

в п. 8.5 гл. 3, поэтому укажем лишь геометрическую картину (рис. 20). На этом рисунке кольцо изображено в виде прямоугольника, левая и правая стороны которого отождествлены и состоят из точек устойчивого многообразия неподвижной точки на границе: седло-узла на рис. 20 d и седла для всех остальных. В начальной ситуации a инвариантная кривая гладкая. В случаях b , v , g инвариантная кривая еще непрерывна, но уже не имеет касательной в устойчивой неподвижной точке N . Устойчивая точка в случаях b и v — узел, причем в случае b неустойчивое многообразие седла Q не пересекает, в случае v пересекает неведущее многообразие узла \dot{N} (инвариантное многообразие узла, соответствующее большему по модулю собственному значению). В случае же g устойчивая точка — фокус, мультиплликаторы ее комплексны.

Оставшиеся рисунки иллюстрируют дальнейшие возможные изменения фазового портрета. На рис. 20 d показан момент образования s -критического седло-узла¹⁾; его исчезновение приведет к рождению странного аттрактора. На рис. 20 e изображено первое простое касание неустойчивого и устойчивого многообразий точки Q . В этот момент и при дальнейшем изменении параметров, приводящем к рождению гомоклинических точек трансверсального пересечения, аттрактор в кольце является странным. На рис. 20 $ж$ уже произошла бифуркация удвоения периода точки N и возникла устойчивая двоякопериодическая траектория (замкнутой инвариантной кривой не стало). При дальнейшем изменении параметров может реализоваться каскад

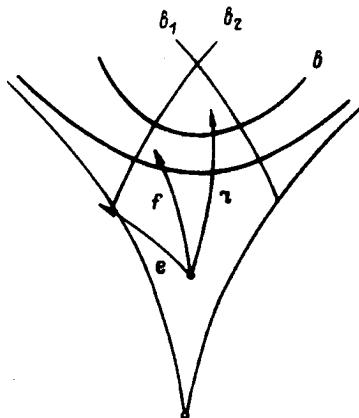


Рис. 21. Бифуркационные кривые, соответствующие перестройке инвариантного тора

¹⁾ s — критический седло-узел определен и его бифуркации исследованы в § 4 главы 3.

бифуркаций удвоения периода и возникнуть аттрактор Фейгенбаума. Впрочем, точка N может потерять устойчивость и иным способом, например, может возникнуть замкнутая инвариантная кривая, с которой могут произойти те же изменения, что и с исходной.

На рис. 21 изображена типичная бифуркационная диаграмма в резонансном языке. В точке 0 диффеоморфизм, как на рис. 20a, изменениям параметра вдоль кривых b , f и r отвечают последовательности бифуркаций, изображенные в левом, среднем и правом столбцах рис. 20 соответственно. b_1 , b_2 — бифуркационные кривые, отвечающие образованию точек простого касания на каждом из лучей $W_{Q^u} \setminus Q$, а b — бифуркационная кривая, отвечающая смене устойчивости точки N .

Для одной и той же системы потеря устойчивости неподвижной точки в разных резонансных языках может происходить по-разному.

§ 2. Бифуркаций циклов в типичных двупараметрических семействах при однократном дополнительном вырождении

Этот параграф начинается с перечня вырождений, встречающихся в типичных двупараметрических семействах ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке и соответствующих изолированным значениям параметров. Бифуркации неподвижных точек с мультипликатором 1 или -1 с дополнительным вырождением в нелинейных членах во многом напоминают бифуркации особых точек с собственным значением 0. Напротив, бифуркации в случае пары комплексно сопряженных мультипликаторов при дополнительном вырождении в нелинейных членах, наряду с появлением замкнутых инвариантных кривых, приводят к совершенно новым эффектам.

2.1. Перечень вырождений.

1°. Один мультипликатор 1 с дополнительным вырождением в нелинейных членах.

2°. Один мультипликатор -1 с дополнительным вырождением.

3°. Пара невещественных мультипликаторов на единичной окружности с дополнительным вырождением.

