

касательной к N и характеристическим направлением, а проектируется изоморфно. Следовательно, x -компоненты характеристического вектора должна быть трансверсальна к γ в точке x_0 . Но эта компонента есть Φ_p (см. п. Л).

Обратно, пусть Φ_p не касается γ в точке x_0 . Тогда

1) Гиперповерхность $\Phi = 0$ в окрестности точки (x_0, u_0, p_0) гладкая. Действительно, $\Phi_p \neq 0$ и, следовательно, $d\Phi|_{(x_0, u_0, p_0)} \neq 0$.

2) Уравнение $\Phi = 0$ в точке (x_0, u_0, p_0) нехарактеристическое. Действительно, вектор $(0, 0, \Phi_p)$ лежит в контактной плоскости и не касается поверхности $\Phi=0$ в точке (x_0, u_0, p_0) , так как $\Phi_p(x_0, u_0, p_0) \neq 0$.

3) Начальное многообразие N вблизи точки (x_0, u_0, p_0) гладкое.

Действительно, выберем координаты $(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x')$ так, чтобы локальное уравнение γ приняло вид $x_1 = 0$. Тогда условие разрешимости уравнения относительно $p_1(x')$

$$\Phi \left(0, x', \varphi(x'), p_1, \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right) = 0$$

принимает вид $\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \Big|_{(x_0, u_0, p_0)} \neq 0$; условие некасания вектора Φ_p с γ имеет тот же вид.

4) Точка (x_0, u_0, p_0) начального многообразия нехарактеристическая.

Действительно, если бы характеристический вектор касался начального многообразия N , то его проекция Φ_p касалась бы проекции γ многообразия N на x -пространство.

5) Характеристики, пересекающие начальное многообразие в окрестности точки (x_0, u_0, p_0) , образуют в этой окрестности гладкое многообразие, диффеоморфно проектирующееся на x -пространство (u , стало быть, являющееся 1-графиком функции).

Действительно, образ касательной плоскости к этому многообразию в точке (x_0, u_0, p_0) при проектировании на x -пространство содержит касательную плоскость к γ трансверсальный ей вектор. Следовательно, производная изучаемого отображения в точке (x_0, u_0, p_0) является изоморфизмом, а само отображение проектирования — локальным диффеоморфизмом (по теореме об обратной функции).

Таким образом, все пять условий нехарактеристичности выполнены в точке (x_0, u_0, p_0) , если в этой точке Φ_p не касается γ .

Н. Уравнение Гамильтона–Якоби.

Определение. Уравнением Гамильтона–Якоби называется уравнение

$$H(x, u_x) = 0. \tag{1}$$

Отличие от общего уравнения с частными производными первого порядка состоит в том, что значение неизвестной функции не входит явно в уравнение.

ПРИМЕР. Пусть γ — гладкая гиперповерхность в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $u(x)$ — расстояние от точки x до γ (рис. 65). Тогда функция u (в точках гладкости этой функции) удовлетворяет уравнению Гамильтона–Якоби

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = 1. \quad (2)$$

Действительно, модуль градиента этой функции равен модулю производной расстояния до γ по нормали к γ , т. е. 1.

В целом функция u может не быть гладкой. Например, пусть γ — эллипс на плоскости. Тогда особенности u образуют внутри эллипса отрезок (рис. 66).

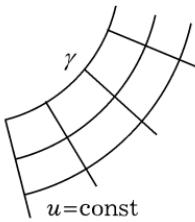


Рис. 65

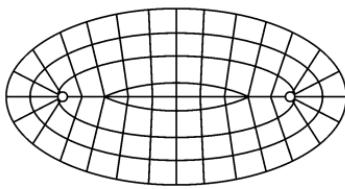


Рис. 66

Задача. Докажите, что всякое решение уравнения Гамильтона–Якоби (2) локально является суммой расстояния до гиперповерхности и константы.

При рассмотрении уравнения Гамильтона–Якоби полезно вместо многообразия 1-струй $J^1(V^n, \mathbb{R})$ функций на V^n рассматривать *кокасательное расслоение* T^*V^n . Пространство T^*V^n называется в механике *фазовым пространством* для конфигурационного пространства V^n . *Кокасательный вектор* к V^n в x есть, по определению, линейная однородная функция на касательном пространстве к V^n в x . Все кокасательные векторы к V^n в x образуют линейное пространство, называемое *кокасательным пространством* к V^n в x и обозначаемое $T_x^*V^n$.

Кокасательные векторы к V^n во всех точках образуют гладкое многообразие размерности $2n$. Оно называется *пространством кокасательного расслоения* к V^n (или, короче, кокасательным расслоением) и обозначается через T^*V^n .

Пусть (x_1, \dots, x_n) — локальные координаты на V^n . Тогда кокасательный вектор к V^n в x задается набором n чисел (p_1, \dots, p_n) . А именно, набору чисел $\{p_k\}$ соответствует 1-форма $p_1 dx_1 + \dots + p_n dx_n$ на касательном пространстве к V^n в x . Набор $2n$ чисел $(p_1, \dots, p_n; x_1, \dots, x_n)$ образует систему локальных координат в кокасательном расслоении к V^n .

Имеется естественная проекция π пространства 1-струй функции $J^1(V^n, \mathbb{R})$ на кокасательное расслоение к V^n

$$\pi: J^1(V^n, \mathbb{R}) \rightarrow T^*V^n.$$

Отображение π состоит в «забывании значения функции», в координатах оно задается так:

$$(x_1, \dots, x_n; u; p_1, \dots, p_n) \mapsto (p_1, \dots, p_n; x_1, \dots, x_n).$$

Определение. Характеристиками уравнения Гамильтона–Якоби (1) называются проекции характеристик уравнения с частными производными первого порядка (1) в кокасательное расслоение.

Задача. Найти дифференциальное уравнение характеристик уравнения Гамильтона–Якоби (1).

Ответ. $\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x$.

Замечание. Эта система дифференциальных уравнений называется *системой канонических уравнений Гамильтона*. Соответствующее векторное поле определено не только на поверхности $H = 0$, но и на всем фазовом пространстве.

Задача. Найти характеристики уравнения Гамильтона–Якоби (2).

Ответ. $x = 2at + b, p = a$ (a и b — постоянные векторы, $a^2 = 1$).

Таким образом, проекции характеристик на V^n — прямые линии.

В геометрической оптике уравнение Гамильтона–Якоби (2) называется *уравнением эйконала*; проекции характеристик на V^n называются *лучами*. Функция u называется *оптической длиной пути*, ее поверхности уровня называются *фронтами*. Кроме этих объектов, в геометрической оптике очень существенную роль играют *каустики*. Рассмотрим, например, стену, освещенную лучами, отраженными от вогнутой

поверхности (например, от внутренности чашки). На стене видны более яркие линии с особыми точками — это и есть каустики.

Определение каустик состоит в следующем. Рассмотрим задачу Коши для уравнения с частными производными первого порядка. Даже если соответствующие характеристики неограниченно продолжаются и не пересекаются, так что образуется глобальное интегральное многообразие, проекция этого многообразия на V^n , вообще говоря, не является диффеоморфизмом.

Множество критических значений проектирования интегрального многообразия на V^n и называется *каустикой*.

В частном случае уравнения Гамильтона–Якоби (2) с начальным условием $u = 0$ на γ каустика есть геометрическое место *фокальных точек* или *центров кривизны* гиперповерхности γ .

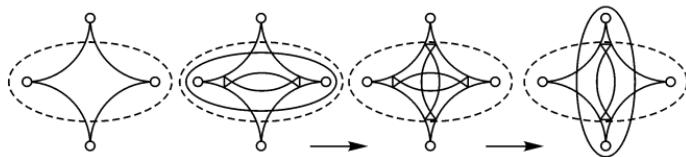


Рис. 67

Задача 1. Нарисовать геометрическое место центров кривизны эллипса на плоскости.

Задача 2. На каждой внутренней нормали к эллипсу отложен отрезок длины t . Нарисовать полученную кривую и исследовать ее изменение с ростом t .

Ответы. См. рис. 67.

§ 9. Теорема Фробениуса

Поле направлений на плоскости всегда определяет семейство интегральных кривых и локально выпрямляемо (диффеоморфизмом приводится к полю параллельных плоскостей). Начиная с трехмерного пространства это уже не так: поле плоскостей в \mathbb{R}^3 может вообще не иметь интегральных поверхностей.

В этом параграфе выясняются условия локальной выпрямляемости поля гиперплоскостей, т. е. условия, при которых поле является полем касательных к семейству гладких гиперповерхностей.

А. Вполне интегрируемое поле гиперплоскостей.

Пусть M^n — гладкое многообразие, на котором задано поле касательных гиперплоскостей.

В окрестности точки такое поле задается дифференциальной 1-формой α , не обращающейся в нулевую форму и определенной с точностью до умножения на функцию, не обращающуюся нигде в нуль.

Определение. Поле гиперплоскостей называется *вполне интегрируемым*, если форма $d\alpha$ в плоскости поля тождественно равна нулю.

Замечание. Свойство полной интегрируемости поля не зависит от выбора локально задающей его формы α , так как форма $d\alpha|_{\alpha=0}$ при умножении α на отличную от нуля функцию умножается на эту функцию (см. § 8, п. А).

Предложение. Чтобы поле гиперплоскостей $\alpha = 0$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно равенство

$$\alpha \wedge d\alpha \equiv 0.$$

Доказательство.

Выберем в касательном пространстве к M^n в рассматриваемой точке базис (рис. 68) из $n - 1$ «горизонтального» вектора (e_1, \dots, e_{n-1}) в плоскости $\alpha = 0$ и еще одного «вертикального» вектора f . Значение 3-формы $\alpha \wedge d\alpha$ на трех горизонтальных векторах равно нулю, т. к. $\alpha = 0$. Далее, $(d\alpha \wedge \alpha)(e_i, e_j, f) = 0$ как сумма, в которой каждое слагаемое содержит в виде сомножителя либо $\alpha(e_i)$, либо $d\alpha(e_i, e_j)$, эти же величины равны нулю.

Обратно, если $\alpha \wedge d\alpha = 0$, то $d\alpha(e_i, e_j) = 0$. Действительно, единственное слагаемое в $(\alpha \wedge d\alpha)(e_i, e_j, f)$, не содержащее множители $\alpha(e_i)$ или $\alpha(e_j)$, есть $d\alpha(e_i, e_j) \cdot \alpha(f)$; но $\alpha(f) \neq 0$. ■

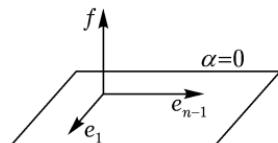


Рис. 68

Замечание. Условие $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$ называется *условием интегрируемости Фробениуса*. Из доказанного предложения следует, что это — условие на поле плоскостей: оно выполнено или не выполнено для всех форм α , задающих поле, одновременно.

Б. Существование интегральных многообразий.

Теорема. Для того чтобы поле гиперплоскостей $\alpha = 0$ было полем касательных к семейству гиперповерхностей, необходимо и достаточно, чтобы это поле удовлетворяло условию интегрируемости Фробениуса $\alpha \wedge d\alpha \equiv 0$.

Доказательство.

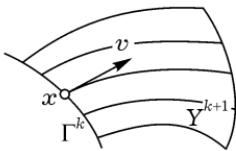


Рис. 69

На поверхностях семейства $\alpha = 0$, поэтому $d\alpha = 0$. Обратно, пусть $d\alpha = 0$ в плоскостях $\alpha = 0$. Тогда мы построим семейство интегральных поверхностей в окрестности точки x следующим образом. Пусть v — какое-либо векторное поле, для которого $\alpha(v) \equiv 0$ (т.е. вектор поля в каждой точке лежит в плоскости поля плоскостей). Пусть Γ^k — какое-либо интегральное подмногообразие поля плоскостей (рис. 69), и пусть $v(x)$ не лежит в касательной плоскости к Γ^k в точке x .

Лемма. Фазовые кривые поля v , проходящие через точки интегрального многообразия Γ^k , вблизи x образуют гладкое интегральное многообразие Y^{k+1} вполне интегрируемого поля плоскостей $\alpha = 0$.

Доказательство.

Обозначим через $\{g^t\}$ локальный фазовый поток поля v . Тогда а) диффеоморфизмы g^t переводят плоскости нашего поля $\alpha = 0$ в плоскости поля.

Действительно, $d\alpha(\xi) = 0$ для всякого вектора ξ плоскости поля, поэтому поле плоскостей инвариантно относительно диффеоморфизмов g^t по лемме п. Е § 8.

Далее, б) касательное пространство к Y^{k+1} в точках начального многообразия Γ^k лежит в плоскости поля.

Действительно, и касательная плоскость к интегральному многообразию Γ^k , и вектор v принадлежат плоскости поля, а касательное пространство к Y^{k+1} в x порождено $v(x)$ и $T_x \Gamma^k$.

Из а) и б) следует, что многообразие Y^{k+1} — интегральное для поля плоскостей $\alpha = 0$. ■

Теперь интегральные многообразия размерности $n - 1$ строятся последовательным увеличением размерности.

