geq 0$.

117. $\iint_S (xz^2 + y^2) dy \wedge dz + (yx^2 + z^2) dz \wedge dx + (zy^2 + x^2) dx \wedge dy,$

где S — часть внешней стороны конуса $1 - z = \sqrt{x^2 + y^2}, z \geq 0$.

$$118. \iint_S x^3 dy \wedge dz + y^3 dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — часть внутренней стороны гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $0 \leq z \leq 3$.

$$119. \iint_S (x + y^2) dy \wedge dz + (y + z^2) dz \wedge dx + (z + x^2) dx \wedge dy,$$

где S — часть внешней стороны цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq H$.

$$120. \iint_S yz^2 dy \wedge dz + zy^2 dz \wedge dx + yx^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $0 \leq z \leq x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$121. \iint_S xz^2 dy \wedge dz + yx^2 dz \wedge dx + zy^2 dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az$, $x^2 + y^2 \geq 3z^2$, $x \geq y$.

$$122. \iint_S (x^2 + y^2) dy \wedge dz + (y^2 + z^2) dz \wedge dx + (z^2 + x^2) dx \wedge dy,$$

где S — внутренняя сторона поверхности тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$123. \iint_S x^{\alpha+1} y^{\beta} z^{\gamma} \left(\frac{x}{\alpha+2} - \frac{1}{3(\alpha+1)} \right) dy \wedge dz + \\ + x^{\alpha} y^{\beta+1} z^{\gamma} \left(\frac{y}{\beta+2} - \frac{1}{3(\beta+1)} \right) dz \wedge dx + \\ + x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma+1} \left(\frac{z}{\gamma+2} - \frac{1}{3(\gamma+1)} \right) dx \wedge dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности тела $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

$$124. \iint_S y dy \wedge dz - x dz \wedge dx + z dx \wedge dy,$$

где S — часть верхней стороны геликоида $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = av$, $0 \leq v \leq 2\pi$, $0 \leq u \leq 1$.

§ 4. Векторный анализ

Найти $\operatorname{grad} U$, если:

$$125. U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

126. $U = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

127. Найти угол между градиентами функций $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ и $v = xy + yz + zx - 18x - 6z - y$ в точке $M = (3, 5, 4)$.

Найти $\operatorname{div} \vec{F}$, если:

128. $\vec{F} = \frac{-ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

129*. $\vec{F} = \vec{r}$.

130. $\vec{F} = \frac{\vec{r}}{r}$.

131. $\vec{F} = \frac{f(x \cdot y \cdot z)}{yz} i + \frac{f(x \cdot y \cdot z)}{xz} j - 2 \frac{f(x \cdot y \cdot z)}{xy} k, \quad f \in C^1(R)$.

132. $\vec{F} = xf\left(\frac{xy}{z}\right) i - 2yf\left(\frac{xy}{z}\right) j - zf\left(\frac{xy}{z}\right) k, \quad f \in C^1(R)$.

Найти $\operatorname{rot} F$, если:

133. $F = (x+z)i + (y+z)j + (x^2 + z^2)k$.

134. $F = (x^2 + y^2)i + (y^2 + z^2)j + (z^2 + x^2)k$.

135. $F = z^3i + y^3j + x^3k$.

136. $F = \frac{y}{z}i + \frac{z}{x}j + \frac{x}{y}k$.

137. $F = \vec{r}$.

138. $F = \vec{c} \cdot \vec{f}(r), \quad f \in C^1(R), \quad \vec{c}$ —постоянный вектор.

139. $F = \vec{r} \cdot \vec{f}(r), \quad f \in C^1(R)$.

140. $F = [\vec{c} \times \vec{f}(r) \vec{r}], \quad f \in C^1(R), \quad \vec{c}$ —постоянный вектор.

Пусть $\nabla u = \operatorname{grad} u$, $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, где u —скалярная функция; $\nabla \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$, где \vec{F} —вектор: $\vec{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$.

Доказать следующие соотношения:

141. а) $\operatorname{div}(u \nabla u) = u \Delta u + (\nabla u)^2$;

б) $\operatorname{div}(u \nabla v) = u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$;

* Здесь и в дальнейшем $\vec{r} = \{x, y, z\}$, $r = |\vec{r}|$.

- в) $\operatorname{grad}(u+v)=\operatorname{grad} u+\operatorname{grad} v$;
 г) $\operatorname{div}(\vec{F}+\vec{\Phi})=\operatorname{div} \vec{F}+\operatorname{div} \vec{\Phi}$;
 д) $\operatorname{div}(uc)=\vec{c} \cdot \operatorname{grad} u$, \vec{c} — постоянный вектор;
 е) $\operatorname{grad}(uv)=u \operatorname{grad} v+v \operatorname{grad} u$;
 ж) $\operatorname{div}[\vec{F} \times \vec{\Phi}]=\vec{\Phi} \cdot \operatorname{rot} \vec{F}-\vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{\Phi}$;
 з) $\operatorname{div}(u\vec{F})=u \operatorname{div} \vec{F}+\vec{F} \cdot \operatorname{grad} u$;
 и) $\operatorname{div} \operatorname{grad} u=\Delta u$;
 к) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} u=0$;
 л) $\operatorname{rot}(\vec{F}+\vec{\Phi})=\operatorname{rot} \vec{F}+\operatorname{rot} \vec{\Phi}$;
 м) $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u \operatorname{rot} \vec{F}+[\operatorname{grad} u \cdot \vec{F}]$.

142. Найти $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))$. Выяснить, когда $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f(r))=0$, $f \in C^1(R)$.

143. Найти $\operatorname{div}(f(r)\vec{c})$, $f \in C^1(R)$.

144. Найти $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})$. Выяснить, когда $\operatorname{div}(f(r)\vec{r})=0$, $f \in C^1(R)$.

145. Электростатическое поле точечного заряда q равно

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}_0}{r^2}, \text{ где } \vec{r}_0=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}.$$

Вычислить $\operatorname{div} E$ в точке $M(x, y, z)$ ($xyz \neq 0$).

Проверить, является ли поле F потенциальным, и если да, то найти его потенциал.

146. $F=2xyi+(x^2+1)j$.

147. $F=(y+1)^2 i+2x(y+1)j$.

148. $F=\cos y i+x \sin y j$.

149. $F=(y+z)i+(x+z)j+(x+y)k$.

150. $F=(yz+1)i+xzj+xyk$.

151. $F=\frac{i+j+k}{x+y+z}$.

152. $F=e^x \sin y i+e^x \cos y j+k$.

$$153. F = \left(\frac{1}{z} - \frac{y}{x^2} \right) i + \left(\frac{1}{x} - \frac{z}{y^2} \right) j + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{z^2} \right) k.$$

$$154. F = yz(2x+y+z)i + xz(x+2y+z)j + xy(x+y+2z)k.$$

$$155. F = 2xyzi + x^2zj + x^2yk.$$

$$156. F = \frac{2}{\sqrt[3]{y+z}} i - \frac{x}{\sqrt[3]{(y+z)^3}} j - \frac{x}{\sqrt[3]{(y+z)^3}} k.$$

157. Доказать, что поле электрической напряженности \vec{E} , соз-даваемое точечным зарядом q , помещенным в начале координат, является потенциальным полем, и найти его потенциал.