4°. Один двукратный мультипликатор 1; линейная часть в нуле эквивалентна унипотентной жордановой клетке $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

5°. Один мультипликатор 1 и один -1 .

6°. Один двукратный мультипликатор -1 .

7°. Пара мультипликаторов $e^{\pm i\omega}$, $\omega = 2\pi p/q$, $q = 3$ или 4.

8°. Тройка мультипликаторов $e^{\pm i\omega}$, 1.

9°. Тройка $e^{\pm i\omega}$, -1 .

10°. Две пары $e^{\pm i\omega_1}$, $e^{\pm i\omega_2}$.

Случаи 5°—7° называются случаями *сильного резонанса*.

Случаи 8° и 10° в определенном смысле сводятся к исследованию бифуркаций положений равновесия с нулевым и парой чисто мнимых собственных значений и с двумя мнимыми парами соответственно. Специальные исследования бифуркаций неподвижных точек диффеоморфизмов в случаях 8°—10°, насколько нам известно, не проводились.

В этом параграфе исследуются деформации ростков с вырождениями первых трех типов.

2.2. Мультиликатор 1 или -1 с дополнительным вырождением в нелинейных членах.

Определение 1. Главной v -параметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультиликатором 1 называется одно из двух семейств

$$x \mapsto x \pm x^{v+1} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_v x^{v-1}. \quad (8^\pm)$$

Определение 2. Главной v -параметрической деформацией ростка диффеоморфизма прямой в неподвижной точке с мультиликатором -1 называется одно из двух семейств

$$x \mapsto -x \pm x^{2v+1} + \varepsilon_1 x + \varepsilon_2 x^3 + \dots + \varepsilon_v x^{2v-1}. \quad (9^\pm)$$

«Теорема». В типичных μ -параметрических семействах ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке встречаются только такие ростки с мультиликатором 1 (или -1) и одномерным центральным многообразием, вблизи которых семейства локально слабо эквивалентны надстройке седла над одним из главных семейств (8^\pm) (соответственно, (9^\pm)) при $v \leq \mu$; случаю $v = \mu$ отвечают изолированные точки пространства параметров. Эти локальные семейства слабо версальны.

Замечание. Слово «теорема» заключено здесь в кавычки, поскольку доказательство, насколько нам известно, не опубликовано. Классификация описанных в теореме семейств диффеоморфизмов с обычным отношением эквивалентности при $\mu \geq 3$ имеет функциональные модули (см. п. 5.11 главы 2).

2.3. Пара мультиликаторов на единичной окружности с дополнительным вырождением в нелинейных членах (см. [130] и [131 : 6—13]). Следуя Шансине, рассмотрим росток диффеоморфизма $f_0 : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ с парой невещественных мультиликаторов на единичной окружности и дополнительным вырождением: нарушается требование (3б).

Типичная двупараметрическая деформация этого ростка заменой координат и параметров приводится к виду

$$z \mapsto N_{\varepsilon, a}(z) + O(|z|^5); \quad N_{\varepsilon, a} = g_{v_\varepsilon, a}^1.$$

Здесь

$$v_{\varepsilon,a}(z) = v z + z (\tilde{A} |z|^2 + B |z|^4),$$

$$v = i\omega + \varepsilon + i\alpha(\varepsilon), \quad \tilde{A} = ia_0 + a + ia_1(\varepsilon, a),$$

$$B = B(\varepsilon, a), \quad \operatorname{Re} B(0, 0) < 0;$$

выполнения последнего неравенства можно добиться обращением времени. Пространство параметров (ε, a) разбивается на 3 области (рис. 22), соответствующие одной, двум или пустому множеству замкнутых инвариантных кривых поля $v_{\varepsilon,a}$ и отображения $N_{\varepsilon,a}$ (эти кривые — окружности). Кривая Γ , на которой сливаются, исчезая, две инвариантные окружности, задается уравнением

$$4\varepsilon b + a^2 = 0, \quad b = \operatorname{Re} B, \quad a \geq 0,$$

и напоминает ветвь параболы

$$a^2 = -4\varepsilon b(0, 0), \quad a \geq 0$$

(ср. рис. 7).