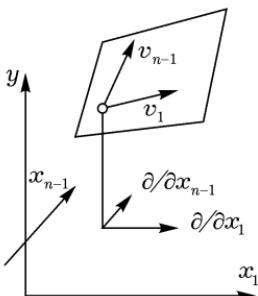


Рис. 70

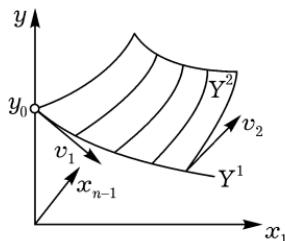


Рис. 71

Рассмотрим локальную систему координат $(x_1, \dots, x_{n-1}; y)$, в которой координатная плоскость $y = 0$ в точке ноль принадлежит полю плоскостей $\alpha = 0$.

Проекция вдоль оси y из плоскости поля на координатную плоскость (x_1, \dots, x_{n-1}) в окрестности точки ноль является изоморфизмом (рис. 70).

Рассмотрим базисные векторные поля в координатной плоскости, $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \right)$. Их прообразы в плоскостях поля образуют в окрестности точки O гладкие векторные поля. Обозначим эти поля через (v_1, \dots, v_{n-1}) .

В качестве начального (нульмерного) интегрального многообразия Γ^0 возьмем точку y_0 оси y (рис. 71).

Применяя лемму к Γ^0 и v_1 , получим одномерное интегральное многообразие Y^1 . На Y^1 имеем $x_2 = \dots = x_{n-1} = 0$, поэтому $v_2 \notin T_0 Y^1$.

Применяя лемму к Y^1 и v_2 , получим двумерное интегральное многообразие Y^2 . Двигаясь дальше таким же образом, мы начинаем с интегрального многообразия Y^k на котором $x_{k+1} = \dots = x_{n-1} = 0$, действуем потоком поля v_{k+1} и получаем интегральное многообразие Y^{k+1} , на котором $x_{k+2} = \dots = x_{n-1} = 0$.

Процесс заканчивается построением искомого многообразия Y^{n-1} . ■

ГЛАВА 3

Структурная устойчивость

При использовании любой математической модели возникает вопрос о корректности применения математических результатов, о поведении модели в реальной действительности. В самом деле, предположим, что результат сильно чувствителен к малейшему изменению модели. В таком случае сколь угодно малое изменение модели (скажем, малое изменение векторного поля, задающего дифференциальное уравнение) приводит к модели с совершенно другими свойствами. Такие результаты опасно распространять на исследуемый реальный процесс, ибо при построении модели всегда проводится некоторая идеализация, параметры определяются лишь приближенно и т. д. Таким образом, возникает вопрос об отборе тех свойств модели процесса, которые мало чувствительны к небольшому изменению модели и, следовательно, могут восприниматься как свойства реального процесса.

Одна из попыток выбора таких свойств привела к понятию грубости или структурной устойчивости (А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин, 1937). Значительные успехи теории структурной устойчивости в случае малой размерности фазового пространства (1 и 2) породили оптимистические надежды, разбитые лишь в 1960-х годах после работ С. Смейла: Смейл показал, что при большей размерности фазового пространства существуют системы, в окрестности которых нет ни одной структурно устойчивой системы. Этот результат имеет для качественной теории дифференциальных уравнений примерно такое же значение, как теорема Лиувилля о неразрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах — для теории интегрирования дифференциальных уравнений. Именно он показывает, что задача полной топологической классификации дифференциальных уравнений с многомерным фазовым пространством безнадежна, даже если ограничиваться уравнениями общего положения и пренебречь всеми вырожденными случаями.

В этой главе приведен краткий обзор основных понятий, методов и результатов теории структурной устойчивости.

§ 10. Понятие структурной устойчивости

В этом параграфе определяется структурная устойчивость и исследуются структурно устойчивые векторные поля на одномерном фазовом пространстве.

А. Наивное определение структурной устойчивости.

Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in M,$$

заданное векторным полем v на многообразии M . Мы будем также говорить, что поле v задает *динамическую систему* (или, короче, систему). Мы будем предполагать (как правило), что решения уравнения продолжаются неограниченно; это всегда так, если M компактно.

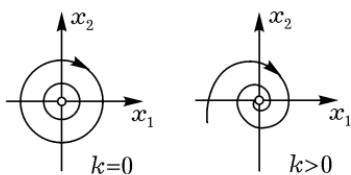


Рис. 72

ПРИМЕР. Уравнение маятника с трением (рис. 72):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2.$$

Если $k = 0$, то все фазовые кривые замкнуты. Если $k > 0$, то они наматываются на особую точку O типа фокус. Следовательно, небольшое изменение коэффициента трения качественно меняет поведение фазовых кривых, если до изменения он был равен нулю, и не меняет качественной картины, если коэффициент трения был положителен.

Приведенное ниже определение структурной устойчивости формализует это различие: маятник без трения оказывается структурно неустойчивой системой, а маятник с трением — структурно устойчивой.

Определение. Система называется *структурно устойчивой*, если при всяком достаточно малом изменении векторного поля полученная система эквивалентна исходной.

Чтобы придать этому определению смысл, нужно определить, что такое малое изменение поля и какие системы считаются эквивалентными.

Б. Топологическая эквивалентность.

Наиболее тонкая классификация дифференциальных уравнений основана на понятии диффеоморфизма. Две системы (M_1, v_1) и (M_2, v_2) называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм $h: M_1 \rightarrow M_2$, переводящий векторное поле v_1 в векторное поле v_2 .

Диффеоморфные системы совершенно неразличимы с точки зрения геометрии гладких многообразий. Следующий пример показывает, что классификация с точностью до диффеоморфизма является слишком тонкой (слишком многие системы оказываются неэквивалентными).

ПРИМЕР. Рассмотрим уравнения с одномерным фазовым пространством $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = 2x$.

В обоих случаях 0 — единственное и притом отталкивающее положение равновесия. Однако эти две системы не диффеоморфны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

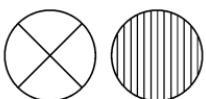


Рис. 73

Если диффеоморфизм переводит особую точку одного векторного поля в особую точку другого векторного поля, то производная этого диффеоморфизма переводит оператор линейной части первого поля в особой точке в оператор линейной части второго поля

в его особой точке. Следовательно, эти два линейных оператора подобны и, в частности, имеют одинаковые собственные числа. Таким образом, собственные числа линеаризации векторного поля в особой точке являются непрерывно меняющимися с полем инвариантами относительно диффеоморфизмов. Такие инварианты называют *модулями*. Существование модулей приводит к тому, что разбиение множества векторных полей на классы диффеоморфных оказывается не дискретным, а непрерывным (рис. 73).

В частности, два указанных выше поля не диффеоморфны, так как $1 \neq 2$. ■

Чтобы не различать эти два поля, вводится более грубое отношение эквивалентности — так называемая топологическая эквивалентность. Заметим, что гомеоморфизмы (взаимно однозначные и взаимно

непрерывные преобразования) не действуют на векторные поля. Поэтому топологическая эквивалентность векторных полей определяется следующим образом.

Рассмотрим фазовые потоки, определяемые данными векторными полями. Фазовый поток поля v на M состоит из преобразований $g^t: M \rightarrow M$, переводящих каждое начальное условие x_0 уравнения $\dot{x} = v(x)$ в момент 0 в значение $g^t x_0$ этого решения в момент t ; очевидно, $g^{t+s} = g^t g^s$, $g^0 = 1$. Если M компактно, то $g^t x$ определены при всех $t \in \mathbb{R}$ и $x \in M$.

Определение. Две системы *топологически эквивалентны*, если существует гомеоморфизм фазового пространства первой системы на фазовое пространство второй, переводящий фазовый поток первой в фазовый поток второй:

$$hg_1^t x \equiv g_2^t h x.$$

Иными словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{g_1^t} & M_1 \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ M_2 & \xrightarrow{g_2^t} & M_2 \end{array}$$

коммутативна.

Например, системы $\dot{x} = x$ и $\dot{x} = 2x$ топологически эквивалентны.

ЗАМЕЧАНИЕ. Применения гомеоморфизмов для изгнания модулей, подобные проведенному выше, явились основной причиной создания понятия гомеоморфизма и непрерывной (не дифференциальной) топологии.

В. Орбитальная эквивалентность.

К сожалению, понятие топологической эквивалентности систем не спасает от модулей.

ПРИМЕР. Рассмотрим векторное поле, имеющее замкнутую фазовую кривую, скажем — предельный цикл. Тогда всякая топологически эквивалентная система тоже имеет предельный цикл, причем с тем же периодом. При малом изменении поля период может немного изменяться. Следовательно, период движения по циклу является непрерывно меняющимся инвариантом (модулем) и относительно топологической эк-

вивалентности. Чтобы избавиться от этого модуля, вводится еще более грубая, чем с точностью до гомеоморфизма, классификация систем.

Определение. Две системы называются *топологически орбитально эквивалентными*, если существует гомеоморфизм фазового пространства первой системы на фазовое пространство второй, переводящий ориентированные фазовые кривые первой системы в ориентированные фазовые кривые второй. При этом не требуется никакого соглашения движений по соответственным фазовым кривым.

Гипотеза структурной устойчивости состоит в том, что разбиение систем на классы орбитальной эквивалентности уже не имеет модулей (дискретно), по меньшей мере если ограничиться случаями «общего положения» и пренебречь вырождениями.

Г. Окончательное определение структурной устойчивости.

Пусть M — компактное гладкое многообразие (класса C^{r+1} , $r \geq 1$). Пусть v — векторное поле класса C^r (если M имеет край, то предполагается, что v не касается края).

Система (M, v) называется *структурно устойчивой*, если существует такая окрестность поля v в пространстве C^1 , что всякое векторное поле из этой окрестности задает систему, топологически орбитально эквивалентную исходной, причем гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождеству.

Д. Одномерный случай.

Пусть M — окружность. Векторное поле на окружности задается периодической функцией. Особые точки поля соответствуют нулям этой функции. Особая точка называется *невырожденной*, если в этой точке производная функции отлична от нуля.

Теорема. *Векторное поле на окружности задает структурно устойчивую систему тогда и только тогда, когда оно имеет лишь невырожденные особые точки.*

Два векторных поля с невырожденными особыми точками на окружности топологически орбитально эквивалентны тогда и только тогда, когда числа особых точек у них одинаковы.

Структурно устойчивые векторные поля образуют в пространстве всех векторных полей на окружности открытое всюду плотное множество.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть все особые точки поля невырождены. Тогда их конечное число и они попеременно устойчивы и неустойчивы. Всякое непостоянное решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ стремится к устойчивому положению равновесия при $t \rightarrow +\infty$ и к неустойчивому при $t \rightarrow -\infty$. Отсюда легко вытекают все утверждения теоремы, кроме одного: остается доказать, что все особые точки поля можно сделать невырожденными посредством сколь угодно малого шевеления поля.

Доказательство этого последнего утверждения удобно провести с помощью так называемой леммы Сарда.

Лемма. *Мера множества критических значений гладкой функции на отрезке $[0, 1]$ равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Разобьем отрезок на N равных частей и отметим те из них, которые содержат критические точки. Если N достаточно велико, то производная функции на каждой из отмеченных частей не превосходит $\frac{C}{N}$ (C — некоторая не зависящая от N постоянная). Поэтому длина образа каждой из отмеченных частей не превосходит $\frac{C}{N^2}$. Покроем этот образ интервалом длины $\frac{2C}{N^2}$. Мы получили покрытие множества критических значений интервалами суммарной длины не более $\frac{2C}{N}$. ■

Рассмотрим семейство векторных полей с параметром ε на окружности, заданное формулой $v(x, \varepsilon) = v(x) - \varepsilon$. Тогда точка x — вырожденная особая точка поля, соответствующего значению ε параметра, если и только если ε — критическое значение функции v в точке x .

Но все критические значения образуют множество меры нуль, поэтому существуют сколь угодно малые некритические значения. Зададим некритическое значение ε . Все особые точки поля, соответствующего этому значению параметра, невырождены. ■

Е. Отступление: теорема Сарда.

Пусть $f: M \rightarrow N$ — гладкое отображение многообразий любой размерности. Точку пространства-прообраза назовем *критической*, если размерность образа дифференциала отображения в этой точке меньше размерности пространства образа. Значение отображения в критической точке называется *критическим значением*.

Теорема. *Мера множества критических значений всякого достаточно гладкого отображения равна нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. Если размерность пространства-прообраза равна нулю, то теорема очевидна; если эта размерность 1, то она уже доказана выше. Предположим, что теорема доказана во всех случаях, когда размерность пространства-прообраза равна $m - 1$, и докажем ее для размерности пространства-прообраза, равной m .

2°. Разобъем множество K критических точек отображения на части. Точка пространства-прообраза называется *точкой уплощения порядка r* , если в ней равны нулю все частные производные порядков $1, \dots, r$. Обозначим через K_r множество точек уплощения порядка r .

3°. Рассмотрим вначале множество критических точек $K \setminus K_1$. Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений* (т. е. мера множества $f(K \setminus K_1)$) равна нулю.

В каждой точке из $K \setminus K_1$ отлична от нуля одна из частных производных, скажем, $\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ в координатной записи. В окрестности такой точки можно принять функцию f_1 за локальную координату в прообразе вместо x_1 , сохранив x_2, \dots, x_m . В построенных координатах f записывается как однопараметрическое семейство гладких отображений $(m - 1)$ -мерных пространств в $(n - 1)$ -мерные

$$(f_1; x_2, \dots, x_m) \longmapsto (f_1; f_2, \dots, f_n).$$

Зафиксируем значение c параметра f_1 . Отображение f индуцирует отображение f_c плоскости $f_1 = c$ размерности $m - 1$ в прообразе в плоскость $f_1 = c$ размерности $n - 1$ в образе.

