Другим интересным случаем является случай, когда параметр меняется таким образом, что при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$ он имеет определенные пределы. В этом случае имеет смысл говорить о значении адиабатического инварианта на минус бесконечности, его значении на плюс бесконечности и о приращении адиабатического инварианта за бесконечно большое время,

$$\Delta I = I(+\infty) - I(-\infty).$$

Для линейного уравнения

$$\ddot{x} = -\omega^2(\varepsilon t)x, \qquad \omega(-\infty) = \omega_-, \qquad \omega(+\infty) = \omega_+$$

можно доказать, что приращение адиабатического инварианта за бесконечное время — экспоненциально малая по ε величина (в предположении аналитичности функции ω, которая не должна менять знака и должна разумно вести себя на бесконечности). Более того, можно указать явно главный член асимптотики приращения адиабатического инварианта при $\varepsilon \to 0$ (см.: *А. М. Дыхне.* Квантовые переходы в адиабатическом приближении. ЖЭТФ, **38**, 2, 1960, 570–578). Аналогичные результаты получены и для многомерных линейных систем. Аккуратные формулировки и доказательства имеются в статье *М. В. Федорюк.* Адиабатический инвариант системы линейных осцилляторов и теория рассеяния. Дифференциальные уравнения. **12**, 6 (1976), 1012–1018 (в которой, однако, опущены ссылки на предшествовавшие физические работы).

Вопрос о приращении адиабатического инварианта для одномерной нелинейной системы также исследовался физиками: здесь доказана малость приращения по сравнению с ε^N, т. е. отсутствие изменений адиабатического инварианта во всех порядках теории возмущений (*A. Lenard.* Ann. of Physics, **6** (1959), 261–276). А. И. Нейштадт в аналитическом случае получил и экспоненциальную оценку. (*А. И. Нейштадт.* О точности сохранения адиабатического инварианта. Прикладная математика и механика. 1981, **45**, № 1, 80–97).

Экспоненциально малая погрешность принципиально неустранима, так как проекция на базу *любой* замкнутой кривой, близкой к слою нашего расслоения, под действием фазового потока постепенно (с экспоненциально малой, т. е. порядка $e^{-C/\varepsilon}$, средней скоростью) растягивается вдоль I-пространства (*А. И. Нейштадт.* О разделении движений

в системах с быстро вращающейся фазой. Прикладная матем. и мех. 1984, **48**: 2, 197–204).

В окрестности сепаратрисы быстрого движения адиабатический инвариант быстро («скачком») меняется при пересечении сепаратрисы. Асимптотика таких скачков исследована в: *А. И. Нейштадт.* Прохождение через сепаратрису в резонансной задаче с медленно меняющимся параметром. Прикл. матем. и механ. 1975, **39**: 4, 621–632; Физика плазмы. 1986, 12, 992–1001; Скачки адиабатического инварианта и происхождение люка Кирквуда 3:1. 1986.

Что касается нелинейных систем с несколькими степенями свободы, то для них адиабатическая инвариантность переменных действия, вопреки утверждениям в физической литературе, вообще говоря, не имеет места: эти величины являются лишь почти адиабатическими инвариантами, т. е. мало меняются для большинства начальных условий.

§ 21. Усреднение в слоении Зейферта

При исследовании окрестности замкнутой фазовой кривой встречается случай, когда близкие фазовые кривые в первом приближении также замыкаются, но при этом, прежде чем замкнуться, делают несколько оборотов вдоль исходной замкнутой фазовой кривой (т. н. случай резонанса). Изучение поведения системы вблизи резонансного или близкого к резонансу периодического движения приводит к своеобразному варианту метода усреднения: усреднению в слоении Зейферта.

А. Слоение Зейферта.

Слоение Зейферта представляет собой разбиение прямого произведения $\mathbb{R}^2 \times S^1$ на окружности, которое строится следующим образом. Рассмотрим в трехмерном евклидовом пространстве цилиндр с горизонтальными основаниями и вертикальной осью. Разобьем внутренность цилиндра на вертикальные отрезки. Отождествим верхнее и нижнее основания цилиндра, предварительно повернув верхнее основание на угол $\frac{2\pi p}{q}$ (мы склеиваем точку $(z, 0)$ нижнего основания с точкой $(Az, 1)$ верхнего, где A — поворот на угол $\frac{2\pi p}{q}$, p и q взаимно простые целые числа).

Определение. *Слоением Зейферта* типа (p, q) называется трехмерное многообразие $\mathbb{R}^2 \times S^1$ вместе с его разбиением на окружности,

полученным из разбиения внутренности цилиндра на отрезки, параллельные оси, при склейке оснований с поворотом на угол $\frac{2\pi p}{q}$.

Таким образом, каждая из окружностей слоения Зейферта получается склейкой q отрезков, за исключением одной, центральной окружности, полученной из оси цилиндра.

Рассмотрим q-листное накрытие пространства $\mathbb{R}^2 \times S^1$ слоения Зейферта типа (p, q). Накрывающее пространство само диффеоморфно $\mathbb{R}^2 \times S^1$. Слоение Зейферта в исходном многообразии индуцирует на накрывающем многообразии разбиение на окружности. Это разбиение можно рассматривать как слоение Зейферта типа $(p, 1)$. (Склейка производится теперь с поворотом на угол $2\pi p$.)

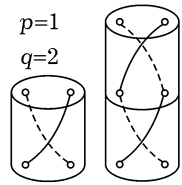

Рис. 101

Слоение Зейферта типа $(p, 1)$ является уже расслоением на окружности, и притом — прямым произведением. При накрытии каждая окружность исходного слоения Зейферта диффеоморфно накрывается q окружностями, кроме одной, центральной окружности, накрываемой q-листно (рис. 101).

Б. Определение усреднения в слоении Зейферта.

Предположим, что в пространстве $\mathbb{R}^2 \times S^1$ слоения Зейферта дано векторное поле. Тогда в накрывающем расслоении также определяется векторное поле. Каждый вектор поля можно спроектировать на базу $\mathbb{R}^2$ накрывающего расслоения. Усредним полученный вектор на базе вдоль слоя накрывающего расслоения. Мы получим в каждой точке базы определенный вектор. Таким образом мы определили на базе векторное поле. Описанная операция построения из поля в пространстве слоения Зейферта поля на плоскости называется *усреднением исходного поля вдоль слоения Зейферта.*

Иными словами, усреднение вдоль слоения Зейферта типа (p, q) определяется как обычное усреднение в накрывающем его q-листном расслоении.

В. Свойства усредненного поля.

При усреднении в обычном расслоении на базе может получиться любое векторное поле. При усреднении в слоении Зейферта на базе получается векторное поле со специальными свойствами: например, в центральной точке вектор усредненного поля обязательно обращается в нуль, если $q > 1$.

Теорема. *В результате усреднения в слоении Зейферта типа (p, q) получается поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол $\frac{2\pi}{q}$.*

Доказательство.

Реализуем базу как одно из оснований исходного цилиндра. Тогда усреднение в слоении Зейферта превращается в усреднение по q отрезкам, параллельным оси цилиндра. При повороте на угол $\frac{2\pi}{q}$ эти q отрезков переходят друг в друга. Теперь легко видеть, что усреднение коммутирует с поворотом на угол $\frac{2\pi}{q}$ (после поворота приходится усреднять по тем же отрезкам, лишь в другом порядке). ■

Г. Пример.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{z} = i\omega z + \varepsilon f(z, t), \text{ где } z \in \mathbb{C},$$

f — комплексная (не обязательно голоморфная) функция, имеющая период 2π по вещественному времени t, ε — малый параметр. Уравнение, отвечающее $\varepsilon = 0$, будем называть *невозмущенным.*

Предположим, что частота невозмущенного движения ω рациональна или близка к рациональному числу $\frac{p}{q}$.

Интегральные кривые невозмущенного уравнения с $\omega = \frac{p}{q}$ образуют в $\mathbb{C} \times S^1 = \{z, t \mod 2\pi\}$ слоение Зейферта типа $\frac{p}{q}$.

После усреднения вдоль этого слоения получается усредненное уравнение.

$$\dot{z} = \varepsilon F(z),$$

где векторное поле F переходит в себя при повороте плоскости переменной z на угол $\frac{2\pi}{q}$.

Д. Коэффициенты Тейлора симметричного поля.

Будем задавать векторное поле на плоскости одной комплексной переменной z комплексной (не обязательно голоморфной) функцией F. Ряд Тейлора комплексной функции F по переменным x, y (где $z = x + iy$) можно записать в виде ряда Тейлора по переменным z, $\overline{z}$.

Запишем этот ряд в виде

$$\sum F_{k,l} z^k \overline{z}^l.$$

Предложение. *Если поле F инвариантно относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{q}$, то из коэффициентов $F_{k,l}$ отличны от нуля лишь те, для которых $k-l$ сравнимо с 1 по модулю q.*

Доказательство.

Ряд Тейлора единственен. Поэтому каждый член ряда определяет векторное поле, инвариантное относительно поворота. Вектор $z^k\overline{z}^l$ при повороте z на угол $\frac{2\pi}{q}$ поворачивается на угол $\frac{(k-l)2\pi}{q}$. Этот поворот есть поворот на угол $\frac{2\pi}{q}$ если и только если $k-l$ сравнимо с 1 по модулю q. ■

Рассмотрим квадрант решетки целых неотрицательных точек (k,l). Отметим те из них, для которых $k-l$ сравнимо с 1 по модулю q. Среди отмеченных точек всегда будет точка $(1,\,0)$ и все целые точки на прямой, выходящей из этой точки параллельно биссектрисе квадранта. Эти точки соответствуют полям $z\Phi(|z|^2)$, инвариантным относительно поворота на любой угол.

Среди отмеченных точек всегда будет точка $(0,\,q-1)$. Эта точка соответствует полю $\overline{z}^{q-1}$, инвариантному относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{q}$. Все отмеченные точки образуют серию лучей, параллельных биссектрисе, начинающихся в точках $(0,\,mq-1)$ и $(mq+1,\,0)$ на сторонах квадранта.

E. Случай симметрии порядка 3.

Рассмотрим векторные поля, инвариантные относительно группы симметрий 3 порядка (т. е. рассмотрим случай $q=3$).

Мономы наименьшей степени в ряду Тейлора поля, симметричного относительно поворота на $120°$, даются отмеченными точками плоскости $(k,\,l)$ с наименьшими $k+l$. Два первых монома — это z и $\overline{z}^2$. Таким образом, каждое поле на плоскости, инвариантное относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{3}$, имеет вид

$$F(z) = az + b\overline{z}^2 + O(|z|^3).$$

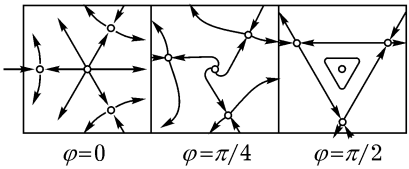

Рис. 102

Отбрасывая последнее слагаемое, мы получаем простейшее дифференциальное уравнение с симметрией порядка 3

$$\dot{z} = az + b\bar{z}^2.$$

Здесь коэффициенты a, b и фазовая координата z комплексны.

Предположим, что $a \neq 0$, $b \neq 0$, умножая z на число и меняя единицу времени, можно добиться $b = 1$, $|a| = 1$. Изменение фазового портрета при $a = e^{i\varphi}$, $b = 1$ показано на рис. 102. При любых a имеется 4 положения равновесия в вершинах равностороннего треугольника и в его центре. При чисто мнимых a система гамильтонова. Чтобы исследовать систему при любых a, достаточно заметить, что она всегда получается из этой гамильтоновой системы формальным умножением переменных z и t на комплексные числа (т. е. поворотом и растяжением плоскости z и поворотом гамильтонова поля на постоянный угол).

Ж. Учет отброшенных членов.

Попытаемся теперь учесть отброшенные члены $O(|z|^3)$. Предположим, что $|a|$ мал (это соответствует тому, что в исходной системе дифференциальных уравнений почти имел место резонанс третьего порядка). Тогда радиус треугольника особых точек также мал (имеет порядок $|a|$). Рассмотрим наше симметричное векторное поле в окрестности точки $z = 0$, которая велика по сравнению с $|a|$, но все же мала (по сравнению с 1).

В такой окрестности отброшенные члены $\mathrm{O}(|z|^3)$ малы по сравнению с оставленными. Из этого нетрудно вывести, что их учет не изменит в существенном вида фазового портрета, если он был структурно устойчивым. В нашем случае фазовый портрет структурно неустойчив лишь при чисто мнимых a, когда система гамильтонова. Гамильтоновость не сохраняется при учете отброшенных членов.

Для всякого луча плоскости комплексной переменной a, не идущего по мнимой оси, при достаточно малых $|a| \neq 0$ вид фазового портрета полной системы (при условии $b \neq 0$) в окрестности начала координат, малой по сравнению с 1 и большой по сравнению с $|a|$, будет таков, как указано на рис. 102, $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$.

Исследование перестройки фазового портрета при прохождении точки a через мнимую ось составляет специальную задачу, к которой мы вернемся в главе 6. В случае общего положения перестройка определяется еще одним членом ряда Тейлора: все происходит так же, как для уравнения

$$\dot{z} = az + \overline{z}^2 + cz|z|^2,$$

где $\operatorname{Re} c \neq 0$.

