

деформацией поля  $v_0$ , если для любой другой эквивариантной деформации  $w_\mu$  того же поля существует непрерывное отображение  $\varphi$  баз деформаций и такое непрерывно зависящее от  $\mu$  семейство гомеоморфизмов  $h_\mu$  фазового пространства, коммутирующих с действием  $G$ , что  $h_\mu$  переводит фазовые кривые поля  $w_\mu$  в фазовые кривые поля  $v_{\varphi(\mu)}$  с сохранением направления движения.

Иными словами, *эквивариантная деформация версальна, если всякая другая эквивариантная деформация топологически орбитально эквивалентна деформации, индуцированной из версальной*.

Аналогичные определения даются для ростков векторных полей, а также для деформаций в классе полей со специальными свойствами (например, с фиксированной линейной частью в особой точке). Теперь мы переходим к построению версальных деформаций.

### 3. Главные деформации.

Рассмотрим векторное поле на плоскости, инвариантное относительно поворота на угол  $\frac{2\pi}{q}$ ,  $q > 2$ .

**Определение.** Поле называется *особым*, если линейная часть поля в нуле равна нулю.

**Определение.** *Главной деформацией  $q$ -эквивариантного главного особого поля  $v_0$  ( $q > 2$ ) называется двупараметрическое семейство  $v_\varepsilon = \varepsilon z + v_0$ , где параметрами являются вещественная и мнимая части комплексного числа  $\varepsilon$ .*

**ПРИМЕР.** Главные деформации в случаях  $q = 3, 4$  задаются уравнениями

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2, \quad \dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3,$$

в которых  $\varepsilon$  рассматривается как параметр, а комплексные коэффициенты  $A$  и  $B$  фиксированы.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Определенные выше объекты возникают при исследовании потери устойчивости цикла при переходе пары комплексно-сопряженных мультиликаторов через единичную окружность. В функциональном пространстве всех систем системы с таким переходом образуют гиперповерхность. Эта гиперповерхность является одной из

трех гиперповерхностей, ограничивающих область устойчивости. Другие две гиперповерхности соответствуют переходу одного мультипликатора через единичную окружность в точке 1 и в точке  $-1$  соответственно.

Граница гиперповерхности, соответствующей переходу комплексной пары мультипликаторов, состоит из двух частей (двух поверхностей коразмерности два в функциональном пространстве всех систем). Одна из этих поверхностей коразмерности два отвечает паре мультипликаторов, равных 1, образующих жорданову клетку порядка 2, другая — такой же клетке с двумя собственными числами  $-1$ .

Изучение потери устойчивости в окрестности этих граничных поверхностей коразмерности 2 приводит к исследованию бифуркаций в двухпараметрических семействах векторных полей на плоскости, имеющих линейной частью нильпотентную жорданову клетку порядка 2 и симметричных относительно вращений на угол  $2\pi q$ ,  $q = 2$  (для мультипликаторов  $-1$ ) или  $q = 1$  (мультипликаторы 1). Чтобы включить рассмотрение этих случаев в общую схему, удобно дать следующие определения.

### И. Случай $q = 1$ и $q = 2$ .

**Определение.** Поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол  $\frac{2\pi}{q}$ ,  $q = 1$  или 2, называется *особым*, если его линейная часть в нуле есть нильпотентная жорданова клетка второго порядка.

Иными словами, при  $q = 1$  или 2 особое поле — это поле, линейная часть которого есть поле фазовой скорости уравнения  $\ddot{x} = 0$  на фазовой плоскости  $(x, y = \dot{x})$ .

Легко доказывается

**Теорема.** *Особое поле, инвариантное относительно поворота плоскости на угол  $\frac{2\pi}{q}$ ,  $q = 1$  или 2, приводится диффеоморфизмом, коммутирующим с поворотом, к полю фазовой скорости уравнения*

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= ax^3 + bx^2y + O(|x|^5, |y|^5) \quad (q = 2), \\ \ddot{x} &= ax^2 + bxy + O(|x|^3, |y|^3) \quad (q = 1)\end{aligned}$$

*на фазовой плоскости  $(x, y = \dot{x})$ .*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Линейная часть нашего поля имеет вид  $y \frac{\partial}{\partial x}$ . Составим гомологическое уравнение, соответствующее этому линейному полю. Для этого вычислим скобку Пуассона нашего линейного поля  $\Lambda = y \frac{\partial}{\partial x}$  с произвольным векторным полем  $h = P \frac{\partial}{\partial x} + Q \frac{\partial}{\partial y}$ .

Мы находим последовательно

$$\left[ y \frac{\partial}{\partial x}, P \frac{\partial}{\partial x} \right] = y P_x \frac{\partial}{\partial x}, \quad \left[ y \frac{\partial}{\partial x}, Q \frac{\partial}{\partial y} \right] = y Q_x \frac{\partial}{\partial y} - Q \frac{\partial}{\partial x},$$

$$[\Lambda, h] = (y P_x - Q) \frac{\partial}{\partial x} + y Q_x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Итак, гомологическое уравнение относительно неизвестных функций  $(P, Q)$  имеет вид системы

$$y P_x - Q + u = 0, \quad y Q_x + v = 0.$$

Здесь  $u$  и  $v$  — известные функции, а именно компоненты векторного поля  $w = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ , которое мы хотим убить заменой переменных.

Исследуем полученную систему. Исключая  $Q$  из первого уравнения и подставляя во второе, получаем

$$y^2 P_{xx} = -yu_x - v.$$

Чтобы добиться делимости правой части на  $y^2$ , достаточно изменить у функции  $v$  члены 0 и 1 степени по  $y$ . Таким образом, изменяя  $v$  на  $v_0(x) + yv_1(x)$ , можно добиться разрешимости последнего уравнения относительно  $P$ .

Следовательно, гомологическое уравнение при произвольных  $(u, v)$  неразрешимо, но становится разрешимым, если изменить  $v$  на подходящую линейную неоднородную по  $y$  функцию. Иными словами, уравнение

$$[\Lambda, h] + w = (v_0(x) + yv_1(x)) \frac{\partial}{\partial y}$$

с подходящими  $(v_0, v_1)$ , зависящими от  $w$ , разрешимо относительно неизвестного поля  $h$ .

Окончательно, метод Пуанкаре позволяет уничтожать в членах каждой степени векторного поля  $\Lambda + \dots$  все вектор-моменты, кроме вектор-моментов вида  $x^k \frac{\partial}{\partial y}$  и  $yx^k \frac{\partial}{\partial y}$ . Таким образом, в классе формальных степенных рядов наше уравнение приводится к виду

$$\ddot{x} = a(x) + yb(x).$$

Если исходная система выдерживала поворот на угол  $\pi$  (т. е. была нечетной), то компоненты исходного векторного поля были нечетными функциями. В этом случае замены метода Пуанкаре можно также выбирать нечетными (коммутирующими с поворотом), так как в предыдущих формулах степени ( $P, Q$ ) и ( $u, v$ ) одинаковы. Тогда и ряды ( $a, b$ ) в формальной нормальной форме будут состоять лишь из членов нечетной степени.

Ограничивааясь в методе Пуанкаре несколькими первыми приближениями, мы получаем сформулированное выше предложение. ■

**Определение.** Главными особыми уравнениями и полями при  $q = 2$  и  $1$  называются, соответственно, уравнения

$$\ddot{x} = ax^3 + bx^2y \quad (q = 2), \quad \ddot{x} = ax^2 + bxy \quad (q = 1)$$

и задающие их векторные поля на фазовой плоскости  $(x, y = \dot{x})$ .

**Определение.** Главной деформацией главного особого поля при  $q = 2$  и  $1$  называется, соответственно, деформация, состоящая в прибавлении к правой части уравнения второго порядка слагаемого  $\alpha x + \beta y$  ( $q = 2$ ) и  $\alpha + \beta x$  ( $q = 1$ ).

Список главных деформаций  $q$ -эквивариантных полей в случаях сильного резонанса, т. е. для  $q \leq 4$  следующий:

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3, & (q = 4), \\ \dot{z} &= \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^2, & (q = 3), \\ \ddot{x} &= \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2y, & (q = 2), \\ \ddot{x} &= \alpha + \beta x + ax^2 + bxy, & (q = 1).\end{aligned}$$

Здесь переменные  $z, \varepsilon, A, B$  — комплексные;  $x, y, \alpha, \beta, a, b$  — вещественные; параметры деформации обозначены греческими буквами;  $y = \dot{x}$ .

### К. Версальность главных деформаций.

**«Теорема».** Все главные особые поля при каждом  $q$  можно разделить на вырожденные и невырожденные так, что

1) Вырожденные поля образуют объединение конечного числа подмногообразий в пространстве главных особых полей.

2) Невырожденные поля образуют объединение конечного числа открытых связных областей.

3) Главная деформация ростка невырожденного поля в нуле версальна.

4) Главные деформации ростков невырожденных полей в каждой компоненте связности топологически эквивалентны.

Слово «теорема» заключено здесь в кавычки потому, что при  $q = 4$  теорема не доказана.

За исключением случая  $q = 4$ , условия невырожденности можно выписать явно:

$$a \neq 0, b \neq 0 \text{ при } q = 1, 2; \quad \operatorname{Re} A(0) \neq 0, B \neq 0 \text{ при } q \geq 3.$$

При  $q = 4$  к этим условиям следует добавить по меньшей мере условия (на стр. 394, 3), 4), указаны, по-видимому, все остальные).

$$|A|^2 \neq |B|^2, \quad |\operatorname{Re} A| \neq |B|,$$

$$|\operatorname{Im} A| \neq \frac{(|B|^2 + \operatorname{Re}^2 A)}{\sqrt{|B|^2 - \operatorname{Re}^2 A}}.$$

Из теоремы легко выводится

**Следствие.** В функциональном пространстве двупараметрических семейств векторных полей, инвариантных относительно группы вращений на углы, кратные  $\frac{2\pi}{q}$ , открытое<sup>1</sup> всюду плотное множество образует семейства, для которых поля особы лишь при отдельных изолированных значениях параметров и в окрестности этих значений семейство топологически эквивалентно версальной деформации невырожденного главного особого поля.

Иными словами: пусть собственные числа линеаризации векторного поля на плоскости, инвариантного относительно вращений на углы,

<sup>1</sup>С обычными оговорками, если база некомпактна.

кратные  $\frac{2\pi}{q}$ , равны нулю. Рассмотрим поле общего положения с указанными свойствами. Образуем его двухпараметрическую деформацию общего положения в классе полей с той же симметрией.

Утверждается, что существует такая не зависящая от параметров окрестность точки 0, что построенная деформация приводится непрерывно зависящим от параметров гомеоморфизмом с такой же симметрией к нормальной форме, указанной в пп. В и Г. Точнее, гомеоморфизмы приводят к нормальной форме фазовые портреты соответствующих систем.

Таким образом, сформулированная теорема сводит описание всех бифуркаций к описанию бифуркации в главных деформациях невырожденных особых полей.

### Л. Описание бифуркаций.

В случае  $q = 1$  сформулированная выше теорема доказана Р. И. Богдановым в 1971 году (см. § 33, где приведено и описание бифуркаций).

В случае  $q = 2$  заменами времени добиваемся  $b < 0$ . Бифуркационная диаграмма («циферблат») на плоскости  $(\alpha, \beta)$  и перестройка фазового портрета для случаев  $a > 0$  и  $a < 0$  приведены на рис. 151.

В случае  $q = 3$  заменами времени добиваемся  $\operatorname{Re} A < 0$ . Бифуркационная диаграмма и перестройки приведены на рис. 152.

При  $q \geq 5$  заменами времени добиваемся  $\operatorname{Re} A < 0$ ; бифуркационная диаграмма и перестройки изображены на рис. 153. Заметим, что зона существования неподвижных точек подходит к мнимой оси  $\varepsilon$  узким языком, края которого имеют общую касательную:

$$\operatorname{Im} \varepsilon \approx f(\operatorname{Re} \varepsilon) \pm c |\operatorname{Re} \varepsilon|^{(q-2)/2}, \quad q \geq 5.$$

Доказательства теоремы и приведенных выше утверждений в случае  $q \geq 5$  просты, в случае  $q = 1$  содержатся в цитированных в § 33 работах Богданова, в случае  $q = 4$  неизвестны, а в случаях  $q = 2, 3$  намечены ниже. Некоторые варианты перестроек для  $q = 4$  изображены ниже (на рис. 157, 159, 160). См. также стр. 394, 1), 2), 3), 4).

### М. Случай симметрии порядка 3.

1°. Пусть  $A = 0$ , в этом случае система получается из некоторой гамильтоновой поворотом поля. А именно, рассмотрим равносторонний треугольник, образованный особыми точками (седлами). Стороны этого треугольни-

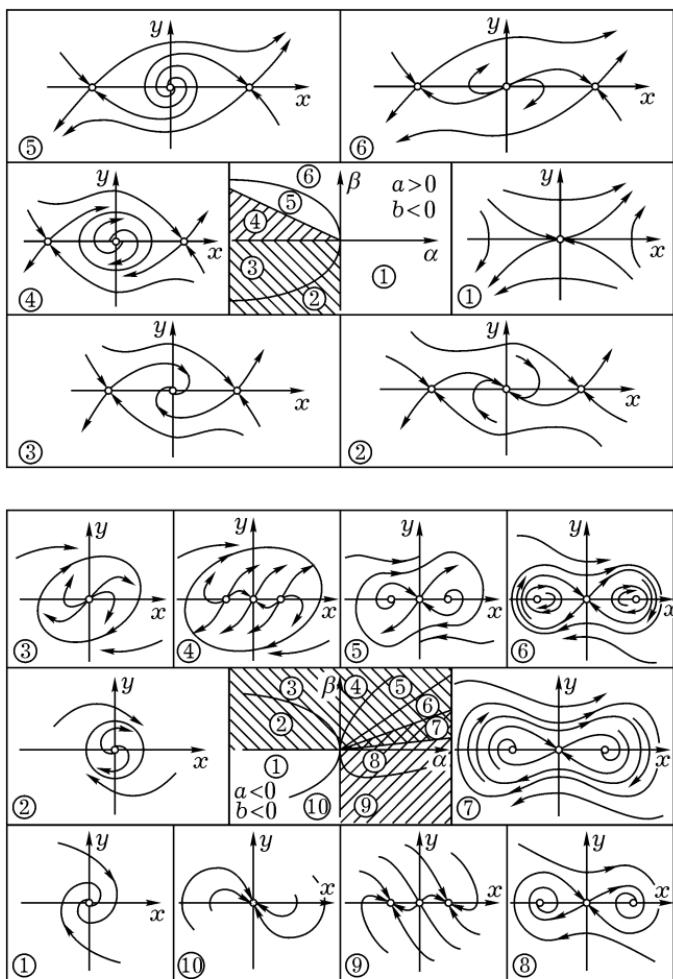


Рис. 151

ка определяют 3 линейные неоднородные функции. Произведение этих трех функций и есть нужная функция Гамильтона.

