

мы можем принять за параметр z сами эти функции $\varphi(x, y, t)$. Мы приходим, таким образом, к следующему выводу.

Следствие. Особенности границы устойчивости общего трехпараметрического семейства матриц такие же, как особенности графиков инкрементов общих двухпараметрических семейств¹. Эти особенности, с точностью до диффеоморфизма², исчерпываются следующим списком (рис. 120):

Двугранный угол (F_i): $|y| + z = 0$.

Трехгранный угол ($G_{3,4,5}$): $z + \max(x, |y|) = 0$.

Тупик на ребре (G_2): $z + |\operatorname{Re} \sqrt{x+iy}| = 0$.

(Эта поверхность в \mathbb{R}^3 диффеоморфна поверхности, заданной уравнением $XY^2 = Z^2$, где $X \geq 0$, $Y \geq 0$.)

Излом ребра (G_1): $z + \lambda(x, y) = 0$, где λ — наибольшая из вещественных частей корней уравнения $\lambda^3 = x\lambda + y$. (Эта поверхность в \mathbb{R}^3 диффеоморфна поверхности, заданной уравнением $X^2Y^2 = Z^2$, где $X \geq 0$, $Y \geq 0$.)

Углы границы устойчивости направлены всегда наружу, вклиниваясь в область неустойчивости. По-видимому, это — проявление весьма общего принципа, согласно которому все хорошее хрупко.

Из сказанного вытекают также некоторые глобальные свойства границы устойчивости. Например, если эта граница замкнута, то суммарное число вершин типов (G_i , $i > 1$) четно, равно как и число вершин типов G_1 и G_3 вместе.

Доказательства приведенных теорем можно найти в статье: *В. И. Арнольд*. Лекции о бифуркациях и нереальных семействах. УМН 27, 5 (1972), 119–184.

§ 31. Бифуркации особых точек векторного поля

В этом параграфе рассматриваются однопараметрические семейства дифференциальных уравнений. Исследуются бифуркации особых точек для семейств общего положения.

А. Кривая особых точек.

Рассмотрим векторное поле, гладко зависящее от параметра. Предположим, что при некотором значении параметра поле имеет особую точку. Поставим себе вопрос: что будет происходить с особой точкой при изменении параметра?

¹Точно так же особенности границы устойчивости $(n+1)$ -параметрических семейств — такие же, как у графиков инкрементов n -параметрических.

²Речь идет об отображении, продолжаемом до диффеоморфизма окрестности поверхности.

Теорема. Особая точка векторного поля, гладко зависящего от параметра, сама гладко зависит от параметра, пока все собственные числа линейной части поля в особой точке отличны от нуля.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

В окрестности изучаемой точки и изучаемого значения параметра семейство полей в n -мерном фазовом пространстве задается n функциями от $n + 1$ переменной (от n фазовых координат и от параметра ε). Особые точки задаются системой n уравнений относительно $n + 1$ переменной, $v(x, \varepsilon) = 0$. По теореме о неявной функции, эти уравнения локально определяют гладкую кривую $x = \gamma(\varepsilon)$, если в рассматриваемой начальной точке определитель $\frac{\partial v}{\partial x}$ отличен от нуля. Но этот определитель равен произведению собственных чисел линеаризации поля в особой точке. Он отличен от 0 по предположению. ■

Замечание. Особые точки, в которых все собственные числа линеаризованного поля отличны от нуля, называются *невырожденными*. Таким образом, если поле гладко зависит от параметра, то его особые точки гладко зависят от параметра, пока они остаются невырожденными. Проведенное выше доказательство сохраняет силу при любой размерности пространства параметров.

У поля общего положения все особые точки невырождены. Однако если рассматривается семейство векторных полей, то при некоторых значениях параметра могут возникать вырождения, неустранимые малым шевелением семейства.

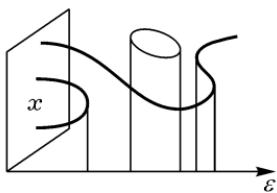


Рис. 121

Исследуем вырождения в однопараметрических семействах общего положения векторных полей в n -мерном пространстве.

Рассмотрим $(n+1)$ -мерное пространство, являющееся прямым произведением фазового пространства и оси значений параметра ε . Будем обозначать точку фазового пространства буквой x . Наше семейство задает семейство дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon).$$

Рассмотрим в нашем $n + 1$ -мерном пространстве множество, образованное особыми точками уравнений семейства при всех значениях

параметра (рис. 121):

$$\Gamma = \{x, \varepsilon : v(x, \varepsilon) = 0\}.$$

Теорема. Для семейства общего положения множество особых точек является гладкой кривой.

Здесь и далее слова «семейства общего положения» означают «семейства из некоторого всюду плотного множества в пространстве всех семейств»; всюду плотное множество, о котором идет речь, открытое, если область определения семейства компактна или если семейства рассматриваются в тонкой топологии (см. § 29); во всяком случае это всюду плотное множество является пересечением счетного количества открытых множеств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Теорема вытекает из теоремы трансверсальности (§ 29), или из леммы Сарда (§ 10).

Действительно, по теореме о неявной функции, Γ — локально гладкая кривая, если 0 — не критическое значение локального отображения $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, \varepsilon) \mapsto v(x, \varepsilon)$. Но для отображения общего положения значение 0 не критическое. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. В этой теореме размерность пространства параметров также несущественна.

Доказанная теорема сразу исключает некоторые бифуркации особых точек.

Рассмотрим, например, бифуркации, изображенные на рис. 122 слева. Из теоремы следует, что при малом шевелении семейства такие бифуркации не сохраняются. Действительно, легко видеть, что, вообще говоря, эти бифуркации распадаются при малом шевелении одним из указанных на рис. 122 справа способов. Если в какой-либо задаче появляются бифуркации вида, указанного на рис. 122 слева, то это свидетельствует о том, что рассматриваемое семейство не общего положения. Это может быть связано с какой-либо особой симметрией ситуации, или же может свидетельствовать о неадекватной идеализации, при которой мы пренебрегли каким-либо малым эффектом, способным, однако, качественно

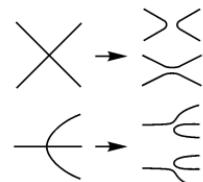


Рис. 122

изменить поведение особых точек в зависимости от параметра. Чтобы указать, какой именно из случаев имеет место в реальной системе, при идеализации которой возникла необщая бифуркация, нужно вычислить некоторые из отброшенных при идеализации членов дифференциального уравнения. Формулы следующих разделов подсказывают, какие именно члены нужно вычислять.

Б. Бифуркационные значения параметра.

Предположим, что множество особых точек семейства является гладкой кривой ($\text{rank } \frac{\partial v}{\partial(x, \varepsilon)} = n$). Рассмотрим отображение проектирования этой гладкой кривой на ось значений параметра. Точки, в которых кривая плохо проектируется на ось ε — это как раз вырожденные особые точки. Действительно, по теореме о неявной функции в окрестности невырожденной особой точки кривая особых точек является графиком гладкой функции от параметра.

Определение. Значение параметра, которому соответствует вырожденная особая точка, называется *бифуркационным значением параметра*, а сама вырожденная особая точка в прямом произведении фазового пространства на ось значений параметра — *бифуркационной точкой*.

Рассмотрим значение параметра ε как функцию на кривой особых точек. *Бифуркационные значения параметра* — это критические значения этой функции, а *бифуркационные точки* — это критические точки функции (точки, где дифференциал функции равен 0).

Критическая точка функции называется *невырожденной*, если второй дифференциал функции в этой точке невырожден (в данном случае речь идет о функциях одной переменной, так что невырожденность второго дифференциала означает его отличие от нуля). Соответствующая бифуркационная точка называется тогда *невырожденной бифуркационной точкой*.

Определение. Бифуркационное значение параметра называется *регулярным*, если ему соответствует ровно одна бифуркационная точка, и притом невырожденная.

Теорема. Для однопараметрических семейств общего положения все бифуркационные значения параметра регулярны. Если фазовое пространство компактно, то бифуркационные значения параметра изолированы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Утверждение легко выводится из теоремы трансверсальности, детали представляются читателю. ■

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема означает, что по мере изменения параметра особые точки семейства общего положения могут лишь попарно съедать друг друга или рождаться парами, когда параметр проходит через бифуркационные значения (рис. 121). Бифуркации этого вида устойчивы (сохраняются при малом шевелении семейства). Все более сложные бифуркации при малом шевелении общего вида распадаются на несколько бифуркаций описанного типа (рис. 123).

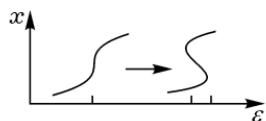


Рис. 123

В. Пример: векторные поля на прямой.

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей на прямой, задающее дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}.$$

При $\varepsilon = 0$ это векторное поле имеет простейшую вырожденную особую точку ($x = 0$). При переходе параметра через регулярное бифуркационное значение $\varepsilon = 0$ происходит, в зависимости от знака перед x^2 , либо взаимное уничтожение двух особых точек — устойчивой и неустойчивой, либо рождение пары особых точек, которые сразу же разбегаются (с асимптотикой $\sqrt{|\varepsilon|}$).

Нетрудно проверить, что бифуркация в этом примере является единственной бифуркацией, неустранимой в однопараметрических семействах общего положения векторных полей на прямой.

Определение. Пусть даны два семейства векторных полей, зависящих от параметра. Семейства называются *топологически эквивалентными*, если существуют гомеоморфизм пространств параметров и непрерывно зависящее от параметра семейство гомеоморфизмов фазового пространства, переводящие семейство ориентированных фазовых кривых первого семейства при каждом значении параметра в семейство ориентированных фазовых кривых второго семейства при соответствующем значении параметра.

Заметим, что гомеоморфизмы, о которых идет речь в этом определении, определяют гомеоморфизм прямых произведений фазовых про-

странства на пространства значений параметров $(x, \varepsilon) \mapsto (h(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon))$, переводящий фазовые кривые системы $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$, $\dot{\varepsilon} = 0$ в фазовые кривые второй системы такого же вида.

Аналогичным образом определяется эквивалентность ростков семейств в точке. Если пара (x_0, ε_0) — точка фазового пространства и точка пространства параметров, то гомеоморфизмы, осуществляющие эквивалентность, должны определять гомеоморфизм $(x, \varepsilon) \mapsto \mapsto (h(x, \varepsilon), \varphi(\varepsilon))$ некоторой окрестности точки (x_0, ε_0) в прямом произведении.

Теорема. *В окрестности невырожденной бифуркационной точки однопараметрическое семейство векторных полей на прямой эквивалентно ростку семейства, задающего уравнение $\dot{x} = x^2 + \varepsilon$ в точке $x = 0, \varepsilon = 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Функция $v(x, \varepsilon)$, задающая поле, меняет знак на кривой Γ . Выберем начало координат (x, ε) в бифуркационной точке. Ввиду невырожденности этой точки, уравнение кривой Γ имеет вид $\varepsilon = Cx^2 + O(|x|^3)$, $C \neq 0$. Отсюда непосредственно вытекает доказываемое утверждение. ■

Доказанная теорема вместе с теоремой пункта Б доставляет полное топологическое описание бифуркаций особых точек векторных полей на прямой в семействах общего положения с одним параметром.

Г. Бифуркации периодических решений.

Совершенно таким же образом исследуются бифуркации неподвижных точек гладких отображений, а также бифуркации периодических решений дифференциальных уравнений (бифуркации замкнутых фазовых или интегральных кривых). Условие невырожденности неподвижной точки отображения состоит в том, что все собственные числа линеаризации отличны от единицы. В случае периодических решений не должны обращаться в единицу собственные числа линеаризации функции последования (то есть собственные числа оператора монодромии, определенного уравнением в нормальных вариациях вдоль рассматриваемого решения).

В частности, если уравнение $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ имеет периодическое решение $x = \varphi(t)$ с периодом T и выполнено указанное выше условие невырожденности, то при малых ε существует и единственное периодическое решение $x = \Phi(t, \varepsilon)$ с периодом $T(\varepsilon)$, обращающееся в φ

при $\varepsilon = 0$ (единственной является, конечно, фазовая кривая: начало отсчета времени можно менять).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поиск периодического решения Φ в виде ряда по ε называется *методом малого параметра* Пуанкаре; решение φ называется *порождающим решением*. Аналогичный метод применим в неавтономном случае, когда v имеет по t период $T(\varepsilon)$ и ищутся $T(\varepsilon)$ -периодические решения.

ЗАДАЧА. Найти с ошибкой порядка ε^2 2π -периодическое решение уравнения $\ddot{x} = \sin x + \varepsilon \cos t$, обращающееся в $x \equiv 0$ при $\varepsilon = 0$.

§ 32. Версальные деформации фазовых портретов

В этом параграфе определяются топологически нереальные деформации фазовых портретов и указывается их явный вид для простейших вырожденных особых точек.

А. Теория локальных бифуркаций и локальная качественная теория.

Как уже указывалось выше, вырожденные особые точки встречаются неустранимым образом в том случае, когда мы интересуемся не индивидуальным векторным полем, а семейством полей, зависящих от параметра. При этом в семействах общего положения встречаются лишь простейшие вырождения.