158. Найти потенциал гравитационного поля $\vec{a} = -mr/r^3$, соз-даваемого массой m , помещенной в начале координат.

Проверить, является ли поле соленоидальным, и если да, то найти его векторный потенциал (с точностью до слагаемого $\text{grad } U$, где $U \in C^1(D)$).

$$159. F = (y+z)i + (x+z)j + (x+y)k.$$

$$160. F = (6x+7yz)i + (6y+7xz)j + (6z+7xy)k.$$

$$161. F = 2yi - zj + 2xk.$$

$$162. F = x(z^2-y^2)i + y(x^2-z^2)j + z(y^2-x^2)k.$$

$$163. F = y^2i - (x^2+y^3)j + z(3y^2+1)k.$$

$$164. F = (1+2xy)i - y^2zj + (z^2y-2zy+1)k.$$

$$165. F = 6y^2i + 6zj + 6xk.$$

$$166. F = ye^{x^2}i + 2yzj - (2xyze^{x^2} + z^2)k.$$

Найти циркуляцию вектора F вдоль ориентированного контура L

$$167. F = z^3i + x^3j + y^3k,$$

$$L = \{(x, y) : 2x^2 + z^2 - y^2 = a^2, x + y = 0\},$$

положительно ориентированная на правой стороне плоскости.

$$168. F = y^2i + xyj + (x^2 + y^2)k,$$

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = az, x = 0, y = 0, z = a, x \geq 0, y \geq 0\},$$

положительно ориентированная на внешней стороне параболоида.

$$169. F = ye^{xy}i + xe^{xy}j + xyzk,$$

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = (z-1)^2, x = 0, y = 0, z = 0, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)\},$$

положительно ориентированная на внутренней стороне конуса.

$$170. F = xyi + yzj + xzk,$$

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, x + y + z = 1\},$$

положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

$$171. F = xi + xj + zk,$$

$$L = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, x + y + z = 0\},$$

положительно ориентированная на верхней стороне плоскости.

$$172. F = yi - 2zj + xk,$$

$$L = \{(x, y, z) : 2x^2 - y^2 + z^2 = a^2, x = y\},$$

положительно ориентированная на правой стороне плоскости.

173. $F = xj - yi$, L — окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ с положительным направлением обхода.

$$174. F = (x+z)i + (x-y)j + xk,$$

L — эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, положительно ориентированный на верхней стороне плоскости $z = 5$.

175. $F = (x+3y+2z)i + (2x+z)j + (x-y)k$, L — контур треугольника MNP , где $M = (2, 0, 0)$, $N = (0, 3, 0)$, $P = (0, 0, 1)$.

176. $F = (x+y)i + (x-z)j + (y+z)k$, L — контур треугольника ABC , где $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

177. $F = (3x-1)i + (y-x+z)j + 4zk$, L — контур треугольника ABC , где A , B и C — точки пересечения плоскости $2x - y - 2z + 2 = 0$ соответственно с осями координат OX , OY , OZ .

178. Найти работу поля F вдоль кривой L , если $F = 2xyi + x^2j$ и L есть наименьшая дуга окружности $x^2 + y^2 = 1$ от точки $A = (1, 0)$ до точки $B = (0, 1)$.

179. Найти работу поля F вдоль кривой L , если $F = 2xyi + y^2j - x^2k$ и L — часть кривой $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2$, $y = x$ от точки $A = (1, 1, 0)$ до точки $B = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1)$.

180. Найти работу векторного поля \vec{F} вдоль кратчайшей дуги эллипса $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ от точки $A = (a, 0)$ до точки $B = (0, b)$, если:

a) $\vec{F} = \{y, a\}$;

б) $\vec{F} = \{xy, x+y\}$;

в) $\vec{F} = \{2xy, x^2\}$;

- г) \vec{F} — сила, имеющая постоянную величину F и направление:
 1) вдоль оси OX ; 2) вдоль оси OY ;
 д) \vec{F} — упругая сила, направленная к началу координат и пропорциональная удалению точки от начала координат.

181. Под действием силы тяжести \vec{g} , направленной по оси OZ , тело единичной массы скатывается от точки $A = (a, 0, 2\pi b)$ до точки $B = (a, 0, 0)$ по спирали

$$x = a \cos \varphi, y = a \sin \varphi, z = b(2\pi - \varphi).$$

Найти работу поля при таком перемещении.

Найти поток векторного поля \vec{F} через поверхность S в направлении внешней нормали.

182. $F = (x^3 + yz)i + (y^3 + xz)j + (z^3 + xy)k,$

S — верхняя полусфера: $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$.

183. $F = (xy + x^2)i + (2y - 2xy)j + (z - yz)k,$

$S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2, 0 \leq z \leq H\}.$

184. $F = (x - y + z)i + (y - z + x)j + (z - x + y)k,$

$S = \{(x, y, z) : |x| + |y| + |z| = 1\}.$

185. $F = 2xi + 2yj - zk,$

$S = \{(x, y, z) : z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq H\}.$

186. $F = 2xi - yj + zk,$

S — поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, 3z \leq x^2 + y^2$.

187. $F = -x^3i + y^3j - z^3k,$

S — поверхность куба $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a$.

188. $F = x^2yi + xy^2j + xyzk,$

S — поверхность $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

189. $F = x^2i + y^2j + z^2k, S$ — нижняя полусфера: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \leq 0$.

190. $F = yi + zj + xk, S$ — поверхность пирамиды $x + y + z \leq a, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

191. $F = y^2j + zk, S$ — часть параболоида $z = x^2 + y^2, z \leq 2$.

192. $F = x^2i - y^2j + z^2k, S$ — поверхность тела $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3R^2, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$.

193. $F = xi - xyj + zk$, S — часть цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$, ограниченная плоскостями $z=0$ и $x+z=R$.

194. $F = xzi + yzj + z^2k$, S — часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, отсеченная плоскостью $z=2$ ($z \geq 2$).

195. $F = x^3i + y^3j + z^3k$,

$$S = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2, \quad 0 \leq z \leq H \right\}.$$

196. $F = (y-x)i + (x+y)j + yk$,

S — верхняя сторона треугольника ABC , где $A=(1, 0, 0)$, $B=(0, 1, 0)$, $C=(0, 0, 1)$.

197. $F = (3x-1)i + (y-x+z)j + 4zk$, S — поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $2x-y-2z+2=0$ и координатными плоскостями.

198. $F = (x-3y+6z)i$, S — поверхность пирамиды, образуемой плоскостью $-x+y+2z-4=0$ и координатными плоскостями.

199. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через верхнюю половину окружности $x=R \cos t$, $y=R \sin t$, $y \geq 0$, если скорость потока v постоянна по величине и направлена вдоль оси OX .

200. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через правую половину окружности $x=R \cos t$, $y=R \sin t$, $x \geq 0$, если скорость потока v образует угол $\pi/4$ с осью OX ($|v|=\text{const}$).

201. Вычислить поток жидкости в направлении внешней нормали через часть окружности $x=a \cos t$, $y=a \sin t$, лежащую в первой четверти, если скорость потока $v=\{x+y, y\}$.

ОТВЕТЫ

1. — 17. 2. 11. 3. $-\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 - 4\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 - 3\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$.
4. $4\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_3 + 16\pi_1 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4 - 6\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge \pi_4 - 2\pi_2 \wedge \pi_3 \wedge \pi_4$.
5. 54. 6. — 14. 7. $(x_1^2 x_2 + x_3 x_4^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + (x_1 x_2^2 - x_4 x_3^2) dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4 + (x_1 x_4^2 - x_2 x_3^2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + (x_2^2 x_3 + x_1^2 x_4) dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4$. 8. $\frac{1}{x_1^2 x_2^2 + x_3^2 x_4^2} [(x_1 x_2^2 x_4 + x_2^2 x_3 x_4) dx_1 \wedge dx_2 + (x_2^2 x_3 x_4 - x_1 x_2 x_3^2) dx_1 \wedge dx_4] - 2x_1 x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_3 + [(x_1 x_2 x_4^2 - x_2^2 x_3 x_4) dx_2 \wedge dx_3 + 2x_1 x_2 x_3 x_4 dx_2 \wedge dx_4 - (x_1 x_2^2 x_4 + x_1^2 x_2 x_3) dx_3 \wedge dx_4]$.
9. $4x_1 x_2 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + 4x_1 x_2 x_4 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$. 10. 0.

11. $(x_3^2 x_4 - 2x_1 x_3 x_4) dx_1 \wedge dx_2 + (x_2^2 x_3 - 2x_1 x_2 x_3) dx_1 \wedge dx_4 + (x_1^2 x_4 - 2x_1 x_3 x_4) dx_2 \wedge dx_3 + (2x_1 x_2 x_3 - x_1 x_2^2) dx_3 \wedge dx_4$. 12. $4xz dz \wedge dx + 4xy dx \wedge dy + 4yz dy \wedge dz$. 13. $6xyz dx \wedge dy \wedge dz$. 14. $2\cos(x_1 + x_2)\cos(x_1 + x_3)[dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4] - 2\sin(x_1 + x_2)\sin(x_3 + x_4)[dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4]$.
 15. $-(x_2 + x_4)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dx_1 \wedge dx_3 \wedge dx_4) - (x_1 + x_3)(dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3 \wedge dx_4)$. 16. Замкнута. 17. Нет. 18. Замкнута.
 19. Замкнута. 20. Замкнута. 21. Нет. 22. Нет. 23. Замкнута.
 24. $(\sin x \cos x - x^2 \sin x - x) dx$. 25. $-y dy$.
 26. $a^2 b (\sin t \cos t - t) dt$. 27. $3a^2 b t^3 dt$. 28. $-xy(\cos x + \cos y) dx \wedge dy$. 29. $2 \operatorname{arctg} \frac{y}{z} dy \wedge dz$. 30. $-2xz dz \wedge dx$.
 31. $2R^3 \cos^3 \psi d\varphi \wedge d\psi$. 32. $2b^2 a^3 u^4 (\cos v + \sin v) du \wedge dv$.
 33. $-a \sin \varphi \sin \psi \cos \psi (a + b \cos \varphi)^3 d\varphi \wedge d\psi$. 34. $2a^2 uv du \wedge dv$.
 35. $[R^2 \sin \varphi \cos^2 \varphi + R^2 \sin \varphi \cos^3 \varphi + 2R \cos^2 \varphi \sin \varphi - h^2 \sin \varphi] d\varphi \wedge dh$.
 36. -2π . 37. $\pi/4$. 38. $\frac{\pi r^4}{2}$. 39. -4 . 40. $-\pi/8$. 41. $\frac{18}{35} a^2 - \frac{a^3}{990}$. 42. $\frac{4}{35}$. 43. $\frac{\ln 2 - 6}{64}$. 44. $\frac{1}{10}$. 45. πe . 46. 21.
 47. $-\ln 5 + 4/5$. 48. $\frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{2}$. 49. 0. 50. $a^3(4 \ln 2 - 3)$. 51. $-\frac{14}{15} a^3$.
 52. $-\frac{\pi a^6}{16}$. 53. $\frac{40}{3}$. 54. 0. 55. 3. 56. $-\frac{40}{3}$. 57. а) 0; б) 0.
 58. $\frac{16}{\pi^3} a^3$. 59. а) $-\frac{\pi a^3}{16} - \frac{a^3}{12} + \frac{a^2}{2}$; б) $\frac{\pi a^3}{16} - \frac{a^3}{12} + a^2$. 60. $\frac{\pi a^2}{2} - 2a$.
 61. $\frac{a^3}{3}(3\pi + 10)$. 62. $-\frac{15}{32} a^{8/3} \pi$. 63. $-\frac{5}{2} a^3 \pi$. 64. $\frac{\pi a^4}{32}$.
 65. -8π . 66. $\sqrt{3}\pi a^2$. 67. -16π . 68. $-2\sqrt{2}\pi a^3$. 69. а) 0;
 б) -2 . 70. $-\frac{32}{3}$. 71. $-\frac{4}{3} a^2$. 72. $-2\pi a^2$. 73. $-\frac{3\sqrt{2}}{8} \pi a^4$.
 74. $-\frac{\pi a^4}{2}$. 75. $-\frac{32}{15} a^3$. 76. $-12\pi a^2$. 77. 80π . 78. $4\pi a^2$. 79. 0.
 80. -4 . 81. 1. 82. 37. 83. 4. 84. 123. 85. 3. 86. 15. 87. $-\frac{9}{2}$.
 88. $\operatorname{arcctg} \frac{4}{7}$. 89. $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{2}{3}\right)$. 90. $x^2 \cos y + y^2 \cos x$. 91. $x + y e^{x/y}$. 92. $\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{y}{x} + C$. 93. $\frac{1}{2} \frac{(x + y + z)^2}{x^2 + y^2 + z^2} + C$.
 94. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \ln y + C$. 95. $\sqrt{1+xy} + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + e^x \sin 2y + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + C$. 96. $\ln(x^2 + y^2) + x^2 \sqrt{1+y^2}$.