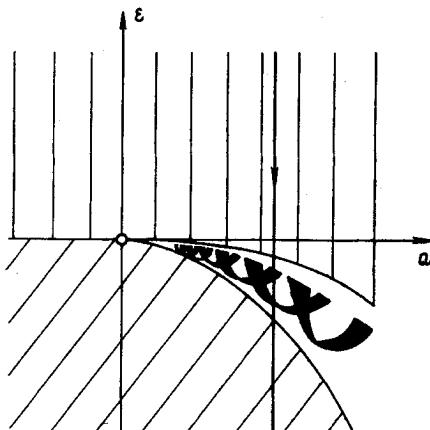


Рис. 22. Зоны существования замкнутых инвариантных кривых вблизи линии Γ закрашены черным. Зоны, где возмущенное отображение имеет столько же замкнутых инвариантных кривых, сколько и невозмущенное, заштрихованы

Следующая теорема сравнивает поведение нормализованных отображений $N_{\varepsilon,a}$ с отображениями, возникающими при типичной деформации ростка f_0 . При одних значениях параметров наблюдается сходство, а при других — резкие различия в геометрических свойствах возмущенного и невозмущенного отображений.

Теорема ([130]). Рассмотрим семейство f ростков диффеоморфизмов

$$f_{\varepsilon,a}: z \mapsto N_{\varepsilon,a}(z) + O(|z|^5).$$

Пусть число ω удовлетворяет условию Зигеля: для некоторых положительных C и σ и для любого рационального p/q выполняется неравенство $|\omega - p/q| > Cq^{-(2+\sigma)}$. Тогда для любого натурального k существуют окрестность нуля U и окрестность W «параболы» $\Gamma \setminus \{0\}$, ограниченная кривой ∂U и двумя кривыми, касающимися в нуле, такие что:

1. Для любой пары (ε, a) из разности $U \setminus W$ отображение $f_{\varepsilon, a}$ имеет столько же замкнутых инвариантных кривых, сколько и $N_{\varepsilon, a}$; эти кривые гладки класса C^k .

2. Внутри окрестности W существует «близкое к Γ » канторово множество, для каждой точки (ε, a) из которого отображение $f_{\varepsilon, a}$ имеет единственную замкнутую инвариантную кривую. Кроме того, точка (ε, a) является вершиной двойной воронки (закрашена черным на рис. 22). Для всех значений (ε', a') из левой (правой) половины воронки отображение $f_{\varepsilon', a'}$ имеет притягивающую (отталкивающую) замкнутую инвариантную кривую.

Шансине [131 : 10] утверждает также, что в области W сколь угодно близко к нулю существуют такие значения параметра (ε, a) , для которых отображение $f_{\varepsilon, a}$ имеет в любой окрестности нуля сколь угодно много периодических точек и гомоклинических кривых. Подобные эффекты ранее наблюдались для ростков диффеоморфизмов плоскости только при наличии вырождений коразмерности бесконечность.

Отметим в заключение, что информация о преобразованиях монодромии стандартным образом переводится на язык дифференциальных уравнений: неподвижным или периодическим точкам соответствуют замкнутые траектории, инвариантным окружностям — инвариантные торы или бутылки Клейна и т. д.

§ 3. Бифуркации циклов в типичных двупараметрических семействах при сильных резонансах порядка $q \neq 4$

Типичные диффеоморфизмы с двумя мультипликаторами — корнями из единицы, вероятно, не имеют конечно параметрических версальных деформаций.

Вместо семейств диффеоморфизмов в этом параграфе рассматриваются семейства векторных полей, сдвиги по траекториям которых за единичное время приближают исходные семейства диффеоморфизмов.