Знак производной этой функции в силу нашей системы  $\dot{z} = \varepsilon z + B\bar{z}^2$  определяется знаком вещественной части параметра  $\varepsilon$ . Это позволяет использовать указанную функцию в качестве функции Ляпунова. Таким образом, при  $A = 0$  главная деформация исследуется без труда.

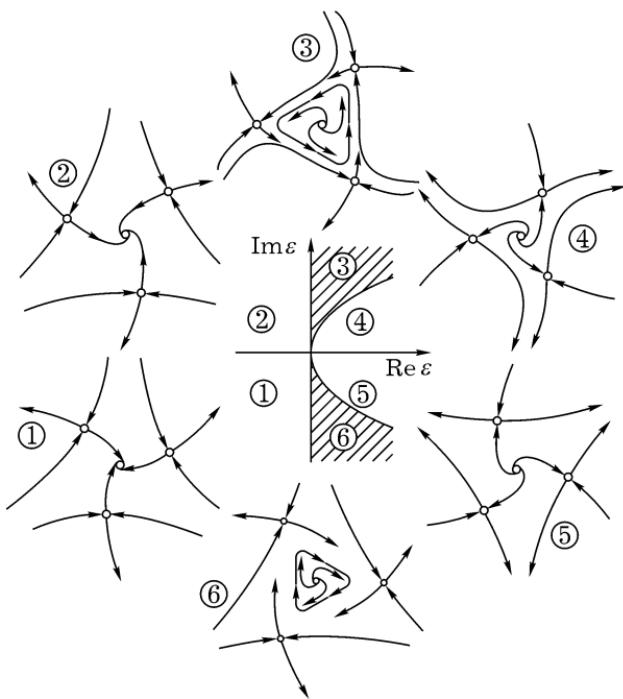


Рис. 152

2°. В общем случае заменами  $t = \frac{T}{|\varepsilon|}$ ,  $z = Z|\varepsilon|$  приводим систему к виду

$$\frac{dZ}{dT} = EZ + \bar{Z}^2 + |\varepsilon| AZ|Z|^2, \quad E = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}.$$

В области, в которой  $|Z|$  мал по сравнению с  $\varepsilon^{-1}$ , третье слагаемое можно рассматривать как малое возмущение. В области, где аргумент  $E$  не близок к  $\pm \frac{\pi}{2}$ , это возмущение не меняет картину, полученную в 1°. Если же вещественная часть  $E$  мала по сравнению с комплексной, то систему можно рассматривать как маловозмущенную систему Гамильтона  $\frac{dZ}{dT} = \pm iZ + \bar{Z}^2$ .

Невозмущенная функция Гамильтона  $H$  описана в 1°.

3°. Вычислим скорость изменения  $H$  вдоль решений системы. Интегрируя по линии уровня  $H = h$ , получаем условие рождения цикла на этой

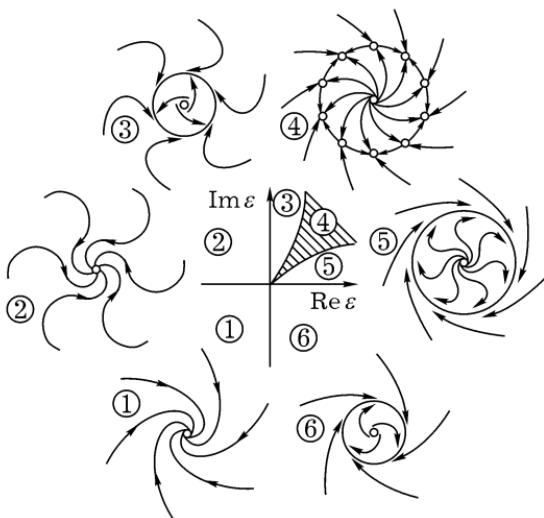


Рис. 153

линии в виде  $\oint \mu r^2 + \lambda r^4 d\varphi = 0$ , где  $\mu = -\frac{\sigma}{\tau}$ ,  $\lambda = a\tau$ ,  $\varepsilon = \sigma + i\tau$ ,  $A = -a + ib$ ;  $r$  и  $\varphi$  — полярные координаты на плоскости.

Обозначим через  $\rho$  радиус инерции области ограниченной эллиптической кривой  $H = h$ . Тогда условие рождения цикла именно из линии  $H = h$  при прохождении  $|\varepsilon|$  через нуль можно записать в виде  $\sigma = \rho^2 \tau^2 a$ .

Наибольшее возможное значение  $\rho$  соответствует треугольнику, образованному сепаратрисами седел. Функция  $\rho(h)$  монотонна (ср. п. И).

4°. Дальнейшее обоснование версальности главного семейства и вида бифуркационных диаграмм и фазовых портретов проводится как в случае  $q = 1$ .

#### Н. Случай симметрии порядка 2.

1°. Растворениями  $x$  и заменами времени, а также параметров, семейство можно привести к виду

$$\ddot{x} = \alpha x + 2\beta y + ax^3 + bx^2y, \quad a = \pm 1, b = -2.$$

Это семейство с параметрами  $(\alpha, \beta)$  мы и будем исследовать.

2°. Если  $|\beta| \leq \sqrt{|\alpha|}$ , то делаем замену  $x = \sqrt{\frac{|\alpha|}{|a|}}x'$ ,  $t = \frac{t'}{\sqrt{|\alpha|}}$ , приводящую  $|\alpha|$  и  $|a|$  к 1. Получаем почти гамильтонову систему. Функция Гамиль-

тона имеет вид

$$H = \frac{y^2}{2} - \operatorname{sgn} \alpha \frac{x^2}{2} - \operatorname{sgn} a \frac{x^4}{4}.$$

Диссипативные члены имеют вид

$$2\beta' y + b' x^2 y, \quad \beta' = \frac{\beta}{\sqrt{|\alpha|}}, \quad b' = \frac{\sqrt{|\alpha|} b}{|a|}.$$

3°. Интегрируя скорость изменения  $H$  вдоль линии уровня  $H = h$ , получаем условие рождения цикла из этой именно линии при прохождении  $\alpha$  и  $\beta = u\alpha$  через нуль:  $u = r^2$ , где

$$r^2 = \frac{\iint x^2 dx dy}{\iint dx dy}$$

— квадрат радиуса инерции относительно оси  $y$  области, ограниченной линией  $H = h$ .

4°. Если  $|\alpha| \ll |\beta|$ , то делаем замену  $x = \lambda x'$ ,  $t = \varkappa t'$ , приводящую  $|a|$  к 1 и  $|b|$  к  $|\beta|$ :

$$\lambda = \sqrt{\left| \frac{\beta}{b} \right|}, \quad \varkappa = \sqrt{\left| \frac{b}{\beta} \right|}.$$

Получаем  $\alpha' = \left| \frac{b}{\beta} \right| \alpha$ ,  $b' = b \sqrt{\left| \frac{\beta}{b} \right|}$ ,  $\beta' = \beta \sqrt{\left| \frac{b}{\beta} \right|}$ ,  $a' = a$ ;

$$\ddot{x} = ax^3 + \beta' 2y(1 \pm x^2) + \alpha' x.$$

Здесь оба параметра  $\beta' \sim \sqrt{|\beta|}$  и  $\alpha' \sim \frac{\alpha}{\beta}$  малы. При  $\beta' = 0$  получаем систему Гамильтона

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{\alpha' x^2}{2} - \frac{ax^4}{4}.$$

Дальнейшее исследование проводится обычным образом.

### О. Нули эллиптических интегралов.

Выше показано, что исследование поведения циклов в наших семействах сводится к решению специальных случаев следующей «ослабленной 16-й проблемы Гильберта»:

Пусть  $H$  — вещественный многочлен степени  $n$ ,  $P$  — вещественный многочлен степени  $m$  от переменных  $(x, y)$ . Сколько вещественных нулей может иметь функция

$$I(h) = \iint_{H \leqslant h} P dx dy?$$

Для исследования симметрий порядка 2 нужен случай

$$P = \mu + \lambda x^2, H = \frac{y^2}{2} - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{ax^4}{4}.$$

При  $P = \mu + \lambda x^2$  вопрос сводится к исследованию монотонности функции  $r(h)$ , где  $r$  — радиус инерции относительно оси  $y$  области, ограниченной циклом.

**Лемма.** *Функция  $r$  на интервалах между критическими значениями  $H$  ведет себя следующим образом:*

Значения $\alpha$ и $a$	-1,    +1	+1,    -1	+1,    -1	-1,    -1
Интервал $h$	0, $\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$ ,    0	0, $+\infty$	0, $+\infty$
Поведение $r$	↑	↓	↓	↑

(в третьем случае  $r$  сперва убывает, а потом растет).

Аналогичная (но более слабая) лемма об эллиптических интегралах использовалась уже в работах Р. И. Богданова. Доказательство Р. И. Богданова связано с длинными вычислениями. Ю. С. Ильяшенко нашел доказательства как приведенной здесь леммы, так и леммы Богданова, основанные не на вычислениях, а на комплексных топологических соображениях (монодромия и формула Пикара–Лефшеца). (См.: Ю. С. Ильяшенко. О нулях специальных абелевых интегралов в вещественной области. Функц. анализ и его приложение, 11, 4 (1977), 78–79; Ю. С. Ильяшенко. Кратности предельных циклов, возникающие при возмущении гамильтонова уравнения. Труды сем. им. И. Г. Петровского, 3 (1978), 49–60; А. Н. Варченко. Оценка числа нулей абелева интеграла, зависящего от параметра, и предельные циклы. Функц. анализ и его прилож., 18: 2 (1984), 14–25; А. Г. Хованский. Вещественные аналитические многообразия со свойством конечности и комплексные абелевые интегралы. Функц. анализ и его прилож., 18: 2 (1984), 40–50; Г. С. Петров. О числе нулей полных эллиптических интегралов. Функц. анализ и его прилож., 18, 2 (1984), 73–75, Эллиптические интегралы и их неколеблемость, Функц. анализ и его прилож., 20, 1 (1986), 46–49; В. И. Арнольд. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия. Функц. анализ и его прилож., 19, 4 (1985), 1–10).

Абелевы интегралы, встречающиеся в теории бифуркаций, по не вполне понятным причинам всегда имеют минимально возможное по соображениям размерности число нулей, т. е. обладают своеобразным свойством неколеблемости или чебышевскости.

#### П. Случай резонанса порядка 4.

Исходное уравнение:  $\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + B\bar{z}^3$ .

Предположим, что  $B \neq 0$ . Тогда растяжениями и поворотами  $z$  и растяжением времени приводим уравнение к виду

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3.$$

Заменой знака времени и заменой  $z$  на  $\bar{z}$  можно также добиться того, что  $\operatorname{Re} A \leq 0$ ,  $\operatorname{Im} A \leq 0$ .

Исследуем сначала особые точки, отличные от нуля.

1°. *Бифуркации особых точек.* Для исследования бифуркаций особых точек при изменении  $\varepsilon$  полезно следующее вспомогательное построение. Пусть  $z = re^{i\varphi}$  — особая точка. Тогда

$$-\frac{\varepsilon}{r^2} = A + N, \text{ где } N = e^{-4i\varphi}.$$

Поэтому рассмотрим окружность радиуса 1 с центром в  $A$  (рис. 154). Значение  $\varepsilon$ , при котором точка  $z$  особая, лежит на луче, противоположном лучу, соединяющему нуль с точкой  $A + N$  нашей окружности. При этом чем ближе точка окружности к нулю, тем больше модуль  $\varepsilon$ .

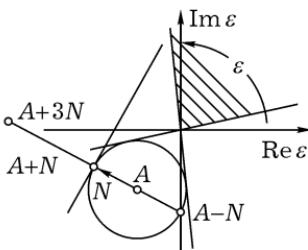


Рис. 154

Из сказанного видно, что резко различаются случаи, когда  $|A|$  меньше и больше единицы. Если  $|A| < 1$ , то нуль лежит внутри окружности. В этом случае для любого  $\varepsilon$  (кроме нуля) уравнение имеет 4 особые точки в вершинах квадрата. Когда  $\varepsilon$  обходит вокруг нуля, поворачиваясь на  $360^\circ$ , квадрат из особых точек поворачивается на  $90^\circ$  в обратную сторону.

Если же  $|A| > 1$ , то на плоскости переменной  $\varepsilon$  имеется угол, ограниченный продолжениями касательных к нашей окружности. Для  $\varepsilon$  внутри этого угла особых точек 8, а вне — нуль.

Когда  $\varepsilon$  поворачивается от одной стороны угла до другой, рождаются четыре особые точки в вершинах квадрата: этот квадрат сразу же делится на 2. Затем близкие особые точки начинают расходиться. Когда  $\varepsilon$  подходит к другой стороне угла, каждая особая точка первого квадрата умирает, сталкиваясь с точкой второго квадрата, первоначально отстоявшей от нее на  $90^\circ$  (так что один квадрат особых точек поворачивается на  $90^\circ$  относительно другого).

2°. *Типы особых точек линейного уравнения.* Мы начнем с леммы, позволяющей легко исследовать типы особых точек векторного поля на плоскости, записанного в комплексной форме

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\bar{\xi}.$$

**Лемма.** *Тип особой точки 0 не зависит от аргумента  $Q$ . Эта точка седло при  $|P| < |Q|$ , фокус при  $|\operatorname{Im} P| > |Q|$  и узел при  $|\operatorname{Im} P| < |Q| < |P|$ ; фокус устойчив при  $\operatorname{Re} P < 0$  и неустойчив при  $\operatorname{Re} P > 0$  (рис. 155).*

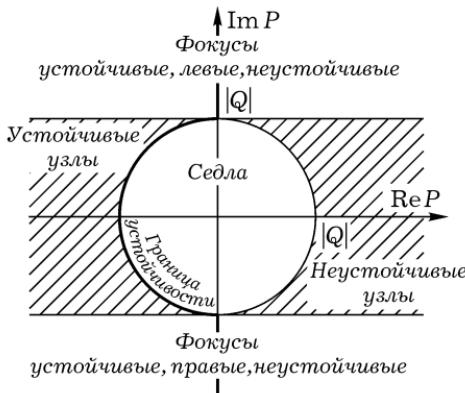


Рис. 155

## ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

При умножении  $\xi$  на комплексное число  $\lambda$  коэффициент  $P$  не изменится, а коэффициент  $Q$  умножится на  $\bar{\lambda}$ . Выбором  $\lambda$  можно сделать аргумент  $Q$  любым; этим доказано первое утверждение леммы. Для доказательства второго утверждения рассмотрим случай  $Q = 1$ . Пусть  $P = \alpha + i\beta$ . Запишем матрицу уравнения в базисе  $(1, i)$ . Эта матрица имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} \alpha + 1 & -\beta \\ \beta & \alpha - 1 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} M = 2\alpha, \quad \det M = \alpha^2 + \beta^2 - 1.$$

Следовательно, характеристическое уравнение имеет корни

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Условие их вещественности  $|\beta| < 1$ . Корни имеют разные знаки при  $\alpha^2 + \beta^2 > 1$ . Лемма доказана при  $Q = 1$ . Условия седла, узла и фокуса для любого  $|Q|$  следуют теперь из соображений подобия: при заменах времени  $P$  и  $Q$  умножаются на одно и то же вещественное число. ■

Рис. 155, ясно показывающий взаимное расположение узлов, фокусов и седел в функциональном пространстве, полезно иметь в виду при всех исследованиях бифуркаций особых точек на плоскости.

