

Рассмотрим гомологическое уравнение относительно  $h$

$$\Lambda h(z) - h(\Lambda z) = a(z).$$

Здесь ряды Тейлора известной вектор-функции  $a$  и неизвестной  $h$  не имеют свободных и линейных членов. В классе таких рядов уравнение однозначно разрешимо, так как набор собственных чисел нерезонансный.

Мы докажем в п. В, что полученные ряды сходятся, если набор собственных чисел имеет мультипликативный тип  $(C, \nu)$  при каких-нибудь положительных  $C$  и  $\nu$ . Обозначим через  $U$  оператор, переводящий правую часть  $a$  гомологического уравнения в его решение  $h = U([a])$ .

Определим по индукции функции  $a_s$ ,  $h_s$  формулами

$$h_s = U([a_s]), \quad a_{s+1} = R([a_s], [h_s]),$$

начиная с  $a_0 = a$ .

Построим отображения  $H_0, H_1, \dots$ , определенные формулами

$$H_s(z) = z + h_s(z).$$

Искомая замена координат дается, как мы докажем, формулой

$$H = \lim_{s \rightarrow \infty} H_s \circ \dots \circ H_1 \circ H_0.$$

## В. Исследование гомологического уравнения.

Мы предполагаем, что ряды Тейлора правой части и решения гомологического уравнения

$$\Lambda h(z) - h(\Lambda z) = a(z)$$

не имеют свободных и линейных членов. Через  $|z|$  мы будем обозначать  $\max |z_j|$ .

**Лемма 1.** Пусть набор собственных чисел диагонального линейного оператора  $\Lambda$  имеет мультипликативный тип  $(C, \nu)$ . Предположим, что правая часть  $a$  гомологического уравнения непрерывна в полицилиндре  $|z_j| \leq r$  и голоморфна внутри этого полицилиндра.

Тогда гомологическое уравнение имеет решение  $h$ , голоморфное внутри полицилиндра, причем для любого  $\delta$ , такого, что  $0 < \delta < \frac{1}{2}$ , выполняется неравенство

$$\max_{|z| \leq re^{-\delta}} |h(z)| \leq \max_{|z| \leq r} \frac{|a(z)|}{\delta^\alpha},$$

где положительная постоянная  $\alpha = \alpha(\Lambda)$  не зависит ни от  $\delta$ , ни от  $a$ , ни от  $r$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Разложим  $a$  и  $h$  в ряды Тейлора и обозначим коэффициенты при  $z^k e_s$  через  $a_k^s$  и  $h_k^s$  соответственно. Тогда  $h_k^s = a_k^s / (\lambda_s - \lambda^k)$ . Оценим числители при помощи неравенств Коши для коэффициентов Тейлора, а знаменатели — исходя из того, что  $\{\lambda_s\}$  типа  $(C, \nu)$ .

Обозначим  $\max_{|z| \leq r} |a(z)|$  через  $M$ . Согласно неравенству Коши,  $|a_k^s| \leq \frac{M}{r^{|k|}}$ .

Следовательно,  $|h_k^s| \leq M C^{-1} \frac{|k|^\nu}{r^{|k|}}$ .

Оценим сумму Тейлора  $\sum h_k^s z^k$ . Рассмотрим члены степени  $|k| = p$ . Их число не превосходит  $c_1(n)p^{n-1}$ , поэтому  $|\sum_{|k|=p} h_k^s z^k| \leq M c_2 p^m \left| \left( \frac{z}{r} \right)^k \right|$ ,

где  $c_2 = \frac{c_1}{C}$  и  $m = \nu + n - 1$ .

Функция  $x^m e^{-x}$  имеет максимум  $\left(\frac{m}{e}\right)^m$ , поэтому  $p^m e^{-\frac{\delta p}{2}} \leq c_3 \delta^{-m}$ , где  $c_3 = \left(\frac{2m}{e}\right)^m$ . Следовательно, при  $|z| \leq r e^{-\delta}$  имеем  $|h| \leq M c_3 \delta^{-m} \sum_{p=2}^{\infty} e^{-\frac{p\delta}{2}} = \frac{M c_3 \delta^{-m}}{e^{\delta} - e^{\delta/2}}$ ,  $|h| \leq M c_4 \delta^{-(m+1)}$ , где  $c_4 = 4 c_2 c_3$  не зависит от  $a, r, \delta$ . ■

В дальнейшем нам потребуется кроме оценки функции  $h$  еще оценка функции  $h \circ \Lambda$ , определяемой условием  $(h \circ \Lambda)(z) = h(\Lambda z)$ .

**Лемма 2.** В условиях леммы 1

$$\max_{|z| \leq r e^{-\delta}} |h(\Lambda z)| \leq \max_{|z| \leq r} \frac{|a(z)|}{\delta^{\alpha_0}},$$

где положительная постоянная  $\alpha_0 = \alpha_0(\Lambda)$  не зависит от  $\delta, a, r$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Начнем со следующего замечания.

Пусть  $\{\lambda\}$  имеет мультипликативный тип  $(C, \nu)$ . Тогда существует такая не зависящая от  $k$  постоянная  $C_0$ , что

$$|\lambda_s - \lambda^k| \geq C_0 |k|^{-\nu} |\lambda^k|$$

для всех  $s = 1, \dots, n$  и для всех целочисленных векторов  $k$  с неотрицательными компонентами, сумма которых  $|k|$  не меньше 2.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Обозначим  $\max |\lambda_s|$  через  $\mu$ . При  $|\lambda^k| \leq 2\mu$  можно взять  $C_0 = \frac{C}{2\mu}$ .

При  $|\lambda^k| > 2\mu$  можно взять  $C_0 = \frac{1}{2}$ . ■

Оценивая ряд Тейлора, получаем на основании доказанного предложения

$$|h(\Lambda z)| \leqslant \sum MC_0^{-1} |k|^{\nu} |\lambda^k|^{-1} \left| \frac{\lambda^k z^k}{r^k} \right|.$$

Дальнейшие оценки — как в доказательстве леммы 1. ■

### Г. Порядок операторов.

Для проведения дальнейших оценок удобно ввести следующие обозначения. Пусть  $f$  — функция, непрерывная в полицилиндре  $|z| \leqslant r$ , голоморфная во внутренних точках и обращающаяся в нуль в центре полицилиндра.

Мы введем для таких функций норму

$$\|f\|_r = \sup_{0 < |z| \leqslant r} \frac{|f(z)|}{|z|}.$$

**ПРИМЕР.** Функция  $f(z) = \varepsilon z$  имеет норму  $|\varepsilon|$  независимо от радиуса полицилиндра.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Удобство введенной нормы состоит в ее инвариантности относительно изменений масштаба: для всякого коэффициента растяжения  $\varkappa$

$$\|\varkappa f \circ \varkappa^{-1}\|_{\varkappa r} = \|f\|_r.$$

Значения функции  $f$  могут быть не числами, а элементами нормированного пространства, например, векторами, матрицами и т. д.

Пусть  $\Phi$  — оператор, действующий на функции описанного выше класса<sup>1</sup>. Пусть  $d, \alpha, \beta$  — положительные числа, и пусть  $0 < r < 1$ .

**Определение.** Оператор  $\Phi$  имеет порядок  $(d; \alpha | \beta)$ , если для любого  $\delta$  из интервала  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  и для любого  $r$  из  $(0, 1)$

$$\|\Phi([f])\|_{re^{-\delta}} \leqslant \|f\|_r^d \delta^{-\alpha},$$

как только  $\|f\|_r \leqslant \delta^\beta$ .

Мы будем записывать это соотношение в виде  $\Phi([f]) \prec f^d(\alpha | \beta)$ , или, короче,  $\Phi([f]) \prec f^d$ .

Оператор имеет порядок  $d$ , если существуют постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что он имеет порядок  $(d; \alpha | \beta)$  (существенно, что  $\alpha$  и  $\beta$  не зависят от  $f$ , от  $r \in (0, 1)$  и от  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ ).

<sup>1</sup>Мы будем обозначать одной буквой операторы, действующие на функции из классов с разными  $r$ , при условии, что они совпадают как операторы на пространстве ростков функций, подобно тому, как в обычном анализе не меняют обозначения синуса, меняя область определения.

**ПРИМЕР 1.** Рассмотрим оператор, переводящий правую часть  $a$  гомологического уравнения в его решение  $h$ . Этот оператор имеет порядок 1, если  $\{\lambda s\}$  типа  $(C, \nu)$ . Действительно, нужное неравенство доставляется леммой 1.

Точно так же из леммы 2 следует, что оператор, переводящий правую часть  $a$  гомологического уравнения в функцию  $h \circ \Lambda$ , имеет порядок 1:  $h \prec a$ ,  $h \circ \Lambda \prec a$ .

**ПРИМЕР 2.** Рассмотрим локальный диффеоморфизм  $H$ ,  $H(z) = z + h(z)$ . Обратный диффеоморфизм запишем в виде  $H^{-1}(z) = z - g(z)$ .

Рассмотрим оператор  $G$ , переводящий  $h$  в  $g$ .

Оператор  $G$  имеет порядок 1, т. е.  $g \prec h$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Заметим прежде всего, что из оценки Коши вытекает следующее неравенство: при  $|z| \leq re^{-\delta/2}$

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial z_j} \right| \leq \frac{\|h\|_r}{1 - e^{-\delta/2}}. \quad (1)$$

Если  $\|h\|_r \leq \delta^\beta$  и  $\beta$  достаточно велико, то правая часть последнего неравенства сколь угодно мала. Теперь  $g$  строится как предел итераций:

$$g_{s+1}(z) = h(z - g_s(z)), \quad g_0 = 0.$$

Сходимость при  $|z| \leq re^{-\delta}$  и оценка  $g \prec h$  легко следуют теперь из теорем о сжатых отображениях. ■

**ПРИМЕР 3.** В обозначениях примера 2

$$h - g \prec h^2.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Действительно, по определению функции  $g$ ,

$$h(z) - g(z) = h(z) - h(z - g(z)).$$

Пользуясь неравенством (1) и полученной выше оценкой

$$\|g\|_{re^{-\delta}} \leq \|h\|_r \delta^{-\alpha},$$

получаем при  $|z| \leq re^{-\delta}$

$$|h(z) - g(z)| \leq C \|h\|_r (1 - e^{-\delta/2})^{-1} r \|h\|_r \delta^{-\alpha}. \quad ■$$

Заметим, что в наших обозначениях  $2f \prec f$ ,  $f^2 \prec f$ ; если  $f_1 \prec f_2$  и  $f_2 \prec f_3$ , то  $f_1 \prec f_3$ .

Распространим введенные выше обозначения на операторы от нескольких функций. Пусть оператор  $\Xi$  переводит пару функций  $\eta, \zeta$  в функцию  $\xi$ . Пусть  $\varphi$  — многочлен. Мы будем писать

$$\xi \prec \varphi(\eta, \zeta),$$

если существуют такие положительные постоянные  $(\alpha; \beta_1, \beta_2)$ , что для любого  $\delta$  из интервала  $\left(0, \frac{1}{2}\right)$  и для любого  $r$  из  $(0, 1)$  выполняется неравенство

$$\|\Xi([\eta], [\zeta])\|_{re^{-\delta}} \leq \varphi(\|\eta\|_r, \|\zeta\|_r) \delta^{-\alpha},$$

как только  $\|\eta\|_r \leq \delta^{\beta_1}$ ,  $\|\zeta\|_r \leq \delta^{\beta_2}$ . Здесь постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  не должны зависеть от  $\eta, \zeta$ , от  $r \in (0, 1)$  и  $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ . Если  $\eta \prec \psi(\sigma, \tau)$ , то  $\xi \prec \bar{\psi}(\psi(\sigma, \tau), \zeta)$ .

**ПРИМЕР 4.** Определим оператор  $\Xi$  формулой

$$\xi(z) = \eta(z - \zeta(z)) - \eta(z).$$

Тогда  $\xi \prec \eta\zeta$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Доказывается с помощью того же неравенства (1), которое мы использовали в примерах 2 и 3 выше. ■

#### Д. Оценка остаточного члена.

Выпишем явно остаточный член  $R$ , определенный в п. Б. Мы будем пользоваться обозначениями

$$H(z) = z + h(z), \quad H^{-1}(z) = z - g(z).$$

По определению

$$R(z) = (H \circ A \circ H^{-1})(z) - \Lambda z - [a(z) - \Lambda h(z) + h(\Lambda z)].$$

Представим  $R$  в виде  $R = R_1 + R_2 + R_3$ , где

$$R_1(z) = \Lambda(h(z) - g(z)), \quad R_2(z) = a(z - g(z)) - a(z).$$

$$R_3(z) = h(\Lambda z - \Lambda g(z) + a(z - g(z))) - h(\Lambda z).$$

Для удобства дальнейших оценок представим  $R$  в виде оператора от трех аргументов  $a, h$  и  $u = h \circ \Lambda$ .

Введем операторы

$$G, G([h]) = g, \quad \Xi, \Xi([a], [g])(z) = a(z - g(z)) - a(z).$$

В этих обозначениях

$$\begin{aligned} R_1([h]) &= \Lambda(h - G([h])), \\ R_2([a], [h]) &= \Xi([a], G([h])), \\ R_3([u], [a], [h]) &= \Xi([u], [v]), \end{aligned}$$

где  $v(z) = g(z) - \Lambda^{-1}a(z - g(z))$ .

При подстановке  $u = h \circ A$  оператор  $R_1 + R_2 + R_3$  превращается в интересующий нас остаточный член  $R([a], [h])$ . Пусть  $h \prec \text{id}$  ( $\text{id}$  = тождество; условие означает, что производная  $h$  мала).

**ОЦЕНКА 1.** Имеют место оценки

$$R_1([h]) \prec h^2, \quad R_2([a], [h]) \prec ah, \quad R_3([u], [a], [h]) \prec u(h + a).$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Оценка  $R_1 \prec h^2$  доказана в примере 3 п. Г, неравенство  $\Xi([a], [g]) \prec ag$  — в примере 4. Согласно примеру 2,  $G([R]) \prec h$ , поэтому  $R_2([a], [h]) \prec ah$ .

Для введенной выше величины  $v$  из уже полученных оценок  $g \prec h$  получаем  $v \prec h + a$ . Следовательно, согласно оценке оператора  $\Xi$  из примера 4, получаем  $R_3 \prec u(h + a)$ . ■

**ОЦЕНКА 2.** Пусть  $U$  — оператор, решающий гомологическое уравнение. Тогда оператор  $\Phi$ , заданный формулой  $\Phi([a]) = R([a], U([a]))$ , имеет порядок 2.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

По леммам 1, 2 и 3 п. В имеем  $h \prec a$ ,  $h \circ \Lambda \prec a$ , где  $h = U([a])$ .