$$-\operatorname{arctg} xy + x \ln x - x - \ln \frac{1 + \sqrt{1+y^2}}{y} + C. \quad 97. \operatorname{arctg}(xyz) +$$

$$+ \ln(x^2 + z^2) - \sqrt{\frac{y}{z}} + x^2 - y + z + C. \quad 98. x^2yz + \frac{x}{z} - \frac{y}{z^2} + C.$$

$$99. x^2y + y^2z + z^2x + xyz + C. \quad 100. \frac{2}{3}ab(b^2 + 2a^2). \quad 101. -\frac{b^3}{72}.$$

$$102. 324. \quad 103. \frac{4}{3}(2a^2p^2q + 4bp^3q + cpq^3). \quad 104. 88. \quad 105. -\frac{\pi b^4}{2}.$$

$$106. \pi a^2R. \quad 107. 2\pi a^2H. \quad 108. -4\pi abc. \quad 109. \text{a)} \frac{2}{3}\pi H^3; \text{б)} -\frac{1}{3}\pi H^3.$$

$$110. \frac{\pi H^4}{2}. \quad 111. -\frac{1}{12}. \quad 112. \frac{\pi a^4}{20}(8a + 5). \quad 113. \frac{\pi H^4}{4}.$$

$$114. \frac{3}{2} + \pi \left(\frac{16}{15}\sqrt{2} - \frac{4}{3} \right). \quad 115. \frac{16}{3}. \quad 116. 8\pi. \quad 117. \frac{23\pi}{60}.$$

$$118. 104,4\pi. \quad 119. 2\pi a^2H. \quad 120. \frac{1}{7}. \quad 121. \frac{\pi a^5}{60}. \quad 122. -\frac{3\pi a^4}{8}.$$

$$123. -\frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + \gamma + 5)}. \quad 124. \pi a(1 + \pi).$$

$$125. \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right\}.$$

$$126. \left\{ \frac{-2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}, \frac{-2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right\}.$$

$$127. \arccos \frac{\sqrt{2}}{10}. \quad 128. \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \frac{1}{(x^2 + y^2)^{1/2}}. \quad 129. 3. \quad 130. \frac{2}{r}.$$

$$131. 0. \quad 132. -2f\left(\frac{xy}{z}\right). \quad 133. \{-1; 1-2x; 0\}. \quad 134. \{-2z; -2x; -2y\}. \quad 135. 0; 3z^2 - 3x^2; 0\}. \quad 136. \left\{ -\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}, -\frac{y}{z^2} - \frac{1}{y}; -\frac{z}{x^2} - \frac{1}{z} \right\}. \quad 137. \{0, 0, 0\}. \quad 138. \frac{f'(r)}{r} [\vec{r} \times \vec{c}]. \quad 139. 0.$$

$$140. 2f(r)\vec{c} + \frac{f'}{r} [\vec{c}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\vec{c} \cdot \vec{r})]. \quad 142. f''(r) + \frac{2}{r}f'(r); f = C_1 + \frac{C_2}{r}.$$

$$143. \frac{f'(r)}{r} (\vec{c} \cdot \vec{r}). \quad 144. 3f(r) + rf'(r); f = \frac{C}{r^3}. \quad 145. 0. \quad 146. x^2y + y + C.$$

$$147. x(y + 1)^2 + C. \quad 148. \text{Не является.} \quad 149. xy + yz + zx + C. \quad 150. x + xyz + C. \quad 151. \ln|x + y + z| + C. \quad 152. e^x \sin y + z + C.$$

$$153. \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + C. \quad 154. xyz(x + y + z) + C. \quad 155. x^2yz + C.$$

$$156. \frac{2x}{\sqrt{y+z}} + C. \quad 158. \frac{m}{r}. \quad 159. \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) j + \left(-\frac{x^2}{2} - zx + yz + \frac{y^2}{2} \right) k. \quad 160. \text{Не является.} \quad 161. x^2j + (xz + y^2)k.$$

$$162. \left(zy^2x - \frac{zx^3}{6} \right) j + \left(z^2yx - \frac{yx^3}{3} \right) k. \quad 163. \text{Не является.}$$

$$164. (z^2yx - 2zxy + x)j + (y^2zx + y)k. \quad 165. 3x^2j + (2y^3 - 6zx)k.$$

$$166. -(xz^2 + yze^{x^2})j - 2xyzk. \quad 167. \frac{3}{2}\pi a^4. \quad 168. \frac{a^3}{3}. \quad 169. 0.$$

$$170. -\pi. \quad 171. \frac{2\pi a^2}{\sqrt{3}}. \quad 172. 3\pi a^2. \quad 173. 2\pi R^2. \quad 174. \pi ab. \quad 175. -5.$$

$$176. 1. \quad 177. 0. \quad 178. 0. \quad 179. 2\sqrt{2} - \frac{7}{3}. \quad 180. \text{а)} -\frac{ab\pi}{4} + ab;$$

$$\text{б)} -\frac{a^2b}{3} + \frac{\pi ab}{4} + \frac{b^2}{2}; \quad \text{в)} 0; \quad \text{г)} 1) -aF; \quad 2) Fb; \quad \text{д)} \frac{k(a-b)}{2},$$

где k — коэффициент пропорциональности. $181. 2\pi |\vec{g}|b$.

$$182. \frac{6\pi}{5} \cdot 2^{10}. \quad 183. 0. \quad 184. 4. \quad 185. 2\pi h^3. \quad 186. \frac{15}{2}\pi. \quad 187. a^5.$$

$$188. \frac{R^5}{3}. \quad 189. -\pi/2. \quad 190. 0. \quad 191. -2\pi. \quad 192. \pi R^4.$$

$$193. \pi R^3(2+R)/2. \quad 194. 45\pi. \quad 195. \frac{\pi R^3 H (3R^2 - 4H^2)}{10}. \quad 196. \frac{1}{2}.$$

$$197. \frac{8}{3}. \quad 198. \frac{16}{3}. \quad 199. 0. \quad 200. R\sqrt{2}|v|. \quad 201. \frac{a}{2}(\pi + 1).$$

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

1. Доказать, что замыкание жорданового множества объема нуль есть жорданово множество объема нуль.

2. Привести пример ограниченного множества меры нуль, замыкание которого не является множеством меры нуль.

3. Доказать, что компакт K меры нуль есть жорданово множество объема нуль.

4. Привести пример несчетного множества, не являющегося жордановым, замыкание которого жорданово.

5. Доказать, что множество всех внутренних точек жорданово-го множества жорданово.

Следующее построение используется в задачах 6 и 7.