К исследованию строения векторного поля вблизи вырожденной особой точки можно применить обычные методы качественной теории дифференциальных уравнений (см. гл. 3). Эти методы для простейших вырождений позволяют провести достаточно полное топологическое исследование фазового портрета. Таким образом, мы в состоянии изучить локальный фазовый портрет как при общих значениях параметра, так и при особых значениях. В этом состоит обычный подход к задачам о семействах дифференциальных уравнений.

Рассмотрение простейших бифуркаций показывает, что при таком подходе теряется самая сущность явлений, происходящих вблизи критического значения параметра. Дело в том, что окрестность невырожденной особой точки, в которой фазовый портретдается локальной теорией, стягивается к нулю при подходе к особому значению параметра (рис. 124), а при особом значении параметра скачком вырастает снова. В результате перестройка фазового портрета (скажем, подход соседней особой точки) остается вне области применимости локальной теории.

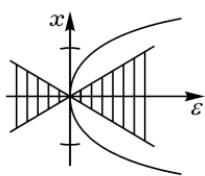


Рис. 124

Таким образом, локальная теория пропускает наиболее существенное явление, происходящее при особом значении параметра явление бифуркации. Итак, мы приходим к выводу, что *изучение вырожденных особых точек представляет реальный интерес лишь в том случае, когда оно сопровождается исследованием семейств, в которых рассматриваемый тип вырождения неустраним, и притом — в окрестности вырожденной особой точки в прямом произведении фазового пространства и пространства параметра*. Иными словами, окрестность особой точки в фазовом пространстве, в которой следует исследовать фазовый портрет, не должна зависеть от параметра (не должна стягиваться к нулю при подходе параметра к особому значению).

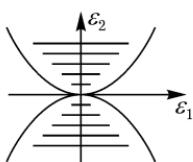


Рис. 125

Совершенно такие же рассуждения показывают, насколько опасно неверное определение числа параметров, существенных для исследования изучаемой бифуркации. Например, при изучении существенно двухпараметрического явления с однопараметрической точки зрения обычным будет следующее явление (рис. 125). При каждом значении неучтенного параметра удается изучить бифуркации в однопараметрическом семействе уравнений, зависящих от второго параметра. Но интервал значений второго параметра вблизи особого значения, в котором удается провести исследование, будет стягиваться к нулю при подходе неучтенного параметра к особым значениям. Рассмотрение задачи как двухпараметрической (т. е. в не зависящей от величины второго параметра окрестности особого значения первого параметра) позволяет исследовать локальными методами бифуркации, которые с однопараметрической точки зрения кажутся глобальными.

Примером такой двухпараметрической задачи, которая кажется на первый взгляд однопараметрической, является задача о потере устойчивости замкнутой фазовой кривой. Здесь естественным параметром является модуль собственного числа оператора монодромии; второй параметр, обычно упускаемый из виду, — это аргумент собственного числа, переходящего через единичную окружность. Мы вернемся к этому примеру в § 34.

Б. Топологически версальные деформации.

Рассмотрим семейство дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$.

Локальным семейством $(v; x_0, \varepsilon_0)$ мы будем называть росток отображения v в точке (x_0, ε_0) прямого произведения фазового пространства и пространства параметров. Таким образом, каждый представитель этого ростка задан в окрестности точки (x_0, ε_0) в прямом произведении (а не в окрестности точки x_0 в фазовом пространстве).

Эквивалентностью локальных семейств (1) $(v; x_0, \varepsilon_0)$ и (2) $(w; y_0, \varepsilon_0)$ называется росток (в точке (x_0, ε_0)) непрерывного отображения h , $y = h(x, \varepsilon)$, для представителей которого $h(\cdot, \varepsilon)$ при каждом ε — гомеоморфизм, переводящий фазовые кривые системы (1) (в области определения h) в фазовые кривые системы (2), с сохранением направления движения, причем $h(x_0, \varepsilon_0) = y_0$. Заметим, что при $\varepsilon \neq \varepsilon_0$ точка x_0 не обязана переводиться отображением $h(\cdot, \varepsilon)$ в y_0 .

Локальное семейство (3) $(u; x_0, \mu_0)$ индуцируется из семейства (1) с помощью ростка в точке μ_0 непрерывного отображения φ , $\varepsilon = \varphi(\mu)$, где $\varphi(\mu_0) = \varepsilon_0$, если и $u(x, \mu) = v(x, \varphi(\mu))$.

Локальное семейство $(v; x_0, \varepsilon_0)$ называется *топологически орбитально версальной* (короче, просто *версальной*) деформацией ростка поля $v_0 = v_0(\cdot, \varepsilon_0)$ в точке x_0 , если всякое другое локальное семейство, содержащее тот же росток, эквивалентно индуцированному из данного.

Мы будем в дальнейшем иногда говорить о деформациях, эквивалентностях, индуцированных и версальных деформациях дифференциальных уравнений, имея в виду соответствующие понятия для векторных полей, задающих эти уравнения.

Следует подчеркнуть, что существование топологически версальной деформации данного ростка векторного поля отнюдь не очевидно; легко привести примеры полей, не допускающих такой деформации с конечным числом параметров (например, нулевое поле). Однако в тех случаях, когда версальная деформация существует, найдена и изучена, получаемая информация весьма велика. Указание и исследование версальной деформации является способом концентрированного представления результатов очень полного исследования бифуркаций фазовых портретов.

ПРИМЕР. Деформация $\dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon$ дифференциального уравнения $\dot{x} = \pm x^2$ версальна.

Доказательство см. в предыдущем параграфе.

В. Теорема сведения Шошитайшвили.

Бифуркация предыдущего примера (рождение или уничтожение пары особых точек) исчерпывает бифуркции в семействах общего положения векторных полей на прямой (см. § 31). В многомерном случае рождение или уничтожение пары особых точек — также случай общего положения. Что происходит при этом с фазовыми портретами?

Оказывается, топологически версальная деформация общей вырожденной особой точки в \mathbb{R}^n в случае одного нулевого характеристического числа получается из уравнения предыдущего примера простой надстройкой:

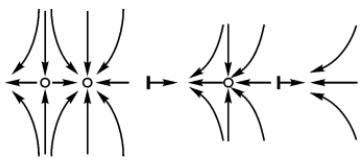


Рис. 126

$$\begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon, & x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \\ \dot{y} = -y, & y \in \mathbb{R}^{n-}, \\ \dot{z} = z, & z \in \mathbb{R}^{n+}, \end{cases} \quad (1)$$

где n_- и n_+ — числа корней характеристического уравнения в левой и правой полуплоскостях. Например, при $n = 2$ эта система описывает слияние узла и седла (рис. 126). При $\varepsilon = 0$ получается так называемый седло-узел.

В § 31 мы назвали бифуркационными точками точки в прямом произведении фазового пространства на пространство значений параметра, для которых характеристическое уравнение имеет нулевой корень.

Теорема. *В пространстве однопараметрических семейств векторных полей всюду плотное¹ множество образуют семейства общего положения, которые в окрестности каждой бифуркационной точки топологически эквивалентны семейству (1) в окрестности начала координат.*

Доказательство этой теоремы удобно провести путем редукции к случаю $n = 1$, в котором теорема очевидна (и доказана выше). Такое сведение, позволяющее уменьшать число фазовых координат до необходимого минимума, можно провести раз навсегда в самой общей ситуации.

¹Как обычно, множество семейств общего положения является пересечением счетного числа открытых множеств и открыто в предположении компактности области определения семейства или при использовании тонкой топологии.

Рассмотрим локальное семейство векторных полей, зависящих от конечномерного параметра $(v; x_0, \varepsilon_0)$. Для сокращения записи будем считать, что $x_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 = 0 \in \mathbb{R}^k$.

Предположим, что поле $v(\cdot, 0)$ имеет особую точку $x = 0$ и что соответствующее характеристическое уравнение имеет n_- (соответственно, n_+ , n_0) корней в левой полуплоскости (соответственно в правой полуплоскости, на мнимой оси).

Теорема. *При сделанных предположениях семейство топологически эквивалентно надстройке над семейством с фазовым пространством размерности n_0 .*

$$\begin{cases} \dot{\xi} = w(\xi, \varepsilon), & \xi \in \mathbb{R}^{n_0}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^k, \\ \dot{y} = -y & y \in \mathbb{R}^{n_-}, \\ \dot{z} = z, & z \in \mathbb{R}^{n_+}. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Доказательство этой теоремы имеется в статье *A. H. Шошитайшивили*. Бифуркации топологического типа векторного поля вблизи особой точки. Труды семинара им. И. Г. Петровского 1, 1975, стр. 279–309 (см. также «Функциональный анализ и его приложения», 6, 2(1972), 97–98, где теорема впервые сформулирована).

Доказательство проводится по той же схеме, что доказательство теоремы Аносова об У-системах: основную часть доказательства составляет построение пяти слоений (сжимающегося, растягивающегося, нейтрального, несжимающегося, нерастягивающегося) в прямом произведении фазового пространства на пространство параметров. [Параметры можно трактовать как дополнительные фазовые переменные, которым соответствует уравнение $\dot{\varepsilon} = 0$, но при этом надо следить, чтобы при рассматриваемых заменах плоскости $\varepsilon = \text{const}$ переходили в такие же плоскости.] ■

Существование пяти слоений было, независимо от нужд теории бифуркации, доказано также Э. А. Тихоновой (Э. А. Тихонова. Аналогия и гомеоморфизм возмущенной и невозмущенной систем с блочно-треугольной матрицей. Дифференциальные уравнения 6, 7 (1970), 1221–1229), а также Хиршем, Пью и Шубом (M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub. Invariant manifolds. BAMS 76, 5 (1970), 1015–1019). Случай $n_+ = 0$ ранее рассматривался Плиссом (В. А. Плисс. Принцип сведения в теории устойчивости движения. Изв. АН СССР. Сер. «Матем.», 28, 6 (1964), 1297–1324).

Дифференциальное уравнение редуцированной системы $\dot{\xi} = \omega(\xi, \varepsilon)$ реализуется в исходной системе на некотором гладком и гладко зависящем от ε *нейтральном подмногообразии* размерности n_0 в фазовом пространстве. Гладкость нейтрального подмногообразия конечна (расчет при $\varepsilon \rightarrow 0$), и это подмногообразие определяется неоднозначно (как показывают простейшие примеры).

Тем не менее, поведение фазовых кривых, включая всю картину бифуркаций, для полного уравнения определяется тем, что происходит на указанном нейтральном подмногообразии (и, в частности, не зависит от выбора нейтрального многообразия).

А. Н. Шошитайшили доказал также, что версальность исходной деформации эквивалентна версальности редуцированной деформации (т. е. версальности исходной деформации на нейтральном многообразии).

Таким образом, при топологическом исследовании локальных вырождений фазовых портретов вблизи особых точек, включая исследования всевозможных бифуркаций, можно ограничиться случаем, когда все корни характеристического уравнения лежат на мнимой оси. Переход к общему случаю совершается простой надстройкой (прямым умножением на стандартное седло $\dot{y} = -y, \dot{z} = z$).

ПРИМЕР. Из сказанного выше вытекает, в частности, что при рождении пары особых точек в однопараметрическом семействе векторных полей общего положения из одной из родившихся особых точек в другую ведет одна (и только одна) фазовая кривая (для значений параметра, близких к бифуркационным).

§ 33. Потеря устойчивости положения равновесия

Здесь исследуются бифуркации фазового портрета дифференциального уравнения при переходе пары корней характеристического уравнения через мнимую ось.

A. Пример: мягкая и жесткая потеря устойчивости.

Начнем с восходящего к Пуанкаре и Андронову примера однопараметрического семейства векторных полей на плоскости. Мы запишем его в комплексной форме

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon + cz\bar{z}), \quad (1)$$

где $z = x + iy$ — комплексная координата на плоскости \mathbb{R}^2 , рассматриваемой как плоскость комплексной переменной z .

В предыдущей формуле ω и c — вещественные ненулевые постоянные, которые можно при желании считать равными ± 1 ; ε — вещественный параметр.

При всех ε точка $z = 0$ — положение равновесия типа фокус. Этот фокус устойчив при $\varepsilon < 0$ и неустойчив при $\varepsilon > 0$. При $\varepsilon = 0$ линейное приближение дает центр; характер особой точки при $\varepsilon = 0$ определяется знаком c : $c < 0$ соответствует устойчивости, $c > 0$ — неустойчивости.

При проведенном локальном по z анализе особых точек мы замечаем, что в момент $\varepsilon = 0$ особая точка теряет устойчивость, но пропускаем важное обстоятельство, связанное с этой потерей устойчивости — рождение предельного цикла (ср. рис. 129). Чтобы не делать такой ошибки, нужно рассматривать окрестность нуля в (z, ε) -пространстве, а не в z -пространстве при фиксированном ε .

$$\xrightarrow{\varepsilon>0} \rho$$

$$\xleftarrow{\varepsilon<0} \rho$$

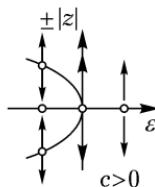
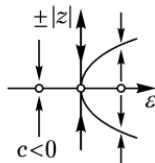


Рис. 127

Рис. 128

Исследование окрестности нуля в (z, ε) -пространстве удобно провести следующим образом. Рассмотрим функцию $\rho(z) = z\bar{z}$. Из (1) находим уравнение для ρ :

$$\dot{\rho} = 2\rho(\varepsilon + c\rho), \quad \rho \geq 0.$$

Полученное семейство уравнений на луче $\rho \geq 0$ легко исследовать. Кроме присутствующей при каждом ε особой точки $\rho = 0$ имеется еще (если ε и c разных знаков) особая точка $\rho = -\frac{\varepsilon}{c}$. При $c > 0$ векторное поле $\dot{\rho}$ имеет, в зависимости от знака ε , один из указанных на рис. 127 видов.