Множество критических значений отображения f_c имеет в плоскости $f_1 = c$ в образе $(n - 1)$ -мерную меру нуль по предположению индукции (теорема доказана для $(m - 1)$ -мерных прообразов). По теореме Фубини n -мерная мера объединения множеств критических значений отображений f_c по c равна нулю.

Но образ множества критических точек из $K \setminus K_1$, лежащих в окрестности рассматриваемой точки, содержитя в этом объединении. Отсюда следует, что мера $f(K \setminus K_1)$ равна нулю.

4°. Рассмотрим множество точек r -уплощения, $K_r \setminus K_{r+1}$. Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений* $f(K_r \setminus K_{r+1})$ равна нулю.

В каждой точке множества $K_r \setminus K_{r+1}$ отлична от нуля одна из частных производных порядка $r + 1$, скажем, $\frac{\partial g}{\partial x_1}$, где g — одна из частных производных f_1 порядка r (в подходящих локальных координатах).

В окрестности такой точки множество $K_r \setminus K_{r+1}$ содержится в гладкой $(m-1)$ -мерной гиперповерхности $g = 0$. Точки множества $K_r \setminus K_{r+1}$ являются критическими для сужения f на эту гиперповерхность, так как $df = 0$ на K_r . По предположению, мера образа множества критических значений сужения f на эту гиперповерхность равна нулю. Следовательно, мера $f(K_r \setminus K_{r+1})$ равна нулю.

5°. Наконец, рассмотрим множество K_r r -плоских критических точек при достаточно большом r . Докажем, что *мера соответствующего множества критических значений $f(K_r)$ равна нулю, если r достаточно велико*.

С этой целью разделим каждую сторону m -мерного куба в пространстве-прообразе (выбрав локальные координаты) на N равных частей, разделим куб на N^m равных маленьких кубиков и отметим те из них, в которых есть точки из K_r . Диаметр образа отмеченного куба не превосходит тогда $\frac{c}{N^{r+1}}$ (где постоянная c не зависит от N). Поэтому все образы отмеченных кубов покрываются открытыми кубами суммарной меры не более

$$\frac{c_1 N^m}{N^{n(r+1)}},$$

даже если все N^m кубиков отмечены.

Это число при $N \rightarrow \infty$ стремится к нулю, поэтому $\text{mes } f(K_r) = 0$ при $r > \frac{m}{n} - 1$.

Представим все множество K критических точек как объединение множеств $K \setminus K_1, K_i \setminus K_{i+1}$ и K_r . Мы доказали, что мера образа каждого из этих множеств равна нулю. Поэтому мера всего множества критических значений равна нулю. ■

Ж. Структурно устойчивые системы на двумерной сфере.

Переходя к системам с фазовым пространством размерности больше единицы, мы сталкиваемся прежде всего с особыми точками и замкнутыми фазовыми кривыми.

Определение. Особая точка векторного поля называется *вырожденной*, если нуль является собственным числом линеаризации поля в этой точке.

Замечание. Невырожденная особая точка поля не исчезает при малом шевелении поля, а лишь слегка сдвигается (по теореме о неявной функции). Напротив, вырожденная особая точка при малом шевелении поля, вообще говоря, бифурцирует (делится на несколько невырожденных) или исчезает. Поэтому у структурно-устойчивой системы все особые точки невырождены.

Определение. Замкнутая фазовая кривая (цикл) векторного поля называется *вырожденной*, если 1 является собственным числом линеаризации функции последования. [Функция последования — это отображение трансверсали к циклу в себя, сопоставляющее каждой точке трансверсали, близкой к циклу, следующую точку пересечения фазовой кривой, выходящей из этой точки трансверсали, с трансверсалью, см. рис. 74.]

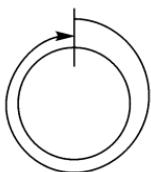


Рис. 74

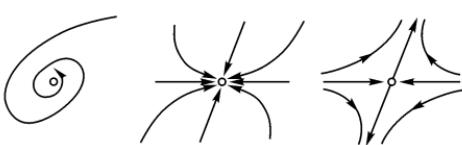


Рис. 75

ЗАМЕЧАНИЕ. Невырожденный цикл не исчезает при малом шевелении поля, а лишь слегка сдвигается (по теореме о неявной функции). Напротив, вырожденный цикл при малом шевелении поля, вообще говоря, бифуркирует (делится на несколько невырожденных) или исчезает. Поэтому у структурно-устойчивой системы все циклы невырождены.

Рассмотрим векторное поле на двумерной поверхности. В двумерном случае невырожденные особые точки — топологически либо седла, либо узлы. Фазовая кривая, стремящаяся к седлу при $t \rightarrow +\infty$, называется входящей сепаратрисой седла, а при $t \rightarrow -\infty$ — выходящей (рис. 75).

Теорема. Векторное поле на двумерной сфере задает структурно-устойчивую систему тогда и только тогда, когда выполнены все следующие условия:

- 1) Поле имеет конечное число особых точек.
- 2) Все особые точки поля невырождены.
- 3) Ни одна выходящая сепаратриса седла не является входящей.
- 4) Поле имеет конечное число замкнутых фазовых кривых.
- 5) Все замкнутые фазовые кривые — невырожденные циклы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Доказательство структурной неустойчивости системы в случае, когда нарушено хотя бы одно из условий 1)–5), несложно (см. рис. 76). Доказательство того, что из условий 1)–5) вытекает структурная устойчивость,

сложнее; оно подробно проведено Де Баггисом (см. *H. F. De Baggis. Dynamical systems with stable structures, Contrib. Theory Nonlinear Oscillation, 2* (1952), 37–59; *M. M. Peixoto. Structural stability on two-dimensional manifolds. Topology, 1* (1962), 101–120; *2* (1963), 179–180).

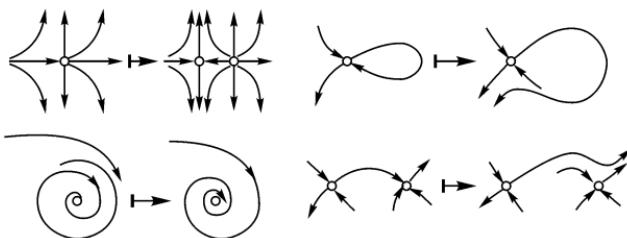


Рис. 76

О структурно устойчивых системах на плоскости см. также: *Г. Ф. Баггис. Грубые системы двух дифференциальных уравнений. Успехи Мат. наук, 10*, 4 (1955), 101–126; *M. C. Peixoto, M. M. Peixoto. Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions, Anais da Acad. Brasileira de Ciencias, 31*, 2 (1959), 135–160.

Теорема. Структурно устойчивые векторные поля образуют в пространстве всех векторных полей на двумерной сфере открытое всюду плотное множество.

Доказательство.

Эта теорема вытекает из предыдущей. ■

Замечание. Аналогичные результаты справедливы для векторных полей на круге, которые не касаются граничной окружности.

§ 11. Дифференциальные уравнения на торе

В этом параграфе изложена принадлежащая А. Пуанкаре и А. Данжуа теория векторных полей без особых точек на двумерном торе, в частности описаны все структурно устойчивые поля.

А. Двумерный тор.

Тором размерности n называется прямое произведение n окружностей. Двумерный тор $T^2 = S^1 \times S^1$ можно представлять себе как

квадрат

$$\{x, y : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 2\pi\}$$

со склеенными противоположными сторонами (отождествляются точки $(0, y)$ и $(2\pi, y)$, а также $(x, 0)$ и $(x, 2\pi)$ рис. 77).

Тор можно также рассматривать как множество классов смежности группы \mathbb{R}^2 по подгруппе $2\pi\mathbb{Z}^2$ целочисленных векторов, умноженных на 2π :

$$T^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ modd } 2\pi\}.$$

Таким образом, плоскость \mathbb{R}^2 локально диффеоморфно накрывает тор. Накрытие $\mathbb{R}^2 \rightarrow T^2$ (рис. 78) позволяет переносить каждую картину с тора на плоскость (где она бесконечно размножается). Гладкие функции на торе соответствуют гладким 2π -периодическим функциям на плоскости.

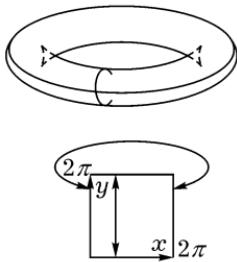


Рис. 77

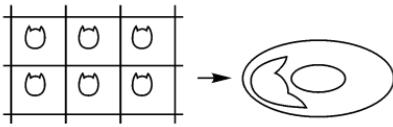


Рис. 78

Каждой замкнутой кривой на плоскости соответствует на торе замкнутая кривая. Обратное неверно: замкнутые кривые на торе соответствуют не только замкнутым кривым на плоскости, но и отображениям $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, для которых $\varphi(0) = \varphi(1) \text{ modd } 2\pi$.

При этом если координаты $\varphi(1) - \varphi(0)$ равны $(2\pi p, 2\pi q)$, то говорят, что кривая на торе *замыкается после p оборотов по параллели и q оборотов по меридиану*.

Б. Векторные поля на торе.

Всякое векторное поле на торе определяет на плоскости поле, периодическое с периодом 2π по обеим координатам. Обратно, всякому полю, 2π -периодическому по обеим координатам на плоскости, соответствует векторное поле на торе.

ПРИМЕР. Уравнение

$$\dot{x} = \alpha, \quad \dot{y} = \beta,$$

где α и β — постоянные, определяет на торе векторное поле без особых точек.

Теорема. Если отношение $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ рационально, то все фазовые кривые уравнения на торе замкнуты, а если иррационально — то всюду плотны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) Пусть $\lambda = \frac{p}{q}$. Фазовая кривая, проходящая через точку (x_0, y_0) имеет уравнение $y - y_0 = \frac{(x - x_0)p}{q}$. Если $x - x_0 = 2\pi q$, то $y - y_0 = 2\pi p$, следовательно, $(x, y) = (x_0, y_0) \bmod 2\pi$, то есть фазовая кривая замкнута.

2) Мы докажем далее, что фазовая кривая (в случае, когда λ иррационально) равномерно распределена на торе, т. е. проводит в каждой части тора¹ время, пропорциональное площади этой части. Из этого следует, в частности, что достаточно длинный отрезок фазовой кривой побывает в сколь угодно малой окрестности любой точки тора, т. е. что фазовая кривая всюду плотна. ■

B. Равномерное распределение.

Общее определение равномерного распределения состоит в следующем.

Пусть v — векторное поле на компактном гладком многообразии M с фиксированным элементом объема (например, поле на торе с элементом площади $dx dy$). Будем обозначать объем (площадь) области D через $\mu(D)$.

Рассмотрим решение φ уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием z . Обозначим через $\tau(D, T, z)$ меру множества тех значений времени, $t \in [0, T]$, для которых $\varphi(t)$ принадлежит области D .

Определение. Решения уравнения $\dot{x} = v(x)$ равномерно распределены, если для всякой области D с кусочно-гладкой границей

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\tau(D, T, z)}{T} = \frac{\mu(D)}{\mu(M)}.$$

¹Под частью тора здесь понимается измеримая по Жордану область, например — область с кусочно гладкой границей.

Теорема. При иррациональном $\frac{\beta}{\alpha}$ решения уравнения $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = \beta$ равномерно распределены на торе.

Равномерная распределенность может быть также определена в терминах *временных средних функций*.

Пусть f — функция на M (вообще говоря, комплекснозначная).

Определение. Предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(g^t z) dt = f(z)$$

называется *временным средним функции* f (здесь g^t — фазовый поток).

Замечание. Разумеется, такой предел существует не всегда, а если и существует, то зависит, вообще говоря, от начальной точки.

Теорема о равномерном распределении на торе вытекает из следующей теоремы.

Теорема (о совпадении средних). При иррациональных $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$ временное среднее любой непрерывной (или хотя бы интегрируемой по Риману) функции $f: T^2 \rightarrow \mathbb{C}$ вдоль решений уравнения на торе $\dot{x} = \alpha$, $\dot{y} = \beta$ существует, не зависит от начальной точки и совпадает с пространственным средним:

$$f_0 = \frac{1}{4\pi^2} \iint f dx dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Чтобы получить из этой теоремы теорему о равномерном распределении, достаточно взять в качестве f характеристическую функцию множества D (равную единице на D и нулю вне D). ■

Г. Доказательство теоремы о совпадении средних.

Обозначим вектор с компонентами (α, β) через ω . Тогда решение с начальным условием z принимает вид $z + \omega t$. Утверждение теоремы гласит:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(z + \omega t) dt = \frac{1}{4\pi^2} \iint f(z) dx dy.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Заметим, что среди функций на торе имеются гармоники — функции вида $e^{i(k, z)}$, где k — целочисленный вектор. Для гармоник теорема проверяется непосредственным вычислением интеграла. Пусть $k \neq 0$, тогда

$$\int_0^T e^{i(k, z + \omega t)} dt = e^{ikz} \int_0^T e^{i(k, \omega) t} dt = \frac{e^{i(k, z)}}{i(k, \omega)} \left[e^{i(k, \omega) T} - 1 \right].$$

Функция в квадратной скобке ограничена, поэтому временное среднее гармоники с ненулевым номером k равно нулю. Пространственное среднее также равно нулю. При $k = 0$ гармоника равна единице. Оба средних единицы равны единице. Совпадение средних для гармоник доказано.