Обозначим через $U_{1,1}$ интервал с центром в точке $1/2$ и длиной $1/5$. Множество $[0, 1] \setminus U_{1,1}$ состоит из двух отрезков $\rho_{1,1}$ и $\rho_{1,2}$. Интервалы $U_{2,1}$, $U_{2,2}$ имеют центры в центрах отрезков $\rho_{1,1}$ и $\rho_{1,2}$ соответственно и длину $1/5^2$. Интервалы $U_{1,1}$, $U_{2,1}$, $U_{2,2}$

взаимно не пересекаются (проверить!) и множество $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^2 \times$

$\times \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} U_{ij}$ состоит из четырех отрезков $\rho_{2,1}$, $\rho_{2,2}$, $\rho_{2,3}$, $\rho_{2,4}$. Пусть построены непересекающиеся интервалы U_{ij} для $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq$

$\leq 2^{i-1}$. Множество $[0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} U_{ij}$ состоит из 2^k отрезков $\varrho_{k,1}, \varrho_{k,2}, \dots, \varrho_{k,2^k}$. Тогда интервалы $U_{k+1,1}, U_{k+1,2}, \dots, U_{k+1,2^k}$ имеют центры в центрах отрезков $\varrho_{k,1}, \varrho_{k,2}, \dots, \varrho_{k,2^k}$ соответственно и длину $1/5^{k+1}$. Проверить, что эти интервалы не пересекаются ни между собой, ни с ранее построенными интервалами. Таким образом, по индукции определяется бесконечная система интервалов $U_{ij}: 1 \leq i < \infty, 1 \leq j \leq 2^{i-1}$.

6. Пусть

$$M = [0, 1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{i-1}} U_{ij} \text{ и } P = \{(x, y) : x \in M, y \in M\}.$$

Показать, что P есть компакт и не есть жорданово множество.

7. Пусть

$D = (0, 1) \times (0, 1) \setminus P$, где P — множество, определенное в задаче 6. Доказать, что D есть ограниченное связное открытое множество, не являющееся жордановым (сравните с тем, что в пространстве R^1 ограниченное связное открытое множество может быть только интервалом, т. е. жордановым множеством).

8. Привести пример отличной от нуля на множество мощности континуума функции $f: I \rightarrow R$, где $I = [0, 1] \times [0, 1]$, такой, что $\int_D f dx = 0$ для любого жорданового множества $D \subset I$.

9. Привести пример непрерывной, не равной тождественно нулю функции $f: I \rightarrow R$, где $I = [0, 1] \times [0, 1]$, такой, что $\int_I f dx = 0$.

10. Пусть функция $f: R^n \rightarrow R$ непрерывна на жордановом множестве $D \subset R^n$, $|D| \neq 0$, и не равна тождественно нулю. Доказать, что найдется такое жорданово множество $M \subset D$, что $\int_M f dx \neq 0$.

11. Доказать, что для непрерывной и неотрицательной на жордановом множестве $D \subset R^n$ функции $f: D \rightarrow R$ из равенства $\int_D f dx = 0$

следует, что или $|D| = 0$, или f тождественно равна нулю на D .

12. Доказать, что если $f \in \mathcal{R}(D)$, $D \subset R^n$, $|D| > 0$ и $f(x) > 0$, $x \in D$, то $\int_D f dx > 0$.

13. Пусть $f \in \mathcal{R}(D)$, $D \subset R^n$. Пусть x_0 — внутренняя точка D , f — непрерывна в x_0 , $\{E_\alpha\}$ — совокупность жордановых подмножеств D , для каждого из которых точка x_0 — внутренняя, и $d(E_\alpha) = \sup \{\|x_1 - x_2\| : x_1, x_2 \in E_\alpha\}$.

Доказать, что

$$\lim_{d(E_\alpha) \rightarrow 0} \frac{1}{|E_\alpha|} \int_{E_\alpha} f dx = f(x_0).$$

14. Установим взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел интервала $(0, 1)$ и множеством всех нечетных натуральных чисел M и обозначим через r_m число, соответствующее элементу $m \in M$. Положим

$$x_{n,p,q} = \frac{p}{2^n} + \frac{1}{q2^{n+1}}, \quad n \in N, \quad p \in M, \quad q \in M.$$

Доказать, что:

а) из равенства $x_{n_1, p_1, q_1} = x_{n_2, p_2, q_2}$ следуют равенства $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$.

б) Пусть $y_{n,p,q} = r_q + \frac{p}{\sqrt{2} \cdot 2^n}$, если эта сумма меньше 1, и

$y_{n,p,q} = r_q + \frac{p}{\sqrt{2} \cdot 2^n} - 1$ в противном случае. Тогда множество

$$E = \{(x_{n,p,q}, y_{n,p,q}), \quad n \in N, \quad p \in M, \quad q \in M\}$$

лежит в квадрате $I = [0, 1] \times [0, 1]$, пересекается с любой горизонтальной прямой $y = y_0$, $0 \leq y_0 \leq 1$, и любой вертикальной прямой $x = x_0$, $0 \leq x_0 \leq 1$, не более чем в одной точке и $E = I$.

в) Характеристическая функция χ_E множества E неинтегрируема на I , хотя оба повторных интеграла

$$\int_0^1 dx \int_0^1 \chi_E dy, \quad \int_0^1 dy \int_0^1 \chi_E dx$$

существуют и равны нулю.

15. Функция $f : I \rightarrow R$, $I = [0, 1] \times [0, 1]$, определяется следующими условиями:

1) $f(x, 1/2^n) = 0$, если $x \in [0, 1/2^n] \cup [1/2^{n-1}, 1]$, $n \in N$;

2) $f(5/2^{n+2}, 1/2^n) = 2^{n-1}/n$, $f(7/2^{n+2}, 1/2^n) = -2^{n-1}/n$;

3) $f(x, 1/2^n)$ линейна на отрезках $[(1/2^n; 1/2^n); (5/2^{n+2}; 1/2^n)]$, $[(5/2^{n+2}; 1/2^n), (7/2^{n+2}; 1/2^n)]$, $[(7/2^{n+2}; 1/2^n), (1/2^{n-1}; 1/2^n)]$ (см. рис. 51);

4) $f(x, y) = 0$, если $y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} (1/2^n - 1/2^{n+2}; 1/2^n + 1/2^{n+2})$ и $x \in [0, 1]$;

5) для каждого $x_0 \in [0, 1]$ функция $f(x_0, y)$ линейна на отрезках $[1/2^n - 1/2^{n+2}, 1/2^n + 1/2^{n+2}]$ (обратите внимание, что для любого $x_0 \in [0, 1]$ функция $f(x_0, y)$ может быть отлична от нуля не более чем на одном отрезке вида $[1/2^n - 1/2^{n+2}; 1/2^n + 1/2^{n+2}]$.

Доказать, что:

а) функция $f(x, y)$ непрерывна и неограничена на $D = (0, 1] \times (0, 1]$;

б) для каждого $x_0 \in [0, 1]$ и каждого $y_0 \in [0, 1]$ функции $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$ интегрируемы на $[0, 1]$;

в) функции $\Phi(x) = \int_0^1 f(x, y) dy$ и $\Psi(y) = \int_0^1 f(x, y) dx$ непрерывны на $[0, 1]$ и $\int_0^1 \Phi(x) dx = \int_0^1 \Psi(y) dy = 0$.

16. Привести пример функции, непрерывной и ограниченной на множестве меры нуль Лебега, но неинтегрируемой на этом множестве.