3°. Исследование седел. Вернемся к исходному нелинейному уравнению. Пусть  $z_0 = re^{i\varphi}$  — особая точка. Линеаризуем уравнение в этой точке. Пусть  $z = z_0 + \xi$ . Тогда, сохраняя в правой части члены первой степени по  $\xi, \bar{\xi}$ , получаем

$$\dot{\xi} = P\xi + Q\bar{\xi}, \quad P = r^2(A - N), \quad |Q| = r^2(A + 3N).$$

**Лемма.** Если  $|A| < 1$ , то все особые точки — седла. Если  $|A| > 1$ , то при каждом  $\varepsilon$  особая точка с меньшим модулем — седло, а с большим — не седло.

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Условие седла имеет по лемме  $2^\circ$  вид  $|A - N| < |A + 3N|$ . Рассмотрим точки  $A - N$  и  $A + 3N$  (рис. 154). Эти точки симметричны относительно  $A + N$ , причем соединяющая их прямая проходит через  $A$ . Какая из этих точек ближе к нулю определяется тем, по какую сторону от касательной к нашей окружности, проведенной через точку  $A + N$ , лежит точка нуль. Если  $|A| < 1$ , то нуль всегда лежит с одной стороны от касательной (с той же, где  $A - N$ ). Если же  $|A| > 1$ , то ответ зависит от того, на какой из двух дуг, ограниченных касательными к окружности из нуля, лежит  $A + N$ . Дальняя от нуля дуга отвечает седлам и близким особым точкам (см.  $1^\circ$ ). ■

$4^\circ$ . *Устойчивость особых точек.* Особые точки, соответствующие обращенной к нулю части нашей окружности, могут быть узлами и фокусами. Часть дуги, непосредственно примыкающая к касательной из нуля, соответствует узлу, но при движении по дуге узел может стать фокусом, а фокус может менять устойчивость. Выясним, при каком условии происходит эта смена устойчивости фокуса.

Из леммы п.  $2^\circ$  и формулы п.  $3^\circ$  следует, когда точка  $A - N$  (диаметрально противоположная точке  $A + N$  нашей окружности) пересекает мнимую ось, в то время как точка  $A + N$  лежит на ближней к нулю дуге. Граница, отделяющая точки  $A$ , для которых такое явление происходит, определяется условием: диаметр, проведенный через точку пересечения нашей окружности с мнимой осью, перпендикулярен касательной из нуля. Уравнение границы имеет, как легко сосчитать, вид

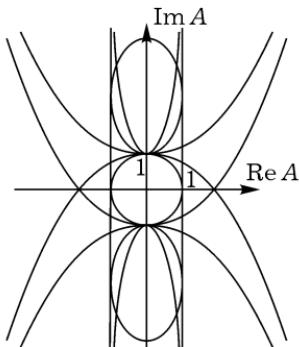
$$|\operatorname{Im} A| = \frac{1 + \operatorname{Re}^2 A}{\sqrt{1 - \operatorname{Re}^2 A}}.$$

Рис. 156

Соответствующая линия на плоскости переменной  $A$  касается окружности  $|A| = 1$  в точках  $A = \pm i$  и имеет асимптотами прямые  $|\operatorname{Re} A| = 1$  (рис. 156).

$5^\circ$ . *Поведение на бесконечности.* При больших  $z$  слагаемым  $\varepsilon z$  можно «пренебречь». Полагая  $w = z^2$ , получаем линейное уравнение

$$\dot{w} = 2Aw + 2\bar{w}.$$



Для исследования этого уравнения остается применить лемму 2°. Таким образом, при  $|A| < 1$  особая точка на плоскости  $w$  седло, а при  $|A| > 1$  все траектории из бесконечности притягиваются в конечную область, если  $\operatorname{Re} A < 0$ .

6°. *Бифуркации фазового портрета.* Если  $|A| < 1$ , то картина (рис. 157) по-видимому, такая же, как для резонансов третьего порядка (см. выше п. Ж). Если  $|\operatorname{Re} A| > 1$  то, по-видимому, происходит то же, что для резонансов порядка 5 и выше (рис. 158, 153); впрочем, особые точки могут в этом случае рождаться и не на цикле. Ср. стр. 394, задачи 1), 2), 3).

Наибольшие трудности представляет случай  $|\operatorname{Re} A| < 1$ ,  $|A| > 1$ .

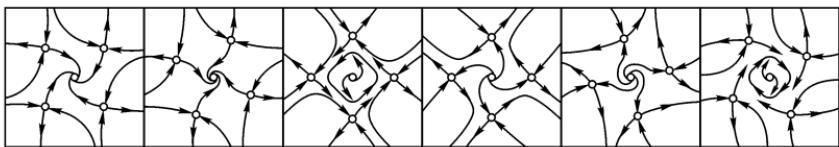


Рис. 157

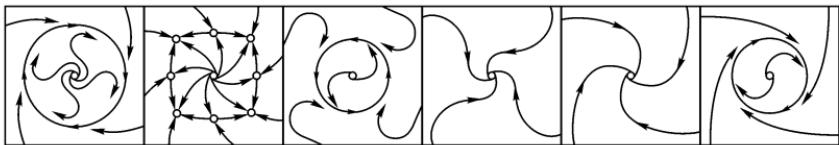


Рис. 158

7°. *Новые нормировки и обозначения.* Для исследования случая  $|\operatorname{Re} A| < 1$  полезно рассмотреть асимптотику при  $|\operatorname{Im} A| \rightarrow \infty$ . Вместо того чтобы устремлять  $A$  к бесконечности, можно в исходном уравнении устремлять  $B$  к нулю. Чтобы исследовать этот случай, мы введем следующие обозначения:

$$\varepsilon = \sigma + i\tau, \quad A = -i\alpha - \gamma, \quad B = \beta,$$

и будем считать малыми параметрами одного порядка величины  $\beta$ ,  $\sigma = u\beta$ ,  $\gamma = v\beta$  ( $\beta \rightarrow 0$ ,  $u \sim v \sim 1$ ).

Нормирующие растяжение координат и времени множители выберем так, чтобы  $\alpha = 1$ ,  $\tau = 1$ .

Введем симплектические полярные координаты  $\rho = \frac{|z|^2}{2}$ ,  $\varphi = \arg z$ .

Исходное уравнение принимает вид системы

$$\begin{cases} \dot{\rho} = 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho + 2\beta\rho \cos 4\varphi), \\ \dot{\varphi} = \tau - 2\alpha\rho - 2\beta\rho \sin 4\varphi. \end{cases}$$

Введем еще гамильтониан  $H = \tau\rho - \alpha\rho^2 - \beta\rho^2 \sin 4\varphi$  и потенциал  $\Pi = \sigma\rho^2 - \frac{4\gamma\rho^4}{3}$ . Тогда

$$\dot{\rho} = -H_\varphi + \Pi_\rho, \quad \dot{\varphi} = H_\rho.$$

В интересующем нас случае  $\tau = \alpha = 1$ ,  $\sigma = u\beta$ ,  $\gamma = v\beta$  имеем

$$H = H_0 + \beta H_1, \quad \Pi = \beta\Pi_1, \quad H_0 = \rho - \rho^2.$$

При  $\beta = 0$  получаем невозмущенное движение (вращение с частотой  $H_\rho$ ). В области, где  $H_\rho \neq 0$  (т. е. когда  $\rho$  не близко к  $\frac{1}{2}$ ) основной возмущающий эффект дает диссипативный член  $\beta\Pi_1$ , а при  $\rho \approx \frac{1}{2}$  нужно учитывать и  $\beta H_1$ .

*8°. Лемма об эффекте малой диссипации.* Рассмотрим на фазовой плоскости уравнение  $\dot{x} = v + \varepsilon w$ , где  $v$  гамильтоново поле с функцией Гамильтона  $H$ , а  $w$  потенциальное поле,  $w = \nabla\Pi$  (имеется в виду метрика, заданная симплектическими координатами  $p, q$ ).

**Лемма.** Производная по малому параметру  $\varepsilon$  от приращения  $H$  за оборот вокруг замкнутой фазовой кривой  $H = h$  равна при  $\varepsilon = 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\delta H = \iint_{G(h)} \Delta\Pi \, dp \, dq,$$

где  $G(h)$  — область, ограниченная кривой.

**Доказательство.**

$$\begin{aligned} \delta H &\approx \oint \dot{H} \, dt = \oint H_p(-H_q + \varepsilon\Pi_p) + H_q(H_p + \varepsilon\Pi_q) \, dt = \\ &= \varepsilon \oint \Pi_p \, dq - \Pi_q \, dp = \varepsilon \iint \Delta\Pi \, dp \, dq. \end{aligned}$$

■

Применяя лемму к нашему уравнению, находим

$$\delta H_0 = 2\rho(\sigma - 2\gamma\rho) = 2\beta\rho(u - 2v\rho).$$

Таким образом, в первом приближении цикл дается формулой

$$\rho = \frac{u}{2v} = \frac{\sigma}{2\gamma}.$$

Этот метод позволяет исследовать нашу систему вне кольца, в котором  $\rho$  близко к  $\frac{1}{2}$ . Следовательно, случай  $\sigma$ , близкого к  $\gamma$ , нужно рассмотреть отдельно.

9°. Исследование случая  $\rho \approx \frac{1}{2}$ . Делаем замену  $\rho = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}P$ ,  $\frac{t}{\sqrt{\beta}} = T$ .

После замены полагаем  $\beta = 0$ . Получаем в качестве приближенного уравнения систему Гамильтона

$$\frac{dP}{dT} = w + \cos 4\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dT} = -2P$$

с функцией Гамильтона

$$H_{00} = P^2 + w\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}$$

(маятник с крутящим моментом). Здесь  $w = u - v = \frac{\sigma - \gamma}{\beta}$ .

Потенциальная яма существует при  $|w| < 1$ .

С точки зрения обозначений 7° мы перебросили из потенциальной части в гамильтонову поле  $(\sigma - \gamma) \frac{\partial}{\partial \rho}$ . Таким образом, новые гамильтониан и потенциал имеют вид

$$H = \rho - \rho^2 - \beta \rho^2 \sin 4\varphi - \beta w\varphi,$$

$$\Pi = \sigma \rho^2 - \frac{4\gamma \rho^3}{3} - (\sigma - \gamma)\rho.$$

Применяя лемму 8°, мы находим

$$\delta H = \iint (2\sigma - 8\gamma\rho) dp d\varphi \text{ внутри ямы} = 2S(\sigma - 4\gamma\rho_0),$$

где  $S$  площадь внутри ямы на плоскости  $(\rho, \varphi)$ , а  $\rho_0$  — координата центра тяжести ямы.

Условие рождения цикла  $\sigma = 4\gamma\rho_0$ . Следовательно, нужно вычислить  $\rho_0$ . Но  $\rho_0 = \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}\rho_1 + \dots$  Значит, условие рождения цикла имеет вид  $\sigma = 2\gamma + 4\gamma\sqrt{\beta}\rho_1 + \dots$ ,  $w = \frac{\gamma}{\beta} + 4\gamma\rho_1 + \dots$

Вычислим величину  $\rho_1$ . Точное уравнение замкнутой фазовой кривой  $H = \text{const}$  имеет в координатах  $P, \varphi$  вид

$$P^2 + \left( \frac{1}{2} + \sqrt{\beta}P \right)^2 \sin 4\varphi + w\varphi = h.$$

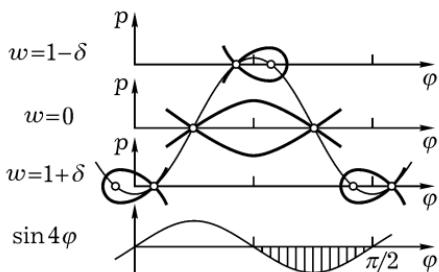


Рис. 159

(чертка означает «усреднение» по невозмущенной фазовой кривой при  $\beta = 0$ ).

Рассматривая расположение ямы по отношению к максимуму и минимуму синуса  $4\varphi$  и его изменение при изменении величины  $w$  (рис. 159), мы получаем информацию о поведении  $\rho_1$ , на которой и основаны картины перестроек (рис. 160).

Изображенная на рис. 160 система перестроек реализуется при больших по сравнению с  $|B|$  величинах  $|\operatorname{Im} A|$  при  $0 < |\operatorname{Re} A| < |B|$ .

Разумеется, изложенные выше соображения не заменяют собой доказательств и являются лишь первыми шагами исследования бифуркаций в главном семействе 4-симметричных уравнений.

Результаты о случаях симметрии порядка  $q \neq 4$ , по-видимому, известны специалистам довольно давно; в частности, Ф. Такенс анонсировал их в неопубликованном препринте 1974 г. Наше изложение основано на статье автора в «Функциональном анализе и его приложениях», 1977, № 2; подробные доказательства проведены Э. Хорозовым.

## Р. Функция последования.

Применения наших построений к исследованию потери устойчивости цикла основаны на следующем.

**Лемма 1.** Рассмотрим отображение  $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ , имеющее неподвиженную точку 0 с собственными числами  $e^{\pm 2\pi i p/q}$  (и с жордановой клеткой порядка 2, если  $q = 1$  или  $= 2$ ). Тогда итерацию  $f^q$  можно при любом  $N$  представить в достаточно малой окрестности точки 0 в виде суммы  $f^q = g + h$ , где  $h(z) = O(|z|^N)$ , а  $g$  — преобразование фазового потока векторного поля, инвариантного относительно конечной циклической группы диффеоморфизмов  $\gamma$ , порядка  $q$ .