3. Применение к исходному уравнению.

Проведенный анализ усредненного уравнения дает значительную информацию об исходной системе в случае, когда параметр ε достаточно мал. Не останавливаясь на обосновании, приведем лишь перевод полученных результатов на язык фазовых кривых исходного уравнения.

Три положения равновесия в вершинах равностороннего треугольника соответствуют одной замкнутой интегральной кривой исходного уравнения. При стремлении к нулю разницы между частотой невозмущенного движения ω и резонансной частотой $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$ эта замкнутая кривая сливается с исходной замкнутой кривой, трижды обойдя вдоль нее.

Устойчивость положений равновесия усредненной системы интерпретируется как устойчивость периодических решений возмущенной, и т. д. Существенная разница возникает лишь в одном месте, а именно в случае, когда усредненная система имеет сепаратрису, идущую из седла в седло.

В возмущенной системе седлам соответствует замкнутая кривая, а входящей и выходящей сепаратрисам — притягивающееся и отталкивающееся инвариантные многообразия этой замкнутой кривой. Но если в усредненной системе сепаратрисы при пересечении сливаются, то в возмущенной системе это, вообще говоря, не так. Чтобы представить себе, как пересекаются инвариантные многообразия в трехмерном пространстве возмущенной системы, рассмотрим сечение этого пространства плоскостью $t = 0$.

Эту плоскость наше решение пересекает в трех точках, являющихся неподвижными точками куба отображения последования. Каждая из трех неподвижных точек имеет входящее и выходящее инвариантное многообразие (кривую). Но эти кривые, пересекаясь, не обязаны совпадать (в отличие от фазовых кривых уравнения на плоскости, которые, единожды пересекшись, обязаны совпадать на всем своем протяжении).

Рис. 103

При итерациях отображения последования из пересекающихся дуг инвариантных многообразий образуется сложная сеть, называемая гомоклинической картиной[1] (рис. 103).

И. Резонансы других порядков.

Для резонансов порядка q выше 3 в качестве усредненной системы первого нетривиального приближения получается таким же образом система

$$\dot{z} = az + zA(|z|^2) + \overline{z}^{q-1}.$$

В частности, для резонанса порядка 4 получается система

$$\dot{z} = az + Az|z|^2 + \overline{z}^3.$$

Эти системы, а также система, соответствующая резонансу порядка 2, подробно рассматриваются в гл. 6.

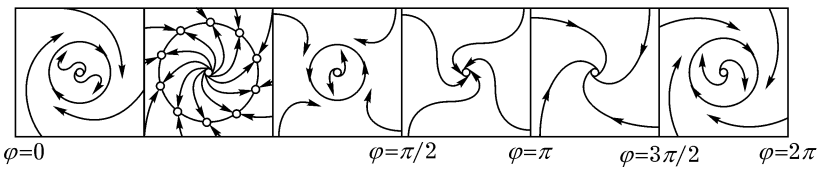

Рис. 104

На рис. 104 изображена перестройка фазовых портретов в усредненной системе, соответствующей резонансу пятого порядка

$$\dot{z} = az + Az|z|^2 + \overline{z}^4$$

при $\operatorname{Re} A < 0$, $\operatorname{Im} A < 0$, $a = \varepsilon e^{i\varphi}$, $\varepsilon \ll 1$.

[1]Неподвижная точка диффеоморфизма плоскости называется гомоклинической, если входящая и выходящая инвариантные кривые пересекаются, не совпадая.

Глава 5
Нормальные формы

Очень плодотворный метод при работе с дифференциальными уравнениями состоит в том, чтобы их не решать, а преобразовывать к возможно более простому виду. Принадлежащая Пуанкаре теория нормальных форм указывает такие наиболее простые формы, к которым можно привести дифференциальное уравнение в окрестности положения равновесия или периодического движения.

Приведение к нормальным формам осуществляется при помощи рядов по степеням отклонения от равновесия или периодического движения. Эти ряды не всегда сходятся. Но даже в случаях, когда ряды расходятся, метод нормальных форм оказывается весьма мощным орудием исследования дифференциальных уравнений: несколько первых членов ряда часто дают значительную информацию о поведении решений, достаточную для построения фазового портрета. Метод нормальных форм является также основным орудием исследования в теории бифуркаций, где он применяется к семействам уравнений, зависящих от параметров.

В настоящей главе изложены простейшие основные положения метода нормальных форм.

§ 22. Формальное приведение к линейной нормальной форме

Теорема Пуанкаре утверждает, что в классе формальных степенных рядов «нерезонансное» векторное поле может быть приведено к своей линейной части в особой точке формальным диффеоморфизмом. Сформулируем условие нерезонансности, о котором идет речь.

А. Резонансы.

Вместо векторного поля рассмотрим формальный векторный степенной ряд $v(x) = Ax + \ldots$ от n переменных с комплексными коэффициентами. Предполагается, что собственные числа матрицы A различны.

Определение. Набор собственных чисел $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n)$ называется *резонансным*, если между собственными числами существует целочисленное соотношение вида

$$\lambda_s = (m, \lambda),$$

где $m = (m_1, \dots m_n)$, $m_k \geqslant 0$, $\sum m_k \geqslant 2$. Это соотношение называется *резонансом*. Число $|m| = \sum m_k$ называется *порядком* резонанса.

Пример. Соотношение $\lambda_1 = 2\lambda_2$ — резонанс порядка 2, $2\lambda_1 = 3\lambda_2$ — не резонанс, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ — резонанс порядка 3 (точнее, из этого соотношения следует резонанс $\lambda_1 = 2\lambda_1 + \lambda_2$).

Б. Теорема Пуанкаре.

Следующая теорема является основным результатом диссертации Пуанкаре.

Теорема. *Если собственные числа матрицы A нерезонансны, то уравнение*

$$\dot{x} = Ax + \dots$$

формальной заменой переменной $x = y + \dots$ приводится к линейному уравнению

$$\dot{y} = Ay$$

(*многоточия означают ряды, начинающиеся с членов выше первой степени*).

Доказательство теоремы Пуанкаре состоит в последовательном уничтожении членов второй, третьей и т. д. степеней в правой части. Каждый шаг основан на решении линейного гомологического уравнения, с вывода которого мы и начнем.

В. Вывод гомологического уравнения.

Пусть h — векторный многочлен[1] от y порядка $r \geqslant 2$ и $h(0) = h'(0) = 0$.

[1] Т. е. векторное поле, компоненты которого — многочлены. Вектор-многочлен (полином) является суммой *вектор-одночленов* или (*вектор-мономов*); последние представляют собой поля, у которых одна компонента одночлен (моном), а остальные компоненты — нули. *Порядок* многочлена есть степень низшего члена.

Лемма. *Дифференциальное уравнение* $\dot{y} = Ay$ *при замене* $x = y + h(y)$ *превращается в*

$$\dot{x} = Ax + v(x) + \dots,$$

где $v(x) = \dfrac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)$, *а многоточие означает члены порядка выше* r.

Доказательство.

$$\dot{x} = \left(E + \frac{\partial h}{\partial y}\right)Ay = \left(E + \frac{\partial h}{\partial y}\right)A(x - h(x) + \dots) =$$
$$= Ax + \left[\frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x)\right] + \dots \qquad \blacksquare$$

Замечание. В квадратных скобках стоит скобка Пуассона векторных полей Ax и $h(x)$.

Мы будем обозначать через L_A оператор, переводящий любое поле в скобку Пуассона линейного поля Ax с данным полем:

$$L_A h = \frac{\partial h}{\partial x}Ax - Ah(x).$$

Определение. *Гомологическим уравнением, связанным с линейным оператором* A, называется уравнение

$$L_A h = v,$$

где h — неизвестное, а v — известное векторное поле.

Г. Решение гомологического уравнения.

Линейный оператор L_A действует из пространства формальных векторных полей в себя. Он оставляет инвариантными пространства однородных вектор-полиномов любой степени.

Вычислим собственные числа и собственные векторы оператора L_A. Обозначим через e_i собственный вектор оператора A с собственным числом λ_i. Будем обозначать через $(x_1, \dots x_n)$ координаты в базисе $(e_1, \dots e_n)$. Как обычно, x^m будет обозначать $x_1^{m_1}, \dots x_n^{m_n}$.

Лемма. *Если оператор A диагональный, то и оператор L_A на пространстве однородных вектор-многочленов диагональный. Собственными векторами оператора L_A являются вектор-одночлены $x^m e_s$. Собственные числа оператора L_A линейно зависят от собственных чисел оператора A, а именно*

$$L_A x^m e_s = [(m, \lambda) - \lambda_s] x^m e_s.$$

Доказательство.

Пусть $h = x^m e_s$. Тогда у вектора $\dfrac{\partial h}{\partial x} Ax$ отлична от нуля только s-я компонента, и она равна

$$\frac{\partial x^m}{\partial x} Ax = \sum \frac{m_i}{x_i} x^m \lambda_i x_i = (m, \lambda) x^m.$$

Но $Ah(x) = \lambda_s h(x)$. ■

Если все собственные числа оператора L_A отличны от нуля, то он обратим.

Следствие. *Если набор собственных чисел оператора A нерезонансный, то гомологическое уравнение $L_A h = v$ разрешимо в классе формальных степенных рядов h для любого формального векторного поля v без свободного члена и линейной части в нуле.*

Если отсутствуют резонансы порядка k, то гомологическое уравнение $L_A h = v$ разрешимо для любого однородного вектор-многочлена v степени k в классе однородных вектор-многочленов степени k (здесь $k \geqslant 2$).

Замечание. Если оператор A недиагональный (имеет жордановы клетки), то и оператор L_A имеет жордановы клетки, но собственные числа, как легко видеть, даются той же формулой, что и в диагональном случае. Поэтому для нерезонансных (хотя бы и кратных) собственных чисел оператор L_A на пространстве однородных вектор-многочленов обратим. Итак, приведенное выше следствие справедливо и в случае кратных собственных чисел.

Д. Доказательство теоремы Пуанкаре.

Доказательство.

Пусть исходное уравнение имело вид $\dot{x} = Ax + v_r(x) + \ldots$, где v_r — члены степени r ($r \geqslant 2$).

Решим гомологическое уравнение $L_A h_r = v_r$ (на основании следствия п. Г). Сделаем подстановку $x = y + h_r(y)$.

Исходное уравнение примет вид $\dot{y} = Ay + w_{r+1}(y) + \ldots$ (используем лемму п. В). Таким образом мы убили члены степени r в правой части исходного уравнения.

Убивая последовательно члены степени 2, 3, ..., мы строим последовательность подстановок. Произведение этих подстановок стабилизируется в классе формальных рядов, т. е. члены любой фиксированной степени, начиная с некоторого шага, не меняются. Предельная подстановка превращает наше формальное уравнение в $\dot{y} = Ay$. ■

Замечание 1. Хотя сходимость рядов и не доказана, сходящейся заменой возмущение можно в нерезонансном случае отодвинуть как угодно далеко: мы доказали, что для любого N настоящей (даже полиномиальной) заменой переменной исходное уравнение может быть приведено к виду $\dot{y} = Ay + o(|y|^N)$.

Замечание 2. Если возмущение $v = v_r + v_{r+1} + \ldots$ имеет порядок r, то, решая гомологическое уравнение $L_A h = v$, мы получаем после подстановки $x = y + h$ уравнение с возмущением порядка $2r - 1$ — обстоятельство, связанное со сверхсходимостью полученных повторением этой процедуры приближений (ср. § 12).

Замечание 3. Доказательство теоремы Пуанкаре сохраняет силу и в случае кратных собственных чисел (см. замечание в конце п. Г), лишь бы они были нерезонансными.

Замечание 4. Если исходное уравнение было вещественным, а собственные числа нет, то собственный базис можно выбрать из комплексно сопряженных векторов. В этом случае все замены в теореме Пуанкаре можно выбирать вещественными, т. е. переводящими комплексно сопряженные векторы в комплексно сопряженные.

§ 23. Резонансный случай

В резонансном случае теорема Пуанкаре – Дюлака утверждает, что формальной заменой переменных можно убить все нерезонансные члены в уравнении.

А. Резонансные мономы.

Пусть набор собственных чисел $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ оператора A резонансный. Пусть e_s — вектор собственного базиса, x_i — координаты в базисе e_i, $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$ — моном (одночлен) от координат x_i.

Определение. Вектор-моном $x^m e_s$ называется *резонансным*, если $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geqslant 2$.

Пример. Для резонанса $\lambda_1 = 2\lambda_2$ единственным резонансным мономом является $x_2^2 e_1$. Для резонанса $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ резонансными являются все мономы $(x_1 x_2)^k x_s e_s$.

Б. Теорема Пуанкаре–Дюлака.

Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное формальным рядом $v(x) = Ax + \ldots$,

$$\dot{x} = Ax + \ldots$$

Теорема. *При помощи формальной замены переменных $x = y + \ldots$ уравнение можно привести к каноническому виду*

$$\dot{y} = Ay + w(y),$$

где все мономы ряда w резонансные.

Доказательство.