Из совпадения средних для гармоник следует их совпадение для тригонометрических многочленов: среднее от линейной комбинации равно линейной комбинации средних с теми же коэффициентами. В частности, теорема доказана для $f = \cos(k, z)$ и $\sin(k, z)$.

Теперь докажем теорему для вещественных функций; тогда (ввиду линейности средних) она будет доказана и для комплексных. Приближим данную функцию f сверху и снизу непрерывными функциями P и Q так, что $P < f < Q$, $\iint (Q - P) \frac{dx dy}{4\pi^2} < \varepsilon$ (возможность такого приближения при любом $\varepsilon > 0$ характеризует функции, интегрируемые по Риману). Приближим затем функции P и Q тригонометрическими многочленами p и q так, что $|p - P| < \varepsilon$, $|q - Q| < \varepsilon$.

Обозначим через p_0 и q_0 свободные члены этих многочленов. Числа p_0 и q_0 являются как пространственными, так и временными средними многочленов p и q (так как для тригонометрических многочленов временные средние совпадают с пространственными). Таким образом, пространственное среднее f_0 функции f зажато между p_0 и q_0 :

$$p_0 < f_0 < q_0, \quad q_0 - p_0 < \varepsilon.$$

Обозначим через p_T , f_T и q_T средние p , f и q за время T :

$$p_T(z) = \frac{1}{T} \int_0^T p(z + \omega t) dt \quad \text{и т. д.}$$

Тогда $p_T(z) < f_T(z) < q_T(z)$ при любом T , и при достаточно больших T

$$|p_T(z) - p_0| < \varepsilon, \quad |q_T(z) - q_0| < \varepsilon.$$

Следовательно, при достаточно больших T

$$|f_T(z) - f_0| < 2\varepsilon. \quad \blacksquare$$

Д. Некоторые следствия.

1°. Двумерность тора во всем предыдущем не играла роли. Рассмотрим уравнение $\dot{z} = \omega$, $z \in T^n$ на n -мерном торе. Вектор частот ω называется *резонансным*, если существует целочисленный не нулевой вектор k такой, что $(\omega, k) = 0$.

Если вектор ω нерезонансный, то временные и пространственные средние непрерывных (или хотя бы интегрируемых по Риману) функций совпадают, и решения равномерно распределены.

2°. Из теоремы о равномерном распределении следует, что первая цифра числа 2^n чаще равна семи, чем восьми. Точнее, обозначим через $N_k(n)$ число натуральных значений $m \leq n$, для которых 2^m начинается с цифры k . Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_7(n)}{N_8(n)} = \frac{\lg 8 - \lg 7}{\lg 9 - \lg 8}.$$

3°. Поводом к открытию теорем о равномерном распределении послужила следующая задача Лагранжа: найти $\omega = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \arg f(t)$,

$$\text{где } f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\omega_k t}.$$

Приведем ответ для нерезонансного вектора $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$. Пусть $n = 3$. Тогда, если из трех отрезков (a_1, a_2, a_3) можно составить треугольник, то $\omega = \sum \frac{\alpha_k \omega_k}{\pi}$, где α_k — угол против стороны a_k .

При произвольном n ответ также имеет вид взвешенного среднего частот ω_k : $\omega = \sum W_k \omega_k$. Веса W_k вычисляются следующим образом. Обозначим через $W(a_1, \dots, a_s; b)$ вероятность того, что расстояние от начала до конца плоской ломаной из s звеньев длин a_1, \dots, a_s со случайными направлениями меньше b . Тогда $W_k = W(\hat{a}_k; a_k)$ (\hat{a}_k — набор из всех чисел a_i кроме a_k).

Доказательство см., например, в статье: Г. Вейль. Среднее движение. УМН, 31, 4(1976), 213–219.

Лагранж пришел к сформулированной выше задаче (называемой задачей о среднем движении) следующим образом. Рассмотрим вектор, соединяющий Солнце с центром эллипса, по которому движется планета (он называется вектором Лапласа). В первом приближении теории возмущений эволюция вектора Лапласа под влиянием взаимного тяготения планет имеет вид движения суммы равномерно вращающихся векторов (их число равно числу планет).

Если для планет Солнечной системы подсчитать частоты ω_k и амплитуды a_k , то окажется, что для всех планет, кроме Земли и Венеры, одна из амплитуд a_k больше суммы всех других. Поэтому Лагранж сумел найти среднее движение перигелиев всех планет, кроме Земли и Венеры. В случае же Земли и Венеры несколько слагаемых имеют примерно одинаковую амплитуду. Проблема была решена только в двадцатом веке в работах Боля, Серпинского и Г. Вейля.

Е. Функция последования и угловая функция.

Рассмотрим общее дифференциальное уравнение на торе

$$\dot{z} = \omega(z), \quad z \in T^2.$$

Предположим, что поле ω не имеет особых точек и, более того, что $\omega_1 \neq 0$. [Если особых точек и циклов нет, то в подходящей системе координат первая компонента поля всюду отлична от нуля (см. C. L. Siegel. Note on differential equations on the torus. Ann. Math., **46**, 3(1945), 423–428); нетрудно построить поле без особых точек, но с циклами, не допускающее такой системы координат).]

Мы приходим теперь к изучению интегральных кривых неавтономного уравнения с двоякопериодической правой частью

$$\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y), \quad \lambda = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Все решения этого уравнения продолжаются неограниченно, так как правая часть ограничена.

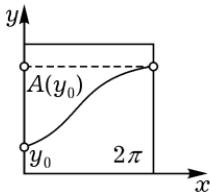


Рис. 79

Определение. *Функцией последования* для рассматриваемого уравнения на торе называется отображение A оси y в себя, сопоставляющее каждой начальной точке $(0, y_0)$ значение решения с этим начальным условием при $x = 2\pi$ (рис. 79).

Функция последования дифференцируема (по теореме о дифференцируемости решения по начальным условиям) и обладает свойством периодичности $A(y + 2\pi) = A(y) + 2\pi$; обратное отображение A^{-1} также дифференцируемо. Таким образом, A определяет диффеоморфизм окружности на себя. Можно представлять себе функцию последования как диффеоморфизм меридиана тора в себя, переводящий каждую точку меридиана в следующую точку пересечения интегральной кривой, проходящей через эту точку, с тем же меридианом.

Изучение свойств интегральных кривых на торе сводится, таким образом, к изучению свойств диффеоморфизмов окружности. Например, предположим, что диффеоморфизм окружности имеет неподвижную точку. Тогда на торе имеется замкнутая интегральная кривая. Обратное неверно (пример — поворот окружности на угол π). Для того чтобы интегральная кривая, проходящая через данную точку меридиана тора, была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы эта точка была периодической точкой диффеоморфизма, т. е. чтобы она переходила в себя после нескольких применений диффеоморфизма.

Функция последования задает сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности, поэтому ее можно записать в виде

$$Ay = y + a(y), \quad \text{где} \quad a(y + 2\pi) = a(y), \quad a'(y) > -1.$$

Функцию a мы будем называть *угловой функцией*.

Ж. Число вращения.

Число вращения характеризует средний наклон интегральных кривых уравнения на торе; для простейшего уравнения с постоянной правой частью $\frac{dy}{dx} = \lambda$ число вращения есть λ .

Определение. Числом вращения уравнения $\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y)$ на торе называется

$$\mu = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x)}{x},$$

где φ — решение соответствующего уравнения на плоскости.

Число вращения выражается через угловую функцию:

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a(y) + a(Ay) + \dots + a(A^{k-1}y)}{k}.$$

В таком виде определение переносится на любой диффеоморфизм окружности, сохраняющий ориентацию.

Теорема. *Предел в определении числа вращения существует и не зависит от начальной точки; он рационален тогда и только тогда, когда некоторая степень диффеоморфизма имеет неподвижную точку (т. е. когда дифференциальное уравнение имеет замкнутую фазовую кривую).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. Рассмотрим угол поворота точки y при k -кратном применении диффеоморфизма. Обозначим его через

$$a_k(y) = a(y) + a(Ay) + a(A^2y) + \dots + a(A^{k-1}y).$$

Для любых двух точек y_1 и y_2 имеем

$$|a_k(y_1) - a_k(y_2)| < 2\pi.$$

Действительно, неравенство имеет место при $|y_1 - y_2| < 2\pi$, так как преобразования прямой A и A^k переводят отрезки длины 2π в отрезки длины 2π . Но функция a_k 2π -периодична, поэтому y_2 можно изменить на целое кратное 2π так, что $a_k(y_2)$ не изменится, а расстояние y_1 до y_2 станет меньше 2π .

2°. Обозначим через m_k целое число, такое, что

$$2\pi m_k \leq a_k(0) < 2\pi(m_k + 1).$$

Докажем, что при любом y и при любом целом l

$$\left| \frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl} - \frac{m_k}{k} \right| < \frac{2}{k}.$$

Действительно, $|a_k(y) - 2\pi m_k| < 4\pi$ при любом y , согласно 1°, поэтому

$$\left| \frac{a_k(y)}{2\pi k} - \frac{m_k}{k} \right| < \frac{2}{k}.$$

Но $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ есть среднее арифметическое l величин $\frac{a_k(y_i)}{2\pi k}$, где $y_i = A^i y$, $i = 0, \dots, l-1$.

3°. Обозначим отрезок $\left[\frac{m_k - 2}{k}, \frac{m_k + 2}{k} \right]$ через σ_k . Мы доказали, что при всех l $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ принадлежит σ_k . Докажем, что отрезки σ_k с разными k пересекаются.

Действительно, $\frac{a_{kl}(y)}{2\pi kl}$ принадлежит как σ_k , так и σ_l .

4°. Итак, отрезки σ_k имеют стремящиеся к 0 длины и попарно пересекаются. Следовательно, они имеют единственную точку пересечения: она и есть число вращения. Мы доказали, что предел, определяющий число вращения, существует и не зависит от начальной точки.

5°. Пусть на окружности A^q имеет неподвижную точку y ; тогда на прямой соответствующая точка при q -кратном отображении сдвигается на целое кратное 2π , т. е. $a_q(y) = 2\pi p$. В этом случае при любом l $a_{ql}(y) = 2\pi pl$, поэтому число вращения $\mu = \frac{p}{q}$ рационально.

6°. Пусть $\mu = \frac{p}{q}$. Если при всех y будет $a_q(y) > 2\pi p$, то при некотором $\varepsilon > 0$ будет $a_q(y) > 2\pi p + \varepsilon$ для всех y .

Но тогда $\mu > \frac{p}{q}$. Если бы было $a_q(y) < 2\pi p$ для всех y , то было бы $\mu < \frac{p}{q}$. Итак, $a_q - 2\pi p$ меняет знак. Следовательно, существует такое y , что $a_q(y) = 2\pi p$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Если число вращения μ иррационально, то порядок точек $(y, Ay, A^2y, \dots, A^Ny)$ на окружности при любом y такой же, как в случае поворота на угол $2\pi\mu$. Действительно, $a_q(y) > 2\pi p$ тогда и только тогда, когда $\mu > \frac{p}{q}$.

Заметим еще, что число вращения уравнения на торе зависит от выбора окружности, трансверсальной фазовым кривым (оси y в наших обозначениях).

3. Структурно устойчивые уравнения на торе.

Простейшее уравнение на торе $\dot{z} = \omega$ структурно неустойчиво как при резонансном, так и при нерезонансном значении ω .

Теорема 1. *Дифференциальное уравнение на торе $\frac{dy}{dx} = \lambda(x, y)$ структурно устойчиво тогда и только тогда, когда число вращения рационально и все периодические решения невырождены¹.*

¹ А. Г. Майер. Грубые преобразования окружности в окружность. Ученые запис-

Доказательство.

Эта теорема вытекает из доказанного ниже аналогичного предложения о диффеоморфизмах окружности, сохраняющих ориентацию. ■

Определение. Циклом порядка q диффеоморфизма $A: M \rightarrow M$ называется множество из q точек $(y, Ay, \dots, A^{q-1}y)$ в случае, когда они все различны и $A^q y = y$. Цикл называется невырожденным, если его точка y является невырожденной неподвижной точкой отображения A^q (т. е. 1 не является собственным числом производной отображения A^q в точке y).

Замечание. Производные отображения A^q в разных точках одного цикла подобны, поэтому все точки одного цикла вырождены или невырождены одновременно.

Теорема 2. Сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности структурно устойчив если и только если число вращения рационально и все циклы невырождены. Структурно устойчивые диффеоморфизмы образуют открытое всюду плотное множество в пространстве C^2 всех дважды дифференцируемых сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности.

Таким образом, диффеоморфизмы общего положения с рациональным числом вращения устроены достаточно просто: топологический тип отображения определяется числом циклов, которое должно быть четным (ввиду чередования точек устойчивых и неустойчивых циклов). Порядок всех циклов равен q , если число вращения $\mu = \frac{p}{q}$. Порядок точек одного цикла на окружности такой же, как для отображения поворота на угол $2\pi\mu$.

Теорема 2 доказана ниже в пункте К. Доказательство несложно по модулю следующей нетривиальной теоремы Данжуа (1932).

Теорема 3. Если сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности класса C^2 имеет иррациональное число вращения μ , то он топологически эквивалентен повороту окружности на угол $2\pi\mu$.