Таким образом, в качестве упрощенной модели двупараметрического семейства диффеоморфизмов вблизи резонанса $e^{i\omega}$, $\omega = 2\pi p/q$, мы рассматриваем семейство сдвигов за единичное время вдоль траекторий Z_q — эквивариантных векторных полей. Нормальные формы семейств таких полей описаны в п.п. 3.3 и 3.4. Хотя эти упрощенные семейства сдвигов не эквивалентны исходным семействам диффеоморфизмов, тем не менее они обладают многими свойствами, присущими исходным семействам.

Другими словами, мы ограничиваемся исследованием бифуркаций в факторсистеме упрощенной нормальной формы семейства уравнений в окрестности цикла. Истолкование результатов в терминах исходной системы требует дополнительной работы, так как даже топологически бифуркации в исходной системе и в упрощенной нормальной форме не всегда одинаковы (см., например, п. 3.5). Начнем с построения вспомогательных семейств векторных полей на плоскости, сдвиг вдоль которых приближает преобразование монодромии циклов в случае сильного резонанса.

3.1. Нормальная форма в случае унипотентной жордановой клетки. Росток диффеоморфизма в неподвижной точке на плоскости с унипотентной линейной частью может быть реализован как преобразование монодромии периодического дифференциального уравнения с нильпотентной линейной частью

$$\dot{x} = Jx + f(x, t), \quad x \in (\mathbf{R}^2, 0), \\ t \in S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(0, t) \equiv 0, \frac{\partial f}{\partial x}(0, t) \equiv 0.$$

Такое уравнение формальной, периодической по t , заменой приводится к автономной (не содержащей t) форме:

$$\dot{x} = Jx + \tilde{f}(x), \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(0) = 0.$$

Деформация предыдущего неавтономного уравнения такой же заменой приводится к виду

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + F(x, \varepsilon), \quad A(0) = J, \quad F(x, 0) = \tilde{f}(x).$$

Более того, существует гладкая замена, переводящая исходную деформацию в семейство, отличающееся от выписанного автономного на добавок, плоский на окружности $x=0$, $\varepsilon=0$. Эта «почти автономная» деформация изучена мало; зато подробно изучены получаемые отбрасыванием плоского добавка деформации ростков векторных полей в особой точке с ненулевой нильпотентной линейной частью на плоскости. Эти деформации описаны в п. 4.2 главы 1.

Аналогично, отбрасывая плоский добавок, деформацию ростка диффеоморфизма в остальных случаях сильного резонанса можно превратить в деформацию сдвига по фазовым кривым векторного поля так, что сдвиг и деформация будут эквивалентны относительно конечной группы движений. Для пары мультипликаторов 1 и -1 это будет группа S_2 , порожденная симметрией $(x, r) \mapsto (x, -r)$; для пары $\exp(\pm 2\pi i p/q)$ это будет группа Z_q , порожденная поворотом на $2\pi/q$.

Редукцию задачи о деформациях ростков диффеоморфизмов к задаче об эквивариантных деформациях ростков векторных полей (в случае резонанса $\omega = 2\pi p/q$ или пары мультипликатор-

ров 1, —1) можно провести с помощью усреднения в слоении Зейфера или Мёбиуса, как это сделано ниже.

3.2. Усреднение в слоениях Зейфера и Мёбиуса. Рассмотрим в произведении $S^1 \times \mathbb{C}$ дифференциальное уравнение $\dot{z} = -i\omega z$, $\omega = p/q$, $t \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = S^1$, $z \in \mathbb{C}$. Разбиение расширенного фазового пространства $S^1 \times \mathbb{C}$ на интегральные кривые этого уравнения называется слоением Зейфера типа p/q . Все решения этого уравнения, кроме нулевого, $2\pi q$ -периодичны и каждая интегральная кривая переходит в себя при повороте в плоскости z на угол $2\pi p/q$.