Заметим, что, в частности,  $g$  коммутирует с поворотом на угол  $\frac{2\pi}{q}$ . Само отображение  $f^q$ , вообще говоря, не коммутирует с действием никакой конечной группы и не включается в поток. Лемма 1 показывает,

Каждому значению  $\varphi$  в яме отвечают два значения  $P$ , причем

$$P_1 + P_2 = -\frac{\sqrt{\beta} \sin 4\varphi}{1 - \beta \sin 4\varphi}.$$

Из этой формулы следует, что поправочный член, который мы выше обозначили через  $\rho_1$ , равен

$$\rho_1 = -\frac{1}{2} \overline{\sin 4\varphi}$$

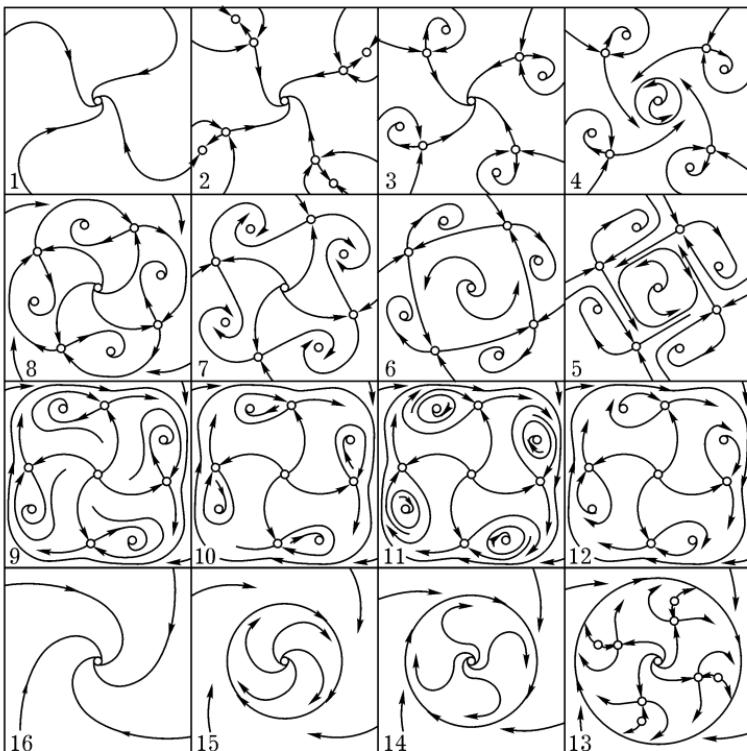


Рис. 160

однако, что на уровне формальных рядов  $f^q$  включается в поток и коммутирует с конечной группой.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО** леммы проводится по обычной схеме построения нормальных форм Пуанкаре–Дюлака–Биркгофа (см. гл. 5). ■

**Лемма 2.** Рассмотрим деформацию  $f_\lambda$  отображения  $f_0 = f$ , удовлетворяющего условиям леммы 1. Тогда итерацию  $f_\lambda^q$  можно при любом  $N$  представить в достаточно малой окрестности точки 0 в виде суммы  $f_\lambda^q = g_\lambda + h_\lambda$ , где  $h_\lambda(z) = O(|z|^N)$ , а  $g_\lambda$  — преобразование фазового потока векторного поля  $v_\lambda$ , инвариантного относительно конечной циклической группы диффеоморфизмов,  $\gamma_\lambda$ . Здесь  $f_\lambda$ ,  $g_\lambda$ ,  $h_\lambda$ ,  $v_\lambda$  и  $\gamma_\lambda$  гладко зависят от параметра  $\lambda$ , меняющегося в окрестности нуля.

**Доказательство** основано на том, что приведение к нормальной форме членов степени не выше  $N$  с оставлением резонансных членов осуществляется гладко зависящим от параметров диффеоморфизмом. ■

Соединяя лемму 2 с описанием бифуркаций фазовых потоков из предыдущих параграфов, мы получаем информацию о потере устойчивости неподвижной точки 0 отображения  $f$  (или периодического движения, для которого  $f$  есть функция последования).

**Замечание.** Можно также непосредственно приводить к нормальной форме семейство дифференциальных уравнений в окрестности  $(p, q)$  — резонансного периодического решения в пространстве  $q$ -листного накрытия. Применение стандартного метода Пуанкаре–Дюлака–Биркгофа в этой ситуации приведет семейство векторных полей,  $2\pi$ -периодическое по времени, к сумме  $q$ -симметричного поля, не зависящего от времени, и остатка  $O(|z|^N)$  периода  $2\pi q$ .

### С. Обсуждение.

1°. Для перевода полученных результатов на язык бифуркаций периодических решений нужно найденные неподвижные точки на плоскости заменить замкнутыми траекториями в пространстве, сепаратрисы точек — инвариантными притягивающими и отталкивающими поверхностями этих замкнутых траекторий, предельные циклы на плоскости — инвариантными торами. Существенная разница будет лишь в перестройках сепаратрис: в то время как на плоскости сепаратрисы при бифуркациях мгновенно проходят друг через друга, в пространстве этот процесс растягивается с образованием гомоклинической (или гетероклинической<sup>1</sup>) картины (рис. 103).

Инвариантные торы в пространстве разрушаются раньше, чем на плоскости цикл доходит до петли сепаратрис — однако все эти чисто трехмерные эффекты слабы (происходят от членов сколь угодно большой степени в нормальных формах) по сравнению с рассмотренными выше двумерными.

2°. Рассмотрение потери устойчивости как двухпараметрического, а не однопараметрического явления позволяет легко понять некоторые обстоятельства, кажущиеся иначе удивительными.

---

<sup>1</sup>Гомоклинической (гетероклинической) картиной называется сеть, образованная на секущей плоскости пересекающимися следами притягивающегося и отталкивавшегося инвариантных многообразий одной (двух) замкнутых траекторий.

Рассмотрим двупараметрическое семейство, в котором в качестве параметра взят сам мультипликатор. Нарисуем на плоскости значений параметра области существования периодических решений, замыкающихся при  $q$  оборотах вдоль основного решения, сделав  $p$  оборотов поперек него. Эта область выходит на единичную окружность в точке  $e^{2\pi ip/q}$  узким (при  $q > 4$ ) языком (ширина его на расстоянии  $\sigma$  от окружности порядка  $\sigma^{q-2}/2$ , см. п. Е). Поэтому кривая общего положения на плоскости мультиплексора пересекает вблизи единичной окружности бесконечное число языков (рис. 161).

Следовательно, в общем однопараметрическом семействе, в котором цикл теряет устойчивость без сильного резонанса, вблизи момента потери устойчивости рождаются и умирают в бесконечном количестве длиннoperiodические циклы.

Доказательство этого факта, не зависящего от того, имеется ли слабый резонанс в момент потери устойчивости, было дано В. С. Козякиным (*В. С. Козякин. Субфуркация периодических колебаний. ДАН СССР. 232, 1 (1977), 25–27.*)

3°. Рассматривая кривые общего положения на бифуркационных диаграммах сильных резонансов, приведенных в п. Е, можно описывать последовательности перестроек, которые являются универсальными, но кажутся с однопараметрической точки зрения нелокальными.

Например, в случае  $q = 2$  одной из возможностей является такая последовательность событий: устойчивый цикл мягко теряет устойчивость с образованием тора, на котором быстро образуется перетяжка, так что форма меридиана тора приближается к восьмерке; при подходе к центру восьмерки (где находится неустойчивый цикл) притягивающее множество, оставаясь близким к тору с почти стянувшимся в восьмерку меридианом, разрушается вблизи гомоклинической сепаратрисы (Ю. И. Неймарк).

В этом случае фазовая траектория совершает витки вокруг то одной, то другой половины разрушенного тора, перескакивая с одной стороны на другую случайным на вид образом.

Это описание похоже на явления, наблюдавшиеся в численном эксперименте Герценштейна и Шмидта (*С. Я. Герценштейн, В. М. Шмидт. Нелиней-*

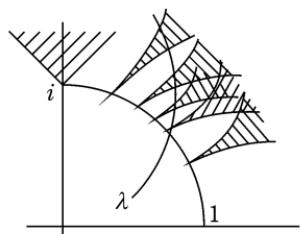


Рис. 161

ное развитие и взаимодействие возмущений конечной амплитуды при конвективной неустойчивости вращающегося плоского слоя. ДАН СССР, **225**, 1 (1975), 59–62).

## § 36. Перестройки топологии при резонансах

Резонансы между собственными числами линейной части векторного поля в стационарной точке мешают выбрать координаты так, чтобы сделать поле линейным. Даже если резонансов нет, но собственные числа близки к резонансным, ряды Пуанкаре могут расходиться и система тогда не может быть превращена в линейную аналитической заменой координат.

В то же время топологический тип фазового портрета в вещественной окрестности стационарной точки при резонансах, вообще говоря, не меняется. Например, если вещественные части всех собственных чисел отрицательны, то стационарная точка притягивающая, и, независимо от резонансов, система топологически эквивалентна стандартной линейной системе.

Оказывается, перестройка топологии при резонансе происходит, но, вообще говоря, в комплексной области.

Система общего положения нерезонансная. Резонансы встречаются неизбежно в однопараметрических семействах. Поэтому при исследовании влияния резонансов на перестройки топологии мы должны рассматривать однопараметрические семейства векторных полей. В соответствии со сказанным выше, мы будем считать как фазовые переменные и время, так и параметр комплексными числами.

### А. Резонансы в области Пуанкаре.

Рассмотрим комплексные фазовые кривые в окрестности особой точки  $O$ . Эти кривые образуют слоение с вещественно двумерными слоями, с особенностью в нуле. Чтобы разобраться в строении этой особенности, пересечем слоение сферой малого радиуса с центром в начале координат.

Предположим, что линейная часть нашей системы в координатах  $(z_1, \dots, z_n)$  диагональна:  $\dot{z}_j = \lambda_j z_j + \dots, j = 1, \dots, n$ .

**Теорема.** *Если набор собственных чисел  $\{\lambda_j\}$  принадлежит области Пуанкаре, то каждая сфера  $|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = r^2$  достаточно малого радиуса пересекается со слоением трансверсально.*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Рассмотрим вначале линейную систему. Имеем

$$dr^2 = \sum \bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j = A dt + \bar{A} d\bar{t}, \quad A = \sum |z_j|^2 \lambda_j.$$

Условие трансверсальности со сферой состоит в том, что 1-форма  $dr^2$  не должна обращаться в 0 на касательной плоскости к слою. Но форма  $A dt + \bar{A} d\bar{t}$  нулевая только при  $A = 0$ . Соотношение  $A = 0$  не выполняется в случае Пуанкаре (и только в случае Пуанкаре) ни при каком  $z \neq 0$ . Итак, в линейном случае теорема доказана: слои пересекают сферу под ненулевым углом  $\alpha(z)$ .

Рассмотрим минимум  $\alpha_0$  угла  $\alpha(z)$  на сфере  $|z| = r$ . Величина  $\alpha_0$  не зависит от  $r$  (так как  $\alpha(cz) = \alpha(z)$ ). Итак,  $\alpha(z) \geq \alpha_0 > 0$  при всех  $z \neq 0$ .

Обратимся теперь к нелинейной системе. Угол между полями направлений нелинейной системы и ее линейной части мал вместе с  $|z|$ . Поэтому в достаточно малой окрестности нуля он меньше  $\alpha_0$  и фазовые кривые нелинейной системы пересекают сферу трансверсально. ■

**Следствие.** *Пересечения комплексных фазовых кривых со сферой достаточно малого радиуса образуют одномерное слоение без особых точек на этой сфере. Слоения, полученные на всех сферах достаточно малых радиусов, диффеоморфны. Дифференцируемый тип слоения на сфере не меняется при деформациях сферы, пока она остается трансверсальной комплексным фазовым кривым.*

Таким образом, изучаемое двумерное слоение в окрестности особой точки гомеоморфно конусу над одномерным слоением на сфере. Это слоение на сфере является разбиением на фазовые кривые векторного поля на сфере (так как сфера и комплексное слоение ориентируемы).

**ЗАМЕЧАНИЕ.** В нерезонансном случае, согласно теореме Пуанкаре, система в надлежаще выбранной системе координат в достаточно малой окрестности особой точки линейна. Отсюда вытекает, что дифференцируемый тип слоения на сфере в нерезонансном случае такой же, как у линейной системы.

Мы заключаем, что дифференцируемый тип слоения на сфере остается таким же, как у линейной части системы, не только в той окрестности начала координат, где сходятся ряды Пуанкаре, но и далеко за ее пределами.

Действительно, при приближении к резонансу область сходимости рядов Пуанкаре стягивается до нуля, тогда как радиус области трансверсальности остается ограниченным снизу. Следовательно, мы можем следить за прохождением резонанса в комплексной системе по изменению одномерного слоения на сфере фиксированного (не зависящего от параметра) малого радиуса.

### Б. Резонанс $\lambda_1 = 2\lambda_2$ .

В качестве примера рассмотрим изменение топологии слоения на  $S^3$  при прохождении резонанса  $\lambda_1 = 2\lambda_2$  в системе

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 \dots, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 + \dots$$

Мы находимся в области Пуанкаре, если отношение  $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  является вещественным отрицательным числом. Рассмотрим сперва слоение на  $S^3$ , отвечающее линейной части системы.

Сепаратрисы  $z_1 = 0, z_2 = 0$  пересекаются со сферой по большим кругам, являющимся циклами системы на  $S^3$ . Их коэффициент зацепления равен 1.

Если  $\lambda$  — не вещественное число (случай «фокуса»), то все остальные кривые слоения на сфере сматываются с одного цикла и наматываются на другой. Изучим функции доследования циклов.

Заметим, что эти функции можно считать голоморфными. Действительно, они вещественно дифференцируемо эквивалентны комплексным функциям последовательного отображения голоморфную трансверсаль к сепаратрисе в себя. Следовательно, они становятся голоморфными при подходящем выборе комплексной структуры на вещественно двумерной трансверсали к циклу в  $S^3$ . Из этих соображений следует также, что мультиплекторы наших циклов равны  $e^{\pm 2\pi i \lambda}, e^{\pm 2\pi i \lambda^{-1}}$  соответственно.

Слоения на  $S^3$ , соответствующие всем фокусам, гомеоморфны друг другу, но не диффеоморфны:  $\lambda^2 + \lambda^{-2}$  — инвариант диффеоморфизма.

Если  $\lambda$  вещественное положительное (случай узла), то мы также находимся в области Пуанкаре. В этом случае часть  $S^3$  между двумя зацепленными циклами расслоена на двумерные торы, заполненные обмотками с числом вращения  $\lambda$ , одинаковым на всех торах.

Рассмотрим теперь нелинейную систему. В случае фокуса резонанс невозможен, поэтому слоение на сфере в нелинейном случае диффеоморфно описанному выше слоению, построенному по линейной системе. То же верно для нерезонансного узла, т. е. для всех  $\lambda > 0$ , исключая случаи, когда  $\lambda$  или  $\lambda^{-1}$  — целое число.