Предыдущая теория принадлежит Пуанкаре (1885); теорему Данжуа Пуанкаре высказал в виде гипотезы (для уравнений, правая часть

ки ГГУ, 12 (1939), 215–229; В. А. Плисс. О грубости дифференциальных уравнений, заданных на торе. Вестник ЛГУ, сер. «Мат.» 13, 3 (1960), 15–23.

которых тригонометрический многочлен). Данжуа привел также примеры, показывающие, что C^2 нельзя заменить на C^1 .

И. Доказательство теоремы Данжуа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. Точки $\dots, A^{-1}y, y, Ay, A^2y, \dots$ орбиты отображения A на окружности идут в том же порядке, что и точки орбиты поворота на угол $2\pi\mu$ (см. п. Ж). Поэтому для доказательства теоремы достаточно установить, что орбита отображения A всюду плотна на окружности. Действительно, мы получим гомеоморфизм окружности, переводящий A в поворот, продолжая по непрерывности отображение, которое переводит точки орбиты $\dots, A^{-1}y, y, Ay, \dots$ в соответственные точки орбиты поворота.

2°. Если на окружности есть дуга, свободная от точек орбиты A , то все образы этой дуги при применении степеней диффеоморфизма A попарно не пересекаются. Действительно, рассмотрим максимальную дугу, содержащую данную и свободную от точек орбиты. Все ее образы — тоже максимальные дуги. Концы максимальной дуги принадлежат замыканию орбиты. Поэтому концы максимальных дуг не могут лежать в максимальных дугах. Значит, любые две пересекающиеся максимальные дуги обязательно совпадают. Но если максимальная дуга совпадает со своим образом, то ее граничная точка принадлежит циклу, вопреки иррациональности μ .

3°. Сумма длин образов максимальной дуги ограничена. Поэтому длины последовательных образов такой дуги под действием как A^N , так и A^{-N} стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Следовательно, интегралы якобианов как положительных, так и отрицательных итераций A по максимальной дуге стремятся к нулю: если обозначить

$$u_N = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dA}{dy}(A^i y), \quad v_N = \prod_{i=0}^{N-1} \frac{dA^{-1}}{dy}(A^{-i} y),$$

то при $N \rightarrow \infty$

$$\int u_N dy \rightarrow 0, \quad \int v_N dy \rightarrow 0$$

(интегралы по максимальной дуге).

4°. Рассмотрим последовательность точек орбиты поворота на угол $2\pi\mu$ ($\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$). Предположим, что α_q — ближайшая к α_0

среди точек $(\alpha_1, \dots, \alpha_q)$. Тогда точки $\alpha_q, \dots, \alpha_{2q-1}$ перемежаются с точками $\alpha_0, \dots, \alpha_{q-1}$.

Действительно, рассмотрим дугу (α_s, α_{q+s}) , $s < q$, длины δ , равной расстоянию от α_0 до α_q . Предположим, что на этой дуге лежит α_r . Если $r < s$, то на дуге $(\alpha_{s-r}, \alpha_{s-r+q})$ лежит α_0 , поэтому расстояние от α_{s-r} до α_0 меньше δ , вопреки выбору α_q . Если $r > s$, то на дуге (α_0, α_q) лежит α_{r-s} , поэтому $r - s > q$. Но тогда расстояние от α_0 до α_{r-s-q} меньше δ . Итак, на дуге (α_s, α_{q+s}) нет точек α_r , $r < 2q$, что и требовалось доказать.

5°. Рассмотрим точки $(y, Ay, \dots, A^{q-1}y)$ и $(A^{-1}y, \dots, A^{-q}y)$. Эти два множества точек перемежаются (4°). Поэтому для любой функции f ограниченной вариации на окружности, для любой точки y и для любого q , определенного в 4°, величина

$$\sum f(A^i y) - \sum f(A^{-j} y), \quad 0 \leq i < q, \quad 0 < j \leq q$$

ограничена сверху и снизу не зависящими от y и q постоянными.

6°. Рассмотрим в качестве f функцию $\ln \frac{dA}{dy}$. Это функция ограниченной вариации, так как A класса C^2 . Следовательно, величина

$$\prod_{i=0}^{q-1} \frac{dA}{dy}(A^i y) / \prod_{j=0}^q \frac{dA}{dy}(A^{-j} y) = u_q v_q$$

ограничена сверху и снизу не зависящими от y и q положительными постоянными (если q выбирается как в 4°).

7°. Противоречие с 3° завершает доказательство теоремы: применив неравенство Шварца к $\sqrt{u_q}, \sqrt{v_q}$, получаем

$$\left(\int \sqrt{u_q v_q} dy \right)^2 \leq \int u_q dy \int v_q dy. \quad \blacksquare$$

К. Доказательство теоремы о структурно устойчивых диффеоморфизмах окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. Для любых двух сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности с одинаковыми рациональными числами вращения и одинаковым числом циклов, если все циклы невырождены, существует гомеоморфизм, переводящий первый диффеоморфизм во второй.

Для доказательства нужно сначала сопоставить точкам одного устойчивого цикла первого диффеоморфизма точку какого-либо устойчивого цикла второго, затем соседнего неустойчивого и т. д. для всех циклов (порядок точек цикла на окружности такой же, как у поворота). Это сопоставление можно затем продолжить на смежные интервалы, пользуясь следующей легко доказываемой леммой:

Любые два гомеоморфизма интервала на себя, не имеющие неподвижных точек, топологически сопряжены.

2°. Если число вращения рационально и все циклы невырождены, то при малом шевелении число вращения, число циклов и невырожденность циклов сохраняется (по теореме о неявной функции). Следовательно, *диффеоморфизм с рациональным числом вращения, все циклы которого невырождены, структурно устойчив* (см. 1°).

3°. Если диффеоморфизм имеет вырожденный цикл, то малым шевелением диффеоморфизма в окрестности точек этого цикла можно изменить число циклов. Поэтому *диффеоморфизм с вырожденным циклом структурно неустойчив*.

4°. *Если число вращения иррационально, то его можно изменить сколь угодно малым изменением диффеоморфизма.* Действительно, рассмотрим возмущенный диффеоморфизм $y \mapsto A(y) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. По теореме Данжуа, в некоторой системе координат (не гладкой) $z \mapsto z + 2\pi\mu + \varphi(z)$, $\varphi > 0$. Поэтому число вращения возмущенного диффеоморфизма больше μ . Итак, *всякий диффеоморфизм с иррациональным числом вращения структурно неустойчив*.

5°. *Число вращения — непрерывная функция от диффеоморфизма.* Действительно, $\mu < \frac{p}{q}$ если и только если при q -кратном применении диффеоморфизма все точки сдвигаются меньше, чем на $2\pi r$. Это свойство сохраняется при достаточно малом изменении диффеоморфизма.

6°. *Дiffeоморфизмы с рациональными числами вращения образуют плотное множество.* Это вытекает из 4°, 5° и плотности множества рациональных чисел.

7°. *Все циклы диффеоморфизма с рациональным числом вращения можно сделать невырожденными, сколь угодно мало изменив диффеоморфизм.*

Действительно, сколь угодно малым шевелением в окрестности одного цикла можно сделать этот цикл невырожденным. Пусть γ — одна из дуг, на которые один невырожденный цикл делит окружность. Опре-

делим гладкую функцию φ , равную 1 на γ вне малой окрестности концов γ и равную 0 вне γ . Положим $A_\varepsilon y = A(y) + \varepsilon\varphi(y)$. Число вращения этого диффеоморфизма прежнее, так как цикл сохранился. Пусть q — порядок цикла. Тогда $A_\varepsilon^q(y)$ на дуге $A\gamma$ совпадает с $A^q(y) + \varepsilon$ вне окрестности концов дуги $A\gamma$.

Применим к функции $A^q(y) - y$ на $A\gamma$ лемму Сарда. Мы убеждаемся, что при почти всех ε все неподвижные точки A_ε^q на $A\gamma$ невырождены. Но каждый цикл отображения A_ε имеет представителя на дуге $A\gamma$. Следовательно, все циклы отображения A_ε невырождены. ■

Л. Обсуждение.

1°. Предыдущие теоремы создают впечатление, что «общий» диффеоморфизм окружности имеет рациональное число вращения, а диффеоморфизмы с иррациональным числом вращения являются исключением. Численные эксперименты, однако, обычно приводят к всюду плотным (по меньшей мере на вид) орбитам. Чтобы объяснить это явление, рассмотрим, например, семейство диффеоморфизмов

$$A_{\alpha, \varepsilon}: y \mapsto y + \alpha + \varepsilon \sin y, \quad \alpha \in [0, 2\pi], \quad \varepsilon \in [0, 1].$$

Будем изображать каждый диффеоморфизм точкой на плоскости (α, ε) . Множество диффеоморфизмов с числом вращения $\mu = \frac{p}{q}$ ограничено (как нетрудно сосчитать) парой гладких кривых, и подходит к оси $\varepsilon = 0$ тем более узким языком, чем больше q . Объединение всех этих множеств всюду плотно. Однако оказывается, что мера множества точек плоскости параметров, для которых число вращения рационально, в области $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ мала по сравнению с мерой этой области (рис. 80).

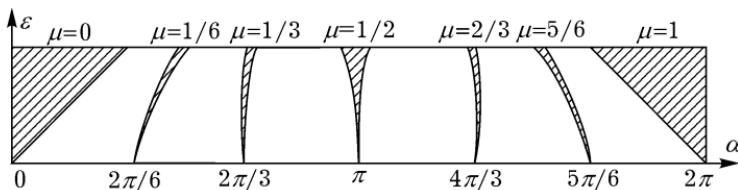


Рис. 80

Таким образом, наугад взятый диффеоморфизм нашего семейства с малым ε с подавляющей вероятностью имеет иррациональное число вращения.

Более того, аналогичный результат имеет место для любого аналитического или достаточно гладкого семейства диффеоморфизмов, близких к поворотам, например, для семейства $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a(y)$ с любой аналитической функцией a : при малых ε орбиты с подавляющей вероятностью всюду плотны на окружности, и число вращения иррационально.

Таким образом, точка зрения структурной устойчивости не является единственным подходом к понятию системы общего положения. Метрический подход, указанный выше, в ряде случаев лучше подходит для описания реально наблюдаемого поведения системы.

2°. Согласно теореме Данжуа, гладкое отображение с иррациональным числом вращения топологически эквивалентно повороту. Возникает вопрос, будет ли это отображение *гладко* эквивалентно повороту.

Ответ на этот вопрос оказывается отрицательным в случае, когда число вращения ненормально быстро аппроксимируется рациональными числами (А. Финци). Вопрос о гладкой эквивалентности повороту сводится к вопросу о гладкости инвариантной меры преобразования. Если число вращения рационально, то инвариантная мера сосредоточена в отдельных точках. Если же число вращения очень быстро аппроксимируется рациональными числами с не слишком большими знаменателями, то инвариантная мера столь быстро аппроксимируется мерами, сосредоточенными в отдельных точках, что она не может быть даже абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. Поэтому гомеоморфизмы в теореме Данжуа нельзя заменить диффеоморфизмами.

3°. С метрической точки зрения наугад взятое число μ с вероятностью 1 иррационально и, более того, не допускает слишком быстрой аппроксимации рациональными числами с небольшими знаменателями. Например, при любом $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 существует $C > 0$ такое, что

$$\left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^{2+\varepsilon}}$$

для любых целых $p, q > 0$. Поэтому возникает предположение, что явление 2° встречается лишь с вероятностью 0. Сформулируем два результата в этом направлении.

Теорема. Для почти всякого числа вращения μ достаточно гладкий (класса C^3 или выше) диффеоморфизм окружности с числом вращения μ гладко эквивалентен повороту на угол $2\pi\mu$ (М. Эрман, 1976).

Здесь «почти всякий» означает, что мера Лебега исключаемого множества чисел вращения равна нулю.

Теореме Эрмана предшествовали аналогичная теорема для отображений близких к повороту и следующий результат (доказанный в аналитическом случае в 1959 г., а в гладком Ю. Мозером в 1962 г.)

Теорема. В достаточно гладком семействе $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a(y)$ мера множества пар (α, ε) в области $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, для которых диффеоморфизм не приводится к повороту гладким диффеоморфизмом, стремится к нулю вместе с ε_0 .

Эта теорема справедлива и для отображений n -мерного тора.

Доказательство этих результатов выходит за рамки настоящего курса, однако мы рассмотрим в следующем параграфе принадлежащую А. Н. Колмогорову технику доказательства теорем этого рода в простейшем случае аналитического диффеоморфизма.

М. Приближения иррациональных чисел рациональными.

Теорема. Для любого иррационального числа μ существуют сколь угодно точные рациональные приближения, ошибка которых меньше обратной величины квадрата знаменателя:

$$\left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Например, число π можно приблизить с ошибкой порядка одной миллионной рациональной дробью с трехзначными числителем и знаменателем, $\pi \approx \frac{355}{113}$.

Прежде чем доказывать теорему, укажем геометрический способ нахождения бесконечной последовательности таких приближений (называемый алгоритмом цепных дробей, или алгоритмом вытягивания носов, или попросту алгоритмом Евклида).

Рассмотрим плоскость с координатами (x, y) (рис. 81).