Сопоставляя это с оценкой 1, получаем

$$\begin{aligned} R_1(U([a])) &\prec a^2, \quad R_2([a], U([a])) \prec a^2, \\ R_3(U([a]) \circ \Lambda, [a], U([a])) &\prec a^2. \end{aligned}$$

### Е. Сходимость приближений.

Окончание доказательства теоремы Зигеля в точности такое же, как оценки § 12.

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Мы выбираем последовательности чисел

$$\begin{aligned} \delta_0, \quad \delta_1 = \delta_0^{3/2}, \quad \delta_2 = \delta_1^{3/2}, \dots \\ M_0 = \delta_0^N, \quad M_1 = M_0^{3/2}, \dots, \quad M_s = M_{s-1}^{3/2} = \delta_s^N, \dots; \\ r_0, \quad r_1 = e^{-\delta_0} r_0, \quad r_2 = e^{-\delta_1} r_1, \dots \end{aligned}$$

Эти последовательности определяются выбором  $\delta_0$ ,  $N$  и  $r_0$ .

Число  $\delta_0$  выбирается столь малым, чтобы все  $r_s$  были больше  $\frac{r_0}{2}$ . Опишем выбор числа  $N$ .

Согласно оценке 2, существуют постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$\|R([a], U([a]))\|_{re-\delta} \leq \|a\|_r^2 \delta^{-\alpha},$$

как только  $\|a\|_r \leq \delta^\beta$ .

Определим  $a_{s+1} = R([a_s], U([a_s]))$ . Предположим, что  $\|a_s\|_{r_s} \leq M_s = \delta_s^N$ . Тогда при  $N > \beta$  применимо предыдущее неравенство с  $\delta = \delta_s$ , и мы получаем

$$\|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} \leq M_s^2 \delta^{-\alpha} = \delta_s^{2N-\alpha}.$$

Если  $N > 2\alpha$ , то правая часть не превосходит  $M_{s+1} = \delta_s^{3N/2}$ . Поэтому мы фиксируем  $N > (\beta, 2\alpha)$ . Тогда, если  $\|a_0\|_{r_0} \leq M_0 = \delta_0^N$ , то при всех  $s$  будем  $\|a_s\|_{r_s} \leq M_s = \delta_s^N$ .

Наконец, выбираем  $r_0$ . По условию, начальная функция  $a_0 = a$  имеет в начале координат нуль не менее второго порядка. Следовательно, в некоторой окрестности точки  $z = 0$

$$|a(z)| \leq K|z|^2.$$

Отсюда вытекает, что

$$\|a_0\|_{r_0} \leq Kr_0.$$

Значит, при достаточно малом  $r_0$  условие  $\|a_0\|_{r_0} \leq \delta_0^N$  выполнено. Зафиксируем такое  $r_0$ . Теперь все числа  $\delta_s$ ,  $M_s$ ,  $r_s$  определены. При всех  $s$  выполнены неравенства  $\|a_s\|_{r_s} \leq M_s$ . Из них следуют оценки для  $h_s$ . Поэтому произведения  $H_s \circ \dots \circ H_1$  определены при  $|z| \leq \frac{r_0}{2}$  и при  $s \rightarrow \infty$  сходятся к пределу  $H$ .

Нетрудно проверить, что для предельного диффеоморфизма  $H \circ A \circ H^{-1} = \Lambda$ . ■

---

## ГЛАВА 6

# Локальная теория бифуркаций

Слово бифуркация означает раздвоение и употребляется в широком смысле для обозначения всякой качественной, топологической перестройки картины при изменении параметров, от которых зависит изучаемый объект. Объекты могут быть самые разнообразные: например, вещественные или комплексные кривые или поверхности, функции или отображения, многообразия или расслоения, векторные поля или уравнения, дифференциальные или интегральные.

Если объект зависит от параметров, то говорят, что задано семейство. Если мы интересуемся семейством локально, при малом изменении параметров в окрестности фиксированных значений, то говорят о деформации объекта, соответствующего этим значениям параметров.

Оказывается, во многих случаях изучение всевозможных деформаций сводится к исследованию одной единственной, из которой получаются все остальные. Такая деформация, в некотором смысле самая богатая, должна давать все возможные бифуркации данного объекта; она называется версальной деформацией.

В настоящей главе рассматриваются главным образом бифуркации и версальные деформации фазовых портретов динамических систем в окрестности положений равновесия и замкнутых траекторий.

### § 29. Семейства и деформации

В этом параграфе обсуждаются общие «эвристические» соображения, на которых основана теория бифуркаций. Эти общие соображения принадлежат в основном А. Пуанкаре.

#### **A. Случаи общего положения и особые случаи малой ко- размерности.**

При исследовании всякого рода аналитических объектов (например, дифференциальных уравнений, или краевых задач, или задач оптимизации) обычно можно выделить случаи общего положения. Например, из особых точек векторного поля на плоскости точками общего

положения являются узлы, фокусы и седла, в то время как, скажем, центры разрушаются сколь угодно малым шевелением поля.

Изучение случаев общего положения является всегда первоочередной задачей при анализе явлений и процессов, описываемых данной математической моделью. Действительно, сколь угодно малым изменением модели случай необщего положения превращается в случай общего положения, а параметры модели обычно определяются приближенно.

Однако встречаются ситуации, в которых естественно возникает необходимость исследования случаев необщего положения. А именно, предположим, что мы изучаем не индивидуальный объект (скажем, векторное поле), а целое семейство, объекты которого зависят от некоторого числа параметров.

Чтобы лучше представить себе ситуацию, рассмотрим функциональное пространство, точкой которого являются наши объекты (скажем, пространство всех векторных полей). Случай необщего положения соответствуют некоторым гиперповерхностям коразмерности 1 в этом пространстве. Сколь угодно малым сдвигом точка может быть сдвинута с гиперповерхности в область случаев общего положения. Гиперповерхности особых случаев образуют границы областей случаев общего положения (рис. 105).

Семейство с  $k$  параметрами изображается  $k$ -мерным многообразием в нашем функциональном пространстве. Например, однопараметрическое семейство — это кривая в функциональном пространстве (жирная линия на рисунке).

Кривая в нашем функциональном пространстве может пересекать гиперповерхность особых случаев. Если это пересечение происходит «под ненулевым углом» (трансверсально), то оно сохраняется при малом шевелении семейства: всякая близкая кривая пересекает гиперповерхность особых случаев в некоторой близкой точке (нежирная линия на рисунке).

Таким образом, хотя каждый индивидуальный член семейства может быть приведен в общее положение сколь угодно малым шевелением, нельзя добиться того, чтобы все члены семейства сразу были общего положения: при деформации семейства можно избежать случая необщего положения для каждого фиксированного значения параметра, но при некотором близком значении параметра этот случай необщего положения все равно возникнет.

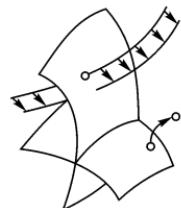


Рис. 105

На гиперповерхностях особых случаев в нашем функциональном пространстве, вообще говоря, есть свои особенности (например, там, где одна из гиперповерхностей пересекает другую, что соответствует одновременному появлению двух вырождений (см. рис. 105)). При исследовании общих однопараметрических семейств этими особенностями гиперповерхностей особых случаев можно пренебречь. Действительно, множество всех этих особенностей имеет в функциональном пространстве коразмерность не менее 2. Поэтому кривую в функциональном пространстве сколь угодно малым шевелением можно снять с этих особенностей, так что она будет пересекать гиперповерхности особых случаев лишь в точках общего положения. Итак, в однопараметрическом семействе общего положения встречаются как неустранимые лишь простейшие вырождения, соответствующие неособым точкам гиперповерхности особых случаев. Эти вырождения называются вырождениями коразмерности 1. Изучение вырождений коразмерности 1 позволяет непрерывно перейти от любой общей точки функционального пространства к любой другой общей точке, так как делят функциональное пространство только множества, коразмерность которых не больше единицы.

Во время перехода мы, вообще говоря, должны пересекать поверхности вырождений коразмерности 1. Изучение особенностей коразмерности 1 позволяет описывать бифуркции, происходящие при пересечениях этих поверхностей.

При исследовании  $k$ -параметрических семейств общего положения неустранимыми будут лишь вырождения, коразмерность которых не превосходит  $k$ . Все прочие вырожденные объекты образуют в функциональном пространстве множество коразмерности больше  $k$ , и от них можно избавиться сколь угодно малой деформацией  $k$ -параметрического семейства.

Чем больше коразмерность вырождения, тем труднее исследовать это вырождение и тем (как правило) меньше пользы от такого исследования. Изучение особенностей большой коразмерности  $k$  разумно проводить лишь в том случае, когда мы интересуемся не индивидуальным объектом, а  $k$ -параметрическим семейством. Но тогда естественным объектом изучения является не индивидуальный объект (скажем, векторное поле со сложной особой точкой), а столь большое семейство, что особенность рассматриваемого типа при малой деформации семейства не исчезает.

Это простое соображение Пуанкаре показывает тщетность столь большого числа исследований в теории дифференциальных уравнений и в других областях анализа, что его всегда несколько опасно упоминать. В сущности, всякое исследование вырожденного случая должно сопровождаться вычислением соответствующей коразмерности и указанием бифуркаций в семействе, для которого рассматриваемое вырождение неустранимо.

С этой точки зрения, основанной на изучении  $k$ -параметрических семейств, можно вовсе пренебречь исследованием вырождений бесконечной коразмерности, так как от них можно избавиться малым шевелением любого  $k$ -параметрического семейства при любом конечном  $k$ . Разумеется, вырожденные случаи могут быть полезны в качестве легко исследуемых первых приближений теории возмущений.

### **Б. Отступление о случаях бесконечной коразмерности.**

Иногда приходится исследовать и вырождения бесконечной коразмерности. Например, гамильтоновы системы или системы с какой-либо группой симметрий образуют подмногообразие коразмерности бесконечность в пространстве всех динамических систем. В таких случаях часто удается заранее сузить функциональное пространство так, чтобы коразмерности изучаемых вырождений стали конечными (например, ограничиться только гамильтоновыми системами и их гамильтоновыми деформациями).

Впрочем, такое сужение функционального пространства не всегда легко сделать. Рассмотрим, например, краевые задачи для уравнений с частными производными. Речь идет о пересечении двух подмногообразий в функциональном пространстве: пространства решений и пространства функций, удовлетворяющих граничным условиям. Оба эти многообразия имеют бесконечную размерность и бесконечную коразмерность. Анализ этой ситуации требует умения различать разные бесконечные размерности и коразмерности: условие обращения в нуль функции одного переменного, построенной по данному объекту, выделяет в функциональном пространстве «многообразие меньшей (бесконечной) коразмерности», чем условие обращения в нуль функции двух переменных.

Одной из простейших задач, где требуется такое исчисление бесконечных коразмерностей, соответственно ядрам и коядрам, состоящим из функций на многообразиях разного числа измерений, является задача с косой производной. В этой задаче на сфере, ограничивающей  $n$ -мерный шар, задано векторное поле, касательное к  $n$ -мерному объемлющему пространству. Требуется определить гармоническую в шаре функцию, производная которой по направлению этого поля равна заданной граничной функции.

Рассмотрим, например, случай  $n = 3$ . В этом случае поле общего положения касается сферы на некоторой гладкой кривой. На этой кривой имеются еще особые точки, где поле касается самой кривой. Строение поля в окрестности каждой из этих особых точек стандартное: можно доказать, что при любом  $n$  для поля общего положения<sup>1</sup> в окрестности каждой точки границы поле задается в надлежащей системе координат одной из формул вида

$$x_2\partial_1 + x_3\partial_2 + \dots + x_k\partial_{k-1} + \partial_k, \quad k \leq n,$$

где  $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$  и на границе  $x_1 = 0$  (см.: *C. M. Вишик. О задаче с косой производной*. Вестник МГУ, сер. «Матем.», 1 (1972), 21–28).

Задача с косой производной должна, по-видимому, ставиться по такой схеме. Многообразия касания поля с границей, многообразия касания поля с многообразиями касания и т. д. делят границу на части разной размерности. На некоторых из этих частей границы следует задавать граничные условия, на других же, напротив, граничная функция сама должна удовлетворять определенным условиям для существования классического решения задачи.

Несмотря на обилие исследований по задаче с косой производной (особенно полно задача исследована в работах В. Г. Мазы, которым предшествовали работы М. Б. Малютова и Ю. В. Егорова с В. А. Кондратьевым), описанная выше программа реализована лишь в двумерном случае (когда граница — окружность).

## **В. Пространства струй.**

Исследование бифуркаций в  $k$ -параметрических семействах общего положения есть в сущности исследование функционального пространства, разбитого на части, соответствующие разным вырождениям, с пре-небрежением вырождениями коразмерности большей, чем  $k$ .

Чтобы избавиться от бесконечномерности самого функционального пространства, разработан специальный аппарат конечномерных аппроксимаций: многообразия  $k$ -струй (термин *jet* введен Эресманом).

Ниже фиксируются термины и обозначения, которыми мы будем пользоваться. Все утверждения этого и следующего пунктов совершенно очевидны.

Пусть  $f: M^m \rightarrow N^n$  — гладкое отображение гладких многообразий (можно считать, что  $M$  и  $N$  — области в евклидовых пространствах соответствующего числа измерений).

---

<sup>1</sup>Т. е. для всякого поля из некоторого открытого всюду плотного в функциональном пространстве гладких полей множества.

**Определение.** Два таких отображения  $f_1, f_2$  называются касающимися порядка  $k$  или  $k$ -касающимися в точке  $x$  из  $M$ , если (рис. 106)

$$\rho_N(f_1(y), f_2(y)) = o(\rho_M^k(x, y)) \text{ при } y \rightarrow x.$$

Здесь  $\rho$  означает какую-либо риманову метрику; легко видеть, что свойство  $k$ -касания от выбора метрик  $\rho_M$  и  $\rho_N$  не зависит.

Два отображения 0-касаются в точке  $x$ , если их значения в точке  $x$  совпадают. Касание порядка  $k$  является отношением эквивалентности ( $f_1 \sim f_2 \Rightarrow f_2 \sim f_1, f_1 \sim f_2 \sim f_3 \Rightarrow f_1 \sim f_3, f_1 \sim f_1$ ).

**Определение.**  $k$ -струей гладкого отображения  $f$  в точке  $x$  называется класс  $k$ -касающихся в  $x$  отображений.