Точке $\rho = 0$ на плоскости z отвечает начало координат, а точке $\rho = -\frac{\varepsilon}{c}$ — предельный цикл (вещественный лишь когда знак ε противоположен знаку c).

Чтобы лучше понять ситуацию, будем откладывать по одной оси ε , а по другой в обе стороны $|z|$. Тогда поведение цикла при изменении параметра изобразится, в зависимости от знака c , одной из двух диаграмм рис. 128. Радиус цикла пропорционален, таким образом, $\sqrt{|\varepsilon|}$.

Рассмотрим сначала случай $c < 0$. При переходе ε через 0 фокус в начале координат теряет устойчивость. При $\varepsilon = 0$ в начале координат также устойчивый фокус, но негрубый: фазовые кривые приближаются к 0 не экспоненциально (рис. 129).

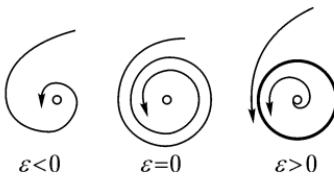


Рис. 129

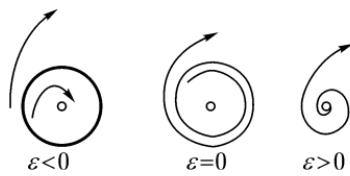


Рис. 130

При $\varepsilon > 0$ фазовые кривые, отойдя от фокуса на расстояние, пропорциональное $\sqrt{\varepsilon}$, наматываются на устойчивый предельный цикл. Таким образом, потеря устойчивости при переходе ε через 0 в случае $c < 0$ происходит с рождением устойчивого предельного цикла, радиус которого растет как $\sqrt{\varepsilon}$.

Иными словами, стационарное состояние теряет устойчивость и возникает устойчивый периодический режим, амплитуда которого пропорциональна квадратному корню из отклонения параметра от критического значения. Физики говорят в этой ситуации о *мягком возбуждении автоколебаний*.

В случае $c > 0$ (рис. 130) предельный цикл имеется при $\varepsilon < 0$, и он неустойчив. Когда ε стремится к нулю, цикл садится на положение равновесия, бывшее при $\varepsilon < 0$ устойчивым фокусом. При $\varepsilon = 0$ фокус становится неустойчивым (неустойчивость — слабая, не экспоненциальная). При положительных ε фокус неустойчив уже в линейном приближении.

Этот случай потери устойчивости называется *жестким возбуждением* по следующей причине.

Представим себе, что система находится вблизи устойчивого положения равновесия и что при изменении параметра это положение равновесия теряет устойчивость. В случае $c > 0$ при подходе ε к 0 с отрицательной стороны (или даже несколько раньше) всегда имеющиеся возмущения выкинут систему из окрестности положения равновесия, и она разом перескочит на какой-либо другой режим (например, к дальнему положению равновесия, предельному циклу или более сложному притягивающему множеству). Таким образом, при непрерывном изменении параметра режим движения меняется скачком, жестко.

В случае $c < 0$ амплитуда родившихся автоколебаний зависит от параметра хотя и не гладко (коренная особенность), но все же непрерывно; в этом смысле режим движения меняется плавно, мягко.

При исследовании уравнения (1) мы существенно использовали «версальную» точку зрения: если бы вместо окрестности в (z, ε) -пространстве мы рассматривали окрестность в z -пространстве при фиксированном ε , то мы пропустили бы предельные циклы. Это согласуется с тем, что вырождение коразмерности k следует изучать в k -параметрическом семействе: наш случай коразмерности 1 включен в однопараметрическое семейство.

Рассмотренный пример в действительности исчерпывает бифуркации фазового портрета в однопараметрических семействах общего вида, происходящие при потере устойчивости положения равновесия на плоскости и, более общим образом, при прохождении пары корней характеристического уравнения через мнимую ось.

Б. Теорема Пуанкаре–Андронова.

Рассмотрим однопараметрическое семейство векторных полей.

Предположим, что при нулевом значении параметра поле имеет особую точку 0 такую, что корни характеристического уравнения чисто мнимые (размерность фазового пространства равна 2).

Теорема. *Локальное семейство общего положения (среди семейств с указанными свойствами) топологически эквивалентно семейству предыдущего примера.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Будем применять метод Пуанкаре для приведения уравнения к нормальной форме. При нулевом значении параметра имеется резонанс, отсутствующий при близких ненулевых значениях параметра.

Соответствующие резонансные члены при нулевом значении параметра убить нельзя, а при близких значениях параметра можно. Если мы будем при близких к нулю нерезонансных значениях параметра убивать члены, становящиеся резонансными при нулевом значении параметра, то наша замена будет разрывно зависеть от параметра, а радиус окрестности, в которой мы изучим фазовый портрет, будет стягиваться до нуля при подходе параметра к резонансному значению.

Поэтому мы не станем убивать члены, становящиеся резонансными при $\varepsilon = 0$, не только при нулевом значении параметра, но и при близких значениях параметра. В результате мы получим замену, гладко зависящую от параметра, после которой в системе останутся одни лишь члены, становящиеся резонансными при нулевом значении параметра, плюс остаток сколь угодно высокого порядка по отношению к расстоянию до особой точки. Мы собираемся изучить бифуркации в полученном семействе, отбросив остаток, а затем убедиться в том, что он не влияет на топологию перестроек (или учесть его влияние).

Описанная выше программа является общей для многих задач о бифуркациях. Посмотрим, к чему она приводит в нашем конкретном случае прохождения пары корней характеристического уравнения через мнимую ось. Резонанс имеет вид $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$). Следовательно, в собственных координатах на комплексифицированной плоскости \mathbb{C}^2 нормальная форма запишется в виде (см. § 23)

$$\dot{z}_1 = \lambda_1(\varepsilon)z_1 + a_1(\varepsilon)z_1^2 z_2 + \dots, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2(\varepsilon)z_2 + b_1(\varepsilon)z_1 z_2^2 + \dots$$

Заметим, что, ввиду вещественности исходного уравнения, собственный базис можно выбрать из комплексно-сопряженных векторов, а нормализующие замены можно выбирать вещественными. В таком случае второе уравнение получается из первого сопряжением. Далее, на вещественной плоскости $z_2 = \bar{z}_1$, поэтому мы можем писать одно первое уравнение, обозначая в нем z_1 через z , а z_2 через \bar{z} . Это уравнение можно считать записью исходной системы на вещественной плоскости \mathbb{R}^2 в виде (неголоморфного) уравнения на комплексной прямой \mathbb{C}^1 с координатой z

$$\dot{z} = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2 \bar{z} + \dots;$$

точками обозначен остаток пятого порядка относительно $|z|$.

Итак, мы приходим к исследованию семейства

$$\dot{z} = \lambda_1(\varepsilon)z + a_1(\varepsilon)z^2 \bar{z}.$$

Это исследование проводится таким же образом, как в рассмотренном в пункте А специальном примере. Соответствие между обозначениями:

пример п. А	$i\omega$	ε	c
общее семейство	$\lambda_1(0)$	$\operatorname{Re} \lambda_1(\varepsilon)$	$\operatorname{Re} a_1(0)$

В семействах общего положения

$$\lambda_1(0) \neq 0, \quad \left. \frac{d}{d\varepsilon} \operatorname{Re} \lambda_1(\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} \neq 0, \quad \operatorname{Re} a_1(0) \neq 0.$$

Бифуркация состоит в рождении или уничтожении предельного цикла (рождение — в случае, когда $\operatorname{Re} a_1(0)$ и $\left. \operatorname{Re} \frac{d\lambda_1}{d\varepsilon} \right|_0$ разных знаков).

Если указанные выше три величины, вообще отличные от нуля, отличны от нуля, то учет отброшенного остаточного члена не меняет полученной картины бифуркаций. Это легко доказать, рассматривая производную функции $\rho = |z|^2$ вдоль нашего векторного поля:

$$\dot{\rho} = 2\rho(\operatorname{Re} \lambda_1(\varepsilon) + \rho \operatorname{Re} a_1(\varepsilon) + O(\rho^2)).$$

Из этой формулы легко усмотреть, что $O(\rho^2)$ не влияет на бифуркации фазового портрета в некоторой (не зависящей от ε) окрестности начала координат. ■

Рассмотренная выше теорема в сущности была известна Пуанкаре; явная формулировка и доказательство даны А. А. Андроновым (*А. А. Андронов. Применение теории Пуанкаре о «точках бифуркации» и «смене устойчивости» к простейшим автоколебательным системам. С. R. Ac. Sci Paris, 189, 15 (1929), 559–561; А. А. Андронов, Е. А. Леонович-Андронова. Некоторые случаи зависимости периодических движений от параметра. Уч. записки ГГУ, 1939, вып. 6, стр. 3 (сочинения А. А. Андронова, стр. 188–216))*. Р. Том, которого я обучил этой теории в 1965 году, стал широко пропагандировать ее под именем «бифуркации Э. Хопфа» (см., например, учебник С. Смейла и М. Хирша¹).

В. Многомерный случай.

Соединяя теорему Пуанкаре–Андронова с теоремой сведения (§ 32), мы приходим к следующему выводу.

¹ M. Hirsch, S. Smale. Differential equations. Dynamical systems and Linear Algebra. New York, A. P., 1974.

Теорема. Топологически версальная деформация особой точки векторного поля общего положения в \mathbb{R}^n с одной парой чисто мнимых корней характеристического уравнения получается простой надстройкой из системы Пуанкаре – Андронова:

$$\begin{cases} \dot{z} = z(i + \varepsilon \pm z\bar{z}), & z \in \mathbb{C}^1, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}; \\ \dot{u} = -u, & u \in \mathbb{R}^{n-}, \\ \dot{v} = v, & v \in \mathbb{R}^{n+}, \quad n = n_- + n_+ + 2. \end{cases}$$

Исследование выписанной системы не представляет теперь никаких трудностей.

ПРИМЕР. Пусть $n = 3$, $n_+ = 0$, знак перед $z\bar{z}$ есть «–». В таком случае теорема утверждает, что в не зависящей от ε окрестности начала координат при прохождении пары собственных чисел через мнимую ось происходит рождение инвариантного цилиндра радиуса $\sqrt{\varepsilon}$, притягивающего соседние траектории. На самом цилиндре имеется устойчивый цикл, на который в конце концов и наматываются все траектории. Таким образом, этот случай соответствует мягкой потере устойчивости с возникновением автоколебаний.

Рассматриваемое вырождение изучалось многими авторами, в частности, Э. Хопф исследовал рождение цикла в многомерном случае (*E. Hopf. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung. Bereich. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl. 94*, 19 (1942), 15–25). Дальнейшие результаты были получены Ю. И. Неймарком и Н. Н. Брушлинской.

Однако общая теорема, сформулированная выше, дающая полное исследование бифуркаций фазового портрета (а не только бифуркаций цикла) была доказана лишь в цитированной выше работе А. Н. Шошитайшвили о сведении при помощи двумерных результатов Андронова – Пуанкаре.

Г. Применение к теории гидродинамической устойчивости.

Разобранные выше явления часто встречаются в разнообразных конкретных ситуациях: механические, физические, химические, биологические и экономические системы теряют устойчивость на каждом шагу. Здесь мы рассмотрим в качестве примера одну специальную задачу такого рода — вопрос о потере устойчивости стационарного течения несжимаемой вязкой жидкости.

Пусть D — заполненная жидкостью область, и v — поле скоростей жидкости. Движение описывается уравнениями Навье–Стокса

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \nabla, v) = \nu \Delta v - \operatorname{grad} p + f, \quad \operatorname{div} v = 0,$$

где коэффициент ν означает вязкость, f — поле массовых, непотенциальных сил; давление p определяется из условия несжимаемости. На границе области D ставится, скажем, условия прилипания (и $v|_{\partial D} = 0$).

Предполагается, что начальное поле скоростей определяет все дальнейшее движение, так что уравнение определяет динамическую систему в бесконечномерном пространстве бездивергентных векторных полей, равных 0 на границе области D . [В действительности это доказано только в двумерном случае. Вопросам о существовании, единственности и свойствах решений уравнений Навье–Стокса посвящена обширная литература, однако основные проблемы остаются открытыми.]

Рассмотрим, например, течение Пуазейля (с параболическим профилем скоростей; рис. 131) в плоском канале. Течение Пуазейля является стационарной точкой нашей динамической системы в функциональном пространстве при любом значении вязкости ν . Это положение равновесия устойчиво при достаточно большой вязкости, однако при уменьшении вязкости оно теряет устойчивость. Мы можем исследовать, что при этом происходит, пользуясь теоремой п. В.