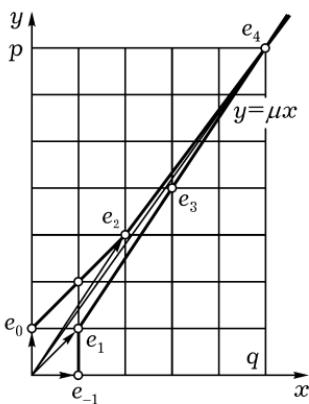


Рис. 81

Проведем прямую $y = \mu x$. Для определенности будем считать $\mu > 0$. Отметим в первом квадранте все точки с целыми координатами. Исключая точку O , они не лежат на нашей прямой, так как μ иррационально. Рассмотрим выпуклые оболочки целых точек квадранта, лежащих по одну сторону от нашей прямой («ниже» её) и по другую («выше»). [Чтобы построить эти выпуклые оболочки, можно представить себе нить, закрепленную в бесконечности и лежащую на нашей прямой. Представим себе, что в каждой отличной от O целой точке нашего квадранта вбит гвоздь. Потянем нить за свободный конец O вниз (соответственно вверх). Тогда

нить натягивается, наткнувшись на некоторые гвозди, образуя границу нижней (соответственно верхней) выпуклой оболочки.] Вершины построенных выпуклых ломаных определяют приближения к иррациональному числу μ , о которых шла речь. Если целые числа (q, p) — координаты вершины, то дробь $\frac{p}{q}$, отвечающая вершине, называется *подходящей дробью для μ* . Оказывается, для любой подходящей дроби $\left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$.

Для доказательства этого неравенства опишем построение наших выпуклых ломаных другим способом. Обозначим через e_{-1} базисный вектор $(1, 0)$ и через e_0 — вектор $(0, 1)$. Эти векторы лежат по разные стороны от прямой $y = \mu x$. Будем строить последовательность векторов e_1, e_2, \dots по следующему правилу. Пусть e_{k-1} и e_k , уже построены и лежат по разные стороны от нашей прямой. Будем прибавлять к вектору e_{k-1} вектор e_k столько раз, сколько можно, чтобы сумма лежала по ту же сторону от прямой $y = \mu x$, что и e_{k-1} .

Таким образом, получаем последовательность натуральных чисел a_k и последовательность целочисленных векторов

$$e_1 = e_{-1} + a_0 e_0, \dots, e_{k+1} = e_{k-1} + a_k e_k, \dots$$

Векторы e_k являются вершинами наших двух выпуклых оболочек (попеременно — верхней при четных k и нижней при нечетных).

Лемма. Площадь параллограмма, натянутого на векторы (e_{k+1}, e_k) , равна (с учетом ориентации) $(-1)^k$.

Доказательство.

Для исходного параллограмма (e_0, e_{-1}) это очевидно. Каждый следующий параллограмм имеет с предыдущим общую сторону и равную высоту, и задает противоположную ориентацию плоскости. ■

Следствие. Обозначим координаты точки e_k через q_k и p_k . Тогда разность двух последовательных подходящих дробей равна

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}.$$

Доказательство.

При приведении дробей к общему знаменателю числителем оказывается определитель из компонент e_{k+1} и e_k , равный ориентированной площади параллограмма. ■

Доказательство теоремы.

Векторы e_k лежат попеременно то по одну, то по другую сторону от прямой $y = \mu x$.

Поэтому подходящие дроби попеременно то больше, то меньше, чем μ . Следовательно, разность между μ и подходящей дробью меньше модуля разности между этой подходящей дробью и следующей. По следствию эта разность по модулю равна $\frac{1}{q_k q_{k+1}}$, что не больше $\frac{1}{q_k^2}$, так как $q_{k+1} \geq q_k$ при $k \geq 0$. ■

Замечание. Числа a_k называются *неполными частными*. Подходящие дроби выражаются через неполные частные так:

$$\frac{p_k}{q_k} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{\ddots + \cfrac{1}{a_{k-1}}}{\dots}}$$

Выражение $a_0 + \frac{1}{a_1 + \dots}$ называется *бесконечной цепной дробью*. Число μ разлагается в бесконечную цепную дробь в том смысле, что $\lim \frac{p_k}{q_k} = \mu$.

§ 12. Аналитическое приведение к повороту аналитических диффеоморфизмов окружности

В этом параграфе при помощи принадлежащей А. Н. Колмогорову модификации метода Ньютона доказывается теорема об аналитических диффеоморфизмах окружности, близких к повороту и имеющих почти любое число вращения.

А. Формулировка теоремы.

Обозначим через Π_ρ полосу $|\operatorname{Im} y| < \rho$. Для голоморфной функции a , ограниченной в этой полосе, будем обозначать $\|a\|_\rho = \sup |a(y)|$, $y \in \Pi_\rho$.

Пусть μ — иррациональное число, $K > 0$, $\sigma > 0$. Мы скажем, что μ число типа (K, σ) , если для любых целых p и $q \neq 0$

$$\left| \mu - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}.$$

Теорема. Существует такое $\varepsilon > 0$, зависящее только от K , ρ , σ , что если a — 2π -периодическая аналитическая вещественная на вещественной оси функция с $\|a\|_\rho < \varepsilon$ такая, что преобразование

$$y \mapsto y + 2\pi\mu + a(y)$$

задает диффеоморфизм окружности с числом вращения μ типа (K, σ) , то этот диффеоморфизм аналитически эквивалентен повороту на угол $2\pi\mu$.

Б. Гомологическое уравнение.

Обозначим через \mathfrak{U} поворот на угол $2\pi\mu$ и через H искомый диффеоморфизм, превращающий поворот в A : коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{A} & S^1 \\ H \uparrow & & \uparrow H \\ S^1 & \xrightarrow{\mathfrak{U}} & S^1 \end{array}, \quad \text{т. е. } H \circ \mathfrak{U} = A \circ H.$$

Запишем H в виде $Hz = z + h(z)$, $h(z + 2\pi) = h(z)$. Тогда для h получаем функциональное уравнение

$$h(z + 2\pi\mu) - h(z) = a(z + h(z)).$$

Если A мало отличается от поворота, то a мало. Естественно ожидать, что и h — того же порядка малости. Тогда $a(z + h(z))$ отличается от $a(z)$ на величину более высокого порядка малости, чем a . Поэтому «в первом приближении» мы получаем для h уравнение

$$h(z + 2\pi\mu) - h(z) = a(z).$$

Это линейное уравнение называется *гомологическим уравнением*.

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы можем рассматривать совокупность всех диффеоморфизмов A как «бесконечномерное многообразие», на котором действует «бесконечномерная группа» диффеоморфизмов H . При этом функцию a можно интерпретировать как касательный вектор к многообразию диффеоморфизмов в точке \mathfrak{U} , а функцию h — как касательный вектор к группе в единице.

В этих терминах гомологическое уравнение имеет следующий смысл: a принадлежит касательному пространству к орбите точки \mathfrak{U} под действием группы если и только если гомологическое уравнение относительно h разрешимо.

В. Формальное решение гомологического уравнения.

Разложим известную функцию a и неизвестную h в ряды Фурье:

$$a(z) = \sum a_k e^{ikz}, \quad h = \sum h_k e^{ikz}.$$

Сравнивая коэффициенты при e^{ikz} , находим

$$h_k = \frac{a_k}{e^{2\pi i k \mu} - 1}.$$

Для разрешимости уравнения необходимо, чтобы знаменатели обращались в нуль лишь одновременно с числителями. В частности, гомологическое уравнение неразрешимо, если $a_0 \neq 0$. Если $a_0 = 0$ и число вращения μ ирационально, то предыдущие формулы дают решение гомологического уравнения в классе формальных рядов Фурье. Чтобы получить настоящее решение, необходимо исследование сходимости этого ряда.

Г. Поведение коэффициентов Фурье аналитических функций.

Лемма 1. *Если f — 2π -периодическая функция, аналитическая в полосе Π_ρ , непрерывная в замыкании этой полосы, и $\|f\|_\rho \leq M$, то ее коэффициенты Фурье убывают в геометрической прогрессии*

$$|f_k| \leq M e^{-|k|\rho}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Как известно, $f_k = \frac{1}{2\pi} \oint f(z) e^{-ikz} dz$. Пусть $k > 0$. Сдвинем путь интегрирования вниз (на $-i\rho$). Интеграл не изменится, так как интегралы по вертикальным сторонам полученного прямоугольника равны. Итак,

$$f_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - i\rho) e^{-ikx - k\rho} dx, \quad |f_k| \leq M e^{-k\rho}.$$

При $k < 0$ путь нужно сдвинуть вверх (на $i\rho$). ■

Лемма 2. Если $|f_k| \leq M e^{-|k|\rho}$, то функция $f = \sum f_k e^{ikz}$ аналитична в полосе Π_ρ , причем

$$\|f\|_{\rho-\delta} \leq \frac{4M}{\delta} \text{ при } \delta < \rho, \delta < 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\|f\|_{\rho-\delta} \leq \sum |f_k| |e^{ikz}| \leq M \sum e^{-|k|\rho_e|k|(\rho-\delta)} = M \sum e^{-|k|\delta} \leq \frac{2M}{1-e^{-\delta}} \leq \frac{4M}{\delta}.$$

■

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае функций n переменных лемма 1 сохраняется, а в лемме 2 оценка $\frac{4M}{\delta}$ заменяется на $\frac{CM}{\delta^n}$, где $C = C(n)$ — не зависящая от δ и f постоянная.

Д. Малые знаменатели.

При решении гомологического уравнения коэффициенты Фурье правой части приходится делить на числа $e^{2\pi i k \mu} - 1$. Если число μ иррационально, то при $k \neq 0$ эти числа отличны от 0. Однако некоторые из них очень близки к 0. Действительно, каждое число μ допускает рациональные приближения $\frac{p}{q}$ с ошибкой $\left| \mu - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$ при сколь угодно большом q . При $k = q$ знаменатель $e^{2\pi i k \mu} - 1$ будет очень мал.

Оказывается, с вероятностью 1 все эти малые знаменатели допускают степенную по k оценку снизу.

Лемма 3. Пусть $\sigma > 0$. Тогда для почти каждого вещественного μ существует $K = K(\mu, \sigma) > 0$ такое, что

$$\left| \mu - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{|q|^{2+\sigma}}$$

для всех целых p и $q \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим на отрезке $[0, 1]$ те числа μ , для которых приведенное неравенство (с фиксированными p, q, K, σ) нарушается. Эти числа образуют отрезок длины не больше $\frac{2K}{q^{2+\sigma}}$. Объединение таких отрезков для всех p (при

фиксированных $q > 0$, K , σ) имеет суммарную длину не более $\frac{2K}{q^{1+\sigma}}$. Суммируя по q , получаем множество меры, не большей $C K$, где $C = 2 \sum q^{-(1+\sigma)} < \infty$. Следовательно, множество чисел $\mu \in [0, 1]$, для которых требуемое в лемме K не существует, покрывается множествами сколь угодно малой меры. Значит, это множество имеет меру ноль (на отрезке $[0, 1]$ и, следовательно, на всей прямой). ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Числа μ , удовлетворяющие указанному выше неравенству, названы в п. А числами типа (K, σ) .

Для числа μ типа (K, σ) малый знаменатель допускает следующую оценку снизу:

$$|e^{2\pi i k \mu} - 1| \geq \frac{K}{2|k|^{1+\sigma}} \quad (|k| > 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно, расстояние от $k\mu$ до ближайшего целого числа оценивается снизу числом $\frac{K}{|k|^{1+\sigma}}$, а хорда единичной окружности не короче, чем длина меньшей из стягиваемых ею дуг, поделенная на π . ■

E. Исследование гомологического уравнения.

Пусть a — 2π -периодическая аналитическая функция со средним значением 0.

Лемма 4. Для почти всех μ гомологическое уравнение имеет 2π -периодическое аналитическое решение (вещественное, если a вещественная функция). Существует такая постоянная $\nu = \nu(K, \sigma) > 0$, что если μ типа (K, σ) , то для любого $\delta > 0$, меньшего ρ , и для любого $\rho < \frac{1}{2}$

$$\|h\|_{\rho-\delta} \leq \|a\|_\rho \delta^{-\nu}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Таким образом, переход от a к h ухудшает свойства функции не сильнее, чем ν -кратное дифференцирование. [Полезно отметить, что $\left\| \frac{d^\nu f}{dz^\nu} \right\|_{\rho-\delta} \leq C \|f\|_\rho \delta^{-\nu}$, согласно оценке Коши коэффициентов Тейлора.] Если пренебречь ухудшением функции, вызванным ν -кратным дифференцированием, то можно сказать, что решение h гомологического уравнения того же порядка малости, что и его правая часть a .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. По лемме 1, $|a_k| \leq M e^{-|k|\rho}$, если $\|a\|_\rho \leq M$.

2°. Поскольку μ типа (K, σ) , $|h_k| \leq \frac{2M e^{-|k|\rho} |k|^{1+\sigma}}{K}$.

3°. Функция $x^m e^{-\alpha x}$, $x \geq 0$, имеет максимум в точке $x = \frac{m}{\alpha}$. Поэтому $x^m e^{-\alpha x} \leq C \alpha^{-m}$, $C = \left(\frac{m}{e}\right)^m$ при любых $\alpha > 0$, $x > 0$. Следовательно, для любого $\alpha > 0$

$$|k|^{1+\sigma} e^{-\alpha|k|} \leq C \alpha^{-m}, \quad m = 1 + \sigma.$$

4°. Итак, $|h_k| \leq M e^{-|k|(\rho-\alpha)} 2CK^{-1} \alpha^{-m}$. По лемме 2, $\|h\|_{\rho-\delta} \leq DM$, где $D = \frac{8C}{K\alpha^m(\delta-\alpha)}$. Возьмем $\alpha = \frac{\delta}{2}$. Число D не превосходит $\delta^{-\nu}$, если ν достаточно велико (ибо $\delta < \frac{1}{2}$). ■

Ж. Построение последовательных приближений.

