$q_1=q_2=q$. Умножая равенство (*) на $q\cdot 2^n$, получим равенство $p_1q\cdot 2^{n-n_1}+2^{n-n_1-1}=p_2q2^{n-n_2}+2^{n-n_2-1}$. Если $n_1\neq n_2$, то одна из частей этого равенства четное число, а другая — нечетное, что невозможно. Итак, $n_1=n_2$. При $q_1=q_2$ и $n_1=n_2$ из равенства (*) следует, что $p_1=p_2$.

б) Из построения следует, что $0\leqslant x_{n,p,q}\leqslant 1$, $0\leqslant y_{n,p,q}\leqslant 1$, $n\in N$, $p\in N$, $q\in N$, т. е. $E\subset I$. Если $x_0\in[0, 1]$ не входит в множество $\{x_{n,p,q}\}$, $n\in N$, $p\in M$, $q\in M$, то вся вертикаль $x=x_0$ не пересекается с E; если же $x_0=x_{n_0,p_0,q_0}$, то в силу однозначности определения чисел n_0, p_0, q_0 (п. а) на прямой $x=x_0$ лежит единственная точка из E, координата y_0 которой равна y_{n_0,p_0,q_0}. Для доказательства того, что любая горизонталь пересекается с E не более чем в одной точке, надо показать, что из равенства $y_{n_1,p_1,q_1}=y_{n_2,p_2,q_2}$ следуют равенства $n_1=n_2$, $p_1=p_2$, $q_1=q_2$, т. е. y_{n_0,p_0,q_0} однозначно определяет тройку чисел n_0, p_0, q_0. Действительно, если $y_{n_1,p_1,q_1}=y_{n_2,p_2,q_2}$, то $r_{q_2}+\frac{p_2}{\sqrt{2}\cdot 2^{n^2}}=r_{q_1}+\frac{p_1}{\sqrt{2}\cdot 2^{n_1}}+\delta$, где δ принимает одно из значений 0, 1, —1, и, следовательно, число $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{p_2}{2^{n_2}}-\frac{p_1}{2^{n_1}}\right]$ рационально, что возможно только тогда, когда $\frac{p_2}{2^{n_2}}-\frac{p_1}{2^{n_1}}=0$, а из этого равенства в силу нечетности p_2 и p_1 следует, что $n_1=n_2$, $p_1=p_2$. Тогда $r_{q_1}=r_{q_1}+\delta$, а так как $0<r_{q_2}<1$ и $0<r_{q_1}<1$, то $r_{q_2}=r_{q_1}$. Осталось показать, что в любом прямоугольнике $\Delta=[\alpha, \beta]\times[\gamma, \delta]\subset I$ найдется по крайней мере одна точка множества E. Действительно, если $1/2^{n_0}<(\beta-\alpha)/8$, то найдется такое $p_0\in M_0$, что $\alpha<p_0/2^{n_0}<(p_0+1)/2^{n_0}<\beta$. Так как $p_0/2^{n_0}<p_0/2^{n_0}+1/q\cdot 2^{n_0+1}<(p_0+1)/2^{n_0}$ для всех $q\in M$, то $x_{n_0,p_0,q_0}\in[\alpha, \beta)$. Далее обозначим через $(\gamma, \delta)^*$ интервал $(\gamma-p_0/2^{n_0}, \delta-p_0/2^{n_0})$, если $\gamma-p_0/2^{n_0}\geqslant 0$, и интервал $(\gamma-p_0/2^{n_0}+1, \delta-p_0/2^{n_0}+1)$ в противном случае, тогда $(\gamma, \delta)^*\cap(0, 1)\neq\varnothing$ и найдется рациональная точка $r_{q_0}\in(\gamma, \delta)^*\cap(0, 1)$. Тогда $y_{n_0,p_0,q_0}\in[\gamma, \delta]$ (проверить!) и, следовательно, точка $(x_{n_0,p_0,q_0}, y_{n_0,p_0,q_0})\in E\cap\Delta$.

в) Немедленно следует из утверждения б).

15. Указание. Графически изобразить $f(x_0, y)$ и $f(x, y_0)$. **16.** Например, функция $f(x, y)$ определенная в квадрате $[0, 1]\times[0, 1]$, равная нулю, если оба аргумента x и y рациональны, и равная 1, если хотя бы один из аргументов — иррациональное число.