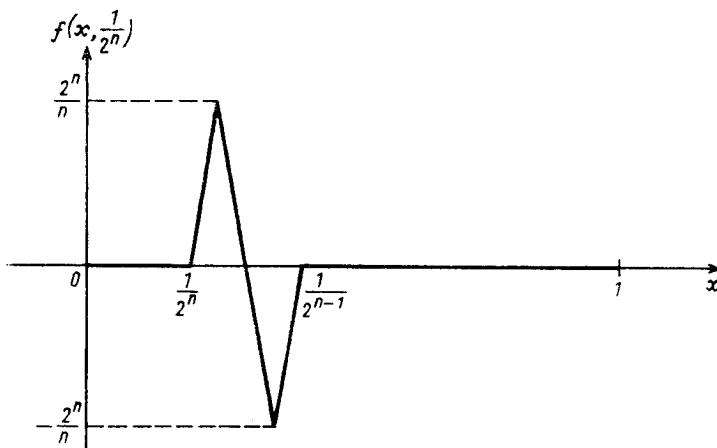


Рис. 51

17. а) Пусть на прямоугольнике $[a, b] \times [c, d]$ задана функция $f(x, y)$, такая, что $f(x, y) \leq f(x', y')$, если $x \leq x'$ и $y \leq y'$. Доказать, что $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике.

б) Пусть функция $f(x, y)$ ограничена на круге и удовлетворяет условию п. а). Доказать, что $f(x, y)$ интегрируема на этом круге.

18. Привести пример таких областей $D_x \subset \mathbb{R}^2$, $D_t \subset \mathbb{R}^2$ и отображения $\psi: D_t \rightarrow D_x$, что $\varphi \in C^1(\bar{D}_t)$, якобиан отображения φ отличен от нуля для всех $t \in \bar{D}_t$, но φ не является диффеоморфизмом.

19. Доказать, что якобиан для сферических координат в \mathbb{R}^n

$$x_1 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-1}$$

• • • • • • • •

$$x_m = r \cos \theta_{m-1} \prod_{k=m}^{n-1} \sin \theta_k$$

• • • • • • • •

$$x_n = r \cos \theta_{n-1}, \quad r \geq 0, \quad \theta_1 \in [0, 2\pi), \quad \theta_m \in [0, \pi], \quad m = 2, \dots, n-1,$$

$$\text{равен } r^{n-1} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^{k-1} \theta_k.$$

20. Показать, что функция $f(x, y)$, определенная в задаче 15, интегрируема в несобственном смысле на $I=[0, 1] \times [0, 1]$. Вычислить $\iint_I f(x, y) dx dy$.

21. Показать, что характеристическая функция χ_D множества D , определенного в задаче 7, интегрируема в несобственном смысле на $I=[0, 1] \times [0, 1]$. Вычислить $\iint_I \chi_D dx dy$.

22. Пусть $I=[0, 1] \times [0, 1]$,

$$D_n^+ = (1/2^n, 5/2^{n+2}) \times (1/2^n, 5/2^{n+2}) \cup (3/2^{n+2}, 1/2^n) \times (3/2^{n+2}, 1/2^n),$$

$$D_n^- = (1/2^n, 5/2^{n+2}) \times (3/2^{n+2}, 1/2^n) \cup (3/2^{n+2}, 1/2^n) \times (1/2^n, 5/2^{n+2}),$$

(см. рис. 52) и

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{2n}, & (x, y) \in D_n^+; \\ -2^{2n}, & (x, y) \in D_n^-; \\ 0, & (x, y) \in I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} (D_n^+ \cup D_n^-). \end{cases}$$

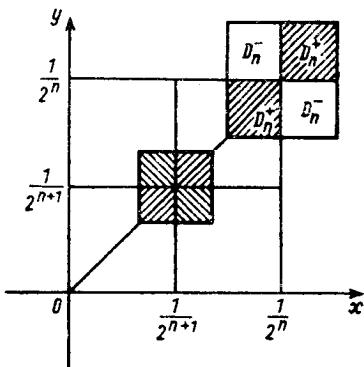


Рис. 52

Доказать, что

а) интеграл $\iint_I f(x, y) dx dy$ расходится;

б) для любого $x_0 \in [0, 1]$ и любого $y_0 \in [0, 1]$ функции $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$ интегрируемы на $[0, 1]$;

в) $\int_0^1 f(x_0, y) dy = 0$ для любого $x_0 \in [0, 1]$ и $\int_0^1 f(x, y_0) dx = 0$, для любого $y_0 \in [0, 1]$.

23. Пусть

$$L_n = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r_n(t), t \in [0, 1]\} —$$

семейство простых гладких кривых, лежащих в области $D \subset R^3$ и таких, что:

1) последовательность $r_n(0)$ сходится к точке $A \subset D$ при $n \rightarrow \infty$;

2) последовательность $r'_n(t)$ на $[0, 1]$ сходится равномерно к $\varphi(t)$, причем $|\varphi(t)| \neq 0$, $t \in [0, 1]$.

Доказать, что:

а) последовательность отображений $r_n : [0, 1] \rightarrow R^3$ сходится к отображению $r : [0, 1] \rightarrow R^3 \subset C^1[0, 1]$,

б) для любой функции $f \in C(D)$ имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} f ds = \int_L f ds,$$

где простая гладкая кривая

$$L = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r(t), t \in [0, 1]\}.$$

24. Пусть $I = [0, 1] \times [0, 1]$ и $S_n = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r_n(u, v), (u, v) \in I\}$ — семейство простых гладких поверхностей, лежащих в области $D \subset R^3$, таких, что последовательность $\sigma_n = \sup \{||r_n(u, v)|| + ||r'_n(u, v)||, (u, v) \in I\}$ фундаментальна. Доказать, что:

а) последовательность отображений $r_n : I \rightarrow D$ сходится к отображению $r : I \rightarrow D \in C^1(I)$;

б) если $[r'_u \times r'_v] \neq 0$, $(u, v) \in I$, то для любой функции $f \in D(C)$ имеем равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{S_n} f dS = \iint_S f dS,$$

где простая гладкая поверхность

$$S = \{(x, y, z) : (x, y, z) = r(u, v), (u, v) \in I\}.$$

25. Доказать формулу Пуассона

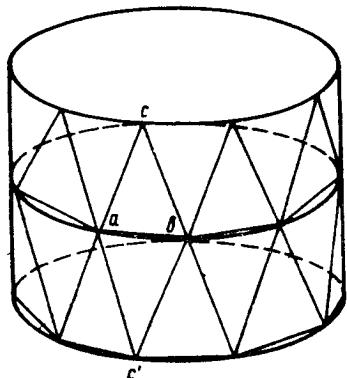
$$\iint_S f(x, y, z) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(u \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) du,$$

где

$$S — \text{сфера } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ и } f \in C(-\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}).$$

26. В прямой круговой цилиндр радиусом R и высотой H впишем многогранную поверхность $P_{n,m}$ (сапог Шварца) следующим образом. Параллельными плоскостями делим цилиндр на m равных цилиндров высотой H/m . Каждую из $m+1$ полученных окружностей — оснований цилиндров — делим на n равных частей

так, чтобы точки деления на одной окружности находились над серединами дуг ближайшей нижней окружности (см. рис. 53). Возьмем две соседние точки a и b на одной окружности и точку c , лежащую на ближайшей окружности над или под серединой дуги (a, b) . Треугольник с вершинами в точках a, b, c назовем $T_{a,b,c}$. Совокупность всех таких (равных между собой) треугольников образует многогранную поверхность $P_{n,m}$.