Разумеется, следует принять особые предосторожности в связи с бесконечномерностью задачи. Имеется надежда, что бесконечномерность не очень опасна из-за того, что вязкость быстро гасит высокие гармоники, так что фактически при любом ненулевом значении коэффициента вязкости система сваливается к конечномерной. Другая трудность в том, что мы не можем быть уверенными, что наша система — действительно общего положения: это нужно проверять вычислениями. Кажется естественным, что система Навье–Стокса окажется системой общего положения в области «общего вида» и при общих массовых силах f , однако течение Пуазейля весьма специально, например, здесь есть большая группа симметрий.

Ограничимся возмущениями, поле скоростей которых вдоль потока повторяется периодически с длиной волны l . Чтобы нормировать скорость основного течения, будем менять внешние силы пропорционально

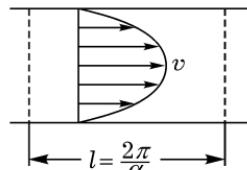


Рис. 131

вязкости так, чтобы расход жидкости Q был постоянен ($f = \text{const} \cdot Q\nu$). В таком случае мы получим двухпараметрическое семейство с параметрами l и ν . Обычно принято рассматривать в качестве параметров обратные величины $\alpha = \frac{2\pi}{l}$ (волновое число), $R = \text{const} \cdot \frac{Q}{\nu}$ (число Рейнольдса). Таким образом, уменьшение вязкости, вызывающее неустойчивость, соответствует увеличению числа Рейнольдса.

Вычисления (которые практически невыполнимы без машины) показывают, что при возрастании числа Рейнольдса при некотором критическом значении числа Рейнольдса $R_0 = R_0(\alpha)$ пара комплексных корней переходит через мнимую ось из устойчивой полуплоскости в неустойчивую. Следовательно, мы встречаемся здесь с тем случаем потери устойчивости, при котором рождается или умирает предельный цикл.

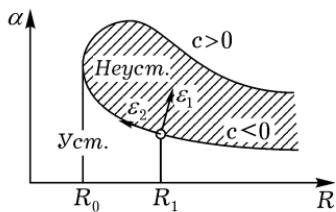


Рис. 132

а α -координата определяет самую опасную на неустойчивость длину волн.

Оказывается, для всей левой и верхней части языка границы устойчивости коэффициент c положителен, т. е. имеет место жесткое возбуждение. Следовательно, еще до того, как число Рейнольдса перейдет через критическое значение R_0 , где-то в фазовом пространстве, в стороне от стационарной точки (т. е. от течения Пуазейля), возникнет какой-то колебательный режим¹, на который систему и выбросят малые возмущения при подходе числа Рейнольдса к R_0 . Этот новый режим может быть устойчивой стационарной точкой (т. е. в гидродинамических терминах — стационарным течением, отличным от течения Пуазейля), или

Знак коэффициента c , определяющего жесткое или мягкое возбуждение колебаний, также вычислен. Для описания результата удобно нарисовать границу устойчивости на плоскости (α, R) . Оказывается, она имеет вид изображенного на рис. 132 «языка»; самая левая точка этого языка особенно важна: ее R -координата соответствует первой потере устойчивости,

¹ Другой возможностью в системах произвольного вида является уход на бесконечность; в нашем случае, по-видимому, этого не произойдет, так как на бесконечности фазовая скорость направлена назад к началу координат, ввиду демпфирующего действия вязкости.

пределальным циклом (в гидродинамических терминах — периодическим течением), но может иметь и более сложную структуру, например, он может оказаться условно-периодическим движением по тору. Более того, возникающий при жестком возбуждении режим может оказаться У-системой или системой гиперболического характера, т. е. притягивающим множеством с весьма нерегулярными, неустойчивыми траекториями на нем. Спектр соответствующей динамической системы может оказаться непрерывным даже несмотря на конечность числа степеней свободы (т. е. конечность размерности притягивающего множества). Экспериментаторы назвали бы такой режим течения турбулентным.

В 1963 году появилась работа Лоренца (*E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. J. Atmos. Sci. 20* (1963), 130–141), который первым наблюдал нетривиальный притягивающий режим в системе с трехмерным фазовым пространством, моделирующей гидродинамическую теорию конвекции.

Система Лоренца имеет вид

$$\dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \quad \dot{y} = -xz + rx - y, \quad \dot{z} = xy - bz; \quad \sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = \frac{8}{3}.$$

Кажется, все модели, в которых пока удалось найти гиперболические притягивающие множества, содержат члены типа накачки или отрицательной вязкости, отсутствующие в уравнении Навье – Стокса. Во всяком случае, когда я в 1964 г. пытался найти гиперболическое притягивающее множество в шестимерном фазовом пространстве галеркинского приближения к уравнению Навье – Стокса на двумерном торе с синусоидальной внешней силой (используя вычислительную машину, программированную Н. Д. Введенской), то притягивающее множество оказалось, по-видимому, трехмерным тором (быть может, из-за слишком малого числа Рейнольдса). Насколько мне известно, гиперболические притягивающие множества для уравнений Навье – Стокса или их галеркинских аппроксимаций не найдены до сих пор. Зато описанный выше численный эксперимент послужил отправной точкой ряда работ о применении геодезических потоков на группах диффеоморфизмов к гидродинамике (*V. I. Arnold. Sur la geometrie differentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 16, 1* (1966), 319–361; *D. G. Ebin, J. Marsden. Groups of diffeomorphisms and the motion of an incompressible fluid. Ann. of Math. 92* (1970), 102–163).

Очень простая модель с неустойчивыми траекториями на притягивающем множестве предложена М. Эноном (*M. Hénon. A Two-dimensional Mapping with a Strange Attractor. Comm. Math. Phys. 50* (1976), 69–77). Энон рассматривает квадратичное «преобразование Кремона» на плоскости, имеющее

вид $T = T_1 T_2 T_3$, где

$$T_1(x, y) = (y, x), \quad T_2(x, y) = (bx, y), \quad T_3(x, y) = (x, y + 1 - ax^2).$$

Интересно отметить, что наблюдаемое в численном эксперименте при $a = 1,4$, $b = 0,3$ притяжение к множеству, имеющему локально вид произведения канторова множества на отрезок, не удается описать в рамках существующих определений гиперболичности (не исключено даже, что в это множество вкраплены области притяжения длинных циклов). Таким образом, математики не признают притягивающее множество Энона гиперболическим. В то же время с точки зрения экспериментатора движение фазовой точки под действием итераций преобразования T имеет явно выраженный стохастический, турбулентный характер (еще один пример опасности фетишизирования аксиом).

Примеры настоящих гиперболических притягивающих множеств на плоскости построены Р. В. Плыкиным (*Р. В. Плыкин. Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей. Математический сборник, 94, 2 (1974), 243–264*). Плыкин строит диффеоморфизм замкнутой области с тремя дырами, изображенной на рис. 133 наверху, на ее заштрихованную (на рис. 133 внизу) часть, обладающий следующим свойством: пересечение образов области при всех итерациях диффеоморфизма является притягивающим множеством (расстояние образов итераций любой точки до него стремится к нулю), это пересечение локально является произведением канторова множества на отрезок, и расстояние между близкими точками на каждом отрезке растет при итерациях преобразования.

Обширная библиография работ по теории бифуркаций и ее приложениям имеется в книге *Марсдена и Мак Кракен «Бифуркация Хопфа и ее приложения»*¹ (более 350 названий).

Определение того, на какой режим выходит динамическая система на самом деле при потере устойчивости течением Пуазейля, лежит, по мнению специалистов, на грани возможностей современных машин.

В этой ситуации не следует, вероятно, пренебрегать качественными предсказаниями, которые можно сделать совсем без вычислений, опираясь на изложенную выше общую теорию бифуркаций.

В рассматриваемой задаче имеется два параметра, α и R . Следовательно, кроме особенностей коразмерности 1, могут встречаться также и особенности коразмерности 2. Обратим внимание на одну из них, а именно на ту, которая связана с изменением знака c . Вычисления показывают, что при достаточно большом числе Рейнольдса R жесткое

¹ J. E. Marsden, M. McCracken. The Hopf Bifurcation and its Applications. Springer, 1976.

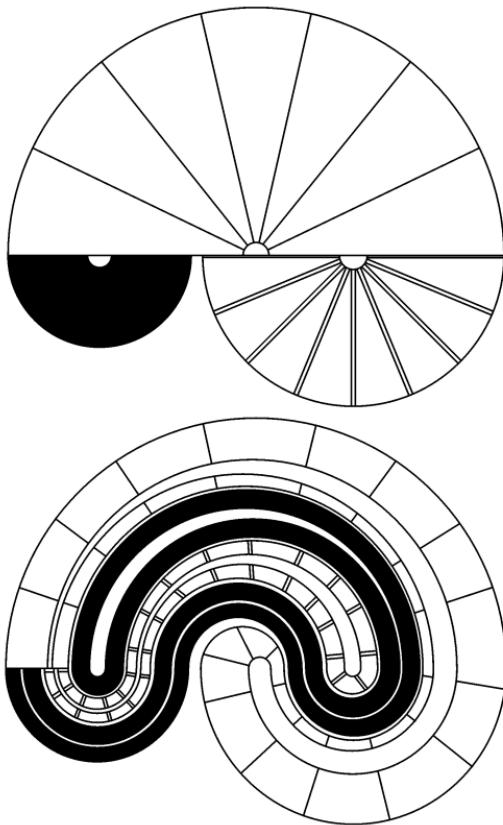


Рис. 133

возбуждение на нижней стороне языка потери устойчивости сменяется мягким. Чтобы понять, что происходит в этот момент, нужно построить двухпараметрическое версальное семейство для такого двукратного вырождения. Это семейство легко построить, оно имеет вид:

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z\bar{z} + c_2 z^2\bar{z}^2), \quad z \in \mathbb{C}$$

(остальные координаты в фазовом пространстве отвечают устойчивым собственным числам и не выписаны). Смысл параметров ε_1 и ε_2 ясен из рис. 132; характер перестройки в точке $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ определяется знаком величины c_2 .

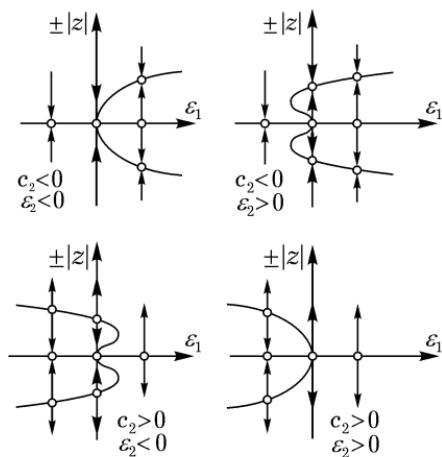


Рис. 134

Полагая, как и выше, $\rho = z\bar{z}$, получаем для ρ уравнение

$$\dot{\rho} = 2\rho(\varepsilon_1 + \varepsilon_2\rho + c_2\rho^2), \quad \rho \geq 0.$$

В зависимости от знаков ε и c возможны следующие случаи:

1°. $c_2 < 0, \varepsilon_2 < 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система мягко выходит на периодический устойчивый автоколебательный режим (рис. 134).

2°. $c_2 < 0, \varepsilon_2 > 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система жестко выходит на устойчивый периодический автоколебательный режим, родившийся еще до потери устойчивости положением равновесия вместе с неустойчивым колебательным режимом, садящимся на положение равновесия в момент потери устойчивости.

Указанный выше устойчивый предельный цикл мы смогли исследовать вблизи точки смены жесткого режима мягким, так как при этом он близок к положению равновесия. Однако аналитическое продолжение этого цикла может существовать (вдали от положения равновесия) и при других значениях параметров (α, R) ; мы видим, что его можно искать аналитическим продолжением неустойчивого цикла, садящегося на положение равновесия при жесткой потере устойчивости. Указанный устойчивый цикл — один из кандидатов на роль устанавливающегося при потере устойчивости режима.

3°. $c_2 > 0, \varepsilon_2 < 0$. Потеря устойчивости мягкая, но рождающийся предельный цикл быстро умирает, сливвшись с пришедшим издали неустойчивым, после чего в системе жестко возбуждается новый режим.

4°. $c_2 > 0, \varepsilon_2 > 0$. Обычное жесткое возбуждение.

Таким образом, каков бы ни был знак c_2 , при надлежащем знаке ε_2 наш анализ позволяет установить качественно новое по сравнению с однопараметрическим анализом явление: при $c_2 < 0$ мы находим явно установившийся при жестком возбуждении режим, а при $c_2 > 0$ мы обнаруживаем недолговечность мягко возбудившегося режима. Чтобы узнать, какой из двух случаев ($c_2 < 0$ или $c_2 > 0$) имеет место в действительности, нужно провести весьма громоздкие вычисления.

В теории гидродинамической устойчивости встречаются разнообразные особенности границы устойчивости и декремент-диаграмм, так что здесь могут найти применение результаты § 30. Для применений общей теории бифуркаций в теории гидродинамической устойчивости было бы важно исследовать случаи общего положения в задачах с различными группами симметрий, так как во многих гидродинамических задачах область течения D выдерживает ту или иную группу симметрий (пример — группа сдвигов в задаче о течении Пуазейля; представления этой группы участвуют в исследовании в виде параметра α).

Поведение жидкости после потери устойчивости стационарного течения обсуждается во многих работах (см., например, учебник *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика сплошной среды*. М.: Гостехиздат 1954; § 27 (Возникновение турбулентности), основан на работе Л. Д. Ландау 1943 года). При этом обычно предполагается мягкий режим возникновения автоколебаний и исследуется потеря устойчивости предельным циклом. Ландау предположил, что при этом будут возникать условно-периодические движения со все большим числом частот; несомненно, это объясняется тем, что другие динамические системы не были ему известны.