Обозначение.

$$j_x^k(f) = \{f_1 : f_1 \text{ } k\text{-касается } f \text{ в точке } x\}.$$

Точка  $x$  называется *истоком*, а точка  $f(x)$  *устрем* этой струи.

Выберем координаты на  $M$  и на  $N$  в окрестностях точек  $x$  и  $f(x)$  соответственно. Тогда  $k$ -струя любого отображения, близкого к  $f$ , в любой точке, близкой к  $x$ , задается набором коэффициентов отрезка ряда Тейлора степени  $k$ . Таким образом, при фиксированных координатных системах струю порядка  $k$  можно отождествить с набором коэффициентов отрезка ряда Тейлора степени  $k$ .

**ПРИМЕР.** 0-струя отображения  $f$  оси  $x$  в ось  $y$  в точке  $x$  задается парой чисел  $(x, y)$ , где  $y = f(x)$ . 1-струя задается тройкой чисел  $(x, y, p)$ , где  $p = \frac{df}{dx}$ .

Кроме касания порядка  $k$ , есть еще одно отношение эквивалентности, приводящее вместо струй к *росткам* отображений.

**Определение.** Два отображения, заданные в двух окрестностях одной и той же точки, имеют общий росток в этой точке, если они совпадают в некоторой третьей окрестности этой точки (третья окрестность может быть меньше пересечения первых двух).

*Ростком* отображения в точке называется класс эквивалентности по введенному отношению эквивалентности.

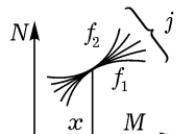


Рис. 106

Для ростка, как и для отображения, можно определить его 0-струю в точке, 1-струю и т. д.

Рассмотрим множество всех  $k$ -струй ростков<sup>1</sup> гладких отображений из  $M$  в  $N$  во всевозможных точках из  $M$ .

**Определение.** Множество всех  $k$ -струй ростков отображений из  $M$  в  $N$  называется *пространством  $k$ -струй отображений из  $M$  в  $N$*  и обозначается через

$$J^k(M, N) = \text{пространство } k\text{-струй отображений из } M \text{ в } N.$$

**ПРИМЕР.**  $J^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  есть трехмерное пространство с координатами  $(x, y, p)$  (см. § 3).

Множество  $J^k(M, N)$  имеет естественную структуру гладкого многообразия. Действительно, выберем системы координат в окрестности точки из  $M$  и в окрестности образа этой точки в  $N$  при некотором отображении  $f$ . Тогда  $k$ -струя отображения  $f$  и все близкие струи задаются координатами точки-прообраза и наборами коэффициентов отрезка ряда Тейлора отображения в этой точке. Тем самым мы построили карту многообразия струй  $J^k(M, N)$  в окрестности той его точки, которой является  $k$ -струя отображения  $f$ .

Размерность многообразия струй легко сосчитать. Например,

$$J^0(M, N) = M \times N, \dim J^0(M, N) = \dim M + \dim N,$$

$$\dim J^1(M, N) = \dim M + \dim N + \dim M \dim N.$$

Имеется естественное отображение

$$J^{k+1}(M, N) \rightarrow J^k(M, N)$$

(( $k + 1$ )-струя определяет  $k$ -струю, так как из  $(k + 1)$ -касания вытекает  $k$ -касание). Это гладкое отображение является расслоением. Мы получаем цепочку расслоений

$$\dots \rightarrow J^k \rightarrow J^{k-1} \rightarrow \dots \rightarrow J^1 \rightarrow J^0 = M \times N.$$

Слой каждого из этих расслоений диффеоморfen линейному пространству, но не имеет (при  $k > 1$ ) естественной линейной структуры («неинвариантность высших дифференциалов»).

<sup>1</sup> В вещественно-гладком случае все равно, рассматривать ли здесь струи ростков, или струи отображений всего  $M$ , так как каждый росток является ростком глобального отображения. В комплексной же ситуации глобальное гладкое отображение с заданной струей может и не существовать.

Многообразия  $J^k$  являются своего рода конечномерными аппроксимациями бесконечномерного функционального пространства гладких отображений из  $M$  в  $N$ .

### Г. Группы струй локальных диффеоморфизмов и пространства струй векторных полей.

Рассмотрим пространство струй  $J^k(M, M)$ . В этом многообразии лежит подмногообразие  $k$ -струй диффеоморфизмов. Это подмногообразие — не группа, так как струи можно умножать только если устье одной струи есть исток другой.

Зафиксируем некоторую точку на  $M$  и рассмотрим все ростки диффеоморфизмов  $M$ , оставляющих эту точку на месте. Их  $k$ -струи уже образуют группу.

**Определение.** Группа  $k$ -струй ростков диффеоморфизмов  $M$ , оставляющих на месте точку  $x$ , называется *группой  $k$ -струй локальных диффеоморфизмов многообразия  $M$  в точке  $x$*  и обозначается через  $J_x^k(M)$ .

**ПРИМЕР.** Группа 1-струй локальных диффеоморфизмов изоморфна линейной группе  $J_x^1(M^m) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m)$ .

При  $k > 1$  получается более сложная группа Ли. Поскольку  $k$ -струя определяет  $(k - 1)$ -струю, получаем цепочку отображений

$$\rightarrow J_x^k(M) \rightarrow \dots \rightarrow J_x^1(M) = \mathrm{GL}(\mathbb{R}^m).$$

Легко видеть, что эти отображения (отображения забывания членов степени  $k$  в многочлене Тейлора) — гомоморфизмы, а их ядра — коммутативные группы. Пусть, например,  $m = 1$ . Тогда:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Если  $f(x) = x + ax^k \pmod{x^{k+1}}$  и  $g(x) = x + bx^k \pmod{x^{k+1}}$ , то  $(f \circ g)(x) = x + ax^k + bx^k \pmod{x^{k+1}}$ . ■

*Векторное поле* на многообразии  $M$  — это сечение касательного расслоения  $p: TM \rightarrow M$ , т. е. такое гладкое отображение  $v: M \rightarrow TM$ , что коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{v} & TM \\ & \searrow^1 & \downarrow p \\ & M & \end{array} .$$

Определения ростков, струй и пространств струй векторных полей повторяют предыдущие определения.

Группа диффеоморфизмов многообразия  $M$  действует на пространстве всех векторных полей на  $M$ , а также на пространствах  $k$ -струй векторных полей на  $M$ .

Группа  $k$ -струй локальных диффеоморфизмов многообразия  $M$  в точке действует на пространстве  $(k-1)$ -струй векторных полей на  $M$  в этой точке; это действие линейно.

**ПРИМЕР.** Пусть  $y = a_1x + a_2x^2 + \dots$  — 2-струя локального диффеоморфизма в нуле. Образ 1-струи поля  $v(x) = v_0 + v_1x + \dots$  дается формулой  $\omega(x) = \omega_0 + \omega_1x + \dots$ , где  $\omega_0 = a_1v_0$ ,  $\omega_1 = a_1v_1a_1^{-1} + 2a_2a_1^{-1}v_0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Эта формула получается при записи уравнения  $\dot{x} = v(x)$  в координатах  $y$ . ■

#### Д. Слабая теорема трансверсальности.

Доказательства возможности приведения в общее положение часто удается заменить ссылкой на некоторые стандартные (и очевидные) теоремы трансверсальности. Ниже приведены формулировки и наброски доказательств наиболее употребительных теорем трансверсальности. Ссылки на теоремы трансверсальности служат в основном для экономии места: в каждом конкретном случае соответствующее конкретное утверждение легко доказать непосредственно.

**Определение.** Два линейных подпространства  $X$  и  $Y$  линейного пространства  $L$  называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство:

$$L = X + Y.$$

Например, две пересекающиеся под ненулевым углом плоскости в трехмерном пространстве трансверсальны, а две прямые — нет.

Пусть  $A$  и  $B$  — гладкие многообразия, и пусть  $C$  — гладкое подмногообразие в  $B$  (здесь и далее слово многообразие означает многообразие без края).

**Определение.** Отображение  $f: A \rightarrow B$  называется *трансверсальным* к  $C$  в точке  $a$  из  $A$ , если либо  $f(a)$  не принадлежит  $C$ , либо касательная плоскость к  $C$  в точке  $f(a)$  и образ касательной плоскости к  $A$  в точке  $a$  трансверсальны (рис. 107):

$$f_*T_a A + T_{f(a)} C = T_{f(a)} B.$$

**Определение.** Отображение  $f: A \rightarrow B$  трансверсально к  $C$ , если оно трансверсально к  $C$  в любой точке многообразия-прообраза.

Например, вложение прямой в трехмерное пространство трансверсально другой прямой в этом пространстве, если и только если прямые не пересекаются.

**Замечание.** Отображение прямой на плоскость может не быть трансверсальным лежащей на плоскости прямой даже и в том случае, когда образом этого отображения является нормаль к данной прямой (образ касательного пространства и касательное пространство к образу — не одно и то же).

Отметим также, что если  $f: A \rightarrow B$  трансверсально к  $C$ , то прообраз  $C$  в  $A$  есть гладкое подмногообразие, и его коразмерность в  $A$  равна коразмерности  $C$  в  $B$ .

Часто встречается ситуация, когда  $C$  — не гладкое подмногообразие, а подмногообразие с особенностями.

**Определение.** Стратифицированным подмногообразием гладкого многообразия называется конечное объединение попарно непересекающихся гладких многообразий (стратов), удовлетворяющее следующему условию: замыкание каждого страта состоит из него самого и конечного объединения стратов меньших размерностей.

Отображение называется трансверсальным стратифицированному подмногообразию, если оно трансверсально каждому страту.

**Пример.** Пусть  $C$  — объединение двух пересекающихся по прямой плоскостей в трехмерном пространстве, стратификация — разбиение на прямую пересечения и четыре полуплоскости. Трансверсальность к  $C$  означает трансверсальность к каждой из плоскостей и трансверсальность к прямой пересечения. Например, кривая, трансверсальная к стратифицированному многообразию  $C$ , не пересекается с прямой особенностей  $C$ .

**Теорема.** Пусть  $A$  — компактное многообразие, и  $C$  — компактное подмногообразие в многообразии  $B$ . Тогда отображения  $f: A \rightarrow B$ , трансверсальные к  $C$ , образуют открытое всюду плотное множество в пространстве всех достаточно гладких отображений  $A \rightarrow B$  (близость

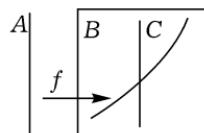


Рис. 107

отображений  $f$  определяется как близость функций, задающих  $f$ , и их производных до достаточно большого порядка  $r$ ).

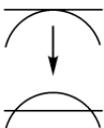


Рис. 108

Эта теорема называется слабой теоремой трансверсальности. Ее утверждение означает, что малым шевелением можно превратить отображение, не трансверсальное фиксированному подмногообразию, в трансверсальное (рис. 108). Если же трансверсальность имеет место, то она сохраняется при малых шевелениях.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим частный случай, когда  $B$  есть линейное пространство,  $B = \mathbb{R}^n$ , а  $C$  — его подпространство  $\mathbb{R}^{n-k}$ .

Представим  $B$  в виде суммы  $B = C + D$  двух подпространств дополнительной размерности,  $C = \mathbb{R}^{n-k}$  и  $D = \mathbb{R}^k$ . Спроектируем  $B$  на  $D$  вдоль  $C$ ; обозначим эту проекцию через  $\pi$ . Рассмотрим отображение  $\pi \circ f: A \rightarrow D$ .

Точка 0 является критическим значением для этого отображения тогда и только тогда, когда отображение  $f: A \rightarrow B$  не трансверсально подмногообразию  $C \subset B$ . По лемме Сарда (§ 10) почти все точки из  $D$  не являются критическими значениями для отображения  $\pi \circ f$ . Пусть  $\varepsilon$  — точка из  $D$ , не являющаяся критическим значением для  $\pi \circ f$ . Построим отображение  $f_\varepsilon: A \rightarrow B$ , положив  $f_\varepsilon(a) = f(a) - \varepsilon$ . Тогда отображение  $f_\varepsilon$  трансверсально к  $C$ . Поскольку  $\varepsilon$  можно было взять сколь угодно малым, всюду плотность трансверсальных отображений в нашем частном случае доказана. Открытость следует из теоремы о неявной функции. Общий случай легко сводится к рассмотренному. ■

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Если  $C$  не компактно, то «открытое» нужно, вообще говоря, заменить на «пересечение счетного множества открытых».

**ПРИМЕР 1.**  $B$  — тор,  $C$  — его обмотка,  $A$  — окружность.

**ПРИМЕР 2.**  $B$  — плоскость,  $A$  — вложенная в плоскость окружность,  $C$  — касательная к ней (без самой точки касания). Вложение трансверсально к  $C$ , но существуют сколь угодно близкие не трансверсальные к  $C$  отображения.

Для того чтобы трансверсальные к  $C$  отображения компактного  $A$  в  $B$  образовывали *открытое* всюду плотное множество, достаточно вместо компактности  $C$  потребовать, чтобы у каждой точки из  $B$  нашлась такая окрестность, что пара (окрестность, ее пересечение с  $C$ ) диффеоморфна паре  $(\mathbb{R}^b, \mathbb{R}^c)$  либо паре  $(\mathbb{R}^b, \text{пустое множество})$ .

Если  $A$  не компактно, то пространство отображений удобно снабжать «тонкой топологией». В этой топологии окрестность отображения  $f: A \rightarrow B$  определяется следующим образом. Фиксируем открытое множество  $G$  в пространстве струй  $J^k(A, B)$  при каком-либо  $k$ . Множество  $C^\infty$ -отображений  $f: A \rightarrow B$ ,  $k$ -струи которых в каждой точке принадлежат  $G$ , открыто в тонкой топологии. Такие непустые открытые множества берутся в качестве базиса окрестностей, задающих тонкую топологию в пространстве бесконечно-дифференцируемых отображений.

Таким образом, близость двух отображений в тонкой топологии означает сколь угодно быстрое сближение этих отображений (с любым числом производных) «на бесконечности»; в частности, график достаточно близкого к  $f$  отображения лежит в сколь угодно быстро утончающейся «на бесконечности» окрестности графика отображения  $f$ .

Отсюда следует, что сходимость последовательности в тонкой топологии влечет полное совпадение вне некоторого компактного множества всех членов последовательности, начиная с некоторого. Тем не менее, любая окрестность данного отображения в тонкой топологии содержит отображения, нигде не совпадающие с данным.

Если открытость и всюду плотность понимать в смысле тонкой топологии, то теорема трансверсальности верна и для некомпактных  $A$  (для открытости  $C$  должно быть компактным или удовлетворять сформулированному выше условию).