Рассмотрим, например, резонанс  $\lambda = 2$ . В этом случае нормальная форма Пуанкаре имеет вид

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + cz_2^2, \quad \dot{z}_2 = \lambda_2 z_2.$$

Эта система имеет при  $c \neq 0$  лишь одну сепаратрису, а слоение на  $S^3$  имеет лишь один цикл. Заменим  $\lambda$  близким к 2 невещественным значением. Полученная система на  $S^3$ , с одной стороны, близка к резонансной системе с одним циклом, а с другой стороны, она диффеоморфна изученной ранее системе, построенной по линейному фокусу и, следовательно, имеет два цикла с коэффициентом зацепления единица. Можно показать, что один из этих циклов,  $C_1$ , близок к единственному циклу  $C$  резонансной системы. Другой же цикл,  $C_2$ , лежит на тонком торе с осевой линией  $C_1$  и замыкается после двух обходов вокруг  $C_1$ , сделав один оборот по меридиану (так что коэффициент зацепления  $C_2$  и  $C_1$  равен 1). Итак, перестройка системы на  $S^3$  вблизи резонанса  $\lambda = 2$  состоит в бифуркации двукратной периодической траектории от периодической траектории с собственными числами  $(-1, -1)$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Предыдущее изложение следует заметке автора «Замечания об особенностях конечной коразмерности в комплексных динамических системах», Функциональный анализ и его приложения, 3, 1 (1969), 1–6. Результаты этой заметки были в дальнейшем обобщены Дж. Гукенхаймером, Н. Кейпером, Н. Н. Ладисом, Ю. С. Ильяшенко и др. Наиболее законченный характер имеют результаты о топологическом типе слоения, заданного в окрестности особой точки в комплексном пространстве линейной системой.

Рассмотрим, в частности, случай, когда фазовое пространство трехмерно и треугольник из собственных чисел содержит ноль строго внутри. Оказывается, топологический тип слоения в комплексном пространстве определяется тройкой обратных величин собственных чисел, рассматриваемой как тройка векторов на вещественной плоскости (т. е. рассматриваемой с точностью до вещественных линейных преобразований овеществленной плоскости одного комплексного переменного). В многомерном случае вещественный тип набора обратных величин собственных чисел взаимно однозначно определяет топологический тип комплексного слоения в окрестности особой точки линейной системы, если нуль принадлежит выпуклой оболочке собственных чисел, а их попарные отношения невещественны (см. C. Camacho, N. Kuiper, J. Palis. C. R. Acad. Sci. Paris, **282** (1976), 959–961; Н. Н. Ладис. Топологические инварианты комплексных линейных потоков. Дифференциальные уравнения, **12**, 12 (1976), 2159–2169; Ю. С. Ильяшенко. Замечания о топологии особых точек дифференциальных уравнений в комплексной области и теорема Ладиса. Функциональный анализ и его приложения, **11**, 2 (1977), 28–38).

**В. Версальные деформации в случае Пуанкаре.**

Рассмотрим аналитическое (гладкое) векторное поле с особой точкой  $O$ . Предположим, что эта особая точка — типа Пуанкаре, т. е. что выпуклая оболочка набора собственных чисел не содержит точку 0.

**Теорема.** *Росток аналитического (соответственно, голоморфного, гладкого) векторного поля в особой точке типа Пуанкаре имеет конечно-параметрическую аналитически (соответственно, голоморфно, гладко) версальную деформацию, состоящую из полиномиальных векторных полей.*

Иными словами:

*Локальное семейство аналитических (соответственно, голоморфных, гладких) векторных полей с особой точкой  $O$  типа Пуанкаре аналитически (соответственно, голоморфно, гладко) эквивалентно в окрестности точки  $O$  семейству, составленному из достаточно длинных отрезков рядов Тейлора этих полей в точке  $O$ .*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.**

По условию особая точка невырождена и, следовательно, гладко зависит от параметров. Поэтому гладкой и гладко зависящей от параметров заменой переменных можно перенести особую точку в начало координат. Предположим, что собственные числа просты. Тогда собственный базис можно выбрать гладко зависящим от параметров. В полученной системе координат семейство дифференциальных уравнений, отвечающее нашему семейству полей, принимает вид

$$\dot{x}_k = \lambda_k(\varepsilon)x_k + \dots, \quad k = 1, \dots, n.$$

Применяя метод Пуанкаре (гл. 5), мы будем убивать только те члены, которые остаются нерезонансными при  $\varepsilon = 0$ . Тогда замены гладко зависят от параметра. Поскольку собственные числа принадлежат области Пуанкаре, резонансов конечное число, и сходимость всей процедуры доказывается без труда.

Мы получаем систему координат, в которой правые части всех уравнений семейства — многочлены. ■

Случай конечно (или бесконечно) дифференцируемых правых частей также исследуется без труда. Подробности см. в статье Н. Н. Брушлинской (*Н. Н. Брушлинская. Теорема конечности для семейств векторных полей в окрестности особой точки типа Пуанкаре. Функц. анализ, 5, 3 (1971), 10–15*), где рассмотрен также и случай кратных собственных чисел.

### Г. Материализация резонансов.

В области Зигеля при приведении к нормальной форме возникают трудности, связанные с малыми знаменателями. В то же время топологическая картина может быть простой. Например, обыкновенное седло устроено топологически одинаково как при рациональном, так и при иррациональном отношении собственных чисел. Такое же явление бывает и в области Пуанкаре: резонансы могут не влиять на топологию фазового портрета.

Естественно возникает вопрос, почему резонанс, не проявляющийся топологически, мешает аналитическому (даже конечно-гладкому) приведению к нормальной форме. Здесь полезно иметь в виду поведение резонансов в теории возмущений условно-периодических движений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение на  $n$ -мерном торе  $T^n$

$$\dot{\theta} = \omega + \varepsilon \dots, \quad \theta \bmod 2\pi \in T^n, \quad \omega \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \ll 1. \quad (*)$$

Резонансу  $(\omega, k) = 0$  отвечает (по меньшей мере в отсутствие возмущения, т. е. при  $\varepsilon = 0$ ) изменение топологических свойств системы: фазовые кривые заполняют всюду плотно не  $n$ -мерный тор, как в нерезонантном случае, а  $(n - 1)$ -мерный. Например, при  $n = 2$  при резонансе обычно возникают грубые периодические режимы (устойчивые и неустойчивые предельные циклы на торе). Ясно, что существование таких циклов препятствует приведению уравнений к нормальной форме  $\dot{\theta} = \omega$ , обычной для нерезонантного случая.

Близкое соображение лежит в основе данного Пуанкаре доказательства несуществования первых интегралов в задаче трех тел.

Можно предположить, что влияние резонансов на расходимость в локальной задаче, которой мы занимались выше, также имеет аналогичную природу, но связано с изменениями топологии слоения, образованного фазовыми кривыми не в вещественной, а в комплексной области. Такое изменение, даже если оно совершенно не сказывается на вещественной части фазового пространства, заведомо препятствует аналитическому приведению и может мешать  $C^r$ -гладкому.

Заметим, что система  $\dot{x}_k = \lambda_k x_k + \dots$  заменой  $x = e^{i\theta}$  приводится к виду  $(*)$  (вещественные  $\omega$  соответствуют чисто мнимым  $\lambda$ ). Обычные методы разыскания предельных циклов для системы  $(*)$  приводят к рассмотрению первого интеграла  $\rho = e^{i(\theta, k)}$  невозмущенной системы; в обозначениях исходной системы возникает величина  $\rho = x^k$ . Урав-

нение первого приближения для инвариантного многообразия, соответствующего резонансу, получается из соотношения

$$\dot{\rho} = \rho[(k, \lambda) + (k, c)\rho + \dots].$$

Мы находим формально

$$\rho \approx -\frac{(k, \lambda(\varepsilon))}{(k, c(\varepsilon))}.$$

Однако наши ряды, вообще говоря, расходятся, и вывод нуждается в обосновании.

При  $n = 2$  наши рассуждения можно подкрепить строгим доказательством существования комплексного предельного цикла, который вблизи резонанса имеет указанную асимптотику (*А. С. Пярти*. Рождение комплексных инвариантных многообразий вблизи особой точки векторного поля, зависящего от параметров. Функц. анализ, **6**, 4 (1972), 95–96).

В момент резонанса, когда  $(k, \lambda) = 0$ , цикл (комплексная неодносвязная фазовая кривая) приближается к комплексным сепаратрисам особой точки. Нестягиваемый путь, который имеется на этом цикле, при резонансе исчезает, сливаясь с положением равновесия. Частным случаем является рождение (или гибель) цикла из положения равновесия при потере устойчивости (см. § 33). В этом случае  $k = (1, 1, 0, \dots)$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ , и все явление наблюдаемо в вещественной области (см. рис. 129). В других случаях (даже при том же резонансе, например, в случае седла) топология вещественных фазовых кривых может не изменяться при резонансе.

Различие топологии комплексных фазовых кривых уравнения (или семейства) и его нормальной формы является препятствием к аналитическому приведению к нормальной форме. Более того, если это различие (как это обычно бывает) определяется по струе конечного порядка, то оно препятствует не только аналитическому приведению к нормальной форме, но и конечно-гладкому. Например, расходимость приводящих рядов в случае, когда отношение собственных чисел хорошо приближается рациональными числами, может объясняться существованием в любой окрестности стационарной точки комплексных предельных циклов, прошедших от близких резонансов высоких порядков: у системы в нормальной форме таких циклов нет, поэтому преобразование к нормальной форме обязано быть расходящимся.

Исследование вопроса о расходимости рядов Пуанкаре далеко от завершенности. Предшествовавшие работе Пяртли доказательства расходимости (Пуанкаре, Зигель, Брюно) основаны на подсчете роста коэффициентов и не выясняют причины расходимости в таком же смысле, в каком подсчет коэффициентов ряда  $\arctg z$  доказывает расходимость при  $|z| > 1$ , но не выявляет причины — особенности при  $z = \pm i$ .

А. С. Пяртли установил следующие результаты.

1°. При прохождении резонанса  $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 = 0$  в  $\mathbb{C}^2$  в общем случае происходит ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия, уравнение которого имеет в первом приближении вид  $z_1^{k_1}z_2^{k_2} = \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  характеризует отклонение от резонанса, а  $z_1, z_2$  — фазовые координаты.

2°. Аналогичный результат для того же резонанса получен в  $\mathbb{C}^n$  при ограничительных условиях на остальные собственные числа.

3°. Для «ненормально соизмеримых»  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  общим случаем является существование бесконечного числа инвариантных многообразий, соответствующих равным резонансам, в любой окрестности особой точки, что влечет расходимость рядов Пуанкаре.

Работа А. С. Пяртли основана на методе Э. Хопфа. Другие доказательства и обобщения первых двух результатов А. С. Пяртли предложил А. Д. Брюно (А. Д. Брюно. Нормальная форма дифференциальных уравнений с малым параметром. Математ. заметки, 16, 3 (1974), 407–414; Аналитические инвариантные многообразия. ДАН СССР, 216, 2 (1974), 253–256; Интегральные аналитические множества. ДАН СССР, 220, 6 (1975), 1255–1258).

#### Д. Резонанс между тремя собственными числами.

Следующий по сложности резонанс

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3 = 0,$$

где треугольник с вершинами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  содержит 0, также исследовался А. С. Пяртли и А. Д. Брюно. Здесь также доказано ответвление от сепаратрис особой точки инвариантного многообразия при  $n = 3$ . Пусть  $(z_1, z_2, z_3)$  — фазовые координаты, а  $\varepsilon$  — параметр деформации (резонанс соответствует  $\varepsilon = 0$ ). Тогда инвариантные многообразия заполняют в пространстве с координатами  $(z, \varepsilon)$  голоморфную гиперповерхность, уравнение которой имеет в первом приближении вид  $z_1^{k_1}z_2^{k_2}z_3^{k_3} = \varepsilon$  в подходящей системе координат.

А. С. Пяртли доказал, что для «ненормально соизмеримых»  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , образующих треугольник Зигеля, в общем случае в любой

окрестности положения равновесия  $0 \in \mathbb{C}^3$  имеется бесконечно много инвариантных многообразий описанного вида, соответствующих различным резонансам.

Из дальнейшего будет видно, что наличие в окрестности нерезонансной точки  $0 \in \mathbb{C}^3$  достаточно большого куска резонансного инвариантного многообразия препятствует сходимости рядов Пуанкаре–Зигеля в этой окрестности. Поэтому из цитированного результата Пяртли вытекает, что при «ненормально соизмеримых»  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  общим случаем является расходимость указанных рядов в любой окрестности начала координат.

### **E. Случай дискретного времени.**

Рассмотрим локальный автодиффеоморфизм  $A: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  в окрестности неподвижной точки  $0$ . Обозначим через  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  собственные числа линеаризации  $A$  в  $0$ .

Предыдущая теория переносится на этот случай со следующими изменениями.

*Резонансы:*  $\lambda_k = \lambda_1^{m_1} \dots \lambda_n^{m_n}$  ( $m_i \geq 0$ ,  $\sum m_i \geq 2$ ).

*Область Пуанкаре:* все  $|\lambda_s| > 1$  или все  $|\lambda_s| < 1$ .

*Область Зигеля:* существуют  $|\lambda_i| \geq 1$  и  $|\lambda_i| \leq 1$ .

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Линейному векторному полю в  $\mathbb{C}^n$  соответствует линейное преобразование в  $\mathbb{C}^{n-1}$  («функция последования Пуанкаре»). А именно, пусть поле задает дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_1 = \alpha_1 z_1, \dots, \dot{z}_n = \alpha_n z_n,$$

где  $\alpha_n \neq 0$ . Рассмотрим решения с начальными условиями при  $t = 0$  на плоскости  $z_n = 1$ . Значение решения при  $t = \frac{2\pi i}{\alpha_n}$  принадлежит той же плоскости  $\mathbb{C}^{n-1}$ . Полученное отображение  $A: \mathbb{C}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^{n-1}$  имеет собственные числа  $\lambda_s = e^{2\pi i \alpha_s / \alpha_n}$  ( $s = 1, \dots, n-1$ ).

Аналогичная конструкция функции последования имеется (при небольших дополнительных предположениях) и в нелинейном случае. Поэтому результаты об инвариантных многообразиях и бифуркациях для отображений влекут соответствующие результаты для векторных полей.

Впрочем, в большинстве случаев отмеченную связь между уравнениями и отображениями лучше использовать как эвристическое средство для угадывания результатов в одной области по имеющимся результатам в другой, доказательства же удобнее проводить независимо в обеих ситуациях.

## Ж. Бифуркация инвариантных многообразий диффеоморфизма.

Резонанс между тремя собственными числами векторного поля

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 = 0$$

соответствует в дискретном случае резонансу вида

$$\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1,$$

причем в области Зигеля  $m_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$ ,  $|\lambda_1| \neq 1 \neq |\lambda_2|$ . Мы предположим, что  $\lambda_1$  по модулю больше 1, а  $\lambda_2$  меньше 1.

Результаты Пяртли и Брюно в этом случае означают существование инвариантных многообразий, заполняющих в пространстве с координатами  $(\varepsilon, z_1, z_2)$  поверхность, уравнение которой начинается с членов вида  $\varepsilon = z_1^{m_1} z_2^{m_2}$ . Здесь  $\varepsilon$  — отклонение от резонанса, а  $(z_1, z_2)$  — подходящие (гладко зависящие от  $\varepsilon$ ) фазовые координаты. При фиксированном  $\varepsilon \neq 0$  построенное инвариантное многообразие гомеоморфно цилиндру. Коэффициенты зацепления направляющей окружности этого цилиндра с координатными осями в  $\mathbb{C}^2$  равны  $m_1$  и  $m_2$ .