а) Показать, что если $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и $m/n^2 \rightarrow \infty$, то площадь $|P_{n,m}|$ многогранника $P_{n,m}$ неограниченно растет, хотя длины сторон треугольника $T_{a,b,c}$, являющегося гранью $P_{n,m}$, стремятся к нулю.

б) Найти предел $|P_{n,m}|$, если $n \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$ и $m/n^2 \rightarrow p$.

27. Доказать неравенство

Рис. 53

$$\left| \int_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq |L| \sup_{(x,y,z) \in L} \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}.$$

Если функция $u : R^n \rightarrow R$ дважды дифференцируема, то символ Δu обозначает $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

28. Пусть односвязная область $D \subset R^2$; $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур, n — вектор внешней нормали к L и S — фигура, ограниченная контуром L . Доказать, что для функции $u \in C^2(D)$ справедливо равенство

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \iint_S u \Delta u dx dy.$$

29. Пусть односвязная область $D \subset R^2$; $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур, n — вектор внешней нормали к L и S — фигура, ограниченная контуром L . Доказать, что для функций $u \in C^2(D)$ и $v \in C^2(D)$ справедливо равенство (вторая формула Грина на плоскости)

$$\iint_S \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} dx dy = \int_L \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} ds.$$

Функция $u : R^n \rightarrow R$ называется гармонической в области $D \subset R^n$, если $u \in C^2(D)$ и $\Delta u = 0$ для всех $x \in D$.

30. Пусть D — односвязная область в R^2 . Доказать, что функция $u \in C^2(D)$ является гармонической в D тогда и только тогда,

когда для любого кусочно-гладкого контура $L \subset D$ выполняется равенство $\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$, где n — вектор внешней нормали к L .

31. Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset R^2$ и $u(x) = v(x)$ для всех точек x , лежащих на кусочно-гладком контуре $L \subset D$. Доказать, что $u(x) = v(x)$ для всех $x \in S$, где S — фигура, ограниченная L (т. е. гармоническая функция однозначно определяется в S своими значениями на границе S).

32. Пусть функции u и v гармонические в односвязной области $D \subset R^2$; $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур и n — вектор внешней нормали к L . Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}$ во всех точках L , то в области, ограниченной L , разность $u(x) - v(x)$ постоянна.

33. Пусть u — гармоническая функция в односвязной области $D \subset R^2$; $L \subset D$ — кусочно-гладкий контур и n — вектор внешней нормали к L . Доказать, что для точки x_0 , лежащей в области ограниченной L , справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_L \left(u \frac{\partial \ln |r|}{\partial n} - \ln |r| \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

где r — вектор из точки x_0 в точку x контура L .

34. Пусть u — гармоническая функция в области $D \subset R^2$. Доказать, что для любой точки $x_0 \subset D$ справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_C u ds,$$

где C — окружность с центром в точке x_0 и радиусом R , такая, что круг $S = \{x : \|x - x_0\| \leq R\} \subset D$.

35. Доказать, что гармоническая в области $D \subset R^2$ функция u , отличная от постоянной, не имеет в этой области локальных экстремумов.

Односвязной областью в R^3 назовем такую область D , что для любой замкнутой поверхности $S \subset D$ тело V , ограниченное S , целиком лежит в D .

36. Пусть D — односвязная область в R^3 ; $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, n — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью V . Доказать, что для функции $u \in C^2(D)$ справедливы равенства

a) $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \Delta u dx dy dz;$

b) $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] dx dy dz +$
 $+ \iiint_V u \Delta u dx dy dz.$

37. Пусть D — односвязная область в R^3 ; $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, n — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что для функций $u \in C^2(D)$ и $v \in C^2(D)$ справедливо равенство (вторая формула Грина в пространстве)

$$\iiint_V \left| \frac{\Delta u}{u} - \frac{\Delta v}{v} \right| dx dy dz = \iint_S \left| \frac{\frac{\partial u}{\partial n}}{u} - \frac{\frac{\partial v}{\partial n}}{v} \right| dS.$$

38. Пусть D — односвязная область в R^3 . Доказать, что функция $u \in C^2(D)$ является гармонической в D тогда и только тогда, когда для любой кусочно-гладкой замкнутой поверхности $S \subset D$ выполняется равенство $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0$,

где n — вектор внешней нормали к S .

39. Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset R^3$; $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность и V — тело, ограниченное S . Доказать, что если $u(x) = v(x)$ для всех $x \in S$, то $u(x) = v(x)$ для всех $x \in V$.

40. Пусть функции u и v — гармонические в односвязной области $D \subset R^3$; $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, n — вектор внешней нормали к S и V — тело, ограниченное поверхностью S . Доказать, что если $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}$ для всех $x \in S$, то разность $u(x) - v(x)$ постоянна в V .

41. Пусть u — гармоническая функция в односвязной области $D \subset R^3$; $S \subset D$ — кусочно-гладкая замкнутая поверхность и n — вектор внешней нормали к S . Доказать, что для точки x_0 , лежащей в области, ограниченной поверхностью S , справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(u \frac{\cos(r, n)}{|r|^2} + \frac{1}{|r|} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

где r — вектор из точки x_0 в точку x поверхности S .

42. Пусть u — гармоническая функция в области $D \subset R^3$. Доказать, что для любой точки $x_0 \in D$ справедливо равенство

$$u(x_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S u dS,$$

где S — сфера с центром в точке x_0 и радиусом R , такая, что шар $V : \{x, \|x - x_0\| \leq R\} \subset D$.

43. Пусть S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность, n — вектор внешней нормали к S , V — тело, ограниченное поверхностью S ; r — вектор из точки x_0 , лежащей вне S , в точку x поверхности S . Доказать, что $\iiint_V \frac{dxdydz}{|r|} = \frac{1}{2} \iint_S \cos(r, n) dS$.

44. Пусть S — кусочно-гладкая замкнутая поверхность; n — вектор внешней нормали к S ; r — вектор из точки x_0 , лежащей вне S , в точку x поверхности S . Вычислить интеграл Гаусса

$$\iint_S \frac{\cos(r, n)}{|r|^2} dS.$$

45. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$; функция $u \in C^1(D)$; $L \subset D$ — кусочно-гладкая ориентированная кривая, проходящая через точку $x_0 \in D$. Найти $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|L_\varepsilon|} \int_{L_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$,

где $L_\varepsilon = L \cap \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

46. Пусть область $D \subset \mathbb{R}^3$; функция $u \in C^1(D)$, $S \subset D$ — кусочно-гладкая ориентированная поверхность, проходящая через точку $x_0 \in D$. Найти

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|S_\varepsilon|} \iint_{S_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} dy \wedge dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz \wedge dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx \wedge dy,$$

где $S_\varepsilon = S \cap \{x : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$.