Начнем убивать нелинейные члены ряда v. Через несколько шагов мы можем столкнуться с неразрешимым гомологическим уравнением

$$L_A h = v$$

относительно однородного вектор-многочлена h степени r, равной порядку резонанса. В этом случае мы не можем уничтожить все члены степени r возмущения v подходящей подстановкой. Вместо этого мы убьем лишь те из них, какие можно. Иными словами, мы представим v и h в виде суммы вектор-одночленов

$$v = \sum v_{m,s} x^m e_s, \qquad h = \sum h_{m,s} x^m e_s$$

и положим

$$h_{m,s} = \frac{v_{m,s}}{(m\lambda) - \lambda_s}$$

для тех m и s, для которых знаменатель отличен от нуля. Тем самым мы определим поле h.

Выполним обычную подстановку доказательства теоремы Пуанкаре, $x = y + h(y)$. Тогда в исходном уравнении исчезнут все члены степени r, кроме резонансных, которые не изменятся. Уравнение примет вид

$$\dot{y} = Ay + w_r(y) + \dots ,$$

где w_r состоит лишь из резонансных членов.

Следующие шаги проводятся таким же образом. Оставшиеся резонансные члены w_r не влияют на гомологическое уравнение, которое мы решаем, и не меняются при следующих заменах. Действительно, при подстановке $y = z + g_s(z)$ уравнение

$$\dot{y} = Ay + w_2(y) + \dots + w_s(y) + \dots$$

превращается в

$$\dot{z} = Az + w_2(z) + \dots + w_{s-1}(z) + [w_s(z) - (L_A g_s)(z)] + \dots ;$$

скобка Пуассона w_2 с g_s имеет уже степень $s + 1$.

Таким образом, все нерезонансные члены степени s убиваются выбором g_s и доказательство заканчивается как и в нерезонансном случае. ■

В. Примеры.

Практически теорема Пуанкаре–Дюлака используется обычно для того, чтобы выделить резонансные члены невысокого порядка и отодвинуть возмущение до членов некоторого конечного порядка, т. е. чтобы привести уравнение к виду

$$\dot{x} = Ax + w(x) + o(|x|^N),$$

(где w — многочлен из резонансных мономов) уже не формальной, а настоящей заменой переменных (если угодно, полиномиальной).

Пример 1. Рассмотрим векторное поле на плоскости с особой точкой типа узел с резонансом $\lambda_1 = 2\lambda_2$. Теорема Пуанкаре–Дюлака позволяет (формально) привести уравнение к нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 + c x_2^2, \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2. \end{cases}$$

В этом случае нормальная форма полиномиальная, так как резонансных членов конечное число (всего 1).

Пример 2. Рассмотрим векторное поле на плоскости $\mathbb{R}^2$ с особой точкой с чисто мнимыми собственными числами $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ (центр по линейному приближению).

Перейдем к собственному базису. Собственные векторы можно взять комплексно сопряженными. Координаты на $\mathbb{C}^2$ в базисе из комплексно сопряженных векторов принято обозначать через z, $\overline{z}$ (эти числа действительно сопряжены лишь на вещественной плоскости $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{C}^2$).

Наше дифференциальное уравнение на $\mathbb{R}^2$ задает на $\mathbb{C}^2$ уравнение, которое можно записать в виде

$$\dot{z} = \lambda z + \dots\,, \qquad \dot{\overline{z}} = \overline{\lambda}\overline{z} + \overline{\dots}\,,$$

(многоточие означает ряд по степеням z и $\overline{z}$). Поскольку второе уравнение получается из первого сопряжением, его можно не писать.

Имеется резонанс $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. По теореме Пуанкаре – Дюлака, наше уравнение приводится к виду

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta + c\zeta|\zeta|^2 + O(|\zeta|^5)$$

вещественной заменой переменной (см. замечание 4 в п. Д § 23). Следовательно, $r^2 = |\zeta|^2$ — гладкая вещественная функция на $\mathbb{R}^2$. Для нее

$$(r^2)^{\cdot} = \dot{\zeta}\overline{\zeta} + \zeta\dot{\overline{\zeta}} = (2\operatorname{Re} c)r^4 + O(r^6).$$

Если вещественная часть c отрицательна (соответственно положительна), то положение равновесия устойчиво (соответственно неустойчиво).

Таким образом, первые несколько шагов метода Пуанкаре дают метод решения вопроса об устойчивости особой точки, нейтральной в линейном приближении. При этом совершенно несущественно, можно ли продолжать построение дальше и сходится ли вся процедура в целом, важно лишь, чтобы величина «нелинейного декремента» $\operatorname{Re} c$ была отлична от нуля.

Замечание. Обобщением теоремы Пуанкаре является одна общая теорема теории алгебр Ли — так называемая теорема Э. Картана о репликах, обобщающая также теорему о жордановой нормальной форме.

Рассмотрим конечномерную алгебру Ли. Пусть u — элемент этой алгебры Ли. Коммутирование с этим элементом определяет линейный оператор из пространства алгебры Ли в себя, $v \longmapsto [u, v]$. Элемент u называется *полупростым*, если оператор коммутирования с u диагонализуем (имеет собственный

базис). Элемент u называется *нильпотентным*, если оператор коммутирования с u нильпотентен (т. е. все собственные числа этого оператора равны нулю).

Теорема о репликах утверждает, что каждый элемент алгебры разлагается (и притом единственным образом) в сумму полупростого элемента S и коммутирующего с ним нильпотентного элемента N:

$$u = S + N, \qquad SN = NS.$$

Элементы S и N называются *репликами* элемента u.

[В теории жордановой нормальной формы S — оператор с диагональной матрицей, а N — сумма нильпотентных жордановых клеток.]

В алгебре Ли струй векторных полей с особой точкой 0 полупростые поля — это поля, которые в подходящей системе координат линейны и задаются диагональной матрицей. Нильпотентное поле состоит из нильпотентной линейной части и членов высшей степени. Условие коммутирования S и N означает как раз, что в нелинейной части поля в указанной системе координат могут присутствовать только резонансные члены.

Теорему Пуанкаре – Дюлака можно было бы вывести из указанной общей теоремы о репликах (которую нужно применять к конечномерным алгебрам Ли струй векторных полей в нуле).

§ 24. Области Пуанкаре и Зигеля

При исследовании сходимости рядов Пуанкаре, построенных в предыдущих параграфах, в зависимости от расположения собственных чисел на плоскости комплексного переменного существенно различаются два случая.

А. Резонансные плоскости.

Рассмотрим комплексное n-мерное пространство всевозможных наборов собственных чисел $\mathbb{C}^n = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)\}$.

Определение. Гиперплоскость в $\mathbb{C}^n$, заданная целочисленным уравнением

$$\lambda_s = (m, \lambda) \qquad m_k \geqslant 0, \qquad \sum m_k \geqslant 2$$

называется *резонансной плоскостью.*

Изменяя целочисленный вектор m и номер s, мы получим счетное число резонансных плоскостей. Посмотрим, как расположено все множество резонансных плоскостей в пространстве собственных чисел $\mathbb{C}^n$.

Оказывается, в одной части $\mathbb{C}^n$ резонансные плоскости лежат дискретно, а в другой — всюду плотно.

Определение. Набор собственных чисел λ принадлежит *области Пуанкаре*, если выпуклая оболочка n точек $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ на плоскости одного комплексного переменного не содержит нуля.

Набор собственных чисел λ принадлежит *области Зигеля*, если нуль лежит внутри выпуклой оболочки n точек $(\lambda_1, \dots \lambda_n)$.

Замечание. При $n > 2$ области Пуанкаре и Зигеля открыты и разделены конусом. При $n = 2$ область Зигеля имеет вещественную коразмерность 1 в $\mathbb{C}^2$.

Б. Резонансы в области Пуанкаре.

Предположим, что набор собственных чисел λ принадлежит области Пуанкаре.

Теорема 1. *Каждая точка области Пуанкаре удовлетворяет не более чем конечному числу резонансных соотношений $\lambda_s = (m, \lambda)$, $|m| \geqslant 2$, $m_i \geqslant 0$ и имеет окрестность, не пересекающуюся с другими резонансными плоскостями.*

Иными словами, резонансные плоскости лежат в области Пуанкаре дискретно.

Доказательство.

Согласно определению, на плоскости комплексных чисел существует вещественная прямая, отделяющая набор собственных чисел от нуля. Рассмотрим ортогональные проекции собственных чисел на нормаль к этой прямой, направленную от нуля. Все эти проекции не меньше, чем расстояние отделяющей прямой от нуля.

Но коэффициенты m_i резонансного соотношения неотрицательны. Следовательно, при достаточно большом $|m|$ проекция (m, λ) на нормаль будет больше наибольшей проекции собственного числа на нормаль к отделяющей прямой. ■

Теорема 2. *Если собственные числа λ линейной части поля v в O лежат в области Пуанкаре, то даже в резонансном случае поле формальной заменой переменных приводится к полиномиальной нормальной форме.*

Доказательство.

Согласно теореме 1, число резонансных членов конечно, так что теорема 2 вытекает из теоремы 1 и теоремы Пуанкаре–Дюлака. ■

Замечание. В области Пуанкаре резонанс возможен только в случае, если одно из собственных чисел с неотрицательными коэффициентами выражается через остальные, *не считая его самого*, т. е. если $\lambda_s = (m, \lambda)$, то $m_s = 0$. Действительно, если $m_s > 0$, то $0 = (m, \lambda) - \lambda_s$ имеет положительную проекцию на нормаль к отделяющей прямой.

B. Резонансы в области Зигеля.

Предположим теперь, что набор собственных чисел λ принадлежит области Зигеля.

Теорема 3. *В области Зигеля резонансные плоскости лежат всюду плотно.*

Доказательство.

Точка 0 лежит либо внутри некоторого треугольника с вершинами $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, либо на отрезке (λ_1, λ_2). В первом случае рассмотрим угол с вершиной 0, образованный линейными комбинациями чисел λ_1 и λ_2 с вещественными неотрицательными коэффициентами.

Отрицательные кратные числа λ_3 лежат в этом угле. Разобьем угол на параллелограммы с вершинами в целочисленных линейных комбинациях чисел λ_1 и λ_2. Пусть d — диаметр такого параллелограмма. Для любого натурального числа N число $-N\lambda_3$ лежит в одном из наших параллелограммов. Следовательно, оно лежит не далее d от одной из вершин, так что

$$|N\lambda_3 + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2| \leqslant d.$$

Из этого неравенства следует, что расстояние от нашей точки λ до резонансной плоскости $\lambda_3 = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + (N+1)\lambda_3$ не превосходит $\dfrac{d}{N}$. Итак, теорема доказана, если нуль лежит в треугольнике.

В случае, когда 0 лежит на отрезке между λ_1 и λ_2, существуют сколь угодно большие целые p_1 и p_2 с $|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2| \leqslant d$.

Это дает резонансную плоскость на расстоянии меньше $\dfrac{d}{|p|}$ от λ.

■

Определение. Точка $\lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ называется *точкой типа* (C, ν), если при любом s

$$|\lambda_s - (m, \lambda)| \geqslant \frac{C}{m^\nu}$$

для всех целочисленных векторов m с неотрицательными компонентами m_i, $\sum m_i = |m| \geqslant 2$.

Теорема 4. *Мера множества точек, не являющихся ни при каком $C > 0$ точками типа (C, ν), равна нулю, если $\nu > \dfrac{n-2}{2}$.*

Доказательство.

Зафиксируем шар в $\mathbb{C}^n$ и оценим меру не (C, ν)-точек в нем. Неравенство, входящее в определение, определяет окрестность резонансной плоскости ширины не более $\dfrac{C_1 C}{|m|^{\nu+1}}$. Поэтому мера части этой окрестности, попавшей в шар, не превосходит $\dfrac{C_2 C^2}{|m|^{2\nu+2}}$. Суммируя по m с фиксированным $|m|$, получаем не более $|m|^{n-1} \dfrac{C_3 C^2}{|m|^{2\nu+2}}$. Суммируя по $|m|$, получаем $C_4(\nu) C^2 < \infty$, если $\nu > \dfrac{n-2}{2}$. Следовательно, множество не (C, ν)-точек в шаре покрывается множествами сколь угодно малой меры. ■

В вещественном случае в теореме 4 требуется $\nu > n - 1$.

Г. Теоремы Пуанкаре и Зигеля.

Предположим теперь, что векторное поле задано не формальным, а сходящимся рядом, т. е. что мы рассматриваем дифференциальное уравнение с голоморфной правой частью.

Теорема Пуанкаре. *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке принадлежат области Пуанкаре и нерезонансны, то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Иными словами, ряды Пуанкаре, построенные в предыдущих параграфах, сходятся, если собственные числа принадлежат области Пуанкаре.

Теорема Зигеля. *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке образуют вектор типа* (C, ν), *то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Иными словами, ряды Пуанкаре сходятся при почти всех (в смысле теории меры) линейных частях поля в особой точке.

Замечание. Все нерезонансные векторы области Пуанкаре являются векторами типа (C, ν) при некоторых $C > 0$. Напротив, в области Зигеля всюду плотное множество образуют как векторы типа (C, ν), так и резонансные векторы, равно как и векторы нерезонансные, но не являющиеся векторами типа (C, ν) ни при каких C и ν.