Пусть v — произвольное вертикальное (касающееся слоев $\{t\} \times \mathbb{C}$) векторное поле в расслоенном над S^1 произведении $S^1 \times \mathbb{C}$. Усредним его по времени вдоль интегральных кривых предыдущего уравнения. Под этим понимается следующее. Поле v определяет поле \tilde{v} на универсальной накрывающей $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ пространства $S^1 \times \mathbb{C}$, переходящее в себя при сдвигах \mathbb{R} на 2π . Фиксируем начальное сечение, скажем $\{t_0\} \times \mathbb{C}$. Все пространство расслоения $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ отображается на это сечение так, что каждая фазовая кривая поля $i\omega \partial/\partial z + \partial/\partial t$ переходит в свою точку на начальном сечении. Это отображение переносит векторы накрывающего поля v в начальное сечение. В каждой точке начального сечения возникает периодически зависящий от t вектор. Усредняя его по t , получаем вектор усредненного поля в рассматриваемой точке плоскости \mathbb{C} .

Эта операция и называется *усреднением в слоении Зейфера*. Произвольное векторное поле v при усреднении в слоении Зейфера превращается в \mathbb{Z}_q -эквивариантное векторное поле на плоскости.

Рассмотрим еще произведение листа Мёбиуса на прямую, получаемое из пространства \mathbb{R}^3 отождествлением точек (t, x, r) и $(t+2\pi, x, -r)$. Разбиение этого пространства на интегральные кривые уравнения $\dot{x} = 0$, $\dot{r} = 0$ называется слоением Мёбиуса. Это слоение является «линейным приближением» при изучении предельного цикла с мультиликаторами $+1$ и -1 . При усреднении в этом слоении возникают S_2 -эквивариантные векторные поля на плоскости, деформации которых описаны в п. 4.4 главы 1.

3.3. Главные поля и деформации.

Определения. 1. Главными особыми \mathbb{Z}_q -эквивариантными уравнениями и полями при $q > 2$ называются уравнения

$$\dot{z} = Az|z|^2 + B\bar{z}^{q-1}, \quad z \in \mathbb{R}^2,$$

и соответствующие им векторные поля на плоскости.

2. Главной деформацией главного особого \mathbb{Z}_q -эквивариантного векторного поля v_0 ($q > 2$) называется двупараметрическое

семейство $v_\epsilon = \epsilon z + v_0$, где параметрами являются вещественная и мнимая часть ϵ .

3. Главными особыми Z_q -эквивариантными уравнениями и полями при $q=2$ и $q=1$ называются соответственно уравнения $\ddot{x} = ax^3 + bx^2y$ ($q=2$), $\ddot{x} = ax^2 + bxy$ ($q=1$) и задающие их векторные поля на фазовой плоскости $(x, y=x)$.

4. Главной деформацией главного особого поля при $q=2$ и $q=1$ называется деформация, состоящая в прибавлении к правой части уравнения второго порядка слагаемых $\alpha x + \beta y$ ($q=2$) и $\alpha + \beta x$ ($q=1$).

Список главных деформаций главных особых Z_q -эквивариантных векторных полей следующий

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \epsilon z + Az|z|^2 + Bz^{q-1}, \quad q \geq 3, \\ \ddot{x} &= \alpha x + \beta y + ax^3 + bx^2y, \quad q = 2, \\ \ddot{x} &= \alpha + \beta x + ax^2 + bxy, \quad q = 1.\end{aligned}$$

Здесь переменные z, ϵ, A, B — комплексные, $x, y, \alpha, \beta, a, b$ — вещественные, параметры деформации обозначены греческими буквами; $y=x$.

3.4. Версальность главных деформаций.

«Теорема». Все главные особые Z_q -эквивариантные поля при каждом q можно разделить на вырожденные и невырожденные так, что:

- 1) В типичных двупараметрических семействах ростков Z_q -эквивариантных векторных полей в нуле встречаются только такие ростки с нильпотентной линейной частью, которые эквивалентны одному из невырожденных главных полей.
- 2) Соответствующие локальные семейства эквивалентны главным деформациям и версальны.
- 3) Вырожденные поля образуют объединение конечного числа подмногообразий в пространстве главных особых полей.
- 3) Невырожденные поля образуют объединение конечного числа открытых связных областей.
- 5) Главные деформации ростков невырожденных полей в каждой компоненте связности топологически эквивалентны.