Теорема трансверсальности очевидным образом распространяется на случай стратифицированного подмногообразия  $C$ . Однако в этом случае теорема гарантирует, что трансверсальные отображения образуют не открытое всюду плотное множество, а лишь всюду плотное пересечение счетного числа открытых множеств.

Чтобы трансверсальные к стратифицированному многообразию отображения образовывали открытое всюду плотное множество, достаточно, чтобы стратификация удовлетворяла следующему дополнительному условию: всякое вложение, трансверсальное к страте меньшей размерности, трансверсально ко всем примыкающим стратам большей размерности в некоторой окрестности этого страта меньшей размерности.

**ПРИМЕР 1.** Пусть  $C$  — конечное объединение плоскостей в линейном пространстве, стратифицированное естественным образом (например, пара пересекающихся плоскостей в  $\mathbb{R}^3$ ). Из трансверсальности к  $\mathbb{R}^k$  следует трансверсальность к объемлющему  $\mathbb{R}^l$ , поэтому наше условие выполнено.

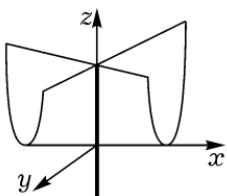


Рис. 109

ПРИМЕР 2. Пусть  $C$  — конус  $x^2 = y^2 + z^2$  в  $\mathbb{R}^3$ , стратификация — разбиение на точку 0 и две полы. Наше условие, как нетрудно проверить, выполнено.

ПРИМЕР 3. Пусть  $C$  — зонтик Уитни, заданный уравнением<sup>1</sup>  $y^2 = zx^2$  в  $\mathbb{R}^3$  (рис. 109). [Часть  $z \geq 0$  этого стратифицированного многообразия является образом отображения  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданного формулами  $x = u$ ,  $z = v^2$ ,  $y = uv$ . Уитни доказал, что 1) при малом шевелении отображения  $\varphi$  сохраняется особенность такого

же (с точностью до диффеоморфизмов  $\mathbb{R}^2$  и  $\mathbb{R}^3$ ) типа; 2) это единственная особенность отображений двумерных многообразий в трехмерные, сохраняющаяся при малых шевелениях (кроме линии самопересечения), все прочие особенности при малом шевелении распадаются на особенности этого типа.] Из трансверсальности к особой прямой  $x = y = 0$  не следует трансверсальность к многообразию близких к этой прямой регулярных точек поверхности (плоскость  $z = 0$  трансверсальна прямой и не трансверсальна поверхности).

Если условие на стратификацию  $C$

трансверсальность к меньшему  $\Rightarrow$  трансверсальность к большему выполнено, то трансверсальность ко всей стратификации достигается так.

1) Страты минимальной размерности гладкие, к ним применима обычная теорема. 2) В окрестности стратов минимальной размерности трансверсальность достигнута на всех стратах. 3) Выкидываем из объемлющего многообразия замыкание окрестности стратов минимальной размерности и переходим к стратам следующей размерности.

ПРИМЕР. Пусть  $B$  — пространство линейных операторов  $b: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C$  — множество операторов не максимального ранга. Операторы ранга  $r$  образуют гладкое подмногообразие, коразмерность которого в пространстве  $B$  равна  $(m-r)(n-r)$ . Разбиение на многообразия операторов различных рангов задает стратификацию на  $C$ .

Отображение  $f: A \rightarrow B$  — это семейство линейных операторов из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$  гладко зависящих как от параметра от точки многообразия  $A$ . Многообразие  $A$  называется *базой* семейства. Из теоремы трансверсальности сразу вытекает

<sup>1</sup>Зонтик включает ручку, изображенную на рис. 109 жирной линией.

**Следствие.** В пространстве гладких семейств матриц порядка  $m \times n$  всюду плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратифицированному многообразию  $C$  матриц не максимального ранга.

В частности, значения параметра, которым соответствуют матрицы ранга  $r$ , образуют, вообще говоря (для семейств из всюду плотного пересечения открытых множеств в пространстве семейств), гладкое подмногообразие коразмерности  $(m - r)(n - r)$  в базе семейства.

Например, в пятипараметрическом семействе общего положения матриц порядка  $2 \times 3$  ранг падает до 1 на трехмерном гладком подмногообразии пространства параметров и не равен 0 ни в одной точке пространства параметров; если для данного семейства это не так, то сколь угодно малой деформацией семейства можно добиться того, что семейство станет семейством общего положения.

### Е. Теорема трансверсальности Тома.

Теорема трансверсальности Тома является обобщением слабой теоремы трансверсальности, в котором роль подмногообразия  $C$  играет подмногообразие пространства струй.

С каждым гладким отображением  $f: M \rightarrow N$  связано его « $k$ -струйное расширение»  $\hat{f}: M \rightarrow J^k(M, N)$ ,  $\hat{f}(x) = J_x^k(f)$  (точке  $x$  из  $M$  сопоставляется  $k$ -струя отображения  $f$  в точке  $x$ ).

**Теорема.** Пусть  $C$  — подмногообразие пространства струй  $J^k(M, N)$ . Тогда множество отображений  $f: M \rightarrow N$ ,  $k$ -струйные расширения которых трансверсальны к  $C$ , — всюду плотное счетное пересечение открытых множеств в пространстве всех гладких отображений из  $M$  в  $N$ .

Эта теорема означает, что малым шевелением гладкого отображения можно привести его в общее положение не только по отношению к любому гладкому подмногообразию в пространстве-образе, но и по отношению к любому условию, наложенному на производные любого конечного порядка.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Слабая теорема трансверсальности получается из сформулированной при  $k = 0$ . Сильная же из слабой непосредственно не вытекает по следующей причине. Можно было бы применить слабую теорему к отображению  $\hat{f}: M \rightarrow J^k$  и получить близкое к  $\hat{f}$  трансверсальное к  $C$  отображение. Однако это близкое отображение, вообще говоря, не будет  $k$ -струйным расширением никакого гладкого отображения из  $M$  в  $N$ .

Теорема трансверсальности Тома утверждает, что трансверсализирующую деформацию можно выбрать в более узком классе деформаций: достаточно ограничиться деформацией  $k$ -струйного расширения в пространстве  $k$ -струйных расширений, а не в пространстве всех сечений  $M \rightarrow J^k$ . Таким образом, теорема означает, что условия интегрируемости (выполнение которых отличает  $k$ -струйные расширения отображений из  $M$  в  $N$  от произвольных сечений  $M \rightarrow J^k$ ) не мешают достигнуть трансверсальности.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Сущность доказательства состоит в такой же редукции к лемме Сарда, как и для слабой теоремы трансверсальности. Основное отличие состоит в том, что трансверсализирующую деформацию ищется не в классе отображений  $f_\varepsilon = f - \varepsilon$ , а в более широком классе полиномиальных деформаций  $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_s e_s$ , где  $e_i$  — всевозможные вектор-моменты степени не выше  $k$ .

**Лемма 1.** *Рассмотрим гладкое отображение  $F: A \times E \rightarrow B$  прямого произведения гладких многообразий  $A$  и  $E$  в гладкое многообразие  $B$ .*

*Будем рассматривать  $F$  как семейство отображений  $F_\varepsilon$  многообразия  $A$  в  $B$ , зависящих от точки  $\varepsilon$  многообразия  $E$  как от параметра. Тогда если отображение  $F$  трансверсально к подмногообразию  $C$  многообразия  $B$ , то почти каждый член  $F_\varepsilon: A \rightarrow B$  соответствующего  $F$  семейства трансверсален к  $C$ .*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим  $F^{-1}(C)$ . По теореме о неявной функции, это гладкое подмногообразие в  $A \times E$ . Рассмотрим проекцию этого подмногообразия на  $E$  вдоль  $A$ . По лемме Сарда, почти все значения не критические. Пусть  $\varepsilon$  — не критическое значение. Тогда  $F_\varepsilon: A \rightarrow B$  трансверсально к  $C$  (ибо  $F$  трансверсально к  $C$ , а  $A \times \varepsilon$  трансверсально к  $F^{-1}(C)$ ).

**Лемма 2.** *Пусть  $f$  — гладкое отображение из  $\mathbb{R}^m$  в  $\mathbb{R}^n$ . Зафиксируем в  $\mathbb{R}^m$  и в  $\mathbb{R}^n$  системы координат и рассмотрим гладкое отображение прямого произведения пространства  $\mathbb{R}^m$  на пространство  $\mathbb{R}^s$  в пространство  $k$ -струй отображений  $J^k(M, N)$ , определенное формулой*

$$(x, \varepsilon) \mapsto (j_x^k f_\varepsilon),$$

*где  $f_\varepsilon = f + \varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_s e_s$  ( $e_1, \dots, e_s$  — всевозможные произведения*

момов степени не выше  $k$  от координат точки  $x$  из  $\mathbb{R}^m$  на базисные векторы в  $\mathbb{R}^n$ ).

Утверждается, что построенное отображение не имеет критических значений (и, следовательно, трансверсально любому подмногообразию пространства  $k$ -струй).

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Координатами в пространстве  $J^k$  являются координаты точки  $x$  из  $\mathbb{R}^m$  и коэффициенты Тейлора струи в этой точке до степени  $k$  включительно. При подходящем выборе коэффициентов  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s$  вектор-многочлен  $\varepsilon_1 e_1 + \dots + \varepsilon_s e_s$  будет иметь в любой перед заданной точке  $x$  любой перед заданный набор коэффициентов Тейлора до членов степени  $k$  включительно. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы. ■

Пусть  $C$  — гладкое подмногообразие в  $B = J^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ . Применим к отображению леммы 2 лемму 1 (в которой  $A = \mathbb{R}^m$ ,  $E = \mathbb{R}^s$ ;  $F(x, \varepsilon) = j_x^k f_\varepsilon$ ). По лемме 1 для почти всех  $\varepsilon$  отображение  $F_\varepsilon = F(\cdot, \varepsilon)$  трансверсально к  $C$ . Выбрав  $\varepsilon$  достаточно малым, мы получим сколь угодно близкое к  $f$  (в любой конечной части  $\mathbb{R}^m$ ) отображение  $f_\varepsilon: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $k$ -струйное расширение которого трансверсально к  $C$ . Переход от этой локальной конструкции к глобальной (замена  $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$  на  $M, N$ ) не представляет затруднений. ■

#### Ж. Пример: распадение сложных особых точек векторного поля.

В качестве приложения теорем трансверсальности рассмотрим вопрос о том, какие особые точки имеет векторное поле общего положения.

**Определение.** Особая точка  $x$  векторного поля  $v$  называется *невырожденной*, если оператор линейной части поля в особой точке невырожден.

Из теорем трансверсальности вытекает

**Следствие.** В функциональном пространстве гладких векторных полей на компактном многообразии открытое всюду плотное множество образуют поля, все особые точки которых невырождены (и, следовательно, изолированы).

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

Особые точки — это прообразы гладкого многообразия (нулевого сечения) в пространстве 0-струй векторных полей. Невырожденность особой точки есть трансверсальность 0-струйного расширения поля к этому многообразию. ■

Итак, вырожденная особая точка распадается на невырожденные при сколь угодно малом шевелении поля.

**ПРИМЕР.** Рассмотрим особую точку типа «седло-узел»:

$$\dot{x} = x^2, \quad \dot{y} = -y.$$

При шевелении  $\dot{x} = x^2 - \varepsilon$ ,  $\dot{y} = -y$  седло-узел распадается на две особых точки: седло и узел.

Возникает вопрос, на сколько особых точек распадается данная сложная особая точка при малых шевелениях. Как это обычно бывает (скажем, в теории алгебраических уравнений), вопрос наиболее естественно решается в комплексной области.

**Определение.** Число невырожденных (комплексных) особых точек, на которые распадается сложная особая точка при малом шевелении, называется *кратностью* особой точки.

**Замечание.** Строго говоря, кратность определяется следующим образом: 1) фиксируется достаточно малая окрестность особой точки в комплексном пространстве; 2) по выбранной окрестности выбирается малость шевеления; 3) для пошевеленного поля считается число особых точек в окрестности данной точки.

Ниже будет указана формула для кратности особой точки в терминах диаграмм Ньютона (А. Г. Кушниренко, Д. Н. Бернштейн, А. Г. Хованский).

Пусть  $f = \sum f_m x^m$  — числовой формальный ряд по степеням переменных  $x_1, \dots, x_n$  ( $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$ ). Рассмотрим октант решетки целых точек  $m$  с неотрицательными координатами  $m_k$ .

Обозначим этот октант через  $\mathbb{Z}_+^n$ .

**Определение.** Носителем ряда  $f$  называется множество точек  $m$  из октанта  $\mathbb{Z}_+^n$ , для которых  $f_m \neq 0$ . Обозначение:

$$\text{supp } f = \{m \in \mathbb{Z}_+^n : f_m \neq 0\}.$$

**Определение.** Многогранником Ньютона ряда  $f$  называется выпуклая оболочка объединения параллельных  $\mathbb{Z}_+^n$  октантов с вершинами в точках носителя в октанте  $\mathbb{R}_+^n$  вещественного линейного пространства. Обозначение:

$\Gamma_f$  = выпуклая оболочка объединения  $m + \mathbb{Z}_+^n$ ,  $m \in \text{supp } f$ .

Многогранник Ньютона называется *удобным*, если он пересекает все координатные оси.

**Теорема.** Пусть даны  $n$  удобных многогранников Ньютона  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ .

Рассмотрим векторное поле  $v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$ , где многогранники Ньютона для компонент  $v_1, \dots, v_n$  суть  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ . Тогда кратность  $\mu$  особой точки нуль нашего векторного поля не меньше, чем определяемое ниже число Ньютона  $\nu(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  и совпадает с ним для почти всех полей с данными многогранниками Ньютона компонент (для всех полей, исключая гиперповерхность в пространстве полей с данными многогранниками).

**Замечание.** Условие удобности многогранников не является ограничением, так как можно доказать, что его выполнения можно добиться добавлением членов сколь угодно высокой степени, не меняющих кратности (если только она конечна).

Для определения числа Ньютона системы удобных многогранников нам потребуется понятие смешанного объема.

Пусть  $\Gamma$  — удобный многогранник Ньютона. Под *объемом*  $V(\Gamma)$  мы будем понимать объем (невыпуклой) области между нулем и границей многогранника  $\Gamma$  в положительном октанте  $\mathbb{R}_+^n$ .

Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  — два удобных многогранника Ньютона. Суммой  $\Gamma_1 + \Gamma_2$  называется арифметическая сумма, т. е. множество всевозможных сумм векторов из  $\Gamma_1$  и из  $\Gamma_2$ . Сумма также является удобным многогранником Ньютона.