В 1965 году я рассказывал об изложенной выше теории на семинаре Тома в Институте Высших исследований в Бюре. В появившихся пятью годами позже работах Рюэл и Такенс (*D. Ruelle, F. Takens. On the nature of turbulence. Comm. Math. Phys. 20* (1971), 167–192; **23** (1971)) построили примеры потери устойчивости цикла с возникновением более сложного режима, чем условно-периодический; однако их пример носит экзотический характер, так как соответствует очень тонкой метрически (хотя и открытой) части пространства параметров деформации. Обзор дальнейших экспериментальных работ см. в *J. B. McLaughlin, P. C. Martin. Transition to turbulence of a statically stressed fluid system. Phys. Rev. Letters, 33* (1974); *Phys. Rev. A* **12** (1975), 186–203.

Следует отметить, что для применимости результатов указанных работ нужно, чтобы потеря устойчивости происходила в мягком режиме, тогда как режим потери устойчивости течения Пуазейля оказался жестким.

Д. Вырождения коразмерности 2.

Разобранными выше случаями (рождение и уничтожение пары особых точек, рождение или уничтожение предельного цикла из особой точки) исчерпываются бифуркции фазовых портретов в окрестности особой точки для общих однопараметрических семейств векторных полей.

В двухпараметрических семействах эти особенности будут встречаться на линиях плоскости параметров, но кроме них будут (в отдельных точках плоскости параметров) наблюдаться более сложные вырождения. Среди этих более сложных вырождений неустранимы малым шевелением двухпараметрического семейства следующие 5 вырождений.

1°. *Один нулевой корень с дополнительным вырождением.* Пример:

$$\dot{x} = \pm x^3 + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2, \quad x \in \mathbb{R}$$

(рис. 135). Легко проверить, что выписанная деформация (топологическая) версальна; в многомерном случае версальная деформация получится надстройкой седла.

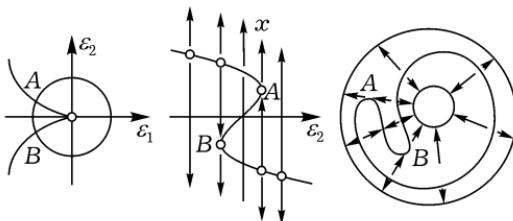


Рис. 135

Бифуркационная диаграмма (для случая $+x^3$) изображена на рис. 135 слева. Полукубическая парабола делит плоскость параметров на две части. В меньшей части система имеет вблизи $x = 0$ три положения равновесия, в большей — одно. Перестройки фазового портрета при обходе параметра вокруг точки $\varepsilon = 0$ по малой окружности, показаны на рис. 135 справа. Прямое произведение этой окружности на (одномерное) фазовое пространство есть круговое кольцо, положения

равновесия образуют в этом кольце замкнутую кривую, а поведение векторов поля ясно из рис. 135.

2° Одна мнимая пара с дополнительным вырождением. Пример:

$$\dot{z} = z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 z\bar{z} \pm z^2\bar{z}^2), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Бифуркационная диаграмма состоит из прямой $\varepsilon_1 = 0$ и касающейся ее в нуле половины параболы; она изображена на рис. 136 для случая, когда в формуле стоит $+z^2\bar{z}^2$.

Перестройки фазового портрета при обходе вокруг 0 по малой окружности показаны на рис. 136 справа. Изображенное на этом рисунке кольцо — прямое произведение окружности на плоскости параметров и прямой, на которой откладывается $\pm|z|$. Окружность на этом рисунке соответствует положению равновесия $z = 0$, а каждый предельный цикл изображается двумя точками пересечения радиуса с линией $\varepsilon_1 + \varepsilon_2|z|^2 + |z|^4 = 0$.

Бифуркационная диаграмма и семейство над окружностью для случая, когда в формуле стоит $-z^2\bar{z}^2$, аналогичны.

3°. Две мнимые пары.

4°. Мнимая пара и еще один нулевой корень.

Исследование этих случаев не доведено еще до той полноты, при которой можно выписывать версальные семейства; более того, неясно, имеется ли в случае двух мнимых пар двухпараметрическое (или хотя бы конечнопараметрическое) топологически версальное семейство (да-же в предположении нормальной несоизмеримости отношения частот при одновременном их переходе из одной полуплоскости в другую).

После усреднения по быстрому вращению или после перехода к нормальнм формам Пуанкаре (в членах ряда Тейлора ограниченной степени) эти задачи приводят к задачам о бифуркациях фазовых портретов векторных полей на плоскости, имеющих в случае одной мнимой пары одну инвариантную прямую, а в случае двух — две:

$$\dot{x} = xA(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = yB(x, y, \varepsilon). \quad (1)$$

Системы такого же вида возникают при исследовании взаимодействий хищника и жертвы или конкурирующих видов в экологии (модель Лот-

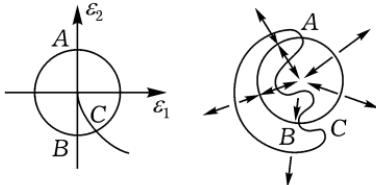


Рис. 136

ка – Вольтерра; заметим только, что здесь необходимо учитывать квадратичные члены функций A, B , иначе бифуркции необъяснимые). В терминах исходной системы x, y имеют смысл квадратов амплитуд собственных колебаний. Положение равновесия в плоской системе отвечает положению равновесия в исходной многомерной, если оно лежит на пересечении инвариантных прямых, циклу — если на одной из них, и тору — если оно лежит внутри положительного квадранта плоскости. (Частоты собственных колебаний предполагаются несоизмеримыми или по меньшей мере не связанными резонансами низких порядков.)

Обоснование перехода от усредненной, плоской системы к исходной можно отделить от исследования бифуркаций в системе на плоскости, которое весьма нетривиально и послужило предметом нескольких неверных работ (Гукенхаймер, Холмс и др.). Правильный ответ обнаружен В. И. Швецовым в 1979 году при помощи компьютера: число рождающихся предельных циклов в плоской системе не превосходит единицы. Математическое обоснование (описание версальных деформаций в классе систем (1)) получено лишь в 1985 г. Х. Жолондеком, который ранее получил аналогичный результат для случая мнимой пары и нулевого корня: *Х. Жолондек.* О версальности одного семейства симметричных векторных полей на плоскости. Математический сборник, 1983, **120**, № 4, с. 473–499. Здесь также рождается не более одного цикла.

Наконец, остается последний случай коразмерности 2:

5°. *Два нулевых корня.* Пример — семейство уравнений на плоскости

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x_1 + x_1^2 \pm x_1 x_2 \end{cases}$$

с параметрами $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Бифуркационная диаграмма разбивает плоскость ε на четыре части, обозначенные A, B, C, D на рис. 137, соответствующем выбору $+x_1 x_2$ в формуле.

Фазовые портреты, соответствующие каждой из четырех частей плоскости ε , показаны на рис. 137. Ветвям бифуркационной диаграммы соответствуют системы с вырождениями коразмерности один, изображенные на рис. 136 (P, Q, R, S).

Заметим, что бифуркация на ветви S — рождение цикла из петли сепаратрисы — не входит в нашу классификацию особенностей коразмерности 1, так как она является не локальным (вблизи особой точки), а глобальным явлением. Мы видим, таким образом, что с увеличением

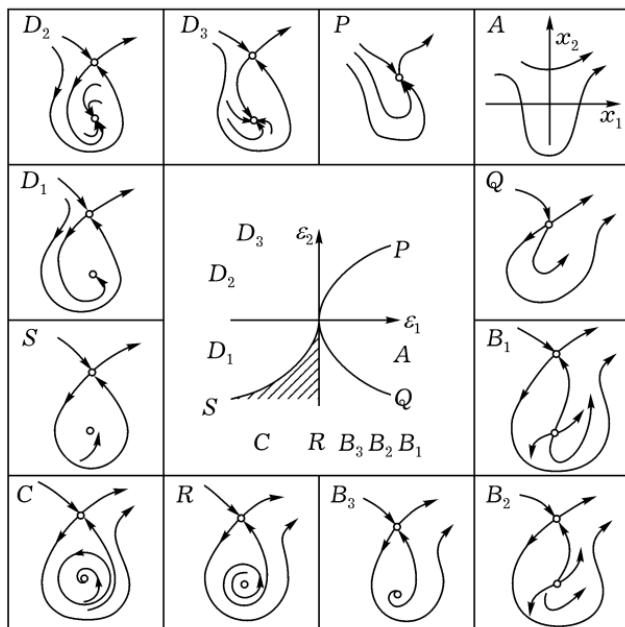


Рис. 137

числа параметров семейства при локальном исследовании бифуркаций особых точек начинают играть роль глобальные бифуркации меньших коразмерностей. Отсюда следует, что при достаточном числе параметров мы столкнемся в локальной задаче с теми же трудностями не всюду плотности структурно устойчивых систем, которые были обнаружены Смейлом в глобальной задаче о векторных полях на многообразии (см. § 15).

Бифуркации в случае, соответствующем выбору знака « $-$ » в формуле, сводятся к предыдущим изменениям знаков t и x_2 .

Теорема. Векторные поля общего положения с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения в особой точке на фазовой плоскости имеют топологически версальную деформацию с двумя параметрами, эквивалентную одной из двух деформаций, рассмотренных выше.

Иными словами, общее двупараметрическое семейство дифференциальных уравнений на плоскости, имеющих при некотором значении

параметра особую точку с двумя нулевыми корнями характеристического уравнения, непрерывной заменой параметров и непрерывно зависящей от параметров непрерывной заменой фазовых координат приводится к указанному выше виду.

Эта теорема, доказанная Р. И. Богдановым в 1971 году, была впервые опубликована в обзоре: *В. И. Арнольд. Лекции о бифуркациях и версальных семействах. УМН* **27**, 5 (1972), стр. 119–184. Такенс анонсировал аналогичный результат в 1974 году. Доказательство версальности не простое: главную трудность представляет исследование единственности предельного цикла. Р. И. Богданов преодолевает эту трудность при помощи нетривиальных соображений о поведении эллиптических интегралов в зависимости от параметра. См.: *Р. И. Богданов. Бифуркации предельного цикла одного семейства векторных полей на плоскости. Тр. семинара имени И. Г. Петровского, 1976, вып. 2, 23–36; Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае нулевых собственных чисел. Там же, стр. 37–65.*

§ 34. Потеря устойчивости автоколебаний

Следующей по сложности задачей теории бифуркаций (после задачи о перестройке фазовых портретов в окрестности положений равновесия) является задача о перестройках семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой. Эта задача полностью не решена и, по-видимому, в некотором смысле неразрешима. Тем не менее, общие методы теории бифуркаций позволяют получить существенную информацию об этих перестройках; в настоящем параграфе дается краткий обзор основных результатов в этом направлении.

А. Монодромия и мультипликаторы.

Рассмотрим замкнутую фазовую кривую системы дифференциальных уравнений. Нас интересуют перестройки расположения фазовых кривых в окрестности данной кривой при малом изменении уравнения.

Для расположения фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения имеется (с точностью до гомеоморфизма окрестности) конечное число возможностей. Чтобы описать их, выберем на замкнутой фазовой кривой точку O . Проведем через эту точку трансверсальную к замкнутой фазовой кривой площадку (коразмерности один в фазовом пространстве). Фазовые кривые, выходящие из точек площадки, достаточно близких к точке O , вновь пересекают площадку, сделав оборот вдоль кривой. Возникает отображение окрестности

точки O на трансверсальной площадке в эту площадку. Это отображение называется *функцией* (или *отображением*) *наследования Пуанкаре* (рис. 138) (или просто *отображением Пуанкаре*).

Точка O является неподвижной точкой функции последовательности. Рассмотрим линеаризацию функции последовательности в точке O . Этот линейный оператор называется *оператором монодромии*.

Собственные числа оператора монодромии называются *мультипликаторами* исходной замкнутой фазовой кривой. Оператор монодромии можно найти, решая линейное уравнение с периодическими коэффициентами (уравнение в нормальных вариациях вдоль нашей фазовой кривой).

Предположим, что все мультиплликаторы по модулю меньше единицы. Тогда можно доказать, что все соседние фазовые кривые, при продолжении вперед притягиваются к нашей замкнутой фазовой кривой. Если хотя бы один из мультиплликаторов по модулю больше единицы, то существуют фазовые кривые, удаляющиеся от замкнутой (приближающиеся к ней при $t \rightarrow -\infty$).

В общем случае несколько собственных чисел лежат внутри единичной окружности, а несколько — снаружи. В этом случае фазовые кривые, притягивающиеся к данной, образуют, как можно доказать, *притягивающееся многообразие*, пересечение которого с нашей трансверсалю имеет такую размерность, сколько мультиплликаторов лежит внутри единичной окружности. Точно так же фазовые кривые, асимптотические к замкнутой при $t \rightarrow +\infty$, образуют *отталкивающееся многообразие*. Размерность его пересечения с трансверсалю равна числу неустойчивых мультиплликаторов (мультиплликаторов вне единичной окружности).