Слово «теорема» заключено здесь в кавычки потому, что теорема доказана лишь при $q \neq 4$ [20], [21], [104]. При $q \neq 4$ условия невырожденности можно выписать явно: $a \neq 0, b \neq 0$ при $q=1, 2$; $\operatorname{Re} A \neq 0, B \neq 0$ при $q=3$ и $q \geq 5$. Бифуркационные диаграммы и перестройки фазовых портретов при $q=1$ приведены выше на рис. 10, при $q=2$ — на рис. 23 (заменами времени добиваемся $b < 0$); при $q=3$ и $q=5$ — на рис. 24, 25 (заменами времени добиваемся $\operatorname{Re} A < 0$).

3.5. Бифуркации стационарных решений периодических дифференциальных уравнений при сильных резонансах порядка $q \neq 4$.

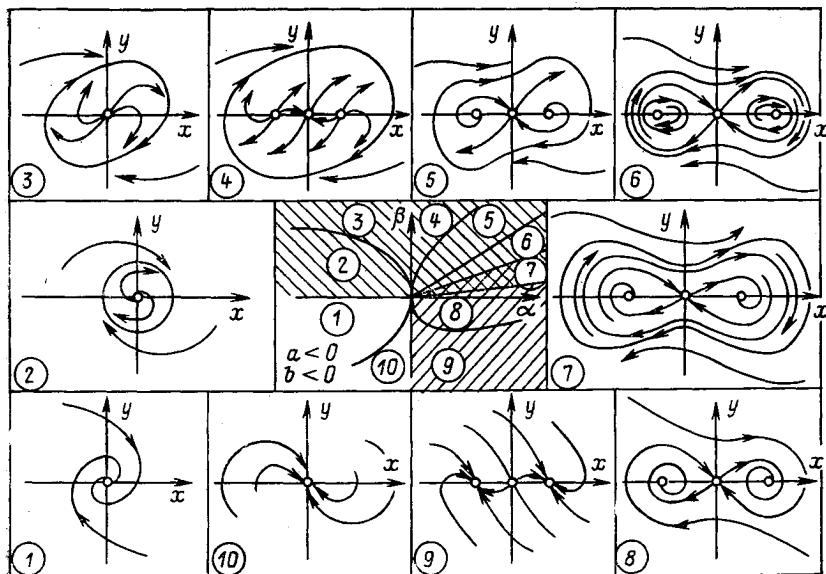
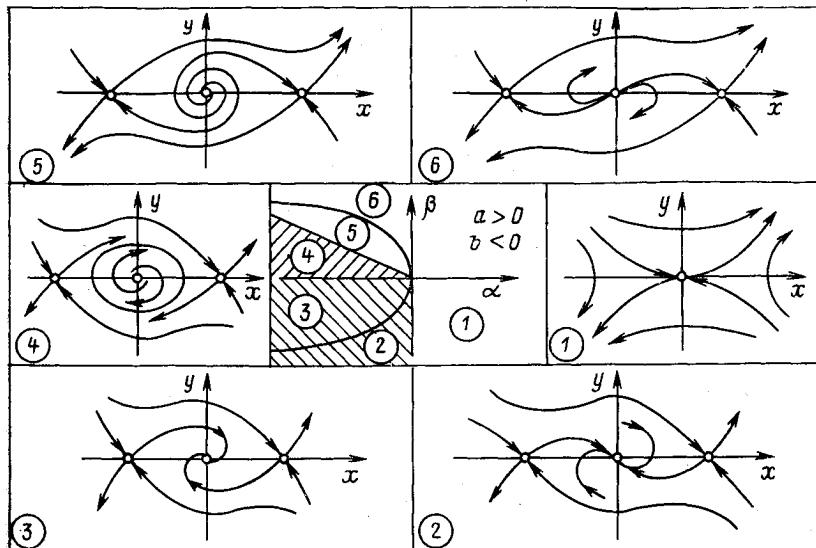


Рис. 23. Бифуркации в главном \mathbb{Z}_2 -эквиварантном семействе