18. Например, $D_x=\{(x, y): 1/4<x^2+y^2<4\}$, $D_t=\{(t, s): 1/2<t<2, -\pi<s<3\pi\}$, $\varphi: x=t\cos s$, $y=t\sin s$. **20.** 0. **21.** 4/9. **22.** Указание. Проверить, что $f(x, y)\in\mathscr{R}(E_n)$ для любого $E_n=(1/2^n, 1]\times(1/2^n, 1]$, $n\in N$, и $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{E_n}\int|f(x, y)|dx\times dy_0=\infty$. **23.** а) Так как L_n — простая гладкая кривая, то $r_n(t)=\{x_n(t), y_n(t), z_n(t)\}$ и $x_n(t)\in C^1[0, 1]$, $y_n(t)\in C^1[0, 1]$, $z_n(t)\in C^1[0, 1]$.
Из условий 1) и 2) следует, что:

1) $x_n(0)\to x_0$, $y_n(0)\to y_0$, $z_n(0)\to z_0$, где x_0, y_0, z_0 — координаты точки A.

2) Последовательности $x'_n(t)$, $y'_n(t)$, $z'_n(t)$ сходятся равномерно на $[0, 1]$.

Отсюда следует, что последовательности $x_n(t)$, $y_n(t)$, $z_n(t)$ равномерно сходятся на $[0, 1]$ к функциям $x(t)$, $y(t)$, $z(t)\subset C^1[0, 1]$, т. е. $r_n(t)\to r(t)=\{x(t), y(t), z(t)\}\in C^1[0, 1]$ и $r'(t)=\varphi(t)$, $t\in[0, 1]$.

б) Так как $|r'(t)|=|\varphi'(t)|\neq 0$, $t\in[0, 1]$, то множество $L=\{(x, y, z): (x, y, z)=r(t), t\in[0, 1]\}$ является простой гладкой кривой. Тогда

$$\int_L f\,ds - \int_{L_n} f\,ds = \int_0^1 \Big\{ f(x(t),\ y(t),\ z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_s'^2} -$$

$$- f(x_n(t),\ y_n(t),\ z_n(t)) \sqrt{[(x_n)_t']^2 + [(y_n)_t']^2 + [(z_n)_t']^2} \Big\}\, dt.$$

В силу равномерной сходимости на [0, 1] функций $x_n(t)$, $y_n(t)$, $z_n(t)$, $(x_n)_t'$, $(y_n)_t'$, $(z_n)_t'$ к функциям $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $x_t'(t)$, $y_t'(t)$, $z_t'(t)$ соответственно и непрерывности функции f последовательность

$$f(x(t),\ y(t),\ z(t)) \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2} - f(x_n(t),\ y_n(t),\ z_n(t)) \times$$

$$\times \sqrt{[x_n'(t)]^2 + [y_n'(t)]^2 + [z_n'(t)]^2}$$ равномерно стремится к нулю на [0, 1] и, следовательно, $\left(\int_L f\,ds - \int_{L_n} f\,ds\right) \to 0$, $n \to \infty$. **24.** Доказательство проводится аналогично доказательству утверждения задачи 23. **25.** Указание. Сделать поворот осей координат так, чтобы плоскость $ax+by+cz=0$ стала координатной плоскостью $u=0$. **26.** а) Указание

$$|T_{abc}| = R \sin\frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{n^2}{m^2} + 4R^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}};$$ б) $2\pi R \sqrt{H^2 + R^2\pi^4 p^2}$. **27.** Указание. Показать, что $|P\,dx + Q\,dy + R\,dz| \leqslant \sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}\,ds$. **28.** Указание. Преобразовать интеграл $\int_L u \frac{du}{dn}\,ds$ в интеграл второго рода и применить формулу Грина. **30.** Указание. Применить утверждение задачи 10 и формулу Грина. **31.** Указание. Применить равенство задачи 28 и утверждение задачи 11. **32.** Указание. Применить равенство задачи 28 и утверждение задачи 11. **33.** Указание. Проверить, что в равенстве задачи 29 фигура S может иметь границей конечное число кусочно-гладких контуров, и применить это равенство к области, ограниченной контуром L и окружностью с центром в точке x_0 и произвольно малым радиусом. **34.** Указание. Применить равенство задачи 33. **35.** Указание. Применить равенство задачи 34. **36.** Указание. Преобразовать интегралы $\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\,dS$, $\iint_S u \frac{\partial u}{\partial n}\,dS$ в интегралы второго рода и применить формулу Остроградского—Гаусса. **38.** Указание. Применить равенство а) задачи 36 и утверждение задачи 10. **39.** Указание. Применить равенство б) задачи 36 и утверждение задачи 11. **40.** Указание. Применить равенство б) задачи 36 и утверждение задачи 11. **41.** Указание. Проверить, что равенство задачи 37 имеет место и тогда, когда границей тела V является конечное число кусочно-гладких поверхностей, и применить это равенство к телу, ограниченному поверхностью S и сферой с центром в точке x_0 и произвольно малым радиусом. **42.** Указание. Применить равенство задачи 41. **44.** 4π. **45** $\left.\frac{\partial u}{\partial \tau}\right|_{x=x_0}$, где τ — вектор касательной к L, определяющей ее ориентацию. **46.** $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{x=x_0}$, где n — вектор нормали к S, определяющий ее ориентацию