Для наборов собственных чисел последнего типа, хотя и несоизмеримых, но слишком близких к соизмеримости, ряды Пуанкаре могут расходиться, так что поле может быть формально эквивалентным своей линейной части, но биголоморфно неэквивалентным.

Доказательства теорем Пуанкаре и Зигеля получаются посредством некоторых упрощений из доказательств аналогичных теорем для отображений, приведенных в § 28.

Д. Теорема Пуанкаре–Дюлака

Рассмотрим теперь случай резонансных собственных чисел.

Теорема. *Если собственные числа линейной части голоморфного векторного поля в особой точке принадлежат области Пуанкаре, то поле в окрестности особой точки биголоморфно эквивалентно полиномиальному, в котором все вектор-мономы с коэффициентами степени выше первой резонансные.*

Иными словами, ряды Пуанкаре сходятся, если собственные числа лежат в области Пуанкаре, даже в случае резонанса.

Замечание. Напротив, если собственные числа лежат в области Зигеля, то ряды, приводящие к формальным нормальным формам при наличии резонансов, часто расходятся. Первый пример этого рода построил еще Эйлер (*L. Euler.* De seriebus divergenti bus, Opera omnia. Ser. 1, **14** (1924), Leipzig-Berlin, 247, 585–617; см. стр. 601).

В примере Эйлера

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$$

начало координат является особой точкой типа седло-узел. Несмотря на аналитичность правой части, сепаратриса, разделяющая обе половины полуплоскости $x < 0$, не аналитична, а лишь бесконечно дифференцируема: $y = \sum (k-1)!\, x^k$.

Много примеров расходимости рядов Пуанкаре построил А. Д. Брюно (*А. Д. Брюно.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Труды ММО **25** (1971), 119–262; в этой работе доказана также сходимость рядов в некоторых случаях, выходящих за рамки теоремы Зигеля).

E. Вещественный и неаналитический случаи.

Теоремы Пуанкаре и Пуанкаре–Дюлака переносятся на вещественно-аналитический случай и на случай бесконечно дифференцируемых векторных полей или даже на случай полей конечной (достаточно большой) гладкости.

В случае Зигеля такое обобщение также возможно (см., например, *S. Sternberg.* On the structure of local homeomorphisms of Euclidean n-space. Amer. J. Math. **80**, (1958), 623–631, **81**, 3 (1959), 578–604).

Следует, однако, заметить, что ситуации, в которых применимы эти теоремы, топологически тривиальны. Действительно, случай Пуанкаре для вещественного поля может встретиться лишь когда собственные числа лежат либо все в левой полуплоскости, либо все в правой. В этом случае (независимо от резонансов), система в окрестности неподвижной точки в вещественном пространстве топологически эквивалентна стандартной системе $\dot{x} = -x$ (либо $\dot{x} = +x$). Все фазовые кривые входят в асимптотически устойчивое положение равновесия при $t \to +\infty$ (либо выходят из равновесия при $t \to -\infty$).

В ситуации теоремы Зигеля в вещественной области применима теорема Гробмана–Хартмана (система топологически эквивалентна стандартному седлу). Действительно, если хотя бы одно из ненулевых собственных чисел линейной части лежит на мнимой оси, то на мнимой оси лежит и комплексно сопряженное собственное число; пара $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ приводит к резонансу $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Нулевое собственное число всегда резонансное. Таким образом, теорема Зигеля применима в вещественном случае лишь к системам без собственных чисел на мнимой оси, а такие системы локально топологически эквивалентны своей линейной части (теорема Гробмана–Хартмана, § 13).

В отличие от *теорем* Пуанкаре и Зигеля, *метод* Пуанкаре применим к исследованию топологически сложных случаев, когда имеются собственные числа на мнимой оси. А именно, метод применяется для нормализации конечного числа членов ряда Тейлора. После этого доказывается, что члены более высокого порядка уже не изменят качественной картины.

Простейший пример этого рода разобран выше в п. В § 23. Особенно полезен этот метод в теории бифуркаций (см. гл. 6).

§ 25. Нормальная форма отображения в окрестности неподвижной точки

Построение подходящей системы координат для отображения пространства в себя вблизи неподвижной точки параллельно теории нормальных форм дифференциальных уравнений в окрестности положения равновесия. В этом параграфе указано, какой вид принимают основные положения теории нормальных форм в этом случае.

А. Резонансы. Области Пуанкаре и Зигеля.

Рассмотрим формальное отображение $F\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, заданное формальным степенным рядом $F(x) = Ax + \ldots$ Пусть $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — собственные числа линейного оператора A. *Резонансом* называется соотношение

$$\lambda_s = \lambda^m, \text{ где } \lambda^m = \lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_n^{m_n}, \quad m_k \geqslant 0, \quad \sum m_k \geqslant 2.$$

Пример. При $n = 1$ резонансными собственными числами являются 0 и все корни любой целой степени из единицы, а все остальные числа λ не резонансные.

Определение. Набор собственных чисел *принадлежит области Пуанкаре*, если модули собственных чисел все меньше единицы или все больше единицы.

Таким образом, отображение F с собственными числами линейной части, принадлежащими области Пуанкаре, является в окрестности начала координат сжатым (если $|\lambda| < 1$), или же (если $|\lambda| > 1$) сжатым является обратное отображение.

Определение. Дополнение к области Пуанкаре составляет *область Зигеля*. При $n = 1$ область Зигеля сводится к единичной окружности $|\lambda| = 1$. Уравнение резонанса $\lambda_s = \lambda^m$ определяет в пространстве собственных чисел $\mathbb{C}^n$ комплексную гиперповерхность. Она называется *резонансной поверхностью*. В области Пуанкаре резонансные поверхности лежат дискретно. В области Зигеля как резонансные, так и нерезонансные точки всюду плотны.

Б. Формальная линеаризация.

Рассмотрим прежде всего вопрос о формальной нормальной форме отображения в неподвижной точке.

Теорема. *Если набор собственных чисел отображения F в неподвижной точке нерезонансный, то отображение $x \longmapsto F(x)$ приводится к своей линейной части $x \longmapsto Ax$ формальной заменой переменных $x = \mathscr{H}(y) = y + \ldots$:*

$$F \circ \mathscr{H} = \mathscr{H} \circ A.$$

Доказательство.

Пусть $H(y) = y + h(y)$, где h — однородный вектор-многочлен степени $r \geqslant 2$. Тогда

$$H \circ A \circ H^{-1}(x) = Ax + [h(Ax) - Ah(x)] + \ldots ,$$

где точками обозначены члены степени выше r. Выражение в квадратных скобках является однородным вектор-многочленом степени r. Этот многочлен линейно зависит от h. Линейный оператор

$$M_A \colon h(x) \longmapsto [h(Ax) - Ah(x)]$$

на пространстве однородных вектор-многочленов имеет собственные числа $\lambda^m - \lambda_s$ и собственные векторы $h(x) = x^m e_s$ (здесь, как обычно, векторы e_k образуют собственный базис оператора A, $x^m = x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n}$, x_k — координаты в базисе $\{e_k\}$; собственные числа оператора A для простоты предположены различными).

Таким образом, мы приходим к гомологическому уравнению относительно h

$$M_A h = v,$$

для решения которого приходится делить коэффициенты разложения v на числа $\lambda^m - \lambda_s$. Итак, условие резонанса в нашей задаче имеет вид $\lambda_s = \lambda^m$.

Дальнейшее доказательство теоремы не отличается от проведенного в § 22 для случая дифференциальных уравнений. ■

В. Вопросы сходимости.

Теоремы Пуанкаре и Зигеля переносятся на рассматриваемый случай дискретного времени следующим образом.

Теорема Пуанкаре. *Если все собственные числа голоморфного диффеоморфизма в неподвижной точке по модулю меньше единицы (или если все больше) и резонансы отсутствуют, то отображение превращается в свою линейную часть биголоморфным локальным диффеоморфизмом в окрестности неподвижной точки.*

Теорема Зигеля. *Для почти всех (в смысле меры Лебега) наборов собственных чисел линейной части голоморфного диффеоморфизма в неподвижной точке диффеоморфизм биголоморфно эквивалентен своей линейной части в неподвижной точке.*

А именно, для эквивалентности диффеоморфизма его линейной части достаточно, чтобы собственные числа удовлетворяли неравенствам

$$|\lambda_s - \lambda^m| \geqslant C|m|^{-\nu}$$

для всех $s = 1, \dots, n$, $|m| = \sum m_k \geqslant 2$, $m_k \geqslant 0$. Наборы собственных чисел, удовлетворяющих этому неравенству, называются наборами мультипликативного типа (C, ν). Множество наборов собственных чисел λ, не являющихся наборами мультипликативного типа (C, ν) ни при каком C, имеет меру нуль, если $\nu > \dfrac{n-1}{2}$.

Доказательство теорем Пуанкаре и Зигеля проводится почти таким же образом, как для дифференциальных уравнений. Хотя теорема Зигеля известна уже более 30 лет, ее доказательство до сих пор, кажется, не было опубликовано. Это доказательство приведено в § 28.

Г. Резонансный случай.

Каждому резонансу $\lambda_s = \lambda^m$ соответствует резонансный вектор-моном $x^m e_s$, (где e_s — вектор собственного базиса, $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, x_k — координаты в собственном базисе).

Теорема Пуанкаре–Дюлака. *Формальное отображение $x \longmapsto Ax + \dots$, где матрица оператора A диагональна, формальной заменой $x = y + \dots$ приводится к нормальной форме $y \longmapsto Ay + w(y)$, где ряд w состоит из одних резонансных мономов. Если собственные числа линейной части оператора A по модулю все меньше (все больше) единицы, то голоморфное отображение $x \longmapsto Ax + \dots$ биголоморфной заменой приводится к полиномиальной нормальной форме из одних резонансных членов.*

В резонансном случае метод Пуанкаре обычно используется для приведения к нормальной форме конечного числа членов ряда Тейлора отображения в неподвижной точке.

Пример. Рассмотрим отображение $\mathbb{C}^1$ в себя с неподвижной точкой O, с собственным числом λ, являющимся корнем степени n из единицы. Такое отображение приводится подходящим выбором координаты к виду

$$x \longmapsto \lambda x + cx^{n+1} + O(|x|^{2n+1}).$$

Например, если $\lambda = -1$, то отображение приводится к виду

$$x \longmapsto -x + cx^3 + O(|x|^5).$$

Эта формула позволяет исследовать устойчивость неподвижной точки вещественного отображения. Действительно, квадрат отображения имеет вид

$$x \longmapsto x - 2cx^3 + O(|x|^5).$$

Следовательно, если $c > 0$, то неподвижная точка O нашего отображения устойчива.

Таким образом, первые несколько шагов метода Пуанкаре позволяют исследовать устойчивость неподвижной точки в сомнительном по линейному приближению случае.

§ 26. Нормальная форма уравнения с периодическими коэффициентами

Одним из вариантов метода нормальных форм Пуанкаре является редукция к простейшему виду уравнения с периодическими коэффициентами.

A. Нормальная форма линейного уравнения с периодическими коэффициентами.

Рассмотрим линейное уравнение с комплексным фазовым пространством

$$\dot{x} = A(t)x,$$

где комплексный линейный оператор $A(t)\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ зависит от t 2π-периодически.

Оператором монодромии называется линейный оператор $M\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, переводящий начальное условие при $t = 0$ в значение решения с этим начальным условием при $t = 2\pi$ (отображение монодромии

определено не только для линейных уравнений, но для любых уравнений с периодическими коэффициентами; в этом более общем случае отображение монодромии обычно называется *отображением* (или *функцией*) *последования* Пуанкаре, или просто *отображением Пуанкаре*).

Теорема Флоке. *Если оператор монодромии диагонален и $\mu_s = e^{2\pi\lambda_s}$ — его собственные числа, то исходное линейное уравнение с периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами*

$$\dot{y} = \Lambda y,$$

где Λ — диагональный оператор с собственными числами λ_s, посредством линейной 2π-периодической замены $x = B(t)y$.

Доказательство.

Рассмотрим линейный оператор, переводящий начальное условие исходного уравнения при $t = 0$ в значение решения с этим начальным условием в момент t. Обозначим этот оператор через $g^t\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Через $f^t\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ обозначим аналогичный оператор для уравнения $\dot{y} = \Lambda y$. Тогда $g^0 = f^0 = E$, $g^{2\pi} = f^{2\pi} = M$ — оператор монодромии (ввиду выбора Λ). Положим $B(t) = g^t(f^t)^{-1}$. Оператор $B(t)$ определяет искомую замену. ■

Замечание. Доказательство теоремы Флоке использовало только представление оператора монодромии в виде $M = e^{2\pi\Lambda}$. Поэтому периодической заменой переменных приводится к уравнению с постоянными коэффициентами не только комплексное уравнение с диагональным оператором монодромии, но всякое уравнение, для которого оператор монодромии имеет логарифм.

Всякий невырожденный комплексный линейный оператор имеет логарифм (в этом легко убедиться, записав матрицу оператора в жордановой форме).