Решим гомологическое уравнение с правой частью $\tilde{a} = a - a_0$ (a_0 — среднее значение функции a). Обозначим решение через h^0 . Определим отображение H_0 формулой $H_0 z = z + h^0(z)$. Построим отображение $A_1 = H_0^{-1} \circ A \circ H_0$. Определим функцию a^1 соотношением $A_1 z = z + 2\pi\mu + a^1(z)$.

Иными словами, мы ввели на окружности новую координату z_1 (где $z = H_0(z_1)$) и записали отображение A через новую координату. Получилось отображение $z_1 \mapsto A_1 z_1$, отличающееся от поворота на угол $2\pi\mu$ на «невязку» a^1 .

Следующее приближение строится точно таким же образом, отправляясь от A_1 вместо A . Мы строим h^1 и замену H_1 , превращающую A_1 в $A_2 = H_1^{-1} \circ A_1 \circ H_1$.

Возникает последовательность замен H_n . Рассмотрим замену $\mathcal{H}_n = H_0 \circ H_1 \circ \dots \circ H_{n-1}$. Имеем $A_n = \mathcal{H}_n^{-1} \circ A \circ \mathcal{H}_n$.

Оказывается, последовательность \mathcal{H}_n сходится, если μ — число типа (K, σ) и если $\|a\|_\rho$ достаточно мала. Предельная замена \mathcal{H} превращает исходное отображение в $\mathcal{H}^{-1} \circ A \circ \mathcal{H} = \lim A_n$ — поворот на угол $2\pi\mu$.

З. Оценка невязки после одного приближения.

Лемма 5. Существуют постоянные $\varkappa, \lambda > 0$, зависящие лишь от K и σ , такие, что для любого δ из интервала $(0, \rho)$, где $\rho < \frac{1}{2}$,

$$\|a\|_\rho \leq \delta^\varkappa \implies \|a^1\|_{\rho-\delta} \leq \|a\|_\rho^2 \delta^{-\lambda}.$$

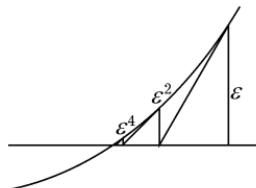
ЗАМЕЧАНИЕ. Это означает, что оставшаяся после первой замены переменной невязка a^1 имеет второй порядок малости по сравнению с исходным отличием от поворота, a (с точностью до ухудшения типа λ -кратного

дифференцирования функции). Таким образом, в приведенной схеме последовательных приближений ошибка каждого следующего приближения порядка квадрата ошибки предыдущего. После n приближений получим ошибку порядка ε^{2^n} , где ε — ошибка исходного, нулевого приближения.

Такая сходимость, характерная для ньютоновского метода касательных (рис. 82), позволяет парализовать влияние появляющихся на каждом шагу малых знаменателей (т. е. влияние ухудшающего множителя $\delta^{-\lambda}$); этот метод борьбы с малыми знаменателями изобретен А. Н. Колмогоровым (1954).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1°. Пусть Ω — выпуклая область в \mathbb{C}^n (или \mathbb{R}^n), $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n$ (соответственно \mathbb{R}^n) — гладкое отображение, причем $\|h_*\| = \sup_{x \in \Omega} \|h_*(x)\| < 1$. Тогда отображение H , переводящее x в $x + h(x)$, является диффеоморфизмом Ω на $H\Omega$.



ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Собственные числа $H_*(x)$ отличны от 0, поэтому H локальный диффеоморфизм. Ввиду условия $|h_*| < q < 1$ и ввиду выпуклости Ω , отображение h сжимающее. Следовательно, разность между сдвигами любых двух разных точек при отображении H меньше расстояния между этими точками, поэтому их образы различны, т. е. H взаимно однозначно. ■

2° Покажем, что если \varkappa достаточно велико, то отображение A_1 аналитично в полосе $\Pi_{\rho-\delta}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть $\|a\|_\rho \leq M = \delta^\varkappa$. Тогда $|a_0| \leq M$, $\|\tilde{a}\|_\rho \leq 2M$. По теореме п. Е, $\|h^0\|_{\rho-\alpha} \leq 2M\alpha^{-\nu}$. Следовательно, $\left\| \frac{dh^0}{dz} \right\|_{\rho-2\alpha} \leq 2M\alpha^{-(\nu+1)}$.

Выберем $\alpha = \frac{\delta}{8}$. Тогда, если \varkappa достаточно велико, то мы получим из предыдущих неравенств $\|a\|_\rho < \alpha$, $\|h^0\|_{\rho-\alpha} < \alpha$, $\left\| \frac{dh^0}{dz} \right\|_{\rho-2\alpha} < \alpha$.

Следовательно, согласно 1°, H_1 — диффеоморфизм полосы $\Pi_{\rho-2\alpha}$, и образ содержит полосу $\Pi_{\rho-3\alpha}$.

Теперь $H_0\Pi_{\rho-\delta} \subset \Pi_{\rho-\delta+\alpha}$, $A \circ H^0\Pi_{\rho-\delta} \subset \Pi_{\rho-\delta+2\alpha} \subset \Pi_{\rho-3\alpha}$. Следовательно, диффеоморфизм H_0^{-1} определен на $A \circ H_0\Pi_{\rho-\delta}$. Значит, отображение $A_1 = H_0^{-1} \circ A \circ H_0$ аналитично в $\Pi_{\rho-\delta}$ и является там диффеоморфизмом. ■

3°. Оценим невязку a^1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Коммутативная диаграмма, определяющая a^1 , дает

$$z + 2\pi\mu + a^1(z) + h^0(z + 2\pi\mu + a^1(z)) \equiv z + h^0(z) + 2\pi\mu + a(z + h^0(z)).$$

Учитывая гомологическое уравнение, получаем

$$a^1(z) = [a(z + h^0(z)) - a(z)] - [h^0(z + 2\pi\mu + a^1(z)) - h^0(z + 2\pi\mu)] + a_0.$$

Первая квадратная скобка оценивается по теореме о среднем и неравенству Коши. На основании 2° получаем

$$\|a(z + h^0(z)) - a(z)\|_{\rho-\delta} \leq \frac{M}{\delta} \|h^0\|_{\rho-\delta} \leq M^2 \delta^{-u},$$

где постоянная u зависит лишь от ν , т. е. лишь от K и σ .

Вторая квадратная скобка оценивается аналогично:

$$\|[\]\|_{\rho-\delta} \leq 2M\alpha^{-(\nu+1)} \|a^1\|_{\rho-\delta} \leq M\delta^{-u_1} \|a^1\|_{\rho-\delta}.$$

Итак,

$$\|a^1\|_{\rho-\delta} (1 - M\delta^{-u_1}) \leq |a_0| + M^2 \delta^{-u}.$$

4°. Оценим теперь величину $|a_0|$, пользуясь тем, что число вращения преобразования A , а значит и A_1 , равно $2\pi\mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Из этого следует, что a^1 обращается в нуль в некоторой вещественной точке z_0 . Подставим в формулу для $a^1(z)$ значение z_0 . Мы получим $a_0 = a(z_0) - a(z_0 + h^0(z_0))$ и, следовательно, $|a_0| \leq M^2 \delta^{-u}$ (см. 3°).

5°. Из оценок 3° и 4° следует, что $\|a^1\|_{\rho-\delta} \leq 4M^2 \delta^{-u}$.

И. Сходимость системы приближений.

1°. Построенное на n -м шагу отображение A_n мы будем рассматривать в полосе радиуса ρ_n , уменьшающегося с каждым приближением: $\rho_0 = \rho$, $\rho_n = \rho_{n-1} - \delta_{n_1}$.

Последовательность чисел δ_n мы выберем убывающей следующим образом:

$$\delta_n = \delta_{n-1}^{3/2}, \quad \delta_0 < \frac{1}{2}.$$

Тогда при достаточно малом δ_0 будет $\sum \delta_n < \frac{\rho}{2}$.

2°. Образуем последовательность чисел M_n , полагая

$$M_n = \delta_n^N.$$

Достаточно большое число N (зависящее лишь от K и σ) будет окончательно выбрано ниже. Заметим, что $M_n = M_{n-1}^{3/2}$.

3°. Предположим, что $\|a\|_\rho \leq M_0$. Докажем, что $\|a^n\|_{\rho_n} \leq M_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Согласно предложению 3, если $N > \varkappa$, то

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leq M_0^2 \delta_0^{-\lambda} = \delta_0^{2N-\lambda}.$$

Но $\delta_0^{2N-\lambda} < \delta_1^N = \delta_0^{3N/2}$, если $N > 2\lambda$. Выберем N , большее чем 2λ и \varkappa . Тогда получим

$$\|a^1\|_{\rho_1} \leq \delta_1^N = M_1.$$

Переход от a^{n-1} к a^n аналогичен. ■

4°. Докажем сходимость произведений $\mathcal{H}_n = H_0 \circ \dots \circ H_{n-1}$ в $\Pi_{\rho/2}$.

Диффеоморфизм H_0 аналитичен в Π_{ρ_1} и удовлетворяет неравенствам $\|h^0\|_{\rho_1} \leq \delta_0$, $\left\| \frac{dh^0}{dz} \right\|_{\rho_1} \leq \delta_0$ (см. 2° п. 3).

Точно так же для H_{n-1} получается $\|h^{n-1}\|_{\rho_n} \leq \delta_{n-1}$, $\left\| \frac{dh^{n-1}}{dz} \right\|_{\rho_n} \leq \delta_{n-1}$.

Следовательно, \mathcal{H}_n аналитично в Π_{ρ_n} и имеет производную, ограниченную сверху и снизу величинами $C = \prod(1 + \delta_k)$, $c = \prod(1 - \delta_k)$.

Отсюда следует, что \mathcal{H}_n диффеоморфизм Π_{ρ_n} и что в $\Pi_{\rho/2}$ последовательность \mathcal{H}_n сходится. Действительно,

$$\|\mathcal{H}_n - \mathcal{H}_{n+1}\|_{\rho/2} \leq C \|h^n\|_{\rho/2} \leq C \delta_n.$$

Обозначим через H предел последовательности \mathcal{H}_n . Переходя к пределу в соотношении $A \circ \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n \circ A_n$, получаем $A \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ \mathfrak{U}$, где \mathfrak{U} — поворот на угол $2\pi\mu$. Теорема доказана. ■

К. Замечания.

1°. Ю. Мозер заметил, что комбинируя описанные приближения со сглаживанием Нэша можно доказать аналогичную теорему в случае конечной гладкости (см. Ю. Мозер. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения. УМН 23, 4 (1968), 179–238).

В первых работах Мозера требовалась сотни производных. В дальнейшем усилиями Мозера и Риосмана число производных было снижено (H. Russmann. Kleine Nenner II: Bemerkungen zur Newtonischen Methode. Nachr. Acad. Wiss Göttingen, Math. Phys Klasse 1 (1972), 1–10).

2°. В многомерном случае число вращения не определено. Тем не менее в семействе отображений $y \mapsto y + \alpha + a(y)$ с малым a , $y \in T^n$, для большинства α отображение гладко эквивалентно сдвигу $y \mapsto y + 2\pi\mu$. В частности, для аналитического семейства $y \mapsto y + \alpha + \varepsilon a_1(y) + \varepsilon^2 a_2(y) + \dots$ при почти каждом μ существует аналитическая функция $\alpha(\varepsilon) = 2\pi\mu + \varepsilon\mu_1 + \dots$, такая, что отображение $y \mapsto y + \alpha(\varepsilon) + \varepsilon a_1(y) + \dots$ превращается в $y \mapsto y + 2\pi\mu$ после аналитической замены $y = z + \varepsilon h_1(z) + \dots$

Коэффициенты h_1, \dots можно найти, приравнивая члены с одинаковой степенью ε . Однако доказать сходимость так полученных рядов по ε удается лишь косвенно, с помощью ньютоновских приближений.

3° . Кажется правдоподобным, что аналитический диффеоморфизм окружности аналитически эквивалентен иррациональному повороту тогда и только тогда, когда неподвижные точки степеней диффеоморфизма не накапливаются к вещественной оси. Можно также думать, что для некоторых иррациональных μ , ненормально хорошо приближаемых рациональными, функция $\alpha(\varepsilon)$, описанная в 2° , не является даже гладкой (даже в одномерном случае).

§ 13. Введение в гиперболическую теорию

В этом параграфе доказывается теорема Аносова о структурной устойчивости автоморфизма тора и теорема Гробмана–Хартмана о структурной устойчивости седла.

А. Простейший пример: линейный автоморфизм тора.

Дифференциальные уравнения с многомерными фазовыми пространствами определяют большой класс структурно устойчивых систем, в которых каждая фазовая кривая расположена среди соседних таким же образом, как положение равновесия типа седло среди соседних гипербол. Начнем с простейшего примера (рис. 83).