Таким образом, удобные многогранники Ньютона образуют коммутативную полугруппу. Из этой полугруппы обычным методом строится группа (она называется группой Гротендика): элементом группы является формальная разность двух многогранников Ньютона  $\Gamma_1 - \Gamma_2$ , причем по определению  $\Gamma_1 - \Gamma_2 = \Gamma_3 - \Gamma_4$  если и только если  $\Gamma_1 + \Gamma_4 = \Gamma_2 + \Gamma_3$ .

Построенная группа определяет также линейное пространство над полем вещественных чисел: если  $\lambda$  положительное число, то  $\lambda\Gamma$  означает

чает многогранник, полученный из  $\Gamma$  гомотетией с центром в 0 с коэффициентом  $\lambda$ . Объем  $V(\Gamma)$  однозначно продолжается на это линейное пространство в качестве формы степени  $n$  (доказательство этого не совсем очевидного факта оставляется любознательному читателю в виде упражнения).

Каждая форма степени  $n$  единственным образом представляется в виде значения симметричной  $n$ -линейной формы при совпадающих аргументах; например,

$$a^2 = ab|a = b, \quad ab = \frac{((a+b)^2 - a^2 - b^2)}{2}.$$

**Определение.** Смешанным объемом (Минковского) системы многогранников  $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  называется значение на наборе  $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  той единственной симметричной  $n$ -линейной формы, которая совпадает с объемом  $V(\Gamma)$  при  $\Gamma_1 = \dots = \Gamma_n = \Gamma$ . Обозначение:  $V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ .

**ПРИМЕР.** В плоском случае  $n = 2$  и смешанный объем пары  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  есть  $V(\Gamma_1, \Gamma_2) = \frac{[V(\Gamma_1 + \Gamma_2) - V(\Gamma_1) - V(\Gamma_2)]}{2}$ .

**Определение.** Число Ньютона  $\nu(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$  определяется следующим образом:

$$\nu(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = n!V(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n).$$

**ПРИМЕР.** В двумерном случае пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  ограничены прямыми, пересекающими оси координат в точках  $(a_1, b_1)$  для  $\Gamma_1$  и  $(a_2, b_2)$  для  $\Gamma_2$ . Тогда  $\nu(\Gamma_1, \Gamma_2)$  равно  $\min(a_1 b_2, a_2 b_1)$ . Следовательно, почти всегда кратность особой точки равна

$$\mu = \min(a_1 b_2, a_2 b_1).$$

## § 30. Матрицы, зависящие от параметров, и особенности декремент-диаграмм

В качестве подготовки к исследованию бифуркаций особых точек векторных полей мы рассмотрим здесь задачу о нормальной форме семейств эндоморфизмов линейного пространства.

### А. Задача о нормальной форме матриц, зависящих от параметров.

Приведение матрицы к жордановой нормальной форме — не устойчивая операция, если среди собственных чисел есть кратные. Действительно, сколь угодно малое изменение матрицы может при наличии кратных собственных чисел совершенно изменить жорданову форму. Поэтому если матрица известна лишь приближенно, то приведение ее к жордановой нормальной форме в случае кратных собственных чисел практически невозможно. Оно и не нужно, так как матрица общего вида не имеет кратных собственных чисел.

Кратные собственные числа возникают неустранимым малым шевелением главным образом в случае, когда мы интересуемся не отдельной матрицей, а семейством матриц, зависящих от параметров. В этом случае, хотя мы и можем привести к жордановой нормальной форме каждую индивидуальную матрицу семейства, как эта нормальная форма, так и приводящее к ней преобразование, будут, вообще говоря, разрывно зависеть от параметра.

Таким образом, возникает вопрос о том, к какому простейшему виду можно привести семейство матриц, гладко (для определенности, голоморфно) зависящих от параметров при помощи гладко (голоморфно) зависящих от параметров замен координат.

Рассмотрим множество всех квадратных комплексных матриц порядка  $n$  как линейное пространство размерности  $n^2$ . Отношение подобия матриц разбивает все пространство  $\mathbb{C}^{n^2}$  на многообразия (орбиты линейной группы): две матрицы лежат в одной орбите, если у них совпадают собственные числа и размеры жордановых клеток. Из-за собственных чисел это разбиение континуально. В качестве грубой модели можно представлять себе разбиение трехмерного пространства на страты многообразий  $x^2 + y^2 - z^2 = C$  (рис. 110).

Семейство матриц задается отображением пространства параметров семейства в пространство матриц  $\mathbb{C}^{n^2}$ . Оказывается, среди всех семейств матриц можно выделить такие семейства, что приведение к ним осуществляется уже гладко зависящей от параметров заменой базиса (и гладкой заменой параметра). Такие семейства называются версальными деформациями (точное определение см. ниже). Версальные де-

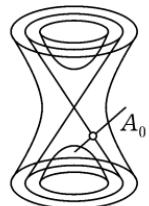


Рис. 110

формации с минимальным возможным числом параметров называются миниверсальными. Таким образом, миниверсальные деформации — это нормальные формы с наименьшим возможным числом параметров, при приведении к которым можно сохранить гладкую зависимость от параметров.

**ПРИМЕР.** Если все собственные числа диагональной матрицы различны, то в качестве ее миниверсальной деформации можно взять семейство всех диагональных матриц (параметры — собственные числа).

Мы укажем ниже миниверсальные деформации произвольных матриц.

### Б. Версальные деформации.

**Определение.** Семейством матриц мы будем называть голоморфное отображение  $A: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$ , где  $\Lambda$  — окрестность начала координат в некотором пространстве параметров  $\mathbb{C}^l$ . Росток семейства  $A$  в точке 0 мы будем называть деформацией матрицы  $A(0)$ .

Деформация  $A'$  матрицы  $A(0)$  называется эквивалентной деформации  $A$ , если существует такая деформация единицы  $C$ , что

$$A'(\lambda) = C(\lambda)A(\lambda)(C(\lambda))^{-1}.$$

Пусть  $\varphi: (M, 0) \rightarrow (\Lambda, 0)$  — голоморфное отображение ( $M \subset \mathbb{C}^m$ ,  $\Lambda \subset \mathbb{C}^l$ ).

**Определение.** Семейством, индуцированным из  $A$  при отображении  $\varphi$ , называется семейство  $\varphi^* A$ :

$$(\varphi^* A)(\mu) = A(\varphi(\mu)), \quad \mu \in M.$$

Индуцированная деформация  $\varphi^* A$  матрицы  $A(0)$  определяется такой же формулой.

**Определение.** Деформация  $A$  матрицы  $A_0$  называется версальной, если любая деформация  $A'$  матрицы  $A_0$  эквивалентна деформации, индуцированной из  $A$ . Версальная деформация называется универсальной, если это индуцирующее отображение  $\varphi$  определяется деформацией  $A'$  однозначно. Версальная деформация называется миниверсальной, если

размерность пространства параметров — наименьшая возможная для версальной деформации.

**ПРИМЕР.** Семейство диагональных матриц с диагональными элементами  $(\alpha_i + \lambda_i)$ , где все  $\alpha_i$  различны, а  $\lambda_i$  — параметры деформации, является версальной, универсальной и миниверсальной деформацией матрицы  $(\alpha_i)$ .

Семейство всех матриц  $\mathbb{C}^{n^2}$  определяет  $n^2$ -параметрическую версальную деформацию любой своей матрицы. Однако эта деформация не является, вообще говоря, ни универсальной, ни миниверсальной.

Размерность миниверсальной деформации произвольной матрицы дается следующей теоремой. Обозначим через  $\alpha_i$  собственные числа матрицы  $A_0$  и пусть  $n_1(\alpha_i) \geq n_2(\alpha_i) \geq \dots$  — размеры принадлежащих  $\alpha_i$  жордановых клеток, упорядоченных, начиная с наибольшей.

**Теорема 1.** *Наименьшее число параметров версальной деформации матрицы  $A_0$  равно*

$$\sum_i [n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + 5n_3(\alpha_i) + \dots].$$

Сами миниверсальные деформации можно выбирать по-разному. В частности, три нормальные формы, описанные в следующей теореме, являются версальными деформациями матрицы, приведенной к верхнетреугольной жордановой нормальной форме.

**Теорема 2.** *Пусть  $A$  — голоморфно зависящее от параметра  $\lambda \in \mathbb{C}^l$  семейство линейных операторов из  $\mathbb{C}^n$  в себя, и пусть при некотором значении  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$  оператор  $A(\lambda_0)$  имеет собственные числа  $\alpha_i$  и жордановы клетки порядков*

$$n_1(\alpha_i) \geq n_2(\alpha_i) \geq \dots$$

*Тогда существует базис в  $\mathbb{C}^n$ , голоморфно зависящий от параметра  $\lambda$ , меняющегося в некоторой окрестности точки  $\lambda_0$ , и такой, что матрица оператора  $A(\lambda)$  имеет в этом базисе блочно-диагональный вид*

$$A_0 + B(\lambda),$$

*где  $A_0$  — жорданова верхнетреугольная матрица оператора  $A(\lambda_0)$ , а  $B(\lambda)$  — блочно-диагональная матрица, блоки которой соответствуют собственным числам матрицы  $A_0$ .*

*Блок  $B_i$ , соответствующий собственному числу  $\alpha_i$  заполнен нулями, за исключением мест, отмеченных на рис. 111; на этих местах стоят голоморфные функции от  $\lambda$ .*

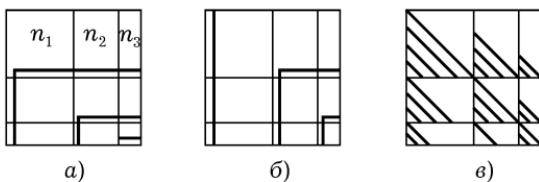


Рис. 111

На рисунке 111 представлены три нормальные формы. В первых двух число ненулевых элементов в  $B_i$  равно  $n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + \dots$ ; в третьей все элементы на каждом косом отрезке равны. Миниверсальные деформации матрицы  $A_0$  получатся, если считать отмеченные элементы матриц  $B_i$  независимыми переменными; их число во всех трех случаях равно  $\sum[n_1(\alpha_i) + 3n_2(\alpha_i) + \dots]$ . Преимуществом первых двух нормальных форм является то, что в них число ненулевых элементов матрицы — наименьшее возможное. Преимуществом третьей формы является ортогональность версальной деформации к соответствующей орбите (в смысле поэлементного скалярного умножения матриц).

### В. Доказательство версальности.

Пусть  $A: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$  — деформация матрицы  $A_0 = A(0)$  с параметром  $\lambda \in \Lambda$ , такая, что отображение  $A$  трансверсально к орбите  $C$  матрицы  $A_0$  под действием группы линейных замен координат. Предположим, что число параметров деформации минимально (т. е. равно коразмерности орбиты в пространстве  $\mathbb{C}^{n^2}$  всех матриц). Такая деформация называется минитрансверсальной.

**Лемма 1.** *Минитрансверсальная деформация  $A$  миниверсальна.*

Для доказательства леммы нам потребуется следующее

**Определение.** Централизатором матрицы  $u$  называется множество всех матриц, коммутирующих с  $u$ . Обозначение:

$$Z_u = \{v: [u, v] = 0\}, \quad [u, v] = uv - vu.$$

Централизатор любой матрицы порядка  $n$  является линейным подпространством пространства  $\mathbb{C}^{n^2}$  всех матриц порядка  $n$ .

Пусть  $Z$  — централизатор матрицы  $A_0$ . Проведем через единицу  $e$  в пространстве невырожденных матриц гладкую поверхность, трансверсальную к  $e + Z$ , размерность которой равна коразмерности централизатора (т. е. имеет минимальное возможное значение).

Обозначим эту поверхность через  $P$  и рассмотрим отображение

$$\Phi: P \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}, \quad \Phi(p, \lambda) = pA(\lambda)p^{-1}.$$

**Лемма 2.** *Отображение  $\Phi$  в окрестности точки  $(e, 0)$  — локальный диффеоморфизм на  $(\mathbb{C}^{n^2}, A_0)$ .*

Для доказательства леммы 2 рассмотрим отображение  $\psi$  группы невырожденных матриц в пространство  $\mathbb{C}^{n^2}$  всех матриц, заданное формулой  $\psi(b) = bA_0b^{-1}$ .

1°. *Производная отображения  $\psi$  в единице есть оператор коммутирования с  $A_0$ :*  $\psi_*: \mathbb{C}^{n^2} \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}, \quad \psi_*u = [u, A_0]$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$(e + \varepsilon u)A_0(e + \varepsilon u)^{-1} = A_0 + \varepsilon[u, A_0] + \dots$$

Из 1° вытекает

2°. *Размерность централизатора матрицы  $A_0$  равна коразмерности орбиты, а размерность трансверсали к централизатору — размерности орбиты:*

$$\dim Z = \dim \Lambda, \quad \dim P = \dim C.$$

Введем в пространстве  $\mathbb{C}^{n^2}$  эрмитово скалярное произведение  $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^*)$ , где  $B^*$  — матрица, полученная из  $B$  транспонированием и комплексным сопряжением. Соответствующий скалярный квадрат — это просто сумма квадратов модулей элементов матрицы.

**Лемма 3.** *Вектор  $B$  из касательного пространства к  $\mathbb{C}^{n^2}$  в точке  $A_0$  перпендикулярен к орбите матрицы  $A_0$  если и только если  $[B^*, A_0] = 0$ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Касательные векторы к орбите — это матрицы, представленные в виде  $[X, A_0]$ . Ортогональность  $B$  к орбите означает, что при любом  $X$

имеем  $\langle [X, A_0], B \rangle = 0$ . Иначе говоря, при любом  $X$

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}([X, A_0], B^*) = \text{tr}(XA_0B^* - A_0XB^*) = \\ &= \text{tr}([A_0, B^*], X) = \langle [A_0, B^*], X^* \rangle. \end{aligned}$$

Ввиду произвольности  $X$  это условие эквивалентно  $[A_0, B^*] = 0$ .