В окрестности нашей замкнутой фазовой кривой имеет место гиперболическая ситуация (см. § 14): все прочие фазовые кривые удаляются от замкнутой как при $t \rightarrow +\infty$ (удаление происходит вдоль отталкивающегося многообразия), так и при $t \rightarrow -\infty$ (вдоль притягивающегося). Топологический тип семейства фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой, не имеющей мультиплликаторов на единичной окружности, однозначно определяется числами устойчивых

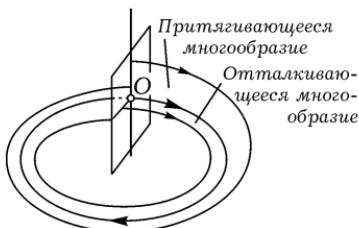


Рис. 138

и неустойчивых мультиликаторов и тем, сколько среди тех и других отрицательных: четное или нечетное число.

Посмотрим, что изменится в этой картине при малом изменении системы.

Б. Простейшие вырождения.

Замкнутая фазовая кривая называется невырожденной, если единица не является мультиликатором. Невырожденная замкнутая фазовая кривая при малой деформации системы не исчезает, а лишь немного деформируется (по теореме о неявной функции, примененной к уравнению $f(x) = x$, где f — функция последования). При деформации невырожденной замкнутой фазовой кривой мультиликаторы также лишь немного деформируются. Следовательно, как число устойчивых, так и число неустойчивых мультиликаторов не меняется при деформации, если ни один из мультиликаторов исходной фазовой кривой не лежал на единичной окружности.

Мультиликаторы замкнутой фазовой кривой общего положения не лежат на единичной окружности. Таким образом, расположение фазовых кривых в окрестности замкнутой фазовой кривой общего положения структурно устойчиво.

Но если мы рассматриваем не индивидуальную систему, а семейство систем, зависящих от параметра, то при отдельных значениях параметра мультиликаторы могут попадать на единичную окружность, и возникает вопрос о бифуркациях.

Как обычно, начнем с простейших вырождений, т. е. вырождений, не устранимых в однопараметрических семействах. Таких вырождений коразмерности 1 в нашем случае имеется три. Действительно, характеристическое уравнение оператора монодромии вещественно, поэтому каждый невещественный мультиликатор имеет комплексно сопряженный. Следовательно, на единичную окружность выходят либо 2 комплексно сопряженных мультиликатора, либо один вещественный, равный либо 1, либо -1 . Все три случая (комплексная пара, $+1, -1$) соответствуют многообразиям коразмерности 1 в функциональном пространстве.

Рассмотрим, например, границу области устойчивости замкнутой фазовой кривой в функциональном пространстве. Эта граница является гиперповерхностью в функциональном пространстве. Она состоит из трех компонент коразмерности 1. Первая компонента соответствует

фазовым кривым с одной парой комплексно-сопряженных мультиликаторов с модулем 1, вторая — с мультиликатором +1, третья — с мультиликатором -1; все остальные мультиликаторы лежат внутри единичной окружности (рис. 139).

Эти три гиперповерхности коразмерности 1 пересекаются по поверхностям коразмерности 2 и имеют дальнейшие особенности. Например, самопересечения первой поверхности отвечают двум парам мультиликаторов с модулем 1 и т. д.

Задача о потере устойчивости замкнутой фазовой кривой является, таким образом, задачей о вырождении коразмерности 1, и мы должны, на первый взгляд, рассматривать однопараметрические семейства общего положения, чтобы разобраться в бифуркациях. В действительности дело обстоит не так просто: мы увидим, что в задаче о потере устойчивости при прохождении пары мультиликаторов через единичную окружность имеются *два* существенных параметра. Но вначале посмотрим, к каким выводам приводит однопараметрическая точка зрения.

Начнем со случая, когда один из мультиликаторов равен 1. Этот случай в сущности не отличается от задачи о бифуркации положений равновесия в однопараметрических семействах. Ситуация общего положения — это рождение или смерть пары замкнутых фазовых кривых. У функции последования при этом рождаются или умирают две неподвижные точки.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим отображение оси x в себя, заданное формулой $x \mapsto x + x^2$. Точка $x = 0$ неподвижна, и ее мультиликатор равен 1. Рассмотрим однопараметрическую деформацию с параметром ε , близким к нулю:

$$f_\varepsilon(x) = x + x^2 + \varepsilon.$$

Эта деформация топологически версальна. Рассмотрим любое отображение прямой в себя, имеющее неподвижную точку с мультиликатором 1. Мы назовем эту (вырожденную) неподвижную точку *регулярной*, если вторая производная отображения в неподвижной точке (в какой-нибудь и тогда любой системе координат) отлична от нуля.

Если вырожденная неподвижная точка регулярна, то существует однопараметрическая топологически версальная деформация отображения. При этом как само отображение, так и его версальная деформация

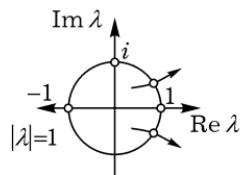


Рис. 139

локально топологически эквивалентны указанной выше деформации f_ε специального отображения f_0 в окрестности точки 0.

Чтобы перейти к многомерному случаю, нужно определить надстройку над построенной деформацией.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим отображение линейного пространства в себя, заданное формулой

$$(y, z, u, v) \mapsto \left(2y, -2z, \frac{u}{2}, -\frac{v}{2}\right),$$

где y, z, u, v — точки четырех подпространств, прямым произведением которых является наше пространство. Мы будем называть такое отображение *стандартным седлом* (размерности пространств, которым принадлежат y и u любые, а z и v — нуль или единица).

Рассмотрим любое гладкое отображение, имеющее неподвижную точку. Предположим, что ни один из мультипликаторов не лежит на единичной окружности. Тогда в окрестности неподвижной точки отображение топологически эквивалентно стандартному седлу (это легко следует из теоремы Гробмана–Хартмана, § 13).

ПРИМЕР 3. Рассмотрим прямое произведение деформации отображения прямой примера 1 на стандартное седло. Мы получим однопараметрическое семейство отображений с параметром ε и фазовыми координатами, меняющимися в окрестности нуля:

$$(x; y, z, u, v) \mapsto \left(x + x^2 + \varepsilon, 2y, -2z, \frac{u}{2}, -\frac{v}{2}\right).$$

Эта деформация называется *надстройкой* над деформацией примера 1. Она топологически версальна.

Теорема. Однопараметрические семейства отображений общего положения топологически эквивалентны выписанному выше в окрестности каждой неподвижной точки с мультипликатором 1 при значениях параметра, близких к тому, для которого мультипликатор становится равным 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО в одномерном случае легкое. Многомерный случай сводится к одномерному при помощи теоремы Шошитайшили (§ 32), которая верна не только для дифференциальных уравнений, но и для отображений. ■

В. Случаи мультипликатора -1 .

При появлении мультипликатора -1 замкнутая фазовая кривая гладко зависит от параметра и сама не бифурцирует. Но при этом от нее ответвляется дважды наматывающаяся на нее замкнутая фазовая кривая. Чтобы понять, как это происходит, обратимся опять к функции последования.

ПРИМЕР 4. Рассмотрим отображение прямой в себя

$$f_0(x) = -x \pm x^3.$$

Мультипликатор неподвижной точки 0 равен -1 .

Включим f_0 в семейство:

$$f_\varepsilon(x) = (\varepsilon - 1)x \pm x^3.$$

Теорема. Деформация f_ε отображения f_0 версальна. Однопараметрическое семейство общего положения в окрестности неподвижной точки с мультипликатором -1 при значениях параметра, близких к тому, при котором мультипликатор равен -1 , топологически эквивалентно выписанному.

Доказательство.

Рассмотрим любое однопараметрическое семейство отображений прямой, в котором мультиплликатор неподвижной точки обращается в -1 при некотором значении параметра.

Неподвижная точка гладко зависит от параметра (по теореме о неявной функции). Гладко зависящей от параметра заменой координат можно перенести неподвижную точку в нуль.

Будем теперь делать замены Пуанкаре (см. § 25), последовательно убивающие нерезонансные члены. Эти замены будут гладко зависеть от параметра, если мы будем оставлять члены, становящиеся резонансными при критическом значении параметра, не только при этом значении параметра (когда их и нельзя убрать), но также при соседних значениях.

В нашем случае резонансные члены — это все члены нечетной степени. Следовательно, семейство можно привести к виду

$$x \mapsto \lambda x + ax^3 + O(|x|^5),$$

где λ , a и O гладко зависят от параметра.

В семействе общего положения производная λ по параметру при $\lambda = -1$ отлична от нуля. В таком случае за параметр можно принять $\varepsilon = 1 + \lambda$. Теперь деформация имеет вид

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)x + a(\varepsilon)x^3 + O(|x|^5).$$

В семействе общего положения $a(0) \neq 0$. Гладко зависящим от параметра растяжением координат добиваемся $a(\varepsilon) = \pm 1$.

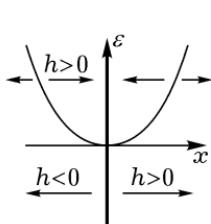


Рис. 140

Теперь остается проверить, что член O не влияет на топологический тип семейства. Рассмотрим квадрат нашего отображения:

$$x \mapsto (\varepsilon - 1)^2 x + (\varepsilon - 1)ax^3 + a(\varepsilon - 1)^3 x^3 + O(|x|^5).$$

Каждая точка x сдвигается на

$$h = -2\varepsilon(1 + \dots)x - (2a + \dots)x^3 + O(|x|^5),$$

где \dots означает $O(\varepsilon)$.

Нулевую линию уровня функции h на плоскости (x, ε) легко исследовать (рис. 140). Рис. 140 определяет топологический тип семейства. ■

Таким образом, в общем однопараметрическом семействе отображений прямой на прямую мультиликатор неподвижной точки становится равным -1 в момент трансверсального прохождения через единичную окружность (в отличие от обращения мультиликатора в 1 , при котором мультиликатор, вообще говоря, через окружность не проходит). В момент прохождения мультиликатора через -1 изнутри наружу неподвижная точка теряет устойчивость. При этом, в зависимости от знака коэффициента при x^3 , возможны два случая. Либо рядом с потерявшей устойчивость точкой (на расстоянии порядка квадратного корня из отличия параметра от критического значения) возникает устойчивый цикл периода 2 (две неподвижные точки квадрата отображения) — это случай мягкой потери устойчивости. Либо область притяжения стягивается до 0 из-за подхода цикла порядка два еще до потери устойчивости (жесткая потеря устойчивости).

Многомерная картина получается надстраиванием седла, как это описано выше.

Применяя все сказанное об отображениях к функции последования замкнутой фазовой кривой, получаем в случае мягкой потери устойчивости картину, изображенную на рис. 141: исходный цикл теряет

устойчивость, но появляется устойчивый цикл с примерно вдвое большим периодом.

Описанные здесь явления хорошо наблюдаются в экспериментах. Следующий пример заимствован из доклада Г. И. Баренблата на семинаре И. Г. Петровского. Рассматривается полимерная пленка, медленно растягиваемая грузом. При малых растяжениях процесс квазистационарен (время можно считать параметром, фазовая точка находится в устойчивом положении равновесия, все наблюдаемые величины при каждом значении параметра постоянны, т. е. фактически с изменением времени медленно меняются). Однако при некотором значении параметра (т. е. при достаточном растяжении пленки) картина меняется, и вид различных физических параметров (скажем, длины x пленки) как функции времени становится таким, как изображено на рис. 142 (каждое колебание на этом рисунке можно рассматривать как происходящее при фиксированном значении параметра, но при следующем колебании параметр немного меняется).

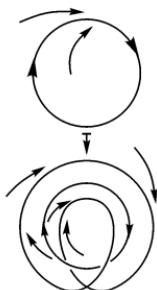


Рис. 141

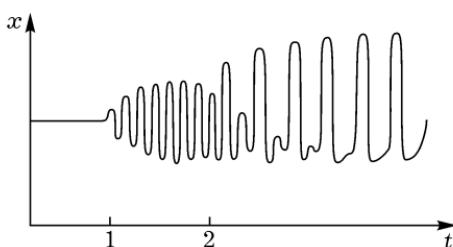


Рис. 142

Истолкование этого поведения фазовых переменных со временем следующее: точка 1 соответствует мягкой потере устойчивости равновесия с образованием автоколебаний; видно, что их амплитуда растет как корень квадратный из закритичности. Точка 2 соответствует мягкой потере устойчивости цикла с прохождением мультипликатора через -1 .

Действительно, предположим, что в фазовом пространстве происходят перестройки, указанные на рис. 141.

Каждая физическая наблюдаемая величина является функцией на фазовом пространстве. Пока фазовая точка находится в положении равновесия, величина постоянна. Когда фазовая точка движется по циклу, величина x становится периодической функцией времени t (амплитуда колебаний растет с циклом). Удвоению цикла, изображеному на рис. 141, отвечает именно такое удвоение периода зависимости измеряемой величины от времени, которое наблюдалось в эксперименте (рис. 142).

В связи с этим заметим, что вообще при изучении автоколебаний обычно регистрируют временные зависимости измеряемых величин (скажем, на электрокардиограмме). Во многих случаях более ясное представление о характере явлений можно получить из вида фазовой кривой или ее проекции на какую-либо плоскость. Этим методом давно пользуются для диагностики отказов таких механических автоколебательных систем, как насосы. Предложения применять этот метод в электрокардиографии уже высказывались медиками.