ОТВЕТЫ. РЕШЕНИЯ. УКАЗАНИЯ

2. Например, множество всех точек квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, обе координаты которых рациональны. 3. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\{I^n\}$, $n \in N$, — система брусов таких, что

$K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} |I^n| < \varepsilon$. Поскольку K — компакт, то из системы $\{I^n\}$, $n \in N$, вы-

деляется конечная подсистема I^q , $1 \leq q \leq Q$, такая, что $K \subset \bigcup_{q=1}^Q I^q$. Так как

$\sum_{q=1}^Q |I^q| < \sum_{n=1}^{\infty} |I^n| < \varepsilon$, то K — жорданово множество объема нуль. 4. Например,

множество M всех точек квадрата $I = [0, 1] \times [0, 1]$, обе координаты которых иррациональны, поскольку замыкание M есть квадрат I , а характеристическая функция χ_M не интегрируема на I (проверить!). 5. Указание. Использовать соотношение: $\partial(\bar{M}) \subset \partial M$, где ∂M — множество граничных точек множества M .

6. Множество M замкнуто как дополнение открытого множества. Если $(x_n, y_n) \in P$ и $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$, $n \rightarrow \infty$, то $x_n \rightarrow x_0$, $y_n \rightarrow y_0$, $n \rightarrow \infty$. Так как $x_n \in M$, $y_n \in M$, то $x_0 \in M$, $y_0 \in M$, т. е. $(x_0, y_0) \in P$. Итак, P — замкнутое ограниченное множество, т. е. компакт. Из построения следует, что длина каждого из отрезков $\rho_{k,j}$, $1 \leq j \leq 2^k$, меньше, чем $1/2^k$, т. е. на любом интервале, длина которого больше, чем $1/2^k$, найдутся по крайней мере две точки, не принадлежащие M . Отсюда следует, что все точки M и все точки P — граничные. Осталось проверить, что $\partial P = P$ не есть множество меры нуль. Предположим, что существует система A открытых прямоугольников $\{I^i\}$, $i = 1, 2, \dots$,

что $\bigcup_{i=1}^{\infty} I^i \supset P$ и $\sum_{i=1}^{\infty} |I^i| < 1/8$. Положим $B_{(i,j)}^1 = u_{ij} \times (-1/16, 17/16)$

$B_{i,j}^2 = (-1/16, 17/16) \times u_{ij}$ и обозначим B^1 систему прямоугольников $B_{i,j}^1$ и B^2 систему прямоугольников $B_{i,j}^2$. Система T открытых прямоугольников $T = A \cup B^1 \cup B^2$ покрывает квадрат $[0, 1] \times [0, 1] = I$, следовательно, из нее можно выбрать конечную подсистему G_q , $1 \leq q \leq Q$, покрывающую I . Следовательно,

для этой подсистемы выполняется неравенство $\sum_{q=1}^Q |G_q| > 1$. Разобьем прямо-

угольники подсистемы G_q на три группы: первая—прямоугольники из системы A ; вторая—прямоугольники из системы B^1 ; третья—прямоугольники из системы B^2 — и обозначим соответствующие суммы площадей этих прямоугольников через Σ^I , Σ^{II} , Σ^{III} соответственно. Имеем

$$\begin{aligned}\Sigma^I &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \frac{1}{8}, \quad \Sigma^{II} \leq \frac{9}{8} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} |u_{ij}| = \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^j = \\ &= \frac{9}{8} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{3}{8}; \quad \Sigma^{III} < \frac{9}{8} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} |u_{ij}| = \frac{3}{8}, \quad \text{т. е. } \sum_{q=1}^Q |G_q| = \Sigma^I +\end{aligned}$$

$+ \Sigma^{II} + \Sigma^{III} < \frac{7}{8}$. Полученное противоречие показывает, что $\partial P = P$ не есть

множество меры нуль и, следовательно, P не есть жорданово множество. 7. Множество D есть дополнение до открытого множества $(0; 1) \times (0; 1)$ замкнутого множества P . Следовательно, множество D открыто и ограничено. Множество $(0; 1) \times (0; 1)$ жорданово (см. свойство 6 жордановых множеств, с. 8), а множество P не является жордановым (см. задачу 6). Поэтому в силу свойства 1 жордановых множеств (см. с. 8) множество D также не является жордановым. Пусть точки $M_1 = (x_1, y_1) \in D$ и $M_2 = (x_2, y_2) \in D$. Отрезки $[M_1, A]$, $[A, B]$, $[B, M_2]$, где $A = (x_1, 1/2)$ и $B = (x_2, 1/2)$, целиком лежат в D и составляют ломаную $L : M_1 A B M_2$, целиком лежащую в D и соединяющую точки M_1 и M_2 . Итак D связно, даже линейно связно. 8. Например, $f(x, y) = 0$, $x \in [0, 1]$, $y \neq 1/2$ и $f(x, 1/2) = 1$, $x \in [0, 1]$. 9. Например, $f(x, y) = x - y$. 10. Поскольку $|D| > 0$, то множество D^0 внутренних точек D непусто. Если $f(x) = 0$ для всех $x \in D^0$, то в силу непрерывности $f(x) = 0$ и для всех $x \in D$, что противоречит условию, следовательно, найдется внутренняя точка x_0 множества D , такая, что $f(x_0) \neq 0$. Пусть для определенности $f(x_0) > 0$, тогда найдется такой шар (δ — окрестность x_0) $M = \{x, \|x - x_0\| < \delta\}$, что $M \subset D^0$ и

$f(x) > f(x_0)/2$, $x \in M$. Шар M есть жорданово подмножество D и $\int_M f(x) dx >$

$> \frac{f(x_0)}{2} |M| > 0$. 11. Указание. Использовать утверждение задачи 10 и ад-

дитивность интеграла. 12. Указание. Использовать критерий Лебега и провести рассуждение, аналогичное решению задачи 10. 13. Указание. Применить теорему об оценке интеграла. 14. а) Пусть $x_{n_1, p_1, q_1} = x_{n_2, p_2, q_2}$ и $n = \max(n_1, n_2) + 1$.

Умножая равенство

$$\frac{p_1}{2^{n_1}} + \frac{1}{q_1 2^{n_1+1}} = \frac{p_2}{2^{n_2}} + \frac{1}{q_2 2^{n_2+1}} \tag{*}$$

на $q_1 \cdot 2^n$, получим, что отношение q_1/q_2 есть целое число, а умножая это равенство на $q_2 \cdot 2^n$, получим, что отношение q_2/q_1 — целое число. Следовательно,