Итак, лемма доказана: ортогональное дополнение к орбите матрицы получается из ее централизатора транспонированием и сопряжением. ■

Централизаторы матриц, приведенных к жордановой нормальной форме, выписать нетрудно. Предположим вначале, что матрица имеет только одно собственное число и ряд верхнежордановых клеток порядков  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$

**Лемма 4.** С матрицей  $A_0$  коммутируют матрицы, изображенные на рис. 112, и только они.

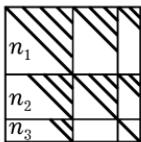


Рис. 112

На рис. 112 каждый косой отрезок означает ряд одинаковых чисел, а в незаполненных местах подразумеваются нули. Таким образом, число отрезков равно размерности централизатора.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Лемма 4 доказывается непосредственным вычислением коммутатора (см. например, Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. М.: Наука, 1967, стр. 199–207). ■

Из леммы 4 следует, что размерность централизатора матрицы  $A_0$  (равная коразмерности орбиты и минимальной возможной размерности версальной деформации) дается формулой  $d = n_1 + 3n_2 + 5n_3 + \dots$

Если жорданова матрица  $A_0$  имеет несколько собственных чисел, разобьем ее на блоки, соответствующие собственным числам. Тогда матрицы, коммутирующие с  $A_0$ , будут блочно-диагональными, причем каждому собственному числу соответствует блок описанного на рис. 112 вида. Поэтому формула для размерности централизатора (коразмерности орбиты, размерности миниверсальной деформации) получается из предыдущей суммированием по всем различным собственным числам.

Действительно,  $\psi_*$  есть линейное отображение пространств одинаковой размерности, поэтому размерность ядра равна коразмерности образа.

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2.

Производная  $\Phi$  по  $p$  в  $(e, 0)$  есть  $\psi_*$ , а производная по  $\lambda$  есть  $A_*$ . Эти операторы по доказанному выше изоморфно отображают касательные пространства к  $P$  в  $e$  и к  $\Lambda$  в  $0$  на трансверсальные пространства тех же размерностей (касательное к орбите  $C$  в  $A_0$  для  $P$  и трансверсальное к ней для  $\Lambda$ ). Следовательно, производная  $\Phi$  в точке  $(e, 0)$  есть изоморфизм линейных пространств размерности  $n^2$ . По теореме об обратной функции  $\Phi$  есть локальный диффеоморфизм. ■

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 1.

Будем рассматривать  $p$  и  $\lambda$  как координаты точки  $\Phi(p, \lambda)$ . Пусть  $A': (M, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^{n^2}, A_0)$  — любая деформация матрицы  $A_0$ . Пусть  $\mu \in M$  — параметр деформации. Определим  $\lambda = \varphi(\mu)$  формулой  $\varphi(\mu) = \lambda(A'(\mu))$  и положим  $B(\mu) = p(A'(\mu))$ . Тогда  $A'(\mu) = B(\mu)A(\varphi(\mu))B^{-1}\mu$ , что и доказывает версальность деформации  $A$ .

Минимальность размерности базы этой деформации очевидна. ■

В качестве трансверсальной деформации матрицы  $A_0$  можно взять семейство матриц вида  $A_0 + B$ , где матрица  $B$  принадлежит описанному выше ортогональному дополнению к орбите матрицы  $A_0$ . Мы получаем таким образом миниверсальную деформацию матрицы  $A_0$ .

В случае, когда матрица  $A_0$  имеет только одно собственное число, матрица  $B$  имеет вид, изображенный на рис. 111, в. Здесь на каждом косом отрезке стоит ряд равных чисел; число параметров равно числу отрезков и дается указанной выше формулой.

Матрица  $B$  имеет много ненулевых элементов. Можно построить миниверсальные деформации  $A_0 + B$ , в которых число ненулевых элементов матрицы  $B$  минимально возможное (равно числу параметров). С этой целью выберем в централизаторе базис: сопоставим каждому косому отрезку на рис. 111 в матрицу из нулей и единиц, у которой единицы стоят на этом косом отрезке.

Систему независимых уравнений касательной плоскости к орбите составляют следующие уравнения: для каждого косого отрезка рис. 111 сумма соответствующих элементов матрицы равна нулю (леммы 3 и 4). Таким образом, чтобы получить трансверсальное к орбите семейство  $A_0 + B$  достаточно в качестве семейства матриц  $B$  брать матрицы, у которых на каждом косом отрезке рис. 111 в одном месте стоит независимый параметр, а в остальных местах стоят нули. Выбирать ненулевой элемент на каждом косом отрезке можно в любом месте. Например, годится выбор, указанный в теореме 2 пункта Б. ■

**Г. Примеры.**

Будем обозначать верхнетреугольную жорданову матрицу произведением определителей ее клеток. Например,  $\alpha^2$  означает жорданову клетку порядка 2, а  $\alpha\alpha$  — матрицу второго порядка, кратную единичной.

Первая нормальная форма теоремы п. Б приводит к следующим миниверсальным деформациям:

а) Версальная (и универсальная) двухпараметрическая деформация жордановой клетки  $\alpha^2$  порядка 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

б) Версальная (но не универсальная) четырехпараметрическая деформация скалярной матрицы  $\alpha\alpha$  порядка 2:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}.$$

в) Версальная и универсальная трехпараметрическая деформация жордановой клетки  $\alpha^3$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

г) Версальная пятипараметрическая деформация матрицы  $\alpha^2\alpha$ :

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Например, всякое голоморфное семейство матриц, содержащее при нулевом значении параметра жорданову клетку  $\alpha^2$ , приводится при близких значениях параметра к нормальной форме (1), где  $\lambda_1, \lambda_2$  — голоморфные функции параметров.

Построенные нормальные формы позволяют при исследовании многих вопросов, относящихся к поведению операторов, зависящих от параметров, ограничиваться специальными семействами — миниверсальными деформациями. Одним из таких вопросов является вопрос о строении бифуркационных диаграмм.

#### Д. Бифуркационные диаграммы.

Бифуркационной диаграммой семейства матриц мы будем называть разбиение пространства параметров  $\Lambda$  по жордановым типам матриц. Семейство — это отображение  $A: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}^{n^2}$  пространства параметров в пространство матриц, поэтому для изучения бифуркационных диаграмм следует изучить разбиение пространства всех матриц на матрицы с жордановыми формами разных типов. При этом разбиении мы объединяем вместе матрицы с одинаковыми размерами жордановых клеток, различающиеся лишь величиной собственных чисел. Поэтому получающееся разбиение является конечной стратификацией пространства матриц.

Каждый страт этой стратификации определяется совокупностью наборов  $n_1(i) \geq n_2(i) \geq \dots$  размеров жордановых клеток, соответствующих  $\nu$  различным собственным числам ( $1 \leq i \leq \nu$ ). Коразмерность с такого страта в пространстве  $\mathbb{C}^{n^2}$  меньше коразмерности  $d$  соответствующей орбиты на количество различных собственных чисел, т. е. на  $\nu$ :

$$c = d - \nu = \sum_{i=1}^{\nu} [n_1(i) + 3n_2(i) + \dots - 1].$$

Заметим, что простые собственные числа дают в эту сумму нулевой вклад. Применяя слабую теорему трансверсальности, мы приходим к следующему выводу.

**Теорема.** В пространстве семейств матриц порядка  $n$  всегда плотное множество образуют семейства, трансверсальные стратификации по жордановым типам.

Эта теорема вместе с формулами версальных деформаций п. Г позволяет описать бифуркационные диаграммы семейств общего положения. В частности, для семейств с небольшим числом параметров мы приходим к следующим результатам.

1°. Однопараметрические семейства. Из  $c = 1$  следует, что матрица имеет лишь одно двукратное собственное число и ему соответствует жорданова клетка порядка 2. Такой страт мы будем обозначать  $\alpha^2$ .

**Следствие.** В однопараметрическом семействе матриц общего вида встречаются лишь матрицы с простыми собственными числами, и при отдельных, изолированных значениях параметров матрицы типа  $\alpha^2$  (с одной жордановой клеткой порядка 2). Если в семействе имеются матрицы более сложной жордановой структуры, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства.

2°. *Двухпараметрические семейства.* Существует ровно два жордановых типа с  $c = 2 : \alpha^3$  (одна жорданова клетка порядка 3) и  $\alpha^2\beta^2$  (две клетки порядка 2 с разными собственными числами).

**Следствие.** *Бифуркационная диаграмма общего двухпараметрического семейства матриц имеет вид кривой, единственными особенностями которой — точки возврата и точки самопересечения (рис. 113). Точкам возврата соответствуют матрицы типа  $\alpha^3$  с одной жордановой клеткой порядка 3, точкам самопересечения — типа  $\alpha^2\beta^2$  с двумя жордановыми клетками порядка 2 при разных собственных числах, точкам кривой — с одной жордановой клеткой порядка 2. Точкам вне кривой отвечают матрицы с простыми собственными числами.*

*Если в семействе имеются матрицы более сложных типов или бифуркационная диаграмма имеет более сложные особенности, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства.*

3°. *Трехпараметрические семейства.* Имеются четыре страта с  $c = 3$ :  $\alpha^2\beta^2\gamma^2$  (три 2-клетки),  $\alpha\alpha$  (две клетки порядка 1 с одинаковым собственным числом),  $\alpha^2\beta^3$  (2 клетки второго и третьего порядка) и  $\alpha^4$  (4-клетка).

Следовательно, точечные особенности бифуркационных диаграмм общих трехпараметрических семейств имеют вид, изображенный на рис. 114. Особенность  $\alpha^4$  называется ласточкиным хвостом: эта поверхность задается уравнением  $\Delta(a, b, c) = 0$ , где  $\Delta$  — дискриминант многочлена  $z^4 + az^2 + bz + c$ . Строго говоря, все сказанное выше относится к комплексному случаю, так что изображенные на рис. 114 поверхности следует рассматривать как комплексные.

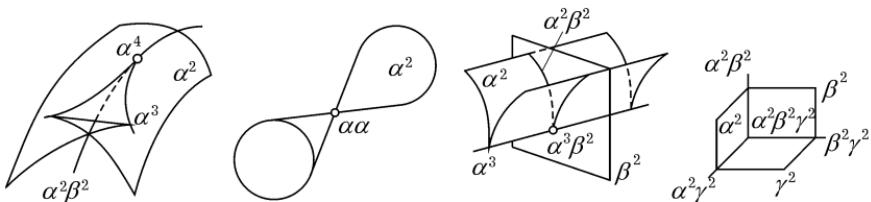


Рис. 114

Версальные деформации вещественных матриц построены Д. М. Галиным (*Д. М. Галин. О вещественных матрицах, зависящих от параметров.* УМН, **27**, 1 (1972), 241–242). Построение производится следующим образом. Пусть вначале вещественный оператор в  $\mathbb{R}^{2n}$ , для которого ищется версальная деформация, имеет единственную пару комплексно сопряженных собственных чисел  $x + iy$  ( $y \neq 0$ ) с жордановыми клетками размеров  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ , так что  $n_1 + n_2 + \dots = n$ . Тогда в некотором вещественном базисе в  $\mathbb{R}^{2n}$  матрица оператора имеет такой же вид, как матрица овеществления комплексного жорданового оператора  $\widehat{A}_0 : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  с единственным собственным числом  $x + iy$  и жордановыми клетками размеров  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ , т. е. вид

$$A_0 = \begin{pmatrix} X & -yE \\ yE & X \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $X$  — верхнетреугольная жорданова вещественная матрица с собственным числом  $x$  и клетками размеров  $n_1 \geq n_2 \geq \dots$ , а  $E$  — единичная матрица порядка  $n$ .

Оказывается, в качестве минимальной версальной деформации вещественной матрицы  $A_0$  можно взять овеществление минимальной комплексной версальной деформации комплексной матрицы  $\widehat{A}_0$ .

Например, в качестве минимальной версальной деформации вещественной матрицы четвертого порядка с двумя жордановыми клетками второго порядка и с собственными числами  $x \pm iy$  можно взять четырехпараметрическую деформацию, которая получается при овеществлении комплексной версальной деформации

$$\begin{pmatrix} z & 1 \\ 0 & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

т. е. деформацию с параметрами  $\rho_1, \rho_2, \tau_1, \tau_2$ :

$$\begin{pmatrix} x & 1 & -y & 0 \\ 0 & x & 0 & -y \\ y & 0 & x & 1 \\ 0 & y & 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \rho_2 & -\tau_1 & -\tau_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tau_1 & \tau_2 & \rho_1 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad z = x + iy, \quad \lambda_k = \rho_k + i\tau_k.$$

Каждая вещественная матрица подобием над полем вещественных чисел приводится к блочно-диагональному виду, в котором каждому вещественному собственному числу отвечает вещественная жорданова

матрица, а каждой паре комплексно сопряженных собственных чисел — блок вида (2).

Версальная вещественная деформация приведенной к такому виду матрицы (с наименьшим возможным числом параметров) получится, если заменить каждый блок его минимальной версальной деформацией. Минимальное число параметров вещественной версальной деформации дается, таким образом, формулой

$$d = \sum_{\lambda} [n_1(\lambda) + 3n_2(\lambda) + 5n_3(\lambda) + \dots],$$

где суммирование распространяется на все  $\nu$  собственных чисел — как вещественных, так и комплексных.

Явные формулы версальных деформаций и таблицы бифуркационных диаграмм вещественных матриц приведены в работе Галина для  $d - \nu \leq 3$ . Для приложений в механике составлены таблицы версальных деформаций симплектических и гамильтоновых (инфinitезимально симплектических) матриц (имеются в виду деформации, сохраняющие симплектичность): Д. М. Галин. Версальные деформации линейных гамильтоновых систем. Труды семинара им. И. Г. Петровского. 1975, вып. 1, стр. 63–74.

Одно из применений полученных бифуркационных диаграмм состоит в следующем. Предположим, что при изучении какого-либо явления получилась бифуркационная диаграмма иной структуры, чем перечисленные здесь. Тогда, вероятно, произошло одно из двух: либо при идеализации явления пропущено что-то существенное, что может качественно изменить структуру диаграммы, либо имеются какие-нибудь специальные причины для дополнительной кратности спектра или для нетрансверсальности к жордановой стратификации (например, симметрия или гамильтоновость задачи).

#### **Е. Задача о классификации особенностей декремент-диаграмм.**

В качестве одного из приложений версальных деформаций матриц мы рассмотрим здесь решение следующей задачи. Пусть дано семейство линейных однородных автономных дифференциальных уравнений. Как известно, асимптотика решений при  $t \rightarrow +\infty$  определяется тем собственным числом оператора, задающего уравнение, которое имеет наибольшую вещественную часть. Спрашивается, как эта вещественная часть зависит от параметров?

Указанная вещественная часть (со знаком минус) в технике называется декрементом. Таким образом, наша задача состоит в исследовании поведения декремента при изменении параметров системы.

Поведение декремента при изменении параметров удобно описывать, указывая на плоскости (в пространстве, ...) параметров линии (поверхности, ...) уровня декремента. Семейство линий уровня декремента на плоскости значений параметров мы будем называть декремент-диаграммой.

Вид декремент-диаграммы сильно меняется от семейства к семейству; в некоторых случаях декремент-диаграмма может иметь весьма сложные особенности. Оказывается, однако, что в семействах общего положения могут встречаться только некоторые простейшие особенности декремент-диаграмм: все более сложные особенности распадаются при малом шевелении семейства.