Одним из наиболее поразительных открытий теории бифуркаций явилось обнаружение в конце 70-х годов бесконечных каскадов удвоений — так называемая универсальность Фейгенбаума. Сущность этого открытия состоит в следующем. При изменении параметра бифуркация удвоения цикла повторяется, так что возникает цикл с примерно в четыре раза большим периодом, затем еще раз повторяется, так что период увосьмеряется, и т. д., так что на конечном интервале изменения параметра происходят удвоения, разделенные промежутками, убывающими в геометрической прогрессии: их отношения стремятся к постоянному числу.

Это постоянное число не зависит от конкретного вида системы и является мировой постоянной, вроде π или e : она называется константой Фейгенбаума и составляет, если делить предыдущее расстояние на следующее (меньшее), $4,6692\dots$

Универсальность проявляется не только в независимости этой постоянной от вида системы, но и в ряде деталей процесса удвоения, которые все, с точностью до масштабного преобразования, становятся все более и более стандартными по мере приближения параметра к предельному значению, соответствующему бесконечному числу удвоений.

Удвоение легче всего исследовать для неподвижных точек и циклов отображений прямой в себя. В качестве типичного примера можно взять отображения, рассматриваемые в экологии как модели размножения с учетом конкуренции: $x \mapsto Ax e^{-x}$ (множитель e^{-x} описывает влияние конкуренции, уменьшающее коэффициент размножения A).

При малых значениях A неподвижная точка 0 устойчива (вымирание), затем появляется положительная устойчивая неподвижная точка (рис. 143), которая при некотором значении A_1 параметра A теряет устойчивость, причем собственное число проходит через -1 (отображение, конечно, необратимо) с рождением цикла периода 2,¹ начинающего

¹По-видимому, объясняющего данное явление: годы, когда горбуши приходит на перест много, чередуются с годами меньшего «урожая».

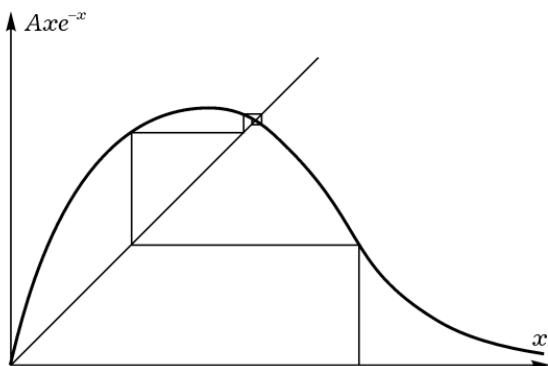


Рис. 143

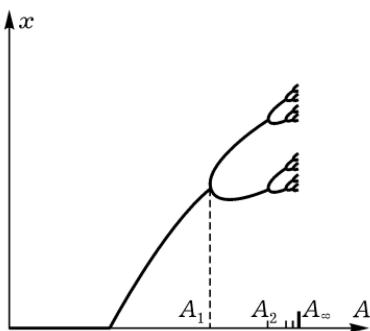


Рис. 144

каскад удвоений (рис. 144). Эти удвоения были разу же замечены экологами, как только динамика описанного выше преобразования и сходных с ним моделей были исследованы при помощи вычислительных машин (А. П. Шапиро. Математические модели конкуренции. В кн.: Управление и информация. Владивосток: ДВНЦ АН СССР, 10 (1974), с. 5–75; R. M. May. Biological populations obeying difference equations; stable points, stable cycles and chaos. — J. Theor. Biol. 1975, 51, p. 511–524; Simple mathematical models with very complicated dynamics. — Nature 261, 1976, 459–466). Анализируя эти данные, М. Фейгенбаум и обнаружил удивительный факт устойчивости бесконечного каскада удвоений, а также и еще более удивительную универсальность этого явления.

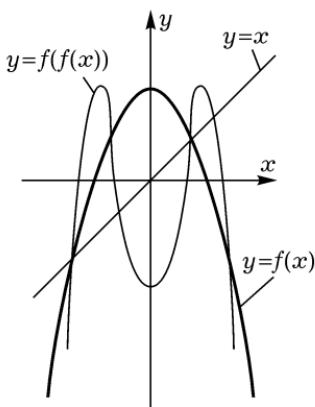


Рис. 145

Рассмотрим отображение прямой в себя $x \mapsto f(x)$ вблизи точки максимума функции f . Легко сообразить, что график квадрата отображения будет иметь два максимума и минимум (рис. 145).

В окрестности точки минимума после надлежащей нормировки (растяжения) координат функция, с точностью до знака, похожа на исходную. При возведении отображения в квадрат это сходство все время возрастает, как показывает вычислительный эксперимент. Это приводит к мысли искать неподвижную точку оператора J удвоения (возведения в квадрат) с перенормировкой, определенной ниже. Такая неподвижная точ-

ка, оказывается, существует, а именно, таковой является аналитическая четная функция

$$\Phi(x) = 1 - 1,52763x^2 + 0,104815x^4 - 0,0267057x^6 + \dots,$$

для которой $J\Phi = \Phi$, где $(Jf)(x) = -\frac{1}{a}f(f(-ax))$. Константа перенормировки для $\Phi_{a\Phi} = -\Phi(1) = 0,3995$ (все числовые коэффициенты, естественно, округлены).

Функция Φ является неподвижной точкой оператора J , определенного на четных C^1 -отображениях $f: [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ с одним максимумом, удовлетворяющих условиям (рис. 146)

$$f'(0) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(1) = -a < 0, \quad b = f(a) > a, \quad f(b) = f(f(a)) < a$$

для каких-либо a и b , $a = af$.

Оператор J в функциональном пространстве гиперболический, он имеет одномерное растягивающее пространство и одномерное сжимающееся. Собственное число в растягивающемся пространстве — это и есть постоянная Фейгенбаума $4,6692\dots$

Универсальность каскада удвоений объясняется этой картиной следующим образом. Однопараметрическое семейство отображений изображается кривой γ в функциональном пространстве (рис. 147). Если эта кривая проходит недалеко от неподвижной точки Φ , то при повторении преобразования удвоения J она будет вытягиваться вдоль растя-

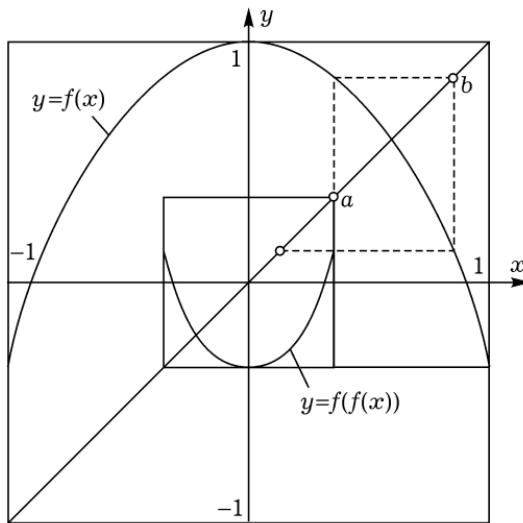


Рис. 146

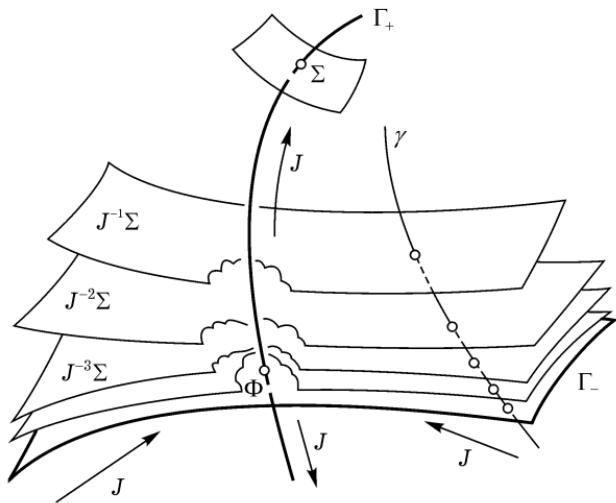


Рис. 147

гивающегося одномерного инвариантного многообразия Γ_+ отображения J , одновременно приближаясь к нему. С другой стороны, рассмотрим в функциональном пространстве бифуркационную поверхность Σ , образованную отображениями с собственным числом -1 в неподвижной точке.

Оказывается, инвариантная кривая Γ_+ , о которой шла речь выше, трансверсально пересекает эту бифуркационную поверхность Σ коразмерности 1. Следовательно, прообразы бифуркационной поверхности Σ при отображении удвоения и при его итерациях образуют последовательность поверхностей коразмерности 1 в функциональном пространстве, приближающихся при возрастании числа итераций к сжимающемуся многообразию Γ_- неподвижной точки (рис. 147). Точки пересечения этих поверхностей с изображающей наше семейство кривой γ определяют те значения параметра, при которых происходит удвоение цикла. Это объясняет и появление геометрической прогрессии, и универсальность ее знаменателя: он определяется последовательностью построенных выше поверхностей и не зависит от специального выбора трансверсальной кривой¹.

При переходе от отображений к диффеоморфизмам плоскости или к системам дифференциальных уравнений картина остается в общем такой же, с той же универсальной постоянной, хотя некоторые детали меняются. Для того, чтобы удвоившийся цикл претерпел новое удвоение, мультипликатор (собственное число отображения) должен пройти от 1 к -1 . Действительно, удваивающийся цикл имел мультипликатором (в момент рождения) число -1 . Значит удвоившийся цикл в момент рождения имеет мультипликатор $(-1)^2 = 1$. Перейти от 1 к -1 на вещественной оси мультипликатор не может ни для дифференциального уравнения, ни для диффеоморфизма, так как обратимость диффеоморфизма не позволяет ему обратиться в нуль.

Поэтому в явлении обязательно участвует еще один мультипликатор, который должен столкнуться сдвигающимся из 1 в -1 по вещественной оси мультипликатором, после чего оба сойдут в комплексную область и обойдут вокруг нуля с разных сторон, а затем снова разойдутся — один к -1 , другой — на свое место. Кривая, по которой обходит-

¹ Доказательства и библиография приведены в: P. Collet, J.-P. Eckmann. Iterated maps on the interval as dynamical system. Boston, Birkhauser, 1980, 248 p.

ся нуль, почти окружность, и для нее тоже есть почти универсальная асимптотика при повторении удвоений (М. В. Якобсон, 1985).

Универсальные удвоения имеют аналоги, соответствующие другим резонансам. Рассмотрим, например, резонанс $1 : 3$, когда собственное число (множитель) покидает единичный круг через кубический корень из единицы. Для реализации такого явления в семействе общего положения нужно как минимум два параметра. На плоскости параметров моменты утроения изображаются отдельными точками. Эти точки и в случае утроения, как и для удвоения, встречаются бесконечными сериями. Асимптотически их разности образуют геометрические прогрессии со стандартным, универсальным (независимым от семейства) знаменателем. Однако этот знаменатель оказывается не вещественным, как в случае удвоений, а комплексным числом, так что точки утроения образуют на плоскости параметров своеобразные дискретные спирали.

Аналогичные удвоения Фейгенбаума явления происходят и в гамильтоновых системах. В этом случае множитель -1 встречается обязательно четное число раз, в системе общего положения его кратность равна 2. После удвоения рождается цикл с двукратным множителем, равным (в момент рождения) 1. До следующего удвоения эта пара единиц движется к -1 по единичной окружности (сверху и снизу). Соответствующая константа Фейгенбаума в этом случае значительно больше, чем для обычных удвоений (примерно 8). Заметим, что по дороге множители проходят через все корни из единицы. Поэтому, также универсальным образом, между двумя последовательными удвоениями происходят другие события: рождение циклов, периоды которых равны разнообразным кратным порождающего цикла (в момент рождения).

Новорожденный цикл большего периода снова имеет множитель 1 кратности 2, который достаточно часто (грубо говоря, с вероятностью половину) при изменении параметра будет двигаться по единичной окружности. Таким образом, в принципе возникает ветвящаяся схема бифуркационных значений параметра, занумерованных всеми конечными последовательностями рациональных чисел. Обычная последовательность удвоений отвечает натуральному ряду. Последовательность удвоений утроившегося цикла — $\frac{1}{3}, 1, 2, \dots$. Можно рас-

сматривать и последовательности вроде $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots$ (каскад утроений) или $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \dots$, приводящие, вероятно, к новым универсальным константам.

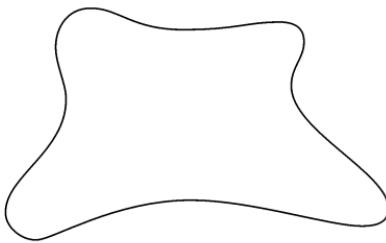


Рис. 148

Сопровождающие эти бифуркации явления давно наблюдались в численных экспериментах. Например, инвариантные кривые («острова»), напоминающие шляпу (рис. 148), возникают при учетверении цикла и встречались уже в ранних работах Хенона с Хейлем и Чирикова¹, но, кажется, не получили тогда надлежащего объяснения.

Г. Прохождение пары мультиликаторов через единичную окружность.