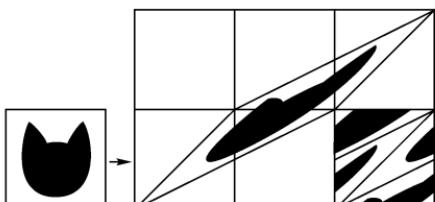


Рис. 83

Рассмотрим автоморфизм A тора T^2 , который задается целочисленным унимодулярным (имеющим определитель 1) линейным преобразованием \hat{A} плоскости с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решетка $2\pi\mathbb{Z}^2$ переходит под действием \hat{A} в себя. Поэтому эквивалентные (сравнимые по модулю 2π) точки плоскости \hat{A} переводят в эквивалентные. Следовательно, \hat{A} определяет отображение A тора на себя. Обратная матрица \hat{A}^{-1} тоже целочисленная, так как $\det \hat{A} = 1$. Поэтому A является диффеоморфизмом тора на себя. Кроме того, A является автоморфизмом группы $T^2 = \mathbb{R}^2 / 2\pi\mathbb{Z}^2$.

Б. Свойства автоморфизма тора.

Конечное множество точек называется *циклом отображения* A , если A переставляет их циклически.

Теорема 1. *Автоморфизм тора A имеет счетное число циклов. Все точки, обе координаты которых — рациональные кратные 2π и только они, являются точками циклов автоморфизма A .*

Доказательство.

1°. Зафиксируем целое число N , тогда точки тора, координаты которых — рациональные кратные 2π со знаменателем N , образуют конечное множество. Преобразование A переводит это множество в себя. Следовательно, все точки этого множества принадлежат циклам.

2°. Пусть $2\pi\xi$ — точка цикла порядка $n > 1$. Тогда $\hat{A}^n\xi = \xi + m$, где m — целочисленный вектор. Полученное линейное уравнение относительно ξ имеет отличный от нуля определитель. Поэтому компоненты ξ рациональны. ■

Теорема 2. *Итерации автоморфизма A равномерно размазывают по тору произвольную область F : для любой области G*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{mes}(A^n F) \cap G}{\operatorname{mes} F} = \frac{\operatorname{mes} G}{\operatorname{mes} T^2}.$$

Это свойство автоморфизма A называется *перемешиванием*; оно имеет место для любых измеримых множеств F, G .

Доказательство.

В терминах функций на торе это соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{n*} f, g) = \frac{(f, 1)(1, g)}{(1, 1)},$$

где $(u, v) = \int u(x)\bar{v}(x) dx$, $(A^{n*} f)(x) = f(A^n x)$.

Пусть теперь f — экспонента: $f = e^{i(p, x)}$. Тогда $A^{n*} f$ также экспонента с волновым вектором $p' = \hat{A}^{n'} p$. Если $p \neq 0$, то орбита точки p под действием операторов $\hat{A}^{n'}$ бесконечна. Поэтому для любой экспоненты $g = e^{i(q, x)}$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} (A^{n*} f, g) = 0$. Апроксимируя f и g в среднем квадратичном суммами экспонент, получаем требуемое. ■

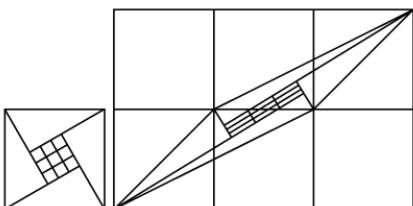


Рис. 84

го из этих полей направлений всюду плотны на торе. Автоморфизм A переводит интегральные кривые первого поля в интегральные кривые того же поля с растяжением в $\lambda > 1$ раз, а второго — со сжатием в λ раз (рис. 84).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим собственные числа преобразования \hat{A} , $\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Очевидно, $\lambda_1 > 1 > \lambda_2$ и числа λ_1, λ_2 иррациональны. Рассмотрим на плоскости семейство всех прямых, параллельных первому собственному вектору преобразования \hat{A} . Поскольку λ_1 иррационально, компоненты собственного вектора несоизмеримы. Поэтому на торе прямые семейства определяют всюду плотные обмотки. Преобразование плоскости \hat{A} переводит это семейство прямых в себя, с растяжением в $\lambda_1 > 1$ раз. Поэтому преобразование тора A переводит в себя семейство обмоток, с таким же растяжением. Это семейство называется *расширяющимся слоением* преобразования A .

Второе собственное направление определяет таким же образом *сжимающееся слоение*. ■

Рассмотрим теперь образ плоской области \hat{F} под действием преобразования плоскости A^n . Это преобразование представляет собой гиперболический поворот: растяжение в λ_1^n раз по первому собственному направлению и сжатие в λ_1^{-n} раз по второму. Поэтому образ области \hat{F} представляет собой при больших n узкую длинную полосу, вытянутую вдоль первого собственного направления. Следовательно, на торе образ области F под действием преобразования A^n представляет собой длинную узкую полосу, близкую к длинному отрезку фазовой кривой уравнения $\dot{x} = \omega$ с нерезонансным вектором ω . Но эта кривая равномерно распределена по тору. Отсюда вытекает, что при увеличении n обра-

Более поучительное (хотя и более сложное при аккуратном проведении) доказательство перемешивания получается следующим образом.

Теорема 3. *На торе существуют два поля направлений, инвариантных относительно автоморфизма A . Интегральные кривые каждого*

зы $A^n F$ пересекут любую область G на торе; немного потрудившись, можно вывести из этих соображений и свойство перемешивания.

В. Структурная устойчивость автоморфизма тора.

Удивительный факт, открытый в начале 60-х годов и явившийся одним из важнейших достижений в теории дифференциальных уравнений за последние десятилетия, состоит в том, что рассматривавшийся выше автоморфизм тора структурно устойчив в классе всех диффеоморфизмов тора. В частности, всякий диффеоморфизм, достаточно близкий к A , имеет счетное число циклов и всюду плотное множество периодических точек.

Теорема Аносова. *Автоморфизм тора $A: T^2 \rightarrow T^2$, заданный матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, структурно устойчив в C^1 топологии. Иными словами, каждый диффеоморфизм B , достаточно близкий к A вместе с производной, сопряжен с A при помощи некоторого гомеоморфизма H ; $B = H^{-1} \circ A \circ H$.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Гомеоморфизм H можно выбрать сколь угодно близким к тождественному преобразованию, если B достаточно близко к A , но нельзя, вообще говоря, сделать гладким.

Теорема Аносова показывает, что в случае систем с многомерным фазовым пространством возможно и сохраняется при малых шевелениях поведение фазовых кривых, не сводящееся к притяжению к устойчивым положениям равновесия и циклам, как это было в случае векторных полей на двумерной сфере или торе. Физический смысл такого более сложного, чем автоколебания, поведения динамических систем мы обсудим позже. Доказательство теоремы Аносова дано в следующих пунктах Г–Ж.

Г. Гомологическое уравнение.

Мы ищем гомеоморфизм H , $H(x) = x + h(x)$, делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^2 \\ H \uparrow & & \uparrow H \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

где $B(x) = Ax + f(x)$; функции f и h имеют по x период 2π .

Из диаграммы получаем нелинейное функциональное уравнение относительно h :

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x + h(x)).$$

Мы считаем функцию f малой, предполагаем, что h окажется малой того же порядка и поэтому заменяем правую часть на $f(x)$, отбрасывая «малую второго порядка». Получаем линеаризованное уравнение

$$h(Ax) - Ah(x) = f(x).$$

Это уравнение называется *гомологическим уравнением*.

Д. Решение гомологического уравнения.

Левая часть гомологического уравнения линейно зависит от h . Обозначим линейный оператор, переводящий h в левую часть гомологического уравнения, через L . Решение гомологического уравнения имеет вид $h = L^{-1}f$. Нужно лишь доказать, что оператор L обратим.

Лемма 1. *Пространство векторных полей на торе распадается в прямую сумму двух подпространств, инвариантных относительно оператора L .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пространства векторных полей, параллельных первому и второму собственному направлению оператора A , инвариантны относительно преобразования, и каждое векторное поле единственным образом представляется в виде суммы двух полей, направленных вдоль собственных направлений. ■

Пусть $f = f_1e_1 + f_2e_2$, $h = h_1e_1 + h_2e_2$ — разложения полей f и h . Тогда гомологическое уравнение принимает вид системы

$$\begin{aligned} h_1(Ax) - \lambda_1 h_1(x) &= f_1(x), \\ h_2(Ax) - \lambda_2 h_2(x) &= f_2(x). \end{aligned}$$

Здесь $\lambda_1 = \lambda_2^{-1} > 1 > \lambda_2 = \lambda$ — собственные числа.

Рассмотрим оператор сдвига аргумента на A в пространстве непрерывных функций на торе. Обозначим его через S . Имеем

$$(Sg)(x) = g(Ax), \quad \|S\| = 1, \quad \|S^{-1}\| = 1.$$

Гомологическое уравнение записывается теперь в виде

$$(S - \lambda_i E)h_i = f_i, \quad i = 1, 2.$$

Пусть $i = 1$. Тогда

$$(S - \lambda_1 E)^{-1} = -\lambda(E + \lambda S + \lambda^2 S^2 + \dots).$$

Поскольку $\lambda < 1$ и $\|S\| = 1$, обратный оператор существует и

$$\|(S - \lambda_1 E)^{-1}\| \leq \frac{\lambda}{(1 - \lambda)}.$$

Аналогично

$$(S - \lambda_2 E)^{-1} = S^{-1}(E - \lambda S^{-1})^{-1} = S^{-1}(E + \lambda S^{-1} + \lambda^2 S^{-2} + \dots),$$

$$\|(S - \lambda_2 E)^{-1}\| \leq (1 - \lambda)^{-1}.$$

Таким образом, оператор L^{-1} существует, причем $\|L^{-1}\| \leq (1 - \lambda)^{-1}$. Гомологическое уравнение решено.

E. Построение отображения H .

Нелинейное функциональное уравнение из пункта Γ решается теперь простейшим методом сжатых отображений. Положим

$$\Phi[h](x) = f(x + h(x)) - f(x).$$

Наше функциональное уравнение имеет вид

$$Lh = \Phi h + f, \quad h = L^{-1}\Phi h + L^{-1}f.$$

Лемма 2. *Если норма f в C^1 достаточно мала, то оператор $L^{-1}\Phi$ в пространстве C^0 сжимающий.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Достаточно проверить, что нелинейный оператор Φ удовлетворяет условию Липшица с малой константой. Действительно, согласно Δ ,

$$\|L^{-1}\Phi h^1 - L^{-1}\Phi h^2\| \leq \frac{\|\Phi h^1 - \Phi h^2\|}{1 - \lambda}.$$

Но $\|\Phi h^1 - \Phi h^2\| = \max |f(x + h^1(x)) - f(x + h^2(x))| \leq \|f\|_{C_1} \|h^1 - h^2\|$.

Итак, оператор $L^{-1}\Phi$ сжимающий, если $\|f\|_{C_1} < 1 - \lambda$. ■

При этом условии наше уравнение решено и H построено.

Ж. Свойства отображения H .

Докажем, что H — гомеоморфизм тора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если h мало в метрике C^1 , то отображение $H = E + h$ — гомеоморфизм. Мы знаем лишь, что h мало в метрике C^0 . Тем не менее, из $H(x) = H(y)$, ввиду гиперболических свойств преобразования плоскости \widehat{A} , следует, что $x = y$.

Действительно, на плоскости $\widehat{B}\widehat{H} = \widehat{H}\widehat{A}$. Поэтому $\widehat{H}\widehat{A}\widehat{x} = \widehat{H}\widehat{A}\widehat{y}$, и вообще $\widehat{H}\widehat{A}^n\widehat{x} = \widehat{H}\widehat{A}^n\widehat{y}$. Но ввиду гиперболичности \widehat{A} расстояние между точками $\widehat{A}^n\widehat{x}$ и $\widehat{A}^n\widehat{y}$ стремится к ∞ либо при $n \rightarrow +\infty$, либо при $n \rightarrow -\infty$. Это противоречит ограниченности h . Стало быть, $\widehat{x} = \widehat{y}$ и, значит, на торе $x = y$.

Докажем, что образ отображения H есть весь тор. Действительно, образ круга достаточно большого радиуса на плоскости под действием \widehat{H} содержит круг радиуса 2π (так как h ограничено). Поэтому $HT^2 = T^2$. Итак, H — гомеоморфизм тора. При этом $BH = HA$. ■

Теорема п. В доказана.

3. Теорема о структурной устойчивости седла.

Предыдущие рассуждения доказывают также следующее предложение.

Теорема Гробмана–Хартмана. *Пусть $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование без собственных чисел, равных 1 по модулю. Тогда всякий локальный диффеоморфизм $B: (\mathbb{R}^n, O) \rightarrow (\mathbb{R}^n, O)$ с линейной частью A в неподвижной точке O топологически эквивалентен A в достаточно малой окрестности точки O .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Локальный диффеоморфизм B совпадает в окрестности точки O с глобальным диффеоморфизмом $C: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенным так: пусть φ — гладкая функция, равная 0 вне 1-окрестности точки O и равная 1 в малой окрестности точки O . Тогда C совпадает с A вне ε -окрестности, где φ_ε отлично от 0, а внутри этой окрестности $C = A + \varphi_\varepsilon \cdot (B - A)$; здесь $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

Предыдущее доказательство теоремы Аносова доказывает, что всякий C^1 -близкий к A диффеоморфизм $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ топологически эквивалентен A . Но C^1 -малости разности $C - A$ можно добиться подходящим