Мы покажем, что существование достаточно большого куска такого резонансного инвариантного многообразия в окрестности нерезонансной неподвижной точки диффеоморфизма препятствует линеаризации диффеоморфизма в этой окрестности. Следовательно, в случае, когда резонансные многообразия имеются в любой окрестности неподвижной точки, линеаризующие ряды всюду расходятся.

Топологически все отображения  $\mathbb{C}^2$  с  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$  эквивалентны друг другу. В частности, все они линеаризуются и имеют много инвариантных цилиндров. Однако аналитические инвариантные цилиндры являются, как мы увидим, большой редкостью.

### 3. Локальные сдвиги.

Мы собираемся связать с резонансным инвариантным многообразием отображения  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  эллиптическую кривую, вложенную в голоморфную поверхность. Эта поверхность — многообразие орбит нашего отображения (или многообразие фазовых кривых исходного дифференциального уравнения в  $\mathbb{C}^3$ ). Чтобы точно определить многообразие орбит, введем следующую терминологию.

Рассмотрим цилиндр  $S^1 \times \mathbb{R}$ . *Стандартным сдвигом* цилиндра называется прибавление 1 ко второй координате. Пусть  $D_0$  — область на

цилиндре, содержащая  $S^1 \times [0, 1]$ . Сужение стандартного сдвига на  $D_0$  задает диффеоморфизм  $t: D_0 \rightarrow D_1 = t(D_0)$ . Заметим, что пересечение  $D_0 \cap D_1$  содержит окружность  $S^1 \times 1$ . Обозначим через  $D$  объединение  $D_0 \cup D_1$ .

Пусть  $M$  — двумерное многообразие,  $M_0$  и  $M_1$  — его области,  $f: M_0 \rightarrow M_1$  — гомеоморфизм.

**Определение.** Гомеоморфизм  $f$  называется *локальным сдвигом*, если существует гомеоморфизм  $h: M \rightarrow D$ , переводящий  $M_0$  в  $D_0$ ,  $M_1$  в  $D_1$  и  $f$  в  $t$ .

Пусть  $M$  — комплексная кривая, и  $f: M_0 \rightarrow M_1$  — голоморфный локальный сдвиг. Тогда склеивание каждой точки  $z \in M_0$  с ее образом  $f(z) \in M_1$  определяет компактную комплексную кривую, голоморфную тору, т. е. эллиптическую кривую  $\Gamma = M/f$ .

Доказательство очевидно. ■

Рассмотрим теперь прямое произведение цилиндра на плоскость  $\Pi = (S^1 \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2$ . Пусть  $T: \Pi \rightarrow \Pi$  — сдвиг на 1 вдоль  $\mathbb{R}$ ,  $E_0$  — окрестность  $D_0 \times 0$ ,  $E_1 = TE_0$ ,  $E = E_0 \cup E_1$ .

Пусть  $N$  — гладкое вещественное четырехмерное многообразие,  $M \subset N$  — двумерное подмногообразие,  $N_1$  и  $N_2$  — области в  $N = N_1 \cup N_2$ ,  $F: N_1 \rightarrow N_2$  — гомеоморфизм.

**Определение.** Гомеоморфизм  $F$  называется *локальным сдвигом*  $N$  вдоль  $M$ , если существует гомеоморфизм  $H: N \rightarrow E$ , переводящий  $N_0$  в  $E_0$ ,  $N_1$  в  $E_1$ ,  $F$  в  $T$  и  $M$  в  $D$ .

Пусть  $N$  — комплексная поверхность,  $M \subset N$  — комплексная кривая,  $F: N_0 \rightarrow N_1$  — голоморфный локальный сдвиг вдоль  $M$ . Тогда склеивание каждой точки  $z \in N_0$  с ее образом  $F(z) \in N_1$  определяет голоморфную комплексную поверхность  $\Sigma = N/F$ , являющуюся окрестностью эллиптической кривой  $\Gamma = M/f$ .

Доказательство очевидно. ■

## И. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию линейного преобразования.

Пусть  $A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  — линейное преобразование с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ . Предположим, что собственные числа

удовлетворяют резонансному соотношению  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$ , где  $m_1$  и  $m_2$  взаимно просты. Тогда цилиндр с уравнением  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = 1$  (где  $z_1, z_2$  — координаты в собственном базисе) инвариантен относительно  $A$ .

Сужение  $A$  на этот цилиндр задает голоморфный сдвиг. Действительно, униформизуем кривую  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$  параметром  $\Lambda \neq 0$  по формуле  $\lambda_1 = \Lambda^{m_2}$ ,  $\lambda_2 = \Lambda^{-m_1}$ ; на цилиндре введем параметр  $Z \neq 0$  по формуле  $z_1 = Z^{m_2}$ ,  $z_2 = Z^{-m_1}$ . Тогда действие  $A$  на цилиндре принимает вид  $Z \mapsto \Lambda Z$ . Это преобразование является голоморфным сдвигом, так как  $|\Lambda| > 1$ . Соответствующая эллиптическая кривая есть  $\mathbb{C}^*/\{\Lambda\} \cong \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z})$ , где  $\Lambda = e^{i\omega}$ .

Заметим, что линейное преобразование имеет в случае резонанса целое однопараметрическое семейство голоморфных инвариантных цилиндров  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c$ ,  $c \neq 0$ . Эллиптические кривые, построенные по всем этим цилиндрам, изоморфны.

Подходящая окрестность любого такого цилиндра (или его достаточно большого конечного куска) превращается при факторизации по действию  $A$  в окрестность эллиптической кривой на комплексной поверхности. Эта поверхность — прямое произведение эллиптической кривой на  $\mathbb{C}$ . Действительно, гомотетии  $z \mapsto kz$  определяют проекцию на эллиптическую кривую, а отображение  $z \mapsto z_1^{m_1} z_2^{m_2}$  — проекцию на второй сомножитель.

В частности, индекс самопересечения эллиптической кривой в построенной поверхности равен нулю.

### **К. Построение эллиптической кривой по резонансному инвариантному многообразию нелинейного преобразования.**

Пусть  $A(\varepsilon): U \rightarrow \mathbb{C}^2$  — биголоморфное отображение области  $U \subset \mathbb{C}^2$  в  $\mathbb{C}^2$ , голоморфно зависящее от параметра  $\varepsilon$ . Мы предполагаем, что  $\varepsilon$  меняется в окрестности нуля в  $\mathbb{C}$ , и что все отображения  $A(\varepsilon)$  оставляют на месте начало координат в  $\mathbb{C}^2$ .

Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2$  собственные числа линеаризации отображения  $A(0)$  в 0. Мы предполагаем, что  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$  и что  $\lambda_1^{m_1} = \lambda_2^{-m_2}$ , где  $m_1$  и  $m_2$  взаимно просты.

Для семейства  $A$  общего положения при прохождении при  $\varepsilon = 0$  резонанса от сепаратрис неподвижной точки ответвляется инвариантный голоморфный резонансный цилиндр (см. п. Ж). Зафиксируем достаточно малое  $\varepsilon$  и рассмотрим сужение  $A(\varepsilon)$  на этот цилиндр. Можно

проверить, что  $A(\varepsilon)$  индуцирует на соответствующей части цилиндра локальный голоморфный сдвиг. [Это следует из того, что 1) цилиндр имеет в первом приближении уравнение  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c(\varepsilon)$ ; 2)  $A(\varepsilon)$  близко к линеаризации  $A(0)$  в 0; 3) линеаризация  $A(0)$  в 0 действует на цилиндре  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} = c$  как локальный сдвиг (см. п. И).]

Итак, при достаточно малых  $|\varepsilon|$  отображение  $A(\varepsilon)$  определяет эллиптическую кривую  $\Gamma(\varepsilon)$ , вложенную в поверхность  $\Sigma(\varepsilon)$ . В гомологиях кривой  $\Gamma(\varepsilon)$  имеется отмеченная окружность (образ направляющей окружности цилиндра). Кривую  $\Gamma(\varepsilon)$  можно представить в виде

$$\Gamma(\varepsilon) \approx \mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega(\varepsilon)\mathbb{Z}),$$

где  $2\pi$  соответствует отмеченной окружности. Функция  $\omega(\varepsilon)$  имеет при  $\varepsilon \rightarrow 0$  предел  $\omega_0$ . Из формул п. И следует, что  $\lambda_1 = e^{i\omega_0 m_2}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\omega_0 m_1}$ .

Индекс самопересечения кривой  $\Gamma$  в поверхности  $\Sigma$  равен нулю. Поэтому топологически  $\Sigma$  является прямым произведением  $\Gamma$  на диск. Однако аналитически  $\Gamma$  — не обязательно прямое произведение. Более того,

1)  $\Sigma$  может не быть голоморфным расслоением над  $\Gamma$ ; окрестность  $\Gamma$  в  $\Sigma$  может не допускать голоморфных отображений на  $\Gamma$  тождественных на  $\Gamma$ . Так будет, например, в случае, когда рядом с  $\Gamma$  в  $\Sigma$  есть семейство эллиптических кривых с разными значениями модуля  $\omega$ .

2)  $\Gamma$  может не допускать в  $\Sigma$  деформаций, отличных от сдвигов  $\Gamma$  по себе. Так будет, например, в случае, когда нормальное расслоение  $\Gamma$  в  $\Sigma$  аналитически нетривиально.

Положительные результаты о строении  $\Sigma$  приведены в § 27.

## Л. Нелинеаризуемость отображения в области, содержащей резонансный цилиндр.

**Теорема.** *Если эллиптическая кривая  $\Gamma$  недеформируема в своей окрестности  $\Sigma$ , то отображение  $A$  не линеаризуется в голоморфной заменой переменных в окрестности точки 0, содержащей часть голоморфного инвариантного цилиндра, нужную для построения кривой  $\Gamma$ .*

### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Действительно, голоморфный инвариантный цилиндр линейного отображения всегда можно проформировать посредством малой гомотии. ■

Таким образом, мы получаем оценку радиуса сходимости рядов Пуанкаре–Зигеля сверху через голоморфный инвариантный цилиндр с нетривиальным нормальным расслоением соответствующей эллиптической кривой.

**Теорема (Ю. С. Ильяшенко).** *Если линейное отображение имеет голоморфный инвариантный цилиндр, направляющая окружность которого имеет с собственными осями коэффициенты зацепления  $(m_1, m_2)$ , а соответствующая эллиптическая кривая есть  $\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z} + \omega\mathbb{Z})$  (причем  $2\pi$  соответствует направляющей цилиндра), то собственные числа равны  $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$ , и, следовательно, имеет место резонанс  $\lambda_1^{m_1} \lambda_2^{m_2} = 1$ .*

#### ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

Пусть  $(z_1, z_2)$  — собственные координаты. Дифференциальные формы  $\frac{dz_k}{z_k}$  на цилиндре голоморфны и инвариантны относительно отображения, следовательно, определяют голоморфные формы на эллиптической кривой.

Вычислим интегралы этих форм по образующим группы гомологии тора. Одна из образующих соответствует направляющей окружности  $\gamma$  на цилиндре. Для нее

$$\oint \frac{dz_1}{z_1} = 2\pi i m_2, \quad \oint \frac{dz_2}{z_2} = -2\pi i m_1,$$

так как коэффициент зацепления  $\gamma$  с осью  $z_1 = 0$  равен  $m_2$ , а с осью  $z_2 = 0$  равен  $m_1$ . Вторая образующая соответствует отрезку  $\delta$ , соединяющему точку  $z$  с ее образом  $Az$  на поверхности цилиндра. Для нее  $\int \frac{dz_1}{z_1} = \ln \lambda_1$ ,  $\int \frac{dz_2}{z_2} = \ln \lambda_2$  (эти соотношения определяют ветви логарифмов). Но все голоморфные формы на эллиптической кривой пропорциональны. Итак,

$$\frac{\omega}{2\pi} = \ln \frac{\lambda_1}{2\pi i m_2} = -\ln \frac{\lambda_2}{2\pi i m_1}. \quad \blacksquare$$

**Следствие.** *Пусть  $A$  — локальный диффеоморфизм с неподвижной точкой  $0$ ,  $\lambda_{1,2}$  — собственные числа. Предположим, что в некоторой окрестности  $U$  неподвижной точки имеется голоморфный цилиндр. Пусть  $A$  — голоморфный сдвиг вдоль этого цилиндра и пусть  $\omega$  — период соответствующей эллиптической кривой. Тогда, если  $\lambda$  и  $\omega$  не*

связаны соотношением  $\lambda_1 = e^{i\omega m_2}$ ,  $\lambda_2 = e^{-i\omega m_1}$  (где  $m_1, m_2$  — коэффициенты зацепления с сепаратрисами особой точки), то диффеоморфизм  $A$  в области  $U$  аналитически не эквивалентен линейному.

### М. Расходимость рядов Пуанкаре.

Из полученных результатов вытекает

**Теорема.** Если в сколь угодно малой окрестности неподвижной точки  $0$  локального диффеоморфизма  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  имеются голоморфные цилиндры, на которых диффеоморфизм действует как локальный сдвиг, то этот диффеоморфизм аналитически не эквивалентен линейному ни в какой окрестности неподвижной точки  $0$  (и, следовательно, ряды Пуанкаре всюду расходятся).

А. С. Пяртли установил, что такое накопление инвариантных цилиндров к особой точке является общим случаем для отображений, собственные числа которых «ненормально хорошо аппроксимируются резонансными». Следовательно, для таких собственных чисел расходимость рядов Пуанкаре всюду также является общим случаем.

Результаты этого параграфа легко переносятся на векторные поля в  $\mathbb{C}^3$  вблизи особой точки типа Зигеля. Материализацией резонанса  $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + m_3\lambda_3 = 0$  является эллиптическая кривая. Точки этой кривой — фазовые кривые поля, лежащие на инвариантной резонансной поверхности  $z_1^{m_1} z_2^{m_2} z_3^{m_3} = c\varepsilon + \dots$

### Н. Бифуркации эллиптических кривых на комплексных поверхностях.

Изложенная выше теория бифуркаций инвариантных многообразий дифференциальных уравнений имеет близким аналогом теорию бифуркаций эллиптических кривых с нулевым индексом самопересечения на комплексных поверхностях.

Эллиптическая кривая и ее нормальное расслоение на поверхности задаются парой комплексных чисел  $(\omega, \lambda)$  (см. § 27): они получаются из комплексной оси  $\varphi$  и из плоскости двух комплексных переменных  $(r, \varphi)$  при склейках

$$(r, \varphi) \sim (r, \varphi + 2\pi) \sim (\lambda r, \varphi + \omega).$$

Расслоение называется *резонансным*, если оно становится аналитически тривиальным после перехода к некоторому конечнолистному циклическому накрытию.