В настоящем параграфе описаны все особенности декремент-диаграмм двухпараметрических семейств общего положения.

Классификация особенностей декремент-диаграмм общего положения может оказывать при исследовании зависимости систем от параметров такие же услуги, какие классификация особых точек общего положения оказывает при исследовании фазовых портретов.

Появление на декремент-диаграмме особенности необщего положения должно вызывать тревогу: оно может объясняться специальной симметрией семейства или может свидетельствовать о неадекватной идеализации («некорректности»), при которой неучтенные в уравнениях малые эффекты (например, «паразитные связи» в радиотехнике) способны качественно менять картину.

Классификация особенностей двухпараметрических декремент-диаграмм общего положения содержит, в частности, исследование особенностей границы области устойчивости в трехпараметрических семействах линейных уравнений общего положения (поверхности нулевых декрементов).

Полученные результаты можно применять и к нелинейным системам, имеющим стационарные точки, гладко зависящие от параметров: декремент линеаризации нелинейной системы в такой точке будет, как функция параметров, иметь лишь простейшие особенности (в случае семейства общего положения).

При применении полученных результатов к нелинейным системам нужно, однако, исключить часть границы области устойчивости, соответствующую нулевым корням, так как на ней теряется гладкая зависимость стационарной точки от параметров. Таким образом, описание особенностей границы области устойчивости для нелинейных систем общего положения (и описание декремент-диаграмм в окрестности точек этой границы) требует дополнительного исследования. Мы вернемся к этому вопросу в следующих параграфах.

При изучении итераций отображений, а также уравнений с периодическими коэффициентами или движений в окрестности периодической траектории

рии роль декремента играет наибольший из модулей собственных чисел. Если этот модуль отличен от единицы, то его особенности (как функции от параметров в семействе общего положения) такие же, как у декремента семейства общего положения. Поэтому далее рассматривается только декремент.

При исследовании модулей собственных чисел в нелинейных задачах указанных только что типов результаты настоящего параграфа применимы вне границы устойчивости, и в тех точках границы, для которых единица — не собственное число.

### Ж. Декремент-диаграммы.

Рассмотрим семейство линейных операторов  $A$  в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ , гладко зависящих как от параметра от точки  $\lambda$  пространства параметров  $\Lambda$ ,

$$A(\lambda) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

**Определение.** Инкрементом<sup>1</sup> семейства назовем функцию  $f$  от параметра, значение которой в точке  $\lambda$  равно наибольшей вещественной части собственных чисел оператора  $A(\lambda)$ :

$$f(\lambda) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{A(\lambda)t}\|.$$

Функция  $f$  непрерывна, но не обязательно дифференцируема. Наша задача — изучение особенностей функции  $f$  для двухпараметрических семейств общего положения. Таким образом, пространством параметров  $\Lambda$  можно считать плоскость  $\mathbb{R}^2$  или область на плоскости.

Семейство линий уровня функции  $f$  на плоскости  $\Lambda$  мы будем называть декремент-диаграммой. Чертотка поперек линии уровня («бергштрих» топографов) будет указывать направление ската, т. е. направление, по которому  $f$  уменьшается. Иными словами, черточка направлена в сторону повышения устойчивости.

ПРИМЕР. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\ddot{z} = xz + y\dot{z},$$

зависящее от двух параметров  $(x, y)$ . Матрица соответствующей системы имеет вид

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}.$$

---

<sup>1</sup> В технике величина  $|f|$  называется декрементом при  $f < 0$  и инкрементом при  $f > 0$ .

Декремент-диаграмма изображена на рис. 115. Парабола  $4x + y^2 = 0$  делит плоскость  $(x, y)$  на две части. В каждой из них инкремент — гладкая функция. Слева от параболы собственные числа комплексное и  $f = \frac{y}{2}$ . Справа собственные числа вещественные,  $f = \frac{(y \pm \sqrt{4x + y^2})}{2}$ . Линии уровня инкремента — касательные к параболе лучи.

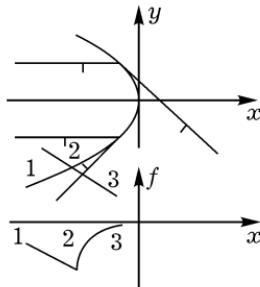


Рис. 115

Все точки параболы являются особыми точками декремент-диаграммы. Им соответствуют матрицы  $A$  с жордановой клеткой порядка 2. При пересечении параболы слева направо линейное изменение инкремента сменяется коренным.

Ясно, что указанная здесь особенность неустранима малым шевелением семейства. Существуют и другие неустранимые особенности; наша цель — их полное перечисление.

### 3. Страты коразмерности один и два в пространстве матриц.

Если максимальную вещественную часть имеет одно вещественное собственное число матрицы  $A(\lambda_0)$  или одна пара комплексно-сопряженных собственных чисел<sup>1</sup>, то инкремент — гладкая функция в окрестности рассматриваемого значения параметра  $\lambda_0$ .

Гладкость теряется лишь в случае, когда собственное число с максимальной вещественной частью не единственно. Матрица, у которых максимальную вещественную часть имеют несколько собственных чисел сразу, образуют замкнутое полуалгебраическое<sup>2</sup> подмногообразие  $F$  в пространстве  $\mathbb{R}^{n^2}$

<sup>1</sup>Здесь и дальше считается, что числа комплексно сопряженной пары не вещественны.

<sup>2</sup>Полуалгебраическим подмногообразием линейного пространства называется конечное объединение множеств, заданных конечными системами полиномиальных уравнений и неравенств.

всех матриц порядка  $n$ . Коразмерность этого многообразия равна единице, а его дополнение состоит из двух открытых компонент:

*D<sub>1</sub>. Страт* ( $\alpha$ ). Максимальную вещественную часть имеет ровно одно вещественное собственное число.

*D<sub>2</sub>. Страт* ( $\alpha \pm i\omega$ ). Максимальную вещественную часть имеет ровно одна комплексно сопряженная пара.

Многообразие  $F$  легко стратифицировать. Страты максимальной размерности (коразмерности 1) исчерпываются следующим списком:

*F<sub>1</sub>. Страт* ( $\alpha^2$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно два совпадающих собственных числа; они вещественны и им отвечает жорданова клетка порядка 2.

*F<sub>2</sub>. Страт* ( $\alpha, \alpha \pm i\omega$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно три собственных числа: одно вещественное и одна комплексно сопряженная пара.

*F<sub>3</sub>. Страт* ( $\alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно две различные комплексно сопряженные пары.

Ясно, что страты  $F_1, F_2, F_3$  — гладкие регулярные незамкнутые непересекающиеся подмногообразия коразмерности один в пространстве всех матриц  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Остаток  $F \setminus (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$  многообразия  $F$  (многообразия матриц с неединственным собственным числом с максимальной вещественной частью) является замкнутым полуалгебраическим подмногообразием коразмерности два в пространстве всех матриц  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Страты максимальной размерности многообразия  $F \setminus (F_1 \cup F_2 \cup F_3)$  имеют коразмерность 2 в  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Их легко перечислить:

*G<sub>1</sub>. Страт* ( $\alpha^3$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно три собственных числа; они вещественны и им отвечает жорданова клетка порядка 3.

*G<sub>2</sub>. Страт* ( $(\alpha \pm i\omega)^2$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно две совпадающие пары комплексно собственных чисел; им отвечают жордановы клетки порядка 2.

*G<sub>3</sub>. Страт* ( $\alpha^2, \alpha \pm i\omega$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно четыре собственных числа; двум вещественным отвечает жорданова клетка порядка 2, а два комплексных образуют комплексно сопряженную пару.

*G<sub>4</sub>. Страт* ( $\alpha, \alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно пять собственных чисел: одно вещественное и две различные комплексно сопряженные пары.

*G<sub>5</sub>. Страт* ( $\alpha \pm i\omega_1, \alpha \pm i\omega_2, \alpha \pm i\omega_3$ ). Максимальную вещественную часть имеют ровно три различные комплексно сопряженные пары.

Страты  $G_1 - G_5$  являются регулярными незамкнутыми непересекающими подмногообразиями<sup>1</sup> коразмерности 2 в пространстве всех матриц  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

<sup>1</sup>Все многообразия  $D_i, F_i, G_i$  связаны при достаточно больших  $n$ . Исключения:

Остаток  $F \setminus \cup F_i \setminus \cup G_i$  является замкнутым полуалгебраическим подмногообразием коразмерности 3 в  $\mathbb{R}^{n^2}$ .

Из слабой теоремы трансверсальности (§ 29) вытекает

**Следствие.** В двухпараметрических семействах матриц общего положения не встречаются матрицы, имеющие наборы собственных чисел с максимальной вещественной частью, отличные от перечисленных выше ( $D_i$ ,  $F_i$ ,  $G_i$ ) эти же наборы встречаются лишь трансверсально.

Таким образом, в семействе общего положения наборы собственных чисел коразмерности 1 ( $F_i$ ) встречаются на гладких кривых в плоскости параметров, имеющих особые точки лишь в тех точках плоскости параметров, где появляются наборы коразмерности 2 ( $G_i$ ). Последнее обстоятельство может иметь место лишь в изолированных точках плоскости параметров.

Отрезки  $F_1$  и  $F_2$ , если присоединить к ним их особые точки  $G_i$ , образуют кривые, которые делят плоскость параметров на части двух типов:  $D_1$  и  $D_2$ . Нетрудно сообразить, что все отрезки  $F_3$  лежат в части  $D_2$ .

Далее,

точки  $G_1(\alpha^3)$  лежат на стыке  $F_1(\alpha^2)$  и  $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$ .

$G_2((\alpha \pm i\omega)^2)$  примыкают к  $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$ .

$G_3(\alpha^2, \alpha \pm i\omega)$  — на стыке  $F_1(\alpha^2)$ ,  $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$ ,  $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$ .

$G_4(\alpha, \alpha \pm i\omega_{1,2})$  — на стыке  $F_2(\alpha, \alpha \pm i\omega)$  и  $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$ .

$G_5(\alpha \pm i\omega_{1,2,3})$  примыкают к  $F_3(\alpha \pm i\omega_{1,2})$ .

На рис. 116 изображен (гипотетический) пример конфигурации, которую могут образовывать эти линии на плоскости параметров в семействе общего положения.

## И. Строение декремент-диаграмм вблизи точек стратов коразмерности 0 и 1.

На дополнении к множеству особенностей  $F$  инкремент  $f$  — гладкая функция параметров. Однако у декремент-диаграмм в некоторых точках этого дополнения могут быть особенности: это — критические точки функции  $f$ .

Вне  $F$  инкремент семейства общего положения имеет лишь простые критические точки, т. е. точки следующих трех типов, превращающихся в 6, если различать случаи вещественных корней ( $D_1$ ) и комплексных ( $D_2$ ):

$D_i^0$ . Минимум. В окрестности рассматриваемой точки плоскости параметров можно выбрать гладкие координаты  $(x, y)$  так, что инкремент будет иметь вид  $f = \text{const} + x^2 + y^2$ .

---

при  $n = 2$  —  $D_2$  и  $F_1$ , при  $n = 4$  —  $F_3$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , при  $n = 6$  —  $G_5$  имеют по две компоненты.

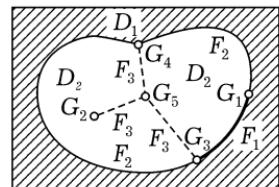


Рис. 116

$D_i^1$ . Седло. В подходящих координатах  $f = \text{const} + x^2 - y^2$ .

$D_i^2$ . Максимум.  $f = \text{const} - x^2 - y^2$ .

Изучим теперь поведение функции  $f$  вблизи неособых точек множества  $F$ , т. е. вблизи внутренних точек кривых  $F_i$  плоскости параметров. Здесь следует различать два случая: точка кривой  $F_i$  может быть некритической для инкремента, рассматриваемого как гладкая функция на этой кривой, но может быть и критической.

Из теоремы трансверсальности вытекает, что в семействах общего положения критические точки сужений инкремента на кривые  $F_i$  могут быть только невырожденными максимумами или минимумами.

Соединяя эту информацию с явными формулами версальных семейств матриц из п. Б, мы без труда приходим к следующим нормальным формам инкремента вблизи точек стратов коразмерности один.

**Теорема.** В окрестности некритической точки сужения инкремента семейства общего положения на кривую  $F_i$  можно выбрать гладкие координаты  $(x, y)$  на плоскости параметров так, что инкремент  $f$  примет один из следующих трех видов (рис. 117):

Случай  $F_1^0$  (жорданова клетка):

$$f = \text{const} + y + \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{если } x \geq 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Рис. 117

Случай  $F_2^0$  и  $F_3^0$  (простой обгон):

$$f = \text{const} + x + |y|.$$

Кривые  $F_1^0$  и  $F_2^0$  разделяют области вещественных и комплексных корней  $D_1$  и  $D_2$ . Линии уровня инкремента подходят к кривой  $F_1$  со стороны вещественных корней с касанием, а со стороны комплексных — трансверсально. К кривым  $F_2$  и  $F_3$  линии уровня декремента подходят в точках  $F_2^0$ ,  $F_3^0$  трансверсально с обеих сторон. Угол линий уровня, меньший  $180^\circ$ , образующийся на линиях излома  $F_i$ , во всех случаях содержит направление уменьшения  $f$  вдоль линии.

**Теорема.** В окрестности критической точки сужения инкремента семейства общего положения можно выбрать координаты  $(x, y)$  так, что инкремент примет один из ниже перечисленных 12 видов (рис. 118).

Случай  $F_2^k$  и  $F_3^k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  (условный экстремум при обгоне):

$$f = \text{const} + \varepsilon x^2 + \varphi(y) + |y|, \quad \varepsilon = (-1)^k,$$

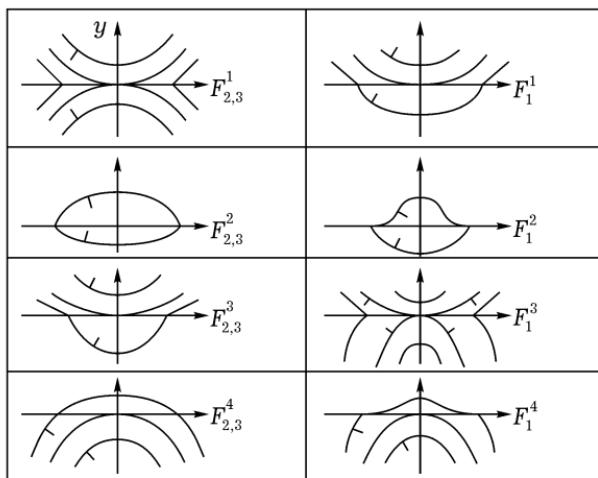


Рис. 118

где  $\varphi(y) = ay + \dots$  — гладкая функция,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ .

Четыре значения  $k$  получаются при комбинации двух знаков  $\varepsilon$  и двух возможностей для  $a$ :

$$\begin{array}{c|cc|cc} k & 1, 2 & & 3, 4 \\ \hline a & (0, 1) & & (1, +\infty) \end{array}.$$

Нечетные  $k$  соответствуют условному максимуму, а четные — минимуму. Чтобы получить ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случай  $\varphi(y) = ay$ : в этом случае линии уровня  $f$  состоят из кусков двух парабол, сдвигаемых вдоль оси  $y$ .

Случай  $F_1^k$ ,  $k = 1, \dots, 4$  (условный экстремум с жордановой клеткой  $\alpha^2$ ):

$$f = \text{const} + \varepsilon x^2 + \varphi(y) + \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{если } y \geq 0, \\ 0, & \text{если } y \leq 0. \end{cases}$$

Здесь  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $\varphi(y) = ay + \dots$  — гладкая функция,  $a \neq 0$ .

Четыре значения  $k$  получаются при комбинациях знаков  $\varepsilon$  и  $a$ :

$$\begin{array}{c|cc|cc|cc} k & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline \text{знак } \varepsilon, \text{ знак } a & -- & -+ & +- & ++ \end{array}.$$

Нечетные  $k$  соответствуют условному максимуму, а четные — минимуму. Чтобы получить ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случаи  $\varphi(y) = \pm y$ .

Наша теорема утверждает, что никаких других особенностей во внутренних точках кривых  $F$ , кроме особенностей перечисленных 15 видов  $F_i^k$  ( $15 = 3 + 12$ ), инкремент двухпараметрического семейства общего положения не имеет: если в некотором семействе есть другие особенности, то от них можно избавиться сколь угодно малым шевелением семейства. Особенности же  $F_i^k$ , очевидно, неустранимы.

### **К. Строение декремент-диаграмм вблизи стратов коразмерности 2.**

При исследовании особенностей стратов коразмерности 2 в двухпараметрических семействах общего положения можно рассматривать только «самые невырожденные» случаи, так как любое вырождение повышает коразмерность и особенность становится устранимой.

Комбинируя теорему трансверсальности и явные формулы для версальных семейств матриц из п. Б, мы приходим к следующим нормальным формам инкремента вблизи точек стратов коразмерности 2.

**Теорема.** В окрестности точки каждого страта коразмерности 2 ( $G_i$  в обозначениях п. 3) на плоскости параметров семейства общего положения можно выбрать гладкие координаты  $(x, y)$  так, что инкремент  $f$  примет один из нижеперечисленных 18 видов (рис. 119).

*Случай  $G_1^\pm$  (жорданова клетка порядка 3):*

$$f = \varphi(x, y) + \lambda(x, y),$$

где  $\lambda$  — наибольшая из вещественных частей корней кубического уравнения  $\lambda^3 = x\lambda + y$ , а  $\varphi$  — гладкая функция, такая, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = a \neq 0$ .

Вид декремент-диаграммы определяется знаком числа  $a$ .

Знак «+» или «-» в  $G_1^\pm$  отвечает  $a > 0$  и  $a < 0$  соответственно. Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случаи  $\varphi = \pm x$ . К точке  $x = y = 0$  подходят две касающиеся в ней особые кривые: луч  $F_2$  ( $y = 0, x < 0$ ) и половина полукубической параболы  $F_1$  ( $4x^3 = 27y^2, y < 0$ ). Эти две кривые отделяют область комплексно-сопряженных корней  $D_2$  (выпуклую) от области вещественных корней  $D_1$ . При движении вдоль границы областей  $D_1$  и  $D_2$  инкремент  $f$  в случае  $a > 0$  меняется монотонно, а в случае  $a < 0$  имеет в точке  $G_1^-$  минимум. Со стороны  $D_1$  линии уровня  $f$  касаются полукубической параболы  $F_1$ .

*Случай  $G_2^\pm$  (комплексная пара жордановых 2-клеток):*

$$f = \varphi(x, y) + |\operatorname{Re} \sqrt{x + iy}|.$$

Здесь  $\operatorname{Re}$  — вещественная часть,  $\varphi$  — гладкая функция, такая, что  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = a \neq 0$ . Вид декремент-диаграммы определяется знаком числа  $a$ .

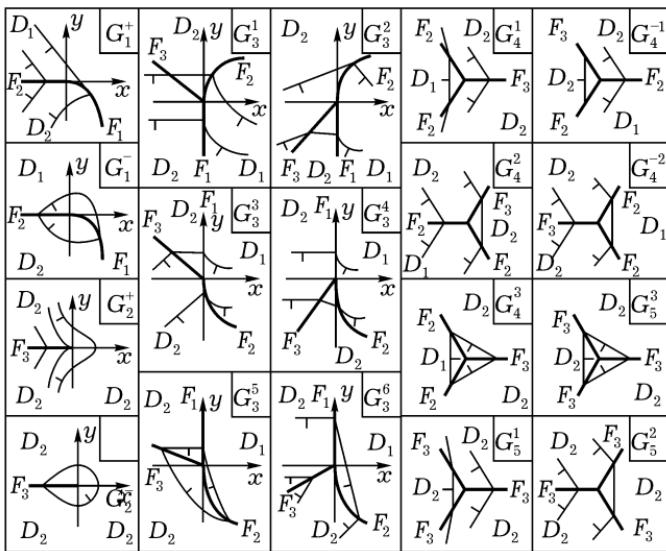


Рис. 119

Знаки «+» и «-» в  $G_2^\pm$  отвечают  $a > 0$  и  $a < 0$  соответственно. Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно рассмотреть случаи  $\varphi = \pm x$ . К точке  $x = y = 0$  подходит (и кончается в ней) луч  $F_3$  ( $y = 0, x < 0$ ). В случае  $a < 0$  функция  $f$  имеет в точке  $G_2^-$  ( $x = y = 0$ ) минимум. В случае  $a > 0$  точка  $G_2^+$  ( $x = y = 0$ ) — топологически неособая для функции  $f$ . Проходящая через эту точку линия уровня функции  $f$  имеет особенность полукубического типа.

*Случай  $G_3^k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ; столкновение комплексной пары с жордановой клеткой):*

$$f = \text{const} + y + \max \begin{cases} \sqrt{x}, \varphi(x, y), & \text{если } x \geq 0, \\ 0, \varphi(x, y), & \text{если } x \leq 0. \end{cases}$$

Здесь  $\varphi(x, y) = ax + by + \dots$  — гладкая функция,  $a \neq 0, b \neq 0, b \neq -1$ .

Шесть значений  $k$  получаются при комбинировании двух возможностей для знака  $a$  и трех интервалов изменения  $b$ :

$k$	1	2	3	4	5	6
знак $a$	+	-	-	+	-	+
интервал $b$	$(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-1, 0)$	$(-1, 0)$	$(-\infty, -1)$	$(-\infty, -1)$

Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно взять функцию  $\varphi$  линейной. К точке подходят три гладких луча  $F_1, F_2, F_3$ , причем  $F_1$  и  $F_2$  идут навстречу друг другу (с касанием первого порядка), а  $F_3$  подходит трансверсально со стороны комплексных корней,  $D_2$ . В случае  $G_3^5$  (т.е. когда  $a < 0, b < -1$ ) инкремент имеет в точке  $x = y = 0$  минимум; в остальных случаях точка  $G_3^k$  ( $k \neq 5$ ) — топологически неособая точка функции  $f$ .

*Случай  $G_5^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) (двойной обгон):*

$$\varphi = \text{const} + x + \max(|y|, \varphi(x, y)),$$

где  $\varphi(x, y) = ax + by + \dots$  — гладкая функция,  $a < 0, b > 0, a + 1 \neq \pm b$ .

Три значения  $k$  для  $G_5^k$  соответствуют интервалам изменения  $a$ :

$k$	1	2	3
условие на $a$	$b - 1 < a$	$-b - 1 < a < b - 1$	$a < -b - 1$

Чтобы составить себе ясное представление о виде декремент-диаграммы, достаточно взять функцию  $\varphi$  линейной.

В каждом из трех случаев ( $k = 1, 2, 3$ ) в точке  $G_5^k$  сходятся трансверсально три гладкие ветви кривой  $F_3$ . В последнем случае эта точка — минимум инкремента, в первом и втором — топологически неособая точка. При подходе к точке  $G_5^k$  по  $k$  из трех лучей инкремент убывает, а по остальным растет.

*Случай  $G_4^k$  ( $k = \pm 1, \pm 2, 3$ ) (двойной обгон с участием вещественного корня).* Инкремент дается той же формулой, что в случаях  $G_5^k$ , но приходится различать больше вариантов в зависимости от того, какому из векторов соответствует вещественный корень.

Отрицательным  $k$  соответствуют случаи, в которых на линии  $F_3$  (на которой сталкиваются комплексные пары) при подходе к точке  $G_4^k$  декремент растет. Два других луча — ветви кривой  $F_2$ .

## Л. Обсуждение.

Рассматривая перечисленные выше нормальные формы, можно прийти к ряду выводов общего характера о строении декремент-диаграмм как в малом, так и в целом. Прежде всего из наших теорем вытекает

**Следствие.** *Инкремент  $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  двухпараметрического семейства общего положения топологически эквивалентен гладкой функции, имеющей лишь простые критические точки.*

А именно, точки минимума — это точки типов  $D_i^0, F_i^2, G_{1,2}^-, G_3^5, G_{4,5}^3$ .

Топологически эквивалентны седлу точки  $D_i^1$  и  $F_i^3$ . В окрестности точек максимума ( $D_i^2$ ) инкремент — гладкая функция. Точки всех остальных типов топологически неособые.

Из сформулированного следствия вытекают, очевидно, неравенства для чисел особых точек разных типов. В частности, если какая-либо замкнутая линия уровня инкремента ограничивает односвязную область, то суммарное число точек типов  $D_i^{0,2}$ ,  $F_i^2$ ,  $G_{1,2}^-$ ,  $G_3^5$ ,  $G_{4,5}^3$  внутри этой области на единицу больше числа точек  $D_i^1$ ,  $F_i^3$ . Неизвестно, переносится ли утверждение следствия на  $l$ -параметрические семейства с  $l > 2$ .<sup>1</sup>

Из того, что отрезки  $F_1$  и  $F_2$  вместе образуют замкнутые кривые, и из описания особенностей на концах отрезков  $F_3$  вытекает

**Следствие.** Если пространство параметров  $\Lambda$  — замкнутое двумерное многообразие, то числа точек типов  $G_1$  и  $G_3$  одинаковой четности, и суммарное числов точек типов  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $G_5$  четно.

Если рассматривать в качестве пространства параметров  $\Lambda$  компактную область с краем, трансверсально пересекающим  $F_i$  и не проходящим через точки  $G_i$ , то результат изменится следующим образом: суммарное число точек типов  $G_1$  и  $G_3$  одинаковой четности с суммарным числом точек пересечения края с  $F_1$  и  $F_2$ , а суммарное число точек типов  $G_2$ ,  $G_3$ ,  $G_4$ ,  $G_5$  — с числом точек пересечения края с  $F_3$ .

Проведенное исследование инкремента позволяет, в частности, изучить особенности границы устойчивости (т. е. линии нулевых инкрементов) на плоскости параметров двухпараметрических систем общего положения. Из наших теорем вытекает

**Следствие.** Граница устойчивости общего двухпараметрического семейства матриц состоит из гладких дуг, пересекающихся трансверсально в своих концевых точках.

Заметим, что точки излома границы устойчивости могут быть, по классификации пп. И и К, типов  $F_1^0$  («жорданова 2-клетка») или  $F_2^0$ ,  $F_3^0$  («простой обгон»). Каждая из дуг границы устойчивости продолжается поэтому за свои концевые точки без потери гладкости. При этом суммарное число точек излома типов  $F_1^0$  и  $F_2^0$  на каждой замкнутой компоненте границы устойчивости всегда четно.

Заметим также, что проведенный анализ особенностей инкремента двухпараметрических семейств достаточен для исследования границы устойчивости в трехпараметрических семействах.

В самом деле, особые точки стратов коразмерности 3, а также критические точки сужений инкремента на страты коразмерности 0, 1 и 2 по

<sup>1</sup> Заметим, что в случае  $l = 2$  особенности инкремента общего семейства такие же, как особенности наибольшей вещественной части корня алгебраического уравнения, коэффициенты которого — функции общего положения от  $l$  параметров. При  $l \geq 3$  это уже не так: инкремент может иметь более сложные особенности.

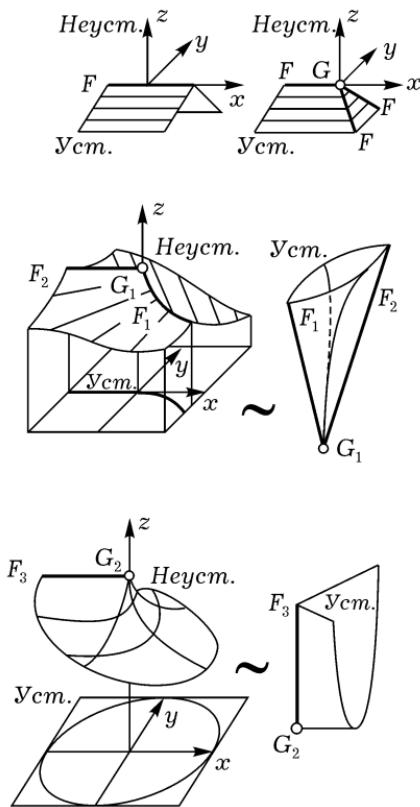


Рис. 120

теореме трансверсальности можно удалить с границы устойчивости малым шевелением семейства. Таким образом, граница устойчивости общего семейства состоит из гладких поверхностей, а ее особенности лежат на кривых, по которым граница устойчивости пересекается с поверхностями типов  $F_i$ , и в точках пересечения границы устойчивости со стратами  $G_i$  (последние в общих трехпараметрических семействах проявляются в виде кривых).

Двигаясь вдоль такой кривой  $G_i$ , мы можем рассматривать наше трехпараметрическое семейство как однопараметрическое семейство двухпараметрических (два параметра — координаты в трансверсальной к  $G_i$  площадке, один — координата  $t$  вдоль  $G_i$ ). Рассматривая нормальные формы пп. И и К, мы должны теперь считать все постоянные  $\text{const}$  и произвольные функции  $\varphi$  гладко зависящими от параметра  $t$ . Более того, в случае общего положения