Этот случай изучен гораздо хуже обоих предыдущих. Топологически версальные деформации не выписаны и, быть может, не существуют. Тем не менее метод Пуанкаре позволяет получить существенную информацию. Начнем со случая, когда аргумент мультиликатора, попавшего на единичную окружность, несоизмерим с 2π (этот случай можно считать общим, так как мера множества рациональных чисел равна нулю).

Мы будем считать, что размерность отображаемого пространства равна 2. В этом случае после подходящей гладкой и гладко зависящей от параметра замены координат наше семейство отображений приводится к виду

$$z \mapsto \lambda(\varepsilon)z(1 + a(\varepsilon)|z|^2 + O(|z|^4)),$$

¹ M. Hénon, C. Heiles. The applicability of the third integral of motion: some numerical experiments. Astron. J. 69 (1964), 73; Б. В. Чириков. Исследования по теории нелинейного резонанса и стохастичности. Новосибирск: препринт Изв. СО АН СССР № 267, 1969.

где вещественное число ε — параметр семейства, $\lambda(0) = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq \frac{2\pi p}{q}$.

Для семейства общего положения $\left. \frac{d|\lambda|}{d\varepsilon} \right|_0 \neq 0$, так что за параметр можно взять $|\lambda| - 1$.

Предположим, что член $O(|z|^4)$ отсутствует. В этом случае отображение легко исследовать. Действительно, модуль точки-образа определяется модулем точки прообраза, так что возникает вещественное отображение

$$r \mapsto r|\lambda||1 + ar^2|.$$

При $|\lambda| = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$, $r \ll 1$ имеем

$$|\lambda||1 + ar^2| \approx 1 + \varepsilon + \operatorname{Re} ar^2 + \dots$$

Для семейства общего положения $\operatorname{Re} a \neq 0$. В этом случае при прохождении параметром ε значения нуль из теряющей устойчивость неподвижной точки рождается (или в этой точке умирает) инвариантная относительно отображения окружность, радиус которой пропорционален $\sqrt{|\varepsilon|}$. В первом случае (рождения окружности) она устойчива, во втором неустойчива. На самой окружности отображение сводится к повороту.

Вернемся теперь к отброшенным членам и посмотрим, повлияют ли они на сделанные выводы.

Можно показать, что инвариантная замкнутая кривая, радиусом порядка $\sqrt{|\varepsilon|}$ действительно существует у полного отображения (см.: Sacker R. J. On invariant surfaces and bifurcation of periodic solutions of ordinary differential equations. New York University, Report IMM-NYU 333, 1964; CPAM 18, 4 (1965), 717–732).

Устойчивость этой замкнутой кривой также сохраняется при возмущении. Однако устройство отображения на самой кривой для полного отображения отличается от такового для отображения с отброшенным остаточным членом. Действительно, полное отображение на инвариантной кривой может иметь как иррациональное, так и рациональное число вращения. Возникающее отображение окружности отнюдь не обязано быть топологически эквивалентным повороту. В случае рационального числа вращения оно будет, вообще говоря, иметь конечное число периодических точек, попеременно устойчивых и неустойчивых. Эти периодические точки для исходного отображения плоскости на себя будут,

соответственно, седлами и узлами. Таким образом, наша инвариантная кривая состоит в случае рационального числа вращения из цепочки сепаратрис седел, сходящихся в узлах (рис. 149).

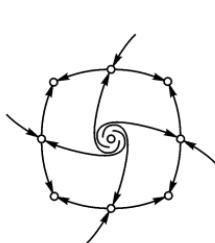


Рис. 149

Заметим, что сепаратрисы седел гладкие. Но при подходе к узлу с двух сторон две сепаратрисы образуют вместе, вообще говоря, кривую лишь конечной гладкости. Таким образом, возникающая инвариантная кривая, вообще говоря, имеет лишь конечную гладкость. При приближении к значению параметра, соответствующему переходу мультиплликаторов через окружность, гладкость инвариантной кривой растет до бесконечности (как нетрудно сообразить).

Если наше отображение было отображением последования для дифференциального уравнения, то в фазовом трехмерном пространстве инвариантная кривая отображения последования определяет инвариантный тор, сплошь состоящий из фазовых кривых. Наша инвариантная кривая — это сечение указанного тора трансверсалю. Тор имеет конечную гладкость, тем большую, чем ближе момент рождения тора из цикла. При изменении параметра в семействе число вращения на торе, вообще говоря, меняется, так что оно принимает то иррациональные, то рациональные значения.

Из описанной картины бифуркаций при переходе пары мультиплликаторов через единичную окружность следует также, что в однопараметрических семействах общего положения не встречаются ответвления от данного периодического режима периодических режимов кратности, отличной от двух. Действительно, последнее могло бы происходить, лишь если бы мультиплликатор переходил единичную окружность в точке с рациональным аргументом, а это — явление исключительное.

Чтобы разобраться, как возникают периодические движения с большими периодами, необходимо рассматривать семейства с двумя параметрами.

Действительно, обращение мультиплликатора в корень из единицы (отличный от 1 и -1) встречается неустранимо лишь в вещественно двухпараметрических семействах. Двупараметрическое рассмотрение потери устойчивости неподвижной точки в резонансном случае, т. е. когда мультиплликатор близок к корню из единицы, позволяет также лучше понять бифуркации в однопараметрических семействах

при пересечении мультиликаторами единичной окружности. А именно, как мы увидим, некоторые перестройки, кажущиеся нелокальными при однопараметрическом подходе, поддаются исследованию локальными методами, если рассматривать задачу как двухпараметрическую. В частности, на этом пути можно исследовать некоторые случаи жесткой потери устойчивости и указать, на какой режим перескочит система после жесткой потери устойчивости цикла.

Д. Резонанс при потере устойчивости цикла.

Рассмотрим отображение плоскости в себя в окрестности неподвижной точки с мультиликатором, равным корню степени $q > 2$ из единицы. В соответствии с общим методом Пуанкаре (гл. 5), мы можем записать семейство в подходящей системе координат в виде $z \mapsto z[\lambda + A(|z|^2) + Bz^{q-1} + O(|z|^{q+1})]$, где λ , B и O гладко зависят от ε .

Вместо того, чтобы исследовать это отображение, мы можем поступить по-другому. Каждый шаг метода Пуанкаре в случае резонанса сводится к усреднению вдоль соответствующего слояения Зейферта (см. § 21). Поэтому вместо приведения к нормальной форме функции последования можно записать исходное уравнение фазовых кривых в окрестности цикла как неавтономное уравнение с 2π -периодическими коэффициентами и затем приводить его к нормальной форме $2\pi q$ -периодическими по времени заменами координат (см. § 26).

В результате этой процедуры мы получим в новых координатах (гладко зависящих от параметра) уравнение с $2\pi q$ -периодическими по t коэффициентами

$$\dot{\zeta} = \varepsilon\zeta + \zeta A(|\zeta|^2) + B\zeta^{q-1} + O(|\zeta|^{q+1}).$$

Здесь ε — комплексный параметр, A и B голоморфно зависят от ε , значение $\varepsilon = 0$ соответствует резонансу (т. е. обращению мультиликатора исходного уравнения в корень степени q из 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из приведенных рассуждений следует, в частности, что:

1) Функция последования с точностью до членов степени $q+1$ (и даже с точностью до членов сколь угодно высокой степени) совпадает с преобразованием фазового потока векторного поля на плоскости.

2) Указанное векторное поле инвариантно относительно циклической группы диффеоморфизмов плоскости (порядка q).

3) Выводы 1 и 2 имеют место не только для индивидуальной функции последования, но и для семейства, гладко зависящего от параметров, причем

как группа, так и инвариантное относительно нее поле, получаются гладко зависящими от параметров.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Точная функция последования, вообще говоря, не является преобразованием фазового потока никакого векторного поля и не коммутирует ни с какой конечной группой диффеоморфизмов.

Из сказанного выше видно, что с точностью до членов сколь угодно высокой степени относительно расстояния до замкнутой фазовой кривой задача о бифуркациях при потере устойчивости вблизи резонанса порядка $q > 2$ сводится к исследованию перестроек фазовых портретов в двухпараметрических семействах общего положения векторных полей на плоскости, инвариантных относительно вращений на угол $\frac{2\pi}{q}$. Резонанс называется *сильным*, если $q \leq 4$.

Случаи резонансов порядка 2 и 1 также можно включить в эту схему. А именно, потеря устойчивости цикла при прохождении пары мультипликаторов через единичную окружность соответствует гиперповерхности коразмерности один в функциональном пространстве. Эта гиперповерхность подходит к гиперповерхностям, соответствующим мультипликаторам 1 и -1 , по поверхностям коразмерности 2. Точки общего положения на этих поверхностях коразмерности 2 соответствуют таким замкнутым фазовым кривым, для которых функция последования имеет двукратное собственное число 1 (соответственно -1) с жордановой клеткой порядка 2.

Поэтому исследование граничных случаев прохождения мультипликаторов через единичную окружность сводится, с точностью до членов сколь угодно высокой степени, к изучению перестроек фазовых портретов в общих двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости, инвариантных относительно поворотов на угол $2\pi q$ ($q = 1, 2$) и имеющих при некотором значении параметра особую точку с линейной частью в виде нильпотентной жордановой клетки; соответствующее линейное уравнение приводится к виду

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = 0.$$

Окончательно, задача о перестройках при потере устойчивости вблизи резонансов приводит к изучению бифуркаций фазовых портретов в двухпараметрических семействах эквивариантных векторных полей на плоскости; этой последней задачей мы теперь и займемся.

§ 35. Версальные деформации эквивариантных векторных полей на плоскости

Перестройки фазовых портретов векторных полей, инвариантных относительно какой-либо группы симметрий, естественно возникают при исследовании различных явлений, в которых симметрия присутствует в самой постановке задачи.

Более удивительным является тот факт, что задачи о перестройках симметричных фазовых портретов возникают сами собой в несимметричной a priori ситуации, при исследовании бифуркаций вблизи резонансов (см. § § 21 и 34). В настоящем параграфе рассматриваются именно те бифуркации симметричных фазовых портретов, которые нужны для изучения резонансов.

Е. Эквивариантные векторные поля на плоскости

Пусть F — векторное поле на плоскости комплексной переменной z . Мы будем рассматривать F как комплекснозначную (не обязательно голоморфную) функцию на \mathbb{C} . Ряд Тейлора этой функции в нуле можно записать в виде $\sum F_{k,l} z^k \bar{z}^l$.

Предложение. *Пусть поле F переходит в себя при повороте плоскости переменной z на угол $\frac{2\pi}{q}$. Тогда коэффициенты $F_{k,l}$ отличны от нуля лишь при $k - l$, сравнимых с 1 по модулю q .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Ряд Тейлора единственен, поэтому каждый его член должен повернуться на угол $\frac{2\pi}{q}$, когда z поворачивается на угол $\frac{2\pi}{q}$. Точка комплексной плоскости $z^k \bar{z}^l$ поворачивается на угол $\frac{2\pi(k-l)}{q}$. Этот поворот совпадает с поворотом на угол $\frac{2\pi}{q}$ в точности при указанном выше условии. ■

Следствие. *Дифференциальные уравнения, инвариантные относительно поворотов на угол $\frac{2\pi}{q}$, имеют следующий вид:*

$$\dot{z} = zA(|z|^2) + B\bar{z}^{q-1} + O(|z|^{q+1}) \quad (q > 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим на плоскости (k, l) целые точки, удовлетворяющие

сравнению $k - l \equiv 1(\text{mod } q)$. Эти точки расположены на лучах, параллельных биссектрисе положительного квадранта и начинающихся в точках, отвечающих мономам $z, z^{q+1}, z^{2q+1}, \dots; \bar{z}^{q-1}, \bar{z}^{2q-1}, \dots$. Будем искать среди перечисленных мономов мономы наименьшей степени (рис. 150).

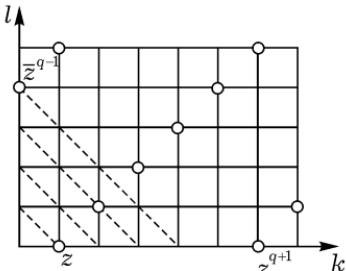


Рис. 150

Мы получим последовательно сперва несколько мономов на луче, начинающемуся в z (т. е. мономов вида $z|z|^{2k}$, затем моном \bar{z}^{q-1} ; все прочие мономы имеют степень не ниже $q + 1$ (рис. 150). ■

Определение. Главным уравнением, инвариантным относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{q}$, называется предыдущее уравнение, в котором откинут член O . Правая часть главного уравнения называется *главным q -эквивариантным полем*.

ПРИМЕР. Главные уравнения, инвариантные относительно групп вращений порядков 3 и 4 имеют, соответственно, вид

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2, \quad \dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3.$$

Для формулировки результатов исследования перестроек фазовых портретов эквивариантных векторных полей, зависящих от параметров, удобно ввести следующие определения.

Ж. Эквивариантные версальные деформации.

Рассмотрим семейство v_λ , векторных полей, инвариантных относительно действия группы G на фазовом пространстве и зависящих от параметра λ , принадлежащего окрестности точки 0 пространства \mathbb{R}^k (называемого *базой* семейства). Размерность базы называется *числом параметров* семейства.

Росток семейства в точке $\lambda = 0$ называется *эквивариантной деформацией* поля v_0 .

Определение. Эквивариантная деформация v_λ называется *эквивариантно топологически орбитально версальной* (короче *версальной*)