Резонансные расслоения соответствуют в пространстве пар  $(\lambda, \omega)$  гиперповерхностям  $\lambda^n = e^{ik\omega}$ . Оказывается, при общем непрерывном изменении

пары (эллиптическая кривая, поверхность), в момент прохождения через резонанс к эллиптической кривой приближается другая эллиптическая кривая, топологически ее накрывающая. Таким образом, материализацией резонанса является бифуркация кратной эллиптической кривой.

Рассмотрим однопараметрическое семейство пар  $\Gamma(\varepsilon) \subset \Sigma(\varepsilon)$ . Предположим, что  $\varepsilon = 0$  отвечает резонанс  $\lambda^n = e^{ik\omega}$ . Оказывается, уравнение ответвляющейся кривой имеет вид  $r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$  (после выбора подходящего параметра семейства  $\varepsilon$  и после подходящей замены координат  $(r, \varphi)$ , зависящей от  $\varepsilon$ ; мы считаем, что резонанс соответствует  $\varepsilon = 0$  и что отсутствуют резонансы меньшего порядка:  $\lambda^m e^{il\varphi} \neq 1$  при  $0 < m < n$ ).

Приведем здесь вывод уравнения ответвляющейся кривой на уровне формальных рядов. Рассуждая, как в § 27, мы приведем склейку к виду

$$\begin{cases} r \\ \varphi \end{cases} \mapsto \begin{cases} r\lambda(1 + \alpha\varepsilon + aw + A), \\ \varphi + \omega + \beta\varepsilon + bw + B, \end{cases}$$

где  $\alpha, \beta, a, b$  — константы,  $w = r^n e^{ik\varphi}$ .  $A$  и  $B$  — ряды по степеням  $\varepsilon$  и  $w$ , начинающиеся с членов степени 2. Такая подстановка переводит  $w$  в  $w(1 + \gamma\varepsilon + cw + C)$ , где  $\gamma = n\alpha + ik\beta$ ,  $c = na + ikb$ ,  $C$  — члены второй и более высоких степеней по  $\varepsilon$  и  $w$ .

Уравнение  $\gamma\varepsilon + cw + C = 0$  определяет ответвляющуюся кривую. Для семейства общего положения  $\gamma \neq 0$ ,  $c \neq 0$ . После подходящей замены координат  $\varepsilon$  и  $r$  это уравнение принимает вид  $r^n e^{ik\varphi} = \varepsilon$ .

Сходимость исследуется так же, как в цитированных работах Пяртли и Брюно.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Нетрудно проверить, что условие  $\lambda^n e^{ik\omega} = 1$  означает в точности, что нормальное расслоение аналитически тривиально над некоторым конечнолистным циклическим накрытием эллиптической кривой.

Топологически все рассматривавшиеся расслоения тривиальны. В частности, ответвившаяся при резонансе эллиптическая кривая проектируется (неголоморфно) на кривую  $\Gamma(\varepsilon)$  «вдоль  $r$ -направления». Эта проекция является топологическим конечнолистным циклическим накрытием тора. Это — то самое накрытие, над которым нормальное расслоение становится тривиальным в момент прохождения резонанса.

В случае, когда  $(n, k) = d > 1$  (но нет резонансов меньших порядков,  $\lambda^m e^{il\omega} \neq 1$  при  $0 < m < n$ ) ответвляющаяся кривая несвязна. В этом случае она состоит из  $d$  компонент, каждая из которых  $\frac{n}{d}$ -листно топологически накрывает исходный тор.

## О. Расходимость линеаризации.

Для некоторых нерезонансных расслоений (т. е. пар  $(\lambda, \omega)$ ) ряды, приводящие склейку к нормальной форме, расходятся.

Ответвление материализующих резонанс кривых позволяет «объяснить» расходимость линеаризующих склейку рядов следующим образом. Предположим, что пара  $(\lambda, \omega)$  нерезонансная, но очень близка к резонансу. Тогда в малой окрестности исходной эллиптической кривой имеется, вообще говоря, еще одна эллиптическая кривая, а именно, кривая, материализующая резонанс. Если пара  $(\lambda, \omega)$  достаточно близка к бесконечному числу резонансов, то в произвольно малой окрестности исходной эллиптической кривой есть бесконечное число кривых, материализующих различные резонансы и циклически накрывающих исходную кривую.

Между тем нормальное расслоение исходной кривой нерезонансное. Нерезонансные нормальные расслоения степени 0 не имеют сечений ни над каким циклическим конечнолистным накрытием эллиптической кривой. Поэтому в нормальном расслоении исходной эллиптической кривой нет эллиптических кривых, циклически накрывающих исходную кривую. Следовательно, никакая окрестность исходной кривой на поверхности не отображается биоморфно на окрестность нулевого сечения нормального расслоения; поэтому ряды расходятся для склеек общего положения, если пара  $(\lambda, \omega)$  слишком хорошо аппроксимируется резонансными парами.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Существует аналогия между компактными комплексными подмногообразиями аналитических многообразий и предельными циклами дифференциальных уравнений: подобно тому, как предельный цикл может исчезнуть при малой деформации поля, лишь если оператор монодромии имеет собственное число 1, эллиптическая кривая на поверхности, имеющая нулевой индекс самопересечения, не исчезает при малых деформациях объемлющей поверхности, если нормальное расслоение аналитически нетривиально. Ф. А. Богомолов указал следующую общую формулировку: компактное подмногообразие комплексного многообразия не исчезает при малой деформации объемлющего многообразия, если тривиальны одномерные когомологии нормального пучка. (Определение когомологий см., например, в книге: Р. Уэллс. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М.: Мир, 1976, стр. 76.)

### § 37. Классификация особых точек

В этом параграфе мы отказываемся от «универсальной» точки зрения и рассматриваем не семейства, а индивидуальные системы дифференциальных уравнений в окрестности особой точки векторного поля, причем допускаем вырождения сколь угодно большой коразмерности. Исследование таких сложных особенностей с общей точки зрения имеет

весьма ограниченную ценность, так как сложные вырождения имеют большую коразмерность и встречаются редко.

Однако знание общих, принципиальных черт произвольных особенностей представляет интерес даже и в тех сложных случаях, добраться до которых не позволяют наши сегодняшние вычислительные возможности.

В частности, знать, какого рода патология может встретиться в случаях большой коразмерности, полезно хотя бы для того, чтобы не тратить сил на поиски несуществующих вещей. Такими несуществующими объектами, на поиск которых потрачено много усилий, оказались, например, алгебраические критерии устойчивости по Ляпунову или асимптотической, а также алгебраические критерии в проблеме центр-фокус (при нулевых корнях характеристического уравнения).

Чтобы показать, о каких принципиальных вопросах идет речь, мы рассмотрим вначале очень простой и легко исследуемый до конца пример.

### **A. Особые точки функций на прямой.**

Пусть  $f$  — вещественная гладкая в окрестности точки  $x = 0 \in \mathbb{R}$  функция. Если точка 0 не критическая, то функция гладко эквивалентна в ее окрестности линейной ( $f(x) = x + c$ ).

Как обстоит дело в критическом случае, тоже хорошо известно: если  $f'(0) = 0$ , то поведение функции определяется знаком  $f''(0)$  и т. д.

Рассмотрим для определенности задачу об условиях минимума функции в точке 0. Ответ можно представить в следующем виде: пространство  $J^k$   $k$ -струй функций в 0 разбивается на три части,

$$J^k = \text{I} \cup \text{II} \cup \text{III};$$

I — струи, гарантирующие минимум,

II — струи, гарантирующие отсутствие минимума,

III — струи, по которым нельзя решить, есть ли минимум.

Струи типов I и II называют *достаточными*, а типа III — *воспринимчивыми*.

Множества I, II, III в нашей задаче обладают следующими двумя свойствами.

1°. *Полуалгебраичность*. Каждое из множеств I, II, III является полуалгебраическим подмногообразием пространства струй  $J^k$ .

*Полуалгебраическое множество* в  $\mathbb{R}^N$  определяется как конечное объединение подмножеств, каждое из которых задается конечной системой полиномиальных уравнений и неравенств.

Если неравенства не нужны, то множество называется алгебраическим. Полезным свойством полуалгебраических множеств является следующая теорема (доказательства см. в A. Seidenberg. A new decision method for elementary algebra. Ann. of Math., Ser. 2, **60** (1954), 356–374; E. A. Горин. Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций. УМН, **16**, 1 (1961), 91–118).

*Принцип Тарского – Зайденберга. Образ полуалгебраического множества при полиномиальном отображении полуалгебраичен.*

Более слабая по форме, но эквивалентная формулировка:

*Проекция полуалгебраического множества на подпространство является полуалгебраическим множеством.*

Заметим, что уже проекция алгебраического множества может быть не алгебраическим, а лишь полуалгебраическим множеством (пример — проекция сферы на плоскость).

2°. *Почти конечная определенность.* При  $k \rightarrow \infty$  коразмерность множества восприимчивых струй  $\text{III} \subset J^k$  стремится к бесконечности.

Иными словами, восприимчивые струи в  $J^k$  определяются растущим вместе с  $k$  числом условий. В результате оказывается, что множество функций, для которых задача о выяснении того, есть ли 0 точка локального минимума, неразрешима ни при каком числе членов ряда Тейлора, очень тощее: оно имеет коразмерность бесконечность в функциональном пространстве.

### Б. Другие примеры.

Аналогичная задача для функций нескольких переменных уже не имеет простого алгоритма: если второй дифференциал вырождается, то к исследованию приходится привлекать следующие, и мы приходим к задачам типа классификации алгебраических кривых, поверхностей и т. п. Тем не менее и здесь разбиения  $J^k = \text{I} \cup \text{II} \cup \text{III}$  пространства  $k$ -струй функций в  $\mathbb{R}^n$  обладают свойствами полуалгебраичности и почти конечной определенности, хотя явно выписать уравнения и неравенства на коэффициенты Тейлора при сколько-нибудь больших  $n$  и  $k$  безнадежно. Существование этих уравнений и неравенств можно вывести из теоремы Тарского – Зайденберга, доказательство которой

содержит также и алгоритм для выписывания этих уравнений и неравенств (обобщающий теорию Штурма).

Начальный отрезок классификации вычислен явно и оказался связанным (довольно таинственным образом) с классификацией правильных многогранников, с группами Коксетера, Вейля и Ли серии  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_k$ , с автоморфными функциями, треугольниками на плоскости Лобачевского, с особенностями каустик волновых фронтов и осциллирующих интегралов метода стационарной фазы (см. обзор: *В. И. Арнольд. Особые точки гладких функций и их нормальные формы.* УМН, **30**, 5 (1975), 3–65 и список литературы в нем; *В. А. Васильев. Асимптотика экспоненциальных интегралов, диаграмма Ньютона и классификация точек минимума. Функциональный анализ и его приложения.* **11**, 3 (1977), 1–11).

Следующий пример — задача о топологической классификации ростков гладких отображений. В 1964 году Р. Том анонсировал теорему о полуалгебраичности и почти конечной определенности в этой задаче; доказательство дал А. Н. Варченко (*А. Н. Варченко. Локальные топологические свойства дифференцируемых отображений. Известия АН СССР, сер. «Матем.», **38**, 5 (1974), 1037–1090*).

### **В. Особые точки векторных полей.**

Вернемся к задаче о топологической классификации особых точек векторных полей. Вначале ситуация кажется столь же простой, как и в случае функций. Невырожденные особые точки классифицируются по количеству собственных чисел в левой полуплоскости. Пространство 1-струй разбивается на конечное число частей, соответственно числу корней в левой полуплоскости. Каждая из этих частей — полуалгебраическое множество в пространстве струй; задающие его полиномиальные неравенства можно выписать даже явно (условия Рауса–Гурвица, см., например: *Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц.* М.: Наука, 1967).

Восприимчивые 1-струи образуют полуалгебраическое подмногообразие коразмерности 1, разделяющее области, соответствующие разному числу корней в левой полуплоскости. В предыдущих параграфах мы рассмотрели ряд примеров исследования того, что происходит в этих вырожденных случаях при переходе к 2-струям, и т. д. Таким образом, возникает впечатление, что и здесь можно идти сколь угодно далеко, и только сложность вычислений и обилие вариантов не позволяют дать алгебраическую классификацию в случаях произвольно большой коразмерности. Оказывается, однако, что дело обстоит не так (*В. И. Арнольд. Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивос-*

ти по Ляпунову и проблемы топологической классификации особых точек аналитической системы дифференциальных уравнений. Функциональный анализ, 4, 3 (1970), 1–9.

Свойство полуалгебраичности теряется уже в такой простой задаче, как задача различения центра и фокуса при нулевых корнях характеристического уравнения (А. Д. Брюно и Ю. С. Ильяшенко; см.: Ю. С. Ильяшенко. Алгебраическая неразрешимость и почти алгебраическая разрешимость проблемы центр-фокус. Функциональный анализ, 6, 3 (1972), 30–37). Таким образом, для проблем устойчивости и топологической классификации не может существовать алгебраический алгоритм<sup>1</sup>.

Остается еще некоторая надежда на существование неалгебраического алгоритма, т. е. на то, что свойство почти конечной определенности все же имеет место: множество ростков, топологический тип (или устойчивость) которых не определяется ни по какому конечному отрезку ряда Тейлора, имеет, быть может, коразмерность бесконечность. Вопрос, так ли это, представляется весьма трудным; постановку его следует еще уточнить, указав точный смысл слова коразмерность: множества в пространстве  $k$ -струй, коразмерность которых нужно определить, неалгебраические, и возможны теоретико-множественные затруднения. Р. Том высказал гипотезу, что ответ на поставленный вопрос отрицателен.

### Г. Строение множеств восприимчивости.

Вопрос о почти конечной определенности относится к поведению множеств восприимчивых струй в пространстве  $k$ -струй  $J^k$  при  $k$ , стремящемся к бесконечности. Вопросы о строении множеств восприимчивости при фиксированном  $k$  кажутся более поддающимися исследованию. Зафиксируем восприимчивую  $(k - 1)$ -струю векторного поля в 0 и рассмотрим пространство  $J$  всевозможных  $k$ -струй с данной  $(k - 1)$ -структурой. Для определенности будем рассматривать задачу об асимптотической устойчивости. Тогда пространство  $J$  делится на две (быть может, пустые) части: I (устойчивые по  $k$ -струе) и II (неустойчивые по  $k$ -струе) и остаток III из восприимчивых струй (в случае задачи

<sup>1</sup> В самое последнее время Л. Хазин и Э. Шноль установили алгебраическую неразрешимость проблемы устойчивости в случае двух пар чисто мнимых собственных чисел с резонансом 3 : 1. Этот случай соответствует подмногообразию коразмерности 3 в функциональном пространстве.