Следствие 1. *Всякое комплексное линейное уравнение с 2π-периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами 2π-периодической линейной заменой переменных.*

Вещественный линейный оператор не всегда имеет вещественный логарифм, даже если его определитель положителен (определитель оператора монодромии всегда положителен). Действительно, рассмотрим,

например, линейный оператор на плоскости с собственными числами $(-1, -2)$. Если этот оператор является экспонентой другого линейного оператора, то собственные числа этого последнего — комплексные, но не комплексно сопряженные числа. Поэтому наш оператор на вещественной плоскости не имеет вещественного логарифма.

С другой стороны, нетрудно проверить, что квадрат вещественного линейного оператора всегда имеет вещественный логарифм. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Всякое вещественное линейное уравнение с 2π-периодическими коэффициентами приводится к уравнению с постоянными коэффициентами 4π-периодической линейной заменой переменных.*

Обычно удобнее пользоваться комплексной приводимостью, чем вещественной с удвоенным периодом.

Б. Вывод гомологического уравнения.

Рассмотрим линейное уравнение с постоянными коэффициентами $\dot{y} = \Lambda y$. Сделаем в этом уравнении 2π-периодическую по времени t нелинейную замену координат

$$x = y + h(y, t),$$

где h — вектор-функция (или формальный ряд по степеням y) с 2π-периодическими коэффициентами.

Лемма. *Если $h = O(|y|^r)$ (или ряд h начинается с членов степени не ниже r), $r \geqslant 2$, то*

$$\dot{x} = \Lambda x + \left[\frac{\partial h}{\partial x}\Lambda x - \Lambda h + \frac{\partial h}{\partial t}\right] + \dots ,$$

где многоточием обозначены члены степени выше r относительно x.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (E + h_y)\Lambda y + h_t = (E + h_y)\Lambda(x - h(x, t)) + h_t + \dots = \\ &= \Lambda x + [h_x \Lambda x - \Lambda h(x, t) + h_t] + \dots\end{aligned}$$ ■

Определение. *Гомологическим уравнением*, связанным с уравнением с 2π-периодическими коэффициентами $\dot{y} = \Lambda y$, называется уравнение относительно 2π-периодического по t векторного поля h

$$L_\Lambda h + h_t = v,$$

где v — заданное 2π-периодическое векторное поле,

$$(L_\Lambda h)(x, t) = \frac{\partial h}{\partial x}\Lambda x - \Lambda h(x, t).$$

Мы будем также рассматривать случай, когда h и v формальные ряды с 2π-периодическими по t коэффициентами.

В. Решение гомологического уравнения.

Пусть сперва v и h — ряды Тейлора–Фурье

$$v(x, t) = \sum v_{m,k,s} x^m e^{ikt} e_s, \qquad h(x, t) = \sum h_{m,k,s} x^m e^{ikt} e_s.$$

Формальное решение гомологического уравнения дается формулой

$$h_{m,k,s} = \frac{v_{m,k,s}}{ik + (m, \lambda) - \lambda_s},$$

где λ_j — собственные числа оператора Λ.

Условие резонанса:

$$\lambda_s = (m, \lambda) + ik,$$
$$m_j \geqslant 0, \quad \sum m_j \geqslant 2, \quad -\infty \leqslant k \leqslant +\infty, \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Если для данных m, s резонанса нет, то ряд Фурье $\sum h_{m,k,s} e^{ikt}$ и его производная по t сходятся. Поэтому в отсутствие резонансов гомологическое уравнение разрешимо в классе однородных многочленов с 2π-периодическими по t коэффициентами, а значит и в классе формальных степенных рядов с 2π-периодическими по t коэффициентами.

Если же резонанс имеет место, то гомологическое уравнение формально разрешимо в случае, когда ряд Тейлора–Фурье для v не содержит резонансных членов, т. е. когда обращаются в нуль коэффициенты $v_{m,k,s}$ для тех членов ряда, для которых выполнено условие резонанса $\lambda_s = ik + (m, \lambda)$.

Г. Формальная нормальная форма.

Действуя обычным способом, мы в нерезонансном случае приводим уравнение с 2π-периодическими формальными коэффициентами к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\dot{y} = \Lambda y$ посредством замены переменной, имеющей вид формального ряда по y с 2π-периодическими по t коэффициентами.

В резонансном случае мы приводим уравнение к виду

$$\dot{y} = \Lambda y + w(y, t),$$

где w — формальный ряд по степеням y с 2π-периодическими по t коэффициентами, состоящий из одних лишь резонансных членов (заметим, что резонансные члены любого фиксированного порядка по y содержат лишь конечное число гармоник Фурье, так как условие резонанса $\lambda_s = (m, \lambda) + ik$ однозначно определяет k).

Практически используется обычно лишь нормализация членов невысокого порядка.

Пример. Рассмотрим уравнение с 2π-периодическими коэффициентами. Предположим, что размерность фазового пространства n равна 2 и что оба собственных числа оператора монодромии комплексны и равны по модулю единице.

Линеаризованное комплексифицированное уравнение в подходящей системе координат имеет вид

$$\dot{z} = i\omega z$$

(как обычно, уравнение для $\overline{z}$, как сопряженное с выписанным, опускается). Собственные числа: $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Резонансные члены в уравнении для $\dot{z}$ определяются из условия

$$ik + (m_1 - m_2 - 1)i\omega = 0.$$

Если вещественное число ω иррационально, то $k = 0$, $m_1 = m_2 + 1$. Следовательно, уравнение приводится к не зависящей от времени формальной нормальной форме

$$\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + c_2 z|z|^4 \ldots$$

Настоящей (не формальной) заменой переменной можно привести уравнение, например, к виду

$$\dot{z} = i\omega z + c_1 z|z|^2 + \ldots ,$$

где (2π-периодическая) зависимость от t сохранилась лишь в членах 5 порядка малости по z, обозначенных многоточием.

Заметим, что в этом случае каждый шаг метода Пуанкаре сводится к усреднению по t и $\arg z$, и что полученное уравнение инвариантно относительно сдвигов t и поворотов z.

Д. Случай соизмеримости.

Предположим теперь, что в предыдущем примере число ω рационально, $\omega = \dfrac{p}{q}$. В этом случае из уравнения для резонансных членов получаем

$$k = pr, \qquad m_1 = m_2 + 1 - qr.$$

Для исследования нормальной формы удобно рассмотреть q-листное накрытие вдоль оси времени. Заметим, что интегральные кривые линейной части нашего уравнения образуют слоение Зейферта типа (p, q) (ср. § 21). На пространстве q-листного накрытия интегральные кривые образуют тривиальное расслоение, и мы можем ввести координаты прямого произведения. Координату вдоль слоя мы будем обозначать через $t \pmod{2\pi q}$. Координата на базе, ζ, определяется из условия

$$z = e^{i\omega t}\zeta.$$

В этих обозначениях линейная часть нашего уравнения принимает вид $\dot{\zeta} = 0$, а нормальная форма — вид не зависящего t формального ряда

$$\dot{\zeta} = \sum w_{k,l}\zeta^k\overline{\zeta}^l,$$

где $k - l \equiv 1 \bmod q$.

Иными словами, на базе q-листного накрытия получается (формальное) уравнение, инвариантное относительно вращении на угол $\dfrac{2\pi}{q}$.

Если вместо полного формального приведения ограничиться нормализацией нескольких первых членов ряда, то мы получим для ζ уравнение с $2\pi q$-периодическим по времени остаточным членом порядка $q + 1$:

$$\dot{\zeta} = \zeta a(|\zeta|^2) + b\overline{\zeta}^{q-1} + \ldots$$

В этом случае каждый шаг метода Пуанкаре сводится к усреднению вдоль слоения Зейферта, поэтому полученное уравнение инвариантно относительно сдвигов t и поворотов ζ на углы, кратные $\dfrac{2\pi}{q}$.

Исследование получившихся уравнений проведено в гл. 6.

Е. Обсуждение сходимости.

Область Пуанкаре для уравнения с периодическими коэффициентами $\dot{x} = \Lambda x + \ldots$ определяется условием: все собственные числа линеаризованного уравнения лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda < 0$ (либо все в правой).

В этой области 1) резонансные плоскости $\{\lambda\colon \lambda_s = (m, \lambda) + ik\}$ лежат дискретно; 2) нормальная форма при резонансе содержит лишь конечное число членов; 3) ряды Пуанкаре сходятся.

Дополнение к области Пуанкаре образует область Зигеля. В области Зигеля 1) резонансные плоскости образуют всюду плотное множество; 2) нормальные формы могут содержать бесконечное число членов; 3) ряды Пуанкаре могут расходиться.

Однако *для почти всех* (*в смысле меры Лебега*) *наборов собственных чисел* λ *оператора* Λ *голоморфное* 2π*-периодическое по* t *дифференциальное уравнение* $\dot{x} = \Lambda x + \ldots$ *в окрестности нулевого решения приводится к автономной нормальной форме* $\dot{x} = \Lambda x$ *биголоморфным* 2π*-периодическим по* t *преобразованием* (теорема Зигеля для случая периодических коэффициентов).

Доказательство обычное, см. § 28. ■

Ж. Окрестность замкнутой фазовой кривой.

Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(x)$, имеющее периодическое решение и, следовательно, замкнутую фазовую кривую. Все сказанное выше об окрестности нулевого решения уравнения с периодическими коэффициентами непосредственно переносится на этот случай.

Действительно, в окрестности замкнутой фазовой кривой можно выбрать координаты так, что поле направлений, заданное векторным полем v, будет полем направлений уравнения с периодическими коэффициентами, причем размерность фазового пространства уменьшится на единицу (координата, меняющаяся вдоль фазовой кривой, станет называться временем).

Замечание. Если фазовое пространство — многообразие, то окрестность замкнутой фазовой кривой может оказаться не диффеоморфной прямому произведению окружности на трансверсальный диск.

Пример. Фазовое пространство — лист Мебиуса, фазовая кривая — его осевая окружность.

Вообще, окрестность окружности в многообразии не будет прямым произведением, если и только если многообразие не ориентируемо и окружность — его дезориентирующий путь. В этом случае для

перехода к уравнению с периодическими коэффициентами приходится прибегать к двулистному накрытию исходной окружности.

З. Связь с функциями последования.

Теорию нормальных форм уравнений с периодическими коэффициентами можно было бы вывести из теории нормальных форм их отображении последования, т. е. нормальных форм диффеоморфизмов в окрестности неподвижной точки. Обратно, изучение диффеоморфизма в окрестности неподвижной точки можно свести к исследованию уравнения с периодическими коэффициентами, для которого этот диффеоморфизм является функцией последования.

В случае конечной и даже бесконечной вещественной гладкости построение дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами[1] по данному отображению последования не представляет больших трудностей. В аналитической или голоморфной ситуации положение более сложно. Этот вопрос эквивалентен вопросу об аналитической (голоморфной) тривиальности аналитических (голоморфных) расслоений над круговым кольцом, в предположении топологической тривиальности. Хотя в сущности положительный ответ и следует из теории пучков и многообразий Штейна, доказательство, насколько мне известно, не опубликовано (я благодарен В. П. Паламодову и Ю. С. Ильяшенко за разъяснения по этому поводу). Мы не будем вдаваться в эту теорию, тем более что все необходимые для изучения дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов результаты можно не выводить одни из других, а получать независимо, используя тот же метод доказательства.

И. Случай условно-периодических коэффициентов.

Метод Пуанкаре допускает непосредственное обобщение на случай условно-периодических коэффициентов. Речь идет об уравнении

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \Lambda x + v(x, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= \omega, \end{aligned}$$

где φ точка r-мерного тора, ω — постоянный вектор, $\Lambda\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ — линейный оператор (не зависящий от φ), v — векторное поле, линейная часть которого в точке $x = O$ равна нулю.

На компоненты вектора частот ω накладываются обычные условия нормальной несоизмеримости. Условия резонанса имеют в этой ситуации вид

$$\lambda_s = i(k, \omega) + (m, \lambda),$$

[1] Включить данное отображение в фазовый поток автономного уравнения, вообще говоря, нельзя (пример — диффеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения, дифференцируемо не эквивалентный повороту, см. § 11).

где k пробегает решетку целых точек r-мерного пространства, а m удовлетворяет обычным условиям $m_p \geqslant 0$, $\sum m_p \geqslant 2$.

Функция v предполагается аналитической (голоморфной) по x и φ, периода 2π по $\varphi = (\varphi_1, \dots \varphi_r)$. Доказывается приводимость системы к виду

$$\dot{y} = \Lambda y, \qquad \dot{\varphi} = \omega$$

аналитической (голоморфной) заменой $x = y + h(y, \varphi)$, 2π-периодической по φ (*Э. Г. Белага.* О приводимости системы обыкновенных дифференциальных уравнений в окрестности условно-периодического движения. ДАН СССР, **143**, 2 (1962), 255–258.)

Недостатком этой теории является несовершенство теории линейных уравнений с условно-периодическими коэффициентами: в то время как для уравнений с периодическими коэффициентами постоянства линейной части можно было добиться подходящим периодическим линейным преобразованием координат, для уравнений с условно-периодическими коэффициентами предположение о независимости Λ от φ является существенным ограничением.

К. Проблема приводимости линейных уравнений с условно-периодическими коэффициентами.

Под линейным уравнением с условно-периодическими коэффициентами ниже понимается система

$$\dot{x} = A(\varphi)x, \qquad \dot{\varphi} = \omega,$$

где $x \in \mathbb{C}^n$, $\varphi \in T^r$, ω — вектор с целочисленно независимыми компонентами, $A(\varphi)$ — линейный оператор в $\mathbb{C}^n$.

Таким образом, уравнение задается парой (A, ω), где A есть гладкая функция на торе с операторными (если угодно, матричными) значениями, а ω — вектор на торе.

Определение. Линейное уравнение с условно-периодическими коэффициентами *приводимо*, если существует такая (гладкая) операторная функция на торе B, что замена $x = B(\varphi)y$ превращает исходное уравнение в уравнение с постоянными коэффициентами $\dot{y} = Cy$.

Проблема приводимости состоит в том, *приводимо ли линейное уравнение общего положения.*

Неизвестно даже, *не существует ли в функциональном пространстве аналитических пар* (A, ω) *области, свободной от приводимых систем.*

Вопрос о приводимости линейных (и нелинейных) уравнений с условно-периодическими коэффициентами естественно возникает при исследовании окрестности инвариантного тора автономного уравнения, несущего условно-периодические движения. Сам этот тор обычно отыскивается при помощи последовательных приближений, которые в случаях общего положения, как правило, можно модифицировать так, чтобы одновременно как получить инвариантный тор, так и привести к нормальной форме уравнения в вариациях вдоль него, обойдя таким образом нерешенную проблему приводимости (по существу используется приводимость для некоторой «невозмущенной» задачи).

§ 27. Нормальная форма окрестности эллиптической кривой

Теория Пуанкаре нормальных форм дифференциальных уравнении в окрестности особой точки имеет близким аналогом теорию нормальных форм окрестностей эллиптических кривых на комплексных поверхностях. В настоящем параграфе коротко рассматривается эта теория, являющаяся приложением методов теории дифференциальных уравнений к аналитической геометрии и сама имеющая приложения в теории дифференциальных уравнений (см. § 36).

А. Эллиптические кривые.

Эллиптической кривой называется одномерное комплексное многообразие, гомеоморфное тору.

Пример. Рассмотрим плоскость комплексного переменного $\mathbb{C}$ и два комплексных числа (ω_1, ω_2), отношение которых невещественно. Отождествим каждую точку φ из $\mathbb{C}$ с точкой, полученной из нее сдвигами на ω_1 и на ω_2, а следовательно, и со всеми точками $\varphi + k_1\omega_1 + k_2\omega_2$, где k_1 и k_2 — целые числа). После такого отождествления плоскость $\mathbb{C}$ превратится в эллиптическую кривую

$$\Gamma = \mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z}.$$

Таким образом, эллиптическую кривую Γ можно представить себе как параллелограмм со сторонами (ω_1, ω_2), в котором отождествлены соответственные точки на противоположных сторонах.

Можно доказать, что конструкцией описанного примера получаются (с точностью до биголоморфной эквивалентности) все эллиптические кривые. Этот факт — отнюдь не очевидная теорема.

Рассмотрим, например, полосу $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \tau$ и склеим все точки φ, $\varphi+2\pi$, а также склеим точки краев полосы, отождествляя точку φ с $\varphi+i\tau+\sigma+\frac{1}{2}\sin\varphi$ при вещественных φ. Полученное многообразие биголоморфно отображается на фактор-многообразие $\mathbb{C}/\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$, но доказать это нелегко. При $\tau \to 0$, вероятно, $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ стремится к числу вращения при обычных диофантовых условиях.

Числа ω_1 и ω_2 называются периодами кривой. Если умножить оба периода на одно и то же комплексное число, то получатся новые периоды, которые задают эллиптическую кривую, биголоморфно эквивалентную исходной. Поэтому периоды всегда можно выбрать так, чтобы $\omega_1 = 2\pi$.

В таком случае мы будем обозначать второй период через ω. Всегда можно считать, что $\operatorname{Im}\omega > 0$. Разным ω соответствуют, вообще говоря, биголоморфно неэквивалентные эллиптические кривые (точнее, кривые биголоморфно неэквивалентны, если соответствующие решетки $\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$ не переводятся друг в друга умножением на комплексное число).

Задача.[1] Докажите, что фазовые кривые одномерного уравнения Ньютона с потенциальной энергией 3 или 4 степени — эллиптические кривые (если их рассматривать в комплексной области).

Указание. Роль координаты φ на накрывающей эллиптическую кривую плоскости играет время t движения по фазовой кривой, определенное соотношением $dt = \frac{dx}{y}$ (время называется также эллиптическим интегралом *первого рода*).

Задача. Пусть потенциальная энергия — многочлен четвертой степени с двумя минимумами. Докажите, что периоды колебаний (не обязательно малых) с одинаковой полной энергией в обеих ямах совпадают.

Указание. Интегралы первого рода вдоль любых двух меридианов тора одинаковы.

Задача. Пусть потенциальная энергия — многочлен третьей степени с локальными максимумом и минимумом. Докажите, что период колебаний в яме равен периоду движения из бесконечности в бесконечность по некомпактной фазовой кривой с тем же значением полной энергии.

[1] Решение этой и последующих задач основано на элементарных сведениях о топологии римановых поверхностей, имеющихся в любом курсе теории функций комплексного переменного.

Замечание. Подбирая потенциальную энергию третьей или четвертой степени, можно получить любую эллиптическую кривую. Поэтому из результатов предыдущих задач следует, что эллиптическая кривая является алгебраическим многообразием.

Б. Простейшие расслоения над эллиптической кривой.

Простейшей поверхностью, содержащей эллиптическую кривую, является прямое произведение эллиптической кривой на комплексную прямую. Подобно тому, как над окружностью кроме прямого произведения окружности на прямую есть нетривиальное расслоение со слоем прямая (лист Мёбиуса), над эллиптической кривой, кроме прямого произведения, существуют другие расслоения со слоем $\mathbb{C}$.

Рассмотрим расслоение плоскости двух комплексных переменных на комплексные прямые. Мы будем называть слои этого расслоения *вертикальными* прямыми.

Координаты в $\mathbb{C}^2$ мы будем обозначать (r, φ), причем координата r будет считаться вертикальной, а φ горизонтальной. Наше расслоение $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ сопоставляет точке (r, φ) точку φ горизонтальной комплексной прямой.

Пусть Γ — эллиптическая кривая, накрываемая горизонтальной прямой. Кривая Γ получается из горизонтальной оси φ отождествлением точек, различающихся на целые кратные периодов (ω_1, ω_2).

Отождествим на плоскости $\mathbb{C}^2$ вертикальные прямые, проекции которых на горизонталь различаются на целые кратные периодов. Такое отождествление превратит $\mathbb{C}^2$ в расслоение над эллиптической кривой Γ. Но само отождествление вертикальных прямых можно провести разными способами (подобно тому, как при склеивании расслоения над окружностью из прямоугольника можно получать либо цилиндр, либо лист Мёбиуса, в зависимости от того, как склеиваются вертикальные прямые).

Простейший способ склейки состоит в том, что мы отождествляем точку (r, φ) с точками $(r, \varphi + \omega_1)$ и $(r, \varphi + \omega_2)$. При этом получается прямое произведение. Следующий по сложности способ склейки включает подкручивание склеиваемых вертикальных прямых.

Пример. Пусть λ — комплексное число, отличное от нуля, и пусть Γ — эллиптическая кривая с периодами $(2\pi, \omega)$. Отождествим на плоскости $\mathbb{C}^2$ с координатами (r, φ) точки

$$(r, \varphi), \qquad (r, \varphi + 2\pi), \qquad (\lambda r, \varphi + \omega).$$

После такого отождествления $\mathbb{C}^2$ превращается в гладкую комплексную поверхность Σ, а расслоение $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \longmapsto \varphi$, превращается в расслоение $\Sigma \to \Gamma$, базой которого является эллиптическая кривая Γ, а слоем $\mathbb{C}$. Уравнение $r = 0$ задает вложение Γ в Σ.

Поверхность Σ можно представить себе следующим образом (в случае вещественного λ). Рассмотрим вещественное трехмерное пространство с горизонтальной плоскостью $\{\varphi \in \mathbb{C}\}$, расслоенное на вертикальные прямые. Рассмотрим полосу $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Im}\omega$. Склеим вертикальные плоскости, ограничивающие эту полосу, отождествляя точку (r, φ) на вертикальной плоскости $\operatorname{Im}\varphi = 0$ (r — координата по вертикали) с точкой $(\lambda r, \varphi + \omega)$ на плоскости $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\omega$. Кроме того, склеим точки, различающиеся лишь на 2π по координате φ. Получится расслоение над эллиптической кривой, слоем которого является прямая.

Чтобы представить себе комплексную поверхность Σ, остается заменить вещественные вертикальные прямые комплексными.

Топологически построенное расслоение является прямым произведением. Однако с голоморфной точки зрения это расслоение, вообще говоря, нетривиально.

B. Тривиальные и нетривиальные расслоения.

Теорема. *Пусть $\lambda \neq e^{ik\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$. Тогда никакая окрестность эллиптической кривой Γ в описанной выше поверхности Σ не отображается биголоморфно на окрестность этой кривой Γ в прямом произведении.*

Доказательство.

В прямом произведении кривую Γ можно деформировать: для любого ε уравнение $r = \varepsilon$ определяет эллиптическую кривую в прямом произведении. Пусть Γ_1 — эллиптическая кривая в пространстве расслоения Σ, близкая к кривой Γ, являющейся нулевым сечением расслоения (уравнение Γ имеет вид $r = 0$). Тогда кривая Γ_1 задается уравнением $r = f(\varphi)$, где $f(\varphi+2\pi) \equiv f(\varphi)$, $f(\varphi+\omega) = \lambda f(\varphi)$. Разлагая f в ряд Фурье $f = \sum f_k e^{ik\varphi}$, находим $f_k e^{ik\omega} = \lambda f_k$. Следовательно, $f_k = 0$ и Γ_1 совпадает с Γ. Итак, наша эллиптическая кривая в расслоении с $\lambda \neq e^{ik\omega}$ не деформируема. ■

Задача. Доказать, что при $\lambda = e^{ik\omega}$ расслоение $\Sigma \to \Gamma$ является прямым произведением (голоморфно тривиально).

Задача. Доказать, что расслоения $\Sigma_1 \to \Gamma$, $\Sigma_2 \to \Gamma$, заданные комплексными числами λ_1, λ_2, биголоморфно эквивалентны если и только если $\lambda_1 = \lambda_2 e^{ik\omega}$ для некоторого целого k.

Замечание. Классы биголоморфной эквивалентности расслоений описанного вида над фиксированной эллиптической кривой Γ образуют группу (умножение состоит в перемножении чисел λ).

Из результатов предыдущих задач следует, что эта группа естественно отождествляется с фактор-группой мультипликативной группы комплексных

чисел по подгруппе чисел вида $e^{ik\omega}$. Фактор-группа $\mathbb{C}^*/\{e^{ik\omega}\}$ сама биголоморфно отображается на исходную эллиптическую кривую. Эта группа называется также *группой Пикара* или *многообразием Якоби* кривой Γ (эти понятия определяются не только для эллиптических кривых, но для произвольных алгебраических многообразий, и в общей ситуации не совпадают с исходным многообразием).

Задача. Рассмотрим расслоение над эллиптической кривой, заданное отождествлениями

$$(r, \varphi) \sim (\lambda_1 r, \varphi + \omega_1) \sim (\lambda_2 r, \varphi + \omega_2).$$

Докажите, что это расслоение биголоморфно эквивалентно расслоению с $\omega_1 = 2\pi$, $\lambda_1 = 1$.

Замечание. Можно доказать, что все топологически тривиальные одномерные векторные расслоения над эллиптической кривой биголоморфно эквивалентны описанным выше расслоениям $\Sigma \to \Gamma$.

Г. Топологически нетривиальные расслоения над эллиптической кривой.

Топологически все описанные выше расслоения тривиальны (гомеоморфны прямому произведению). Инвариантом, позволяющим различать топологически неэквивалентные расслоения, является индекс самопересечения нулевого сечения.

Пусть M_1, M_2 — гладкие ориентированные компактные подмногообразия ориентированного вещественного гладкого многообразия M (речь идет о многообразиях без края). Предположим, что размерность многообразия M равна сумме размерностей многообразий M_1 и M_2. Предположим, что M_1 и M_2 пересекаются трансверсально (т. е. в каждой точке пересечения касательное пространство к первому и второму подмногообразиям в сумме дают касательное пространство к объемлющему многообразию M).

Индексом пересечения M_1 и M_2 в M называется число точек пересечения с учетом ориентации (точка пересечения считается со знаком плюс, если положительно ориентирующий M_1 репер вместе со следующим за ним положительно ориентирующим M_2 репером определяют репер, положительно ориентирующий M).

Пусть M_1 — ориентированное гладкое компактное подмногообразие половинной размерности в M. *Индекс самопересечения* M_1 в M определяется как индекс пересечения M_1 с многообразием M_2, полученным из M_1 малой деформацией и пересекающим M_1 трансверсально. Например, индекс самопересечения меридиана тора равен нулю, так как соседние меридианы не пересекаются.

Можно доказать, что индекс самопересечения M_1 в M не зависит от выбора многообразия M_2, лишь бы оно получалось из M_1 малой деформацией.

Задача. Найти индекс самопересечения сферы S^2 в пространстве ее касательного расслоения.

Ответ. $+2$. Вообще, индекс самопересечения многообразия в своем касательном расслоении равен эйлеровой характеристике многообразия.

Рассмотрим теперь одномерное векторное расслоение $\Sigma \to \Gamma$ над эллиптической кривой, полученное из расслоения $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ склейкой вертикальных прямых (вертикальная координата обозначена через r) по правилу

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda e^{ip\varphi} r, \varphi + \omega),$$

где p — целое число, λ — комплексное число, отличное от нуля.

Задача. Найти индекс самопересечения нулевого сечения ($r = 0$) в пространстве полученного расслоения, считая, что Σ ориентирована как комплексное многообразие (ориентации комплексных многообразий определяются так, что индекс пересечения комплексных плоскостей всегда положителен: пространство с комплексными координатами $(z_1, \dots z_n)$ ориентируется координатами $(\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$.

Ответ. $-p$, если $\operatorname{Im} \omega > 0$.

Замечание. Полученными расслоениями исчерпываются, с точностью до биголоморфной эквивалентности, все одномерные векторные расслоения над эллиптической кривой.

Д. Окрестность эллиптической кривой на комплексной поверхности.

Рассмотрим эллиптическую кривую на комплексной поверхности. Окрестность кривой на поверхности определяет одномерное векторное расслоение над этой кривой — ее *нормальное расслоение*. Слоем нормального расслоения в точке кривой является фактор-пространство касательного пространства к поверхности в этой точке по подпространству, касательному к кривой.

Пространство нормального расслоения само является комплексной поверхностью. Исходная эллиптическая кривая вложена в эту поверхность (как нулевое сечение расслоения).

Возникает вопрос, будет ли достаточно малая окрестность кривой на исходной поверхности биголоморфно отображаться на ее окрестность в нормальном расслоении. Оказывается, этот вопрос весьма близок к вопросу о приводимости дифференциального уравнения (или гладкого отображения) в окрестности неподвижной точки к линейной нормальной форме и решается теми же методами.

Покажем прежде всего, что окрестность эллиптической кривой на поверхности может вообще не расслаиваться голоморфно над этой кривой.

Пример. Рассмотрим семейство эллиптических кривых, такое, что соседние кривые семейства биголоморфно не эквивалентны друг другу. Такое семейство можно получить, например, отождествляя на плоскости двух комплексных переменных (φ, ω) точки (φ, ω), $(\varphi + 2\pi, \omega)$, $(\varphi + \omega, \omega)$. Область $\operatorname{Im}\omega > 0$ превращается после отождествлений в объединение эллиптических кривых $\omega = \text{const}$. Никакая окрестность ни одной из этих кривых не отображается голоморфно на эту кривую так, чтобы сама кривая оставалась на месте.

Действительно, если бы такое отображение было возможным, мы получили бы близкое к тождеству биголоморфное отображение эллиптических кривых с близкими разными ω друг на друга, что невозможно.

Оказывается, рассмотренный пример является в некотором смысле исключительным: окрестность эллиптической кривой, вложенной в комплексную поверхность с нулевым индексом самопересечения, вообще говоря, биголоморфно эквивалентна окрестности кривой в нормальном расслоении (в том же смысле, в котором дифференциальное уравнение в окрестности особой точки, вообще говоря, эквивалентно линейному). Исключительность рассмотренного примера связана с тем, что нормальное расслоение каждой из эллиптических кривых в построенном семействе тривиально (является прямым произведением).

E. Предварительная нормальная форма.

Эллиптическую кривую можно получить из кругового кольца голоморфным склеиванием граничных окружностей. Точно так же окрестность эллиптической кривой на поверхности можно получить из окрестности кругового кольца на поверхности голоморфной склейкой граничных многообразий. Эти граничные многообразия имеют вещественную размерность три; склейка продолжается голоморфно на окрестность границы.

Оказывается, достаточно малая окрестность биголоморфного образа замкнутого кругового кольца на комплексной поверхности всегда биголоморфно отображается на окрестность кругового кольца, вложенного в комплексную прямую $\mathbb{C}$ в прямом произведении $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

Подобно упомянутым выше результатам о голоморфной классификации одномерных векторных расслоений над эллиптической кривой, сформулированный выше результат об окрестности кольца доказывается непросто: требуется некоторая техника теории функций нескольких комплексных переменных (пучки, эллиптические уравнения с частными производными или что-нибудь их заменяющее).

Мы не будем доказывать это, а прямо предположим, что наша поверхность, содержащая эллиптическую кривую, получается склейкой из окрестности кругового кольца в прямом произведении.

Таким образом, мы рассматриваем поверхность, точки которой получаются из точек (r, φ) плоскости двух комплексных переменных склейками

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r \\ \varphi + 2\pi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} rA(r, \varphi) \\ \varphi + \omega + rB(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где 2π-периодические по φ функции A и B голоморфны в окрестности вещественной оси φ.

Здесь круговое кольцо получается из полосы $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Im}\omega$ на комплексной оси φ при склейке точек $(0, \varphi) \sim (0, \varphi + 2\pi)$; r и φ — координаты в прямом произведении.

Пара функций (A, B), задающих склейку, определяет окрестность. Подходящим выбором координат (r, φ) можно изменять вид функций A и B. Постараемся выбрать эти координаты так, чтобы сделать функции A и B возможно проще.

Рассмотрим вначале линейную замену координат $r_{\text{новое}} = C(\varphi)r$, где функция C голоморфна в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Im}\omega$ оси φ, имеет период 2π и нигде не обращается в этой полосе в нуль.

Теорема. *Функцию C, определяющую линейную замену вертикальной координаты, можно выбрать так, что при записи склейки в новых координатах функция $A(0, \varphi)$ примет вид $\lambda e^{ip\varphi}$ (p — целое число, равное минус индексу самопересечения эллиптической кривой $r = 0$ в рассматриваемой поверхности).*

Доказательство.

Функция $A(0, \varphi)$ определяет нормальное расслоение кривой $r = 0$ в нашей поверхности. Это расслоение биголоморфно эквивалентно расслоению, получаемому склейкой

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda e^{ip\varphi} r, \varphi + \omega)$$

(см. замечание в пункте Д). Линейная замена переменной r, приводящая склейку нормального расслоения к этому каноническому виду, приводит к указанному выше виду функцию $A(0, \varphi)$. ■

Определение. *Предварительной нормальной формой* окрестности эллиптической кривой на поверхности, где кривая имеет нулевой индекс самопересечения, называется склейка

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} r \\ \varphi + 2\pi \end{pmatrix},$$

где a и b — голоморфные в окрестности вещественной оси φ 2π-периодические по φ функции, λ — отличное от нуля комплексное число.

В дальнейшем мы не будем каждый раз указывать отождествления точек, отличающихся лишь на 2π по координате φ, имея в виду, что встречающиеся функции по φ 2π-периодичны и координату φ можно считать принадлежащей цилиндру $\mathbb{C} \bmod 2\pi$.

Ж. Формальная нормальная форма.

Определение. Пара чисел (λ, ω) называется *резонансной*, если $\lambda^n = e^{ik\omega}$ при некоторых целых n и k, не равных вместе нулю.

Теорема. *Резонансные пары образуют всюду плотное множество в пространстве всех пар комплексных чисел.*

Доказательство.

Это следует из всюду плотности множества точек вида $i\left(\frac{k}{n}\omega + \frac{m}{n}2\pi\right)$ (k и m целые, n натуральные) на комплексной прямой. ■

Теорема. *Пара (λ, ω) резонансная если и только если соответствующее склейке $(r, \varphi) \sim (r, \varphi+2\pi) \sim (\lambda r, \varphi+\omega)$ расслоение тривиально над некоторым циклическим n-листным накрытием исходной эллиптической кривой.*

Доказательство.

Если $\lambda^n = e^{ik\varphi}$, то $(r, \varphi) \sim (e^{ik\omega}r, \varphi + n\omega)$ и, следовательно, расслоение над $\mathbb{C}/2\pi\mathbb{Z} + n\omega\mathbb{Z}$ тривиально (см. пункт В). Обратное доказывается аналогично. ■

Определение. *Формальной склейкой* называется «отображение»

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rA(r, \varphi) \\ \varphi + \omega + rB(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где A и B — формальные степенные ряды по r с аналитическими на вещественной оси φ 2π-периодическими по φ коэффициентами, $A(0, \varphi) \neq 0$.

Формальной заменой переменных называется «отображение»

$$g\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rC(r, \varphi) \\ \varphi + rD(r, \varphi) \end{pmatrix},$$

где C и D — формальные степенные ряды по r с аналитическими в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \operatorname{Im}\omega$ комплексной оси φ 2π-периодическими по φ коэффициентами, $C(0, \varphi) \neq 0$.

Формальная замена переменных g действует на формальную склейку f по формуле $f \longmapsto g \circ f \circ g^{-1}$ (правая часть определяется естественной подстановкой степенных рядов и сама является формальной склейкой).

Теорема. *Если пара (λ, ω) нерезонансная, то всякая формальная склейка*

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r\lambda(1 + ra(r, \varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{pmatrix}$$

формальной заменой переменных приводится к линейной нормальной форме

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda r \\ \varphi + \omega \end{pmatrix}.$$

Доказательство.

Будем последовательно уничтожать члены степени $1, 2, \ldots$ по r в ra и rb. Для этого нам потребуется, как обычно, решать линейное гомологическое уравнение. Выпишем уравнение для нормализации членов степени n.

Лемма. *Рассмотрим уравнение относительно u*

$$\lambda^n u(\varphi + \omega) - u(\varphi) = v(\varphi),$$

где v — 2π-периодическая функция, аналитическая в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta$. Если $\tau = \operatorname{Im}\omega > 0$, $\lambda \neq 0$ и $\lambda^n \neq e^{ik\omega}$ при целых k, то уравнение имеет 2π-периодическое решение u, аналитическое в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta + \tau$.

Доказательство.

Пусть

$$u(\varphi) = \sum u_k e^{ik\varphi}, \qquad v(\varphi) = \sum v_k e^{ik\varphi}.$$

Тогда $u_k = \dfrac{v_k}{\lambda^n e^{ik\omega} - 1}$.

При $k \to +\infty$ $|v_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$, а $e^{ik\omega}$ стремится к нулю. Поэтому $|u_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{k(\alpha-\varepsilon)}$.

При $k \to -\infty$ $|v_k|$ оценивается сверху величиной порядка $e^{-|k|(\beta+\varepsilon)}$, а $|e^{ik\omega}|$ растет как $e^{|k|\tau}$ ($\tau = \operatorname{Im}\omega > 0$). Следовательно, $|u_k|$ оценивается сверху величиной $e^{-|k|(\beta+\tau+\varepsilon)}$. Отсюда вытекает сходимость ряда Фурье для u в окрестности полосы $\alpha \leqslant \operatorname{Im}\varphi \leqslant \beta + \tau$. ■

Пусть $ra = r^n a_n(\varphi) + \ldots$, $rb = r^n b_n(\varphi) + \ldots$, где точки означают члены порядка выше n.

Сделаем формальную замену переменных, в которой $C(r,\varphi)=1+r^nC_n(\varphi)$, $rD(r,\varphi)=r^nD_n(\varphi)$. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что коэффициенты при r^n в ra и в rb после замены имеют вид

$$\widetilde{a}_n(\varphi)=a_n(\varphi)+\lambda^nC_n(\varphi+\omega)-C_n(\varphi),$$
$$\widetilde{b}_n(\varphi)=b_n(\varphi)+\lambda^nD_n(\varphi+\omega)-D_n(\varphi).$$

Найдем C_n и D_n из уравнений $\widetilde{a}_n=0$, $\widetilde{b}_n=0$. По лемме эти уравнения имеют аналитические в полосе $0\leqslant\operatorname{Im}\varphi\leqslant\tau$ решения. Мы построили формальную замену, после которой степень членов низшего порядка в ra, rb увеличивается. Повторяя это построение при $n=1,2,\ldots$, получаем формальную замену переменных, после которой ra и rb исчезают полностью. ■

3. Аналитическая нормальная форма.

Определение. Пара комплексных чисел (λ,ω), где $\operatorname{Im}\omega\neq0$, $\lambda\neq0$, называется *нормальной*, если существуют постоянные $C>0$, $\nu>0$, такие, что

$$|\lambda^ne^{ik\omega}-1|>C(|n|+|k|)^{-\nu}$$

для всех целых k и n $(n\neq0)$.

Легко доказывается

Теорема. *Ненормальные пары образуют всюду плотное множество лебеговой меры* 0 *при каждом фиксированном* ω.

Теорема. *Если* (λ,ω) *— нормальная пара, то всякая голоморфная склейка*

$$\begin{pmatrix}r\\ \varphi\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}r\lambda(1+ra(r,\varphi))\\ \varphi+\omega+rb(r,\varphi)\end{pmatrix}$$

приводится к линейной нормальной форме $(r,\varphi)\longmapsto(r\lambda,\varphi+\omega)$ *голоморфной заменой переменных.*

Доказательство аналогично приведенному в § 28 доказательству теоремы Зигеля. ■

Переведем эту теорему на язык вложений эллиптических кривых.

Определение. Голоморфное векторное расслоение ξ называется *жестким*, если для всякого вложения его базы в комплексное многообразие, такого, что нормальное расслоение есть ξ, достаточно малая окрестность базы, вложенной в многообразие, биголоморфно отображается на окрестность нулевого сечения расслоения ξ.

В этих терминах наша теорема формулируется так.

Следствие. *Почти все (в смысле меры Лебега) одномерные векторные расслоения степени* 0 *над эллиптической кривой жесткие.*

Замечание. Для некоторых нерезонансных расслоений, в которых пары (λ, ω) ненормальные, формальные ряды, приводящие склейку к нормальной форме, могут расходиться. Такие ненормальные пары (λ, ω) образуют всюду плотное множество меры нуль. Этот вопрос обсуждается подробнее в § 36.

И. Отрицательные окрестности.

Рассмотрим случай, когда индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности отличен от нуля. Если этот индекс отрицателен, то кривая недеформируема в классе голоморфных кривых. Действительно, в противном случае продеформированная кривая пересекалась бы с исходной с положительным индексом пересечения (так как обе кривые комплексные).

Таким образом, кривая с отрицательным индексом самопересечения лежит на поверхности изолированно. Такая кривая называется *исключительной кривой*, а ее окрестность — *отрицательной окрестностью.*

Теорема (Грауерта). *Нормальное расслоение исключительной кривой всегда жесткое, т. е., окрестность кривой с отрицательным индексом самопересечения на комплексной поверхности определяется (с точностью до голоморфной эквивалентности) нормальным расслоением этой кривой.*

Наметим здесь простое доказательство этой теоремы для случая эллиптической кривой.

Доказательство.

Мы начинаем с предварительной нормальной формы склейки

$$f\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\lambda e^{ip\varphi}(1 + ra(r, \varphi)) \\ \varphi + \omega + rb(r, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Предположим, что члены степени меньше n по r в ra и в rb уже убиты, т. е. что $ra = r^n a_n(\varphi) + \ldots$, $rb = r^n b_n(\varphi) + \ldots$. Делаем формальную замену переменных $g(r, \varphi) = (r(1 + r^n C_n(\varphi)), \varphi + r^n D_n(\varphi))$. Коэффициенты при r^n в ra и в rb после замены (т. е. для склейки $g \circ f \circ g^{-1}$) имеют вид

$$\widetilde{a}_n(\varphi) = a_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} C_n(\varphi + \omega) - C_n(\varphi) - ipD_n(\varphi),$$
$$\widetilde{b}_n(\varphi) = b_n(\varphi) + \lambda^n e^{ipn\varphi} D_n(\varphi + \omega) - D_n(\varphi).$$

Обратим $\widetilde{b}_n$ и $\widetilde{a}_n$ в нуль. С этой целью мы сперва находим D_n из второго уравнения, а затем C_n из первого. В обоих случаях приходится решать гомологическое уравнение вида

$$\lambda^n e^{ipn\varphi} u(\varphi + \omega) - u(\varphi) = v(\varphi)$$

относительно неизвестной 2π-периодической функции u с известной 2π-периодической функцией v.

К. Исследование гомологического уравнения.

Рассмотрим разложения неизвестной и известной функций в ряды Фурье

$$u = \sum u_k e^{ik\varphi}, \qquad v = \sum v_k e^{ik\varphi}.$$

Для коэффициентов Фурье получаются уравнения

$$\lambda^n e^{i(k-pn)\omega} u_{k-pn} - u_k = v_k.$$

Эти уравнения позволяют в принципе последовательно вычислить все неизвестные коэффициенты u_k по первым pn из них. Однако получаемые формальные ряды Фурье не всегда сходятся. Оказывается, отрицательность индекса самопересечения исходной эллиптической кривой на поверхности (т. е. положительность числа p) гарантирует сходимость.

Действительно, рассмотрим вначале однородное уравнение, т. е. будем считать, что все v_k равны нулю.

Наше уравнение связывает между собой значения u_k с k на арифметической прогрессии с шагом pn. Вычислим все значения u_k с k из этой прогрессии через одно из них. Нам придется последовательно умножать числа вида $\lambda^n e^{i(k-pn)\omega}$, где k принадлежит нашей прогрессии. Логарифмы этих чисел образуют арифметическую прогрессию с разностью $ipn\omega$. Следовательно, суммы логарифмов образуют последовательность вида

$$\alpha s^2 + \beta s + \gamma,$$

где s — номер члена последовательности, $2\alpha = ipn\omega$.

Если $p > 0$, $\operatorname{Im}\omega > 0$, то $\operatorname{Re}\alpha < 0$. В этом случае последовательность $|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ быстро стремится к нулю при $s \to +\infty$ и при $s \to -\infty$. Отсюда следует, что однородное гомологическое уравнение при $p > 0$ имеет pn линейно независимых решений, быстро убывающих при $|k| \to \infty$.

Будем теперь решать неоднородное уравнение. Вначале предположим, что отличен от 0 только один из коэффициентов Фурье известной функции, v_m. Левее m мы положим $u_k = 0$, а при $k \geqslant m$ определим u_k из уравнения. Таким образом, правее m u_k будет совпадать с одним из решений однородного уравнения и, следовательно, будет убывать как $|e^{\alpha s^2}|$.

Решение однородного уравнения в общем случае строится как линейная комбинация построенных решений с коэффициентами v_k. Сходимость обеспечивается условием $\operatorname{Re}\alpha < 0$, т. е. отрицательностью индекса самопересечения исходной эллиптической кривой на поверхности.

Проводя подробно намеченные здесь оценки, мы убеждаемся в разрешимости гомологического уравнения для случая отрицательного индекса самопересечения (т. е. для случая положительных p). Тем самым доказывается формальная жесткость отрицательного нормального, расслоения эллиптической кривой на поверхности. Более внимательный анализ нашего построения доказывает и аналитическую жесткость (т. е. теорему Грауерта): доказательство сходимости здесь настолько же проще, чем в случае $p = 0$, исследованном в пп. Ж, З, насколько теорема Пуанкаре проще теоремы Зигеля (§ 28). ■

Л. Положительные окрестности.

Предположим, что индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности положителен. В этом случае гомологическое уравнение, изученное в предыдущем пункте, вообще говоря, неразрешимо, так как $|e^{\alpha s^2+\beta s+\gamma}|$ растет при $|s| \to \infty$. Это значит, что окрестность эллиптической кривой с положительным индексом самопересечения на общей комплексной поверхности не только не отображается биголоморфно на окрестность этой кривой в нормальном расслоении, но такое отображение невозможно уже на уровне 2-струй (т. е. с пренебрежением членами 3-го порядка по отношению к расстоянию от кривой). Окрестность эллиптической кривой с положительным индексом самопересечения называется *положительной*.

Положительная окрестность эллиптической кривой, согласно сказанному выше, должна иметь модули, и более того, функциональные модули: «нормальная форма» окрестности должна содержать произвольные функции (и даже, по-видимому, функции двух переменных или ростки функций двух переменных в нескольких точках).

В то время как кривая с отрицательным индексом самопересечения лежит на поверхности изолировано, эллиптическую кривую с положительным индексом самопересечения всегда можно деформировать.

Теорема (частный случай теоремы Римана–Роха). *Если индекс самопересечения эллиптической кривой на поверхности равен p, то нормальное расслоение имеет p линейно независимых сечений.*

Доказательство.

Вопрос сводится к однородному гомологическому уравнению вида

$$u(\varphi + \omega) = \lambda e^{ip\varphi} u(\varphi),$$

имеющему, как мы видели в пункте К, p линейно независимых решений. ■

Переходя к членам высшего порядка относительно расстоянию до эллиптической кривой, можно убедиться, что существует p-параметрическая деформация кривой в ее окрестности.

Отсюда следует, между прочим, что окрестность эллиптической кривой на поверхности, где кривая имеет положительный индекс самопересечения, как правило, не допускает структуры расслоения над этой кривой. Действительно, комплексная структура эллиптической кривой при деформации, вообще говоря, меняется. Поэтому среди близких продеформированных кривых будут встречаться, в общем случае, кривые, не допускающие биголоморфного отображения на исходную кривую.

При изучении прохождения дифференциальных уравнений через резонанс встречаются лишь окрестности эллиптических кривых на таких поверхностях, где они имеют индекс самопересечения нуль.

M. Эллиптическая кривая в пространстве.

Многое из того, что сказано выше об окрестности эллиптической кривой на поверхности, переносится на случай эллиптической кривой в многомерном пространстве. Для этого в приведенных выше формулах следует считать переменную r многомерной.

Векторные расслоения произвольной размерности над эллиптической кривой описываются склейками $(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\Lambda(\varphi)r, \varphi + \omega)$, где $\Lambda(\varphi)$ — линейный оператор в жордановой нормальной форме с собственными числами вида $\lambda e^{ip\varphi}$.

Расслоение называется *отрицательным* (*неположительным, нулевым*), если все числа p положительные (неотрицательные, нулевые).

Предположим, что нормальное расслоение эллиптической кривой отрицательно. Тогда окрестность кривой в многообразии биголоморфно отображается на ее окрестность в нормальном расслоении (теорема Грауерта), т. е. нормальное расслоение жестко. В классе нулевых нормальных расслоений жесткость нарушается лишь с вероятностью ноль. Условие резонанса имеет вид $\lambda_s = \lambda^n e^{ik\omega}$, где k целое число, $\lambda^n = \lambda_1^{n_1} \dots \lambda_m^{n_m}$, $m = \dim\{r\}$, $n_j \geqslant 0$, $\sum n_j \geqslant 2$.

Нерезонансное расслоение формально-жесткое. Для настоящей голоморфной жесткости достаточно обычного неравенства (C, ν)-нормальности:

$$|\lambda^n e^{ik\omega} - \lambda_s| \geqslant C(|n| + |k|)^{-\nu}, \qquad |n| = n_1 + \ldots + n_m,$$

для всех $n \geqslant 0$, $\sum n_i \geqslant 2$ и целых k. Мера множества векторов λ, которые ни при каких $(C, \nu) > 0$ не (C, ν)-нормальны, равна нулю.

Жесткость с вероятностью 1 имеет (по-видимому) место также и для неположительных расслоений.

Вопрос о строении окрестностей кривых рода больше единицы изучен весьма мало, исключая случай, когда нормальное расслоение отрицательно и, следовательно, жесткое по теореме Грауерта.

§ 28. Доказательство теоремы Зигеля

В этом параграфе доказывается теорема о голоморфной локальной эквивалентности отображения и его линейной части в неподвижной точке.

А. Формулировка теоремы.

Определение. Набор $(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ имеет *мультипликативный тип* (C, ν), если

$$|\lambda_s - \lambda^k| \geqslant C|k|^{-\nu} \quad (|k| = k_1 + \ldots + k_n,\ \lambda^k = \lambda_1^{k_1} \ldots \lambda_n^{k_n})$$

для любого s и для любого целочисленного вектора k с неотрицательными компонентами по модулю большего единицы ($C > 0$, $\nu > 0$).

Теорема. *Предположим, что набор собственных чисел линейной части голоморфного отображения в окрестности неподвижной точки O в $\mathbb{C}^n$ имеет мультипликативный тип (C, ν). Тогда в некоторой окрестности точки O отображение биголоморфно эквивалентно своей линейной части.*

Пусть A — заданное в окрестности точки $O \in \mathbb{C}^n$ биголоморфное отображение, оставляющее O на месте, и пусть линейный оператор Λ — линейная часть A в O. Утверждается, что существует оставляющий O на месте биголоморфный в окрестности точки O диффеоморфизм H, такой, что $H \circ A \circ H^{-1} = \Lambda$ в некоторой окрестности точки O.

Мы будем доказывать эту теорему в случае, когда все собственные числа λ_s оператора Λ различны. В этом случае можно выбрать систему координат так, чтобы матрица оператора Λ была диагональной. Зафиксируем такую систему координат.

Б. Построение замены координат H.

Запишем данное отображение A и замену H в виде

$$A(z) = \Lambda z + a(z), \qquad H(z) = z + h(z),$$

где ряды Тейлора a и h в нуле не содержат членов степени 0 и 1. Запишем отображение $H \circ A \circ H^{-1}$, вычисляя члены нулевой и первой степеней относительно h и a. Мы получаем

$$(H \circ A \circ H^{-1})(z) = \Lambda z + [a(z) - \Lambda h(z) + h(\Lambda z)] + R([a], [h])(z),$$

где остаточный член R имеет относительно a и h второй порядок малости в смысле, который будет точно определен далее. Мы заключили аргументы у R в квадратные скобки, чтобы подчеркнуть, что этот оператор действует на функции, а не на их значения в точке z.