о топологической классификации частей больше). Разумная постановка вопроса о критерии устойчивости состоит в том, чтобы выяснить, какими свойствами обладают части I, II и граница между ними. Например, трансцендентность границы означает несуществование алгебраического критерия устойчивости. Спрашивается, насколько сложно может быть устроена указанная граница? Например, может ли у нее (и у открытых частей областей I, II) быть бесконечное число компонент связности? И могут ли точки частей I и II перемежаться подобно рациональным и иррациональным числам?

Примеры такого рода не известны, однако можно опасаться, что именно так будет обстоять дело в особых случаях достаточно большой коразмерности в многомерном пространстве.

Существует тесная связь между локальной задачей о поведении фазовых кривых вблизи особой точки в  $\mathbb{R}^n$  и глобальной задачей о дифференциальных уравнениях, заданных полиномиальной системой в проективном пространстве  $\mathbb{RP}^{n-1}$  на единицу меньшей размерности. В цитированной выше работе об алгебраической неразрешимости эта связь использовалась для того, чтобы вывести трансцендентность границы устойчивости в пространстве струй локальной задачи из трансцендентности поверхности рождения предельных циклов в пространстве коэффициентов полиномиальной системы на проективной плоскости. Но в многомерной глобальной ситуации возможны гораздо более сложные явления, чем предельные циклы, например, системы на торе с перемежающейся соизмеримостью и несоизмеримостью чисел вращения или области в функциональном пространстве, свободные от структурно устойчивых систем. Все эти явления реализуются в полиномиальных системах в проективном пространстве, и каждое из них может давать свой вклад в запутывание границы устойчивости в пространстве  $J$ .

---

---

## Образцы экзаменационных задач

На письменном экзамене продолжительностью 4 часадается 15 связанных друг с другом вопросов. В квадратных скобках указано число очков за каждый вопрос. Эти числа заранее сообщаются экзаменуемым.

### Вариант 1.

$$\ddot{x} = -\sin x + \varepsilon \cos t. \quad (1)$$

- I. Пусть  $\varepsilon = 0$ .
  - 1) Линеаризовать в точке  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$ . [1]
  - 2) Устойчиво ли это положение равновесия? [1]
  - 3) Найти матрицу Якоби преобразования фазового потока за время  $t=2\pi$  в точке  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$ . [3]
  - 4) Найти производную решения с начальным условием  $x = \pi$ ,  $\dot{x} = 0$  по параметру  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ . [5]
  - 5) Нарисовать графики решения и его производной по  $t$  при начальном условии  $x = 0$ ,  $\dot{x} = 2$ . [3]
  - 6) Найти это решение. [3]
  - II. Пусть (2) — уравнение в вариациях вдоль указанного в п. 5 решения.
  - 7) Имеет ли уравнение (2) неограниченные решения? [8]
  - 8) Имеет ли уравнение (2) ненулевые ограниченные решения? [8]
  - 9) Найти определитель Вронского фундаментальной системы решений уравнения (2), зная, что  $W(0) = 1$ . [5]
  - 10) Выписать явно уравнение (2) и решить его. [10]
  - 11) Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях вдоль решения с начальным условием  $x = \frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{x} = 0$ . [16]
  - 12) Доказать, что уравнение (1) имеет  $2\pi$ -периодическое решение, гладко зависящее от  $\varepsilon$  и обращающееся в  $x = \pi$  при  $\varepsilon = 0$ . [6]
  - 13) Найти производную этого решения по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ . [6]
- III. Рассмотрим уравнение  $u_t + uu_x = -\sin x$ .
- 14) Написать уравнение характеристик. [2]
- 15) Найти наибольшее значение  $t$ , при котором решение задачи Коши с  $u|_{t=0} = 0$  продолжается на  $[0, t)$ . [8]

### Вариант 2.

- I. Пусть векторное поле в трехмерном пространстве имеет особую точку нуль, причем одно из собственных чисел особой точки равно нулю, а два другие чисто мнимы.

1) Привести к нормальной форме члены степени 1 разложения компонент поля в ряд Тейлора в нуле. [1]

2) То же для членов степени 2. [3]

3) То же для членов любой степени. [8]

4) Усреднить систему по быстрому вращению, заданному линейной частью поля. [12]

II. Пусть дано семейство полей, зависящих от параметра, и содержащее поле пункта I при нулевом значении параметра.

5) Гладко зависящим от параметров, меняющихся в окрестности нуля, диффеоморфизмом привести к возможно простому виду отрезок ряда Тейлора полей семейства в нуле. [10]

6) Применить к тому же семейству усреднение по быстрому вращению, заданному линейной частью исходного поля. [20]

III. В пространстве 1-струй векторных полей в трехмерном пространстве выделим многообразие струй в особых точках с одним нулевым и двумя чисто мнимыми собственными числами.

7) Найти коразмерность указанного многообразия. [2]

8) Выписать условие трансверсальности семейства, записанного в найденном в задаче 5 виде, к указанному многообразию. [8]

9) Исследовать бифуркации особых точек в двухпараметрических семействах общего положения, трансверсальных к указанному многообразию. [10]

10) Исследовать бифуркации циклов из этих особых точек. [15]

11) Исследовать существование и гладкость фазовой кривой, соединяющей эти особые точки. [15]

IV. Пусть на плоскости отмечена прямая, проходящая через нуль. Диффеоморфизм плоскости называется отмеченным, если он переводит отмеченную прямую в себя. Векторное поле называется отмеченным, если оно касается отмеченной прямой во всех ее точках. Пусть дано отмеченное поле, имеющее в нуле особую точку с двумя нулевыми собственными числами.

12) Привести отрезок ряда Тейлора поля в нуле к возможно простому виду посредством допустимого диффеоморфизма. [12]

13) Привести семейство допустимых полей, являющееся деформацией данного поля, к формальной нормальной форме посредством допустимых формальных диффеоморфизмов, формально гладко зависящих от параметров, меняющихся в окрестности нуля. [16]

14) Исследовать бифуркации особых точек в семействах общего положения, полученных из нормальных форм задачи 13 отбрасыванием членов высокой степени. [18]

15) Применить результаты задач 12–14 к исследованию бифуркаций фазового портрета поля с одним нулевым и двумя чисто мнимыми собственными числами. [25]

**Дополнительные задачи****Вариант 1.**

1)  $\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3$ . Доказать, что при  $|\operatorname{Re} A| > 1$  число предельных циклов  $\leq 1$ .

**Указание.** Разделить поле на  $z\bar{z}$ ;  $\operatorname{div} P(z, \bar{z}) = 2 \operatorname{Re} \left( \frac{\partial P}{\partial z} \right)$ .

2) Пусть  $A = \frac{3+i}{\sqrt{2}}$ . Доказать, что если  $\arg \varepsilon = \frac{5\pi}{4}$ , то особая сепаратриса каждого седло-узла совпадает с неособой следующего.

**Указание.** При слиянии седла с узлом уравнение приводится к

$$\dot{w} = e^{i\theta} [Rw(|w|^2 - 1) + i(\bar{w}^2 - w^2)], \quad A = (R - i)e^{i\theta}.$$

Если  $R = 2$ ,  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , то сепаратрисы — прямые.

3) Исследовать кривые, разделяющие области значений  $A$ , где особые точки при изменении  $\arg \varepsilon$  сливаются на цикле, внутри и вне.

**Указание.** Изменение  $\theta$  поворачивает поле. Кривые расположены примерно как четыре параболы  $a^2 = 2(\pm b \pm 1)$ ,  $A = a + ib$ .

4) Доказать, что при малых  $|\operatorname{Re} A|$  и  $1 < |\operatorname{Im} A| < c \approx 4,35$  уравнение (1) с подходящим  $\varepsilon$  имеет два предельных цикла, внутри которых лежат 9 особых точек, а при  $|\operatorname{Im} A| > c$  — один (А. И. Нейштадт). Граница напоминает эллипс оси 3, 11 и 2.

5) Доказать, что в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha + ax + by), \\ \dot{y} = y(\beta + cx + dy) \end{cases}$$

нет предельных циклов.

**Указание.** При потере устойчивости фокусом система имеет первый интеграл: произведение степеней трех линейных функций (Н. Н. Баутин).

**Вариант 2.**

1. Найти образ поля направлений  $dy = 0$  под действием преобразования фазового потока системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x, \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

за время  $t$ .

2. Исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды ( $x$ ) для системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y + x^2, \\ \dot{y} = -4x^3 - 2xy. \end{cases}$$

3. Имеет ли задача Коши

$$(2y + x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - (4x^3 + 2xy) \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \quad u|_{x=1} = 0$$

решение в окрестности точки  $(1, y_0)$  и единствено ли оно?

4. Найти все первые интегралы системы

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = x + y + z, \\ \dot{z} = z - y, \end{cases}$$

непрерывные в окрестности точки  $x = y = z = 0$ .

### Вариант 3.

1. Найти образ вектора  $(1, 0)$ , приложенного в точке  $(\pi, 0)$ , под действием преобразования за время  $t = 1$  фазового потока системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin x. \end{cases}$$

2. В каких координатах разделяются переменные в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 + x^3y^3.$$

3. Имеет ли задача Коши

$$y \frac{\partial u}{\partial x} + (x^3 - x) \frac{\partial u}{\partial y} = y^2, \quad u|_{x=0} = 0$$

решение в окрестности точки  $(x_0 = 0, y = y_0)$ , и единствено ли оно?

4. Выяснить, устойчиво ли по Ляпунову решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = yz, \\ \dot{y} = -xz \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

с начальным условием  $(x_0, y_0, z_0)$ .

5\* (дополнительная). Сколько неподвижных точек имеет отображение  $A_{10}$ , где  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $A(x, y) = (5y + \cos x, 5x - \cos y)$ .

**Вариант 4.**

1. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.
2. Все ли решения системы продолжаются неограниченно?
3. Сколько ненулевых решений, для которых  $y(0) = x(1) = 0$ , имеет система?
4. Найти производную решения с начальными условиями  $x(0) = y(0) = \varepsilon$  по  $\varepsilon$  при  $\varepsilon = 0$ .

Варианты системы

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y^3, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x^4, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -y^2, \\ \dot{y} = x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y^4, \\ \dot{y} = -x, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = y^2, \\ \dot{y} = x^2. \end{cases}$$

**Вариант 5.**

1. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.
2. Все ли решения системы продолжаются неограниченно?
3. Найти диффеоморфизм плоскости, выпрямляющий поле направлений фазовых кривых в окрестности точки  $(1, 1)$ .
4. Найти все непрерывные на всей плоскости первые интегралы, совпадающие с  $y$  на оси  $y$ .

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2y, \\ \dot{y} = -xy^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x^2y^2, \\ \dot{y} = xy^3, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x^2y^3, \\ \dot{y} = xy^4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2, \\ \dot{y} = x^2y, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = xy^3, \\ \dot{y} = -x^2y^2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -xy^4, \\ \dot{y} = x^2y^3. \end{cases}$$

**Вариант 6.**

1. Найти положения равновесия и исследовать их устойчивость.
2. Найти все начальные условия, для которых решения продолжаются неограниченно вперед.
3. Найти образ вектора  $(1, 0)$ , приложенного в точке  $0$ , под действием преобразования фазового потока за время  $t$ .
4. Найти все первые интегралы, непрерывные в окрестности точки  $z = 1$  и равные 1 на вещественной оси.

$$\dot{z} = iz^2, \quad \dot{z} = \bar{z}^2, \quad \dot{z} = iz^2\bar{z}, \quad \dot{z} = z\bar{z}^2, \quad \dot{z} = iz\bar{z}^2, \quad \dot{z} = i\bar{z}^2.$$

**Вариант 7.**

1. Имеет ли задача определенное на всей плоскости неограниченное решение?
2. Ограничена ли величина  $u$  на характеристиках уравнения?
3. Все ли характеристики уравнения пересекают поверхность  $y = x + u^2$ ?

4. Имеет ли уравнение характеристик первый интеграл, производная которого в начале координат равна 1? Найти производную этой производной по  $u$  вдоль характеристического вектора.

$$\left\{ \begin{array}{l} x \frac{\partial u}{\partial x} - (1 + x^4 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \\ u|_{x=0} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (2 + x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u, \\ u|_{y=0} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \frac{\partial u}{\partial x} + (1 + 2u^4 + y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 3u, \\ u|_{x=0} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (x^2 + u^4 + 4) \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0, \\ u|_{y=0} = 0, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3u - y \frac{\partial u}{\partial y} = (1 + x^2 + y^4) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u|_{y=0} = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 2u - x \frac{\partial u}{\partial x} = (2 + u^2 + y^4) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ u|_{x=0} = 0. \end{array} \right.$$

### Вариант 8.

1. Продолжается ли решение с начальным условием  $x(0) = 1$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  на всю ось  $t$ ?

2. Ограничена ли третья производная по  $a$  при  $a = 0$  решения с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$ ?

3. Вычислить значение этой производной при  $t = 2\pi$ .

4. Вычислить десятую производную решения с начальными условиями  $x(0) = a$ ,  $\dot{x}(0) = 0$  по  $a$  при  $a = 0$ .

$$\ddot{x} + x = \operatorname{sh}^3 x, \quad \ddot{x} + \sin x = x^3, \quad \ddot{x} + x = 2x^3,$$

$$\ddot{x} + x = \frac{1}{2} \operatorname{sh}^3 x, \quad \ddot{x} + \sin x = \frac{x^3}{2}, \quad \ddot{x} + x = \frac{x^3}{2}.$$

### Вариант 9.

1. Найти третью производную решения с начальным условием  $x(0) = 0$  в нуле.

2. Продолжается ли это решение на всю ось  $t$ ?

3. Имеет ли уравнение неограниченные решения?

4. Найти число асимптотически устойчивых периодических решений уравнения.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 - \sin^2 t, & \dot{x} &= x^2 - \cos^2 t, & \dot{x} &= \sin^2 t - x^2, \\ \dot{x} &= \cos^2 t - x^2, & \dot{x} &= \operatorname{sh}^2 x - \sin^2 t, & \dot{x} &= \operatorname{sh}^2 x - \cos^2 t. \end{aligned}$$

**Арнольд Владимир Игоревич**

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Дизайнер М. В. Ботя*

*Компьютерная подготовка С. В. Высоцкий*

*А. В. Широбоков*

*И. В. Рылова*

*Компьютерная графика В. Г. Бахтиев*

*Корректоры Е. Ф. Осипова, М. А. Ложкина*

---

Лицензия ЛУ № 056 от 06.01.98. Подписано к печати 31.01.00.

Формат 60 × 84 $\frac{1}{16}$ . Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,25. Уч. изд. л. 24,04.

Гарнитура Computer Modern Roman. Бумага офсетная № 1.

Заказ № И16. Тираж 1000 экз.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в Ижевской республиканской типографии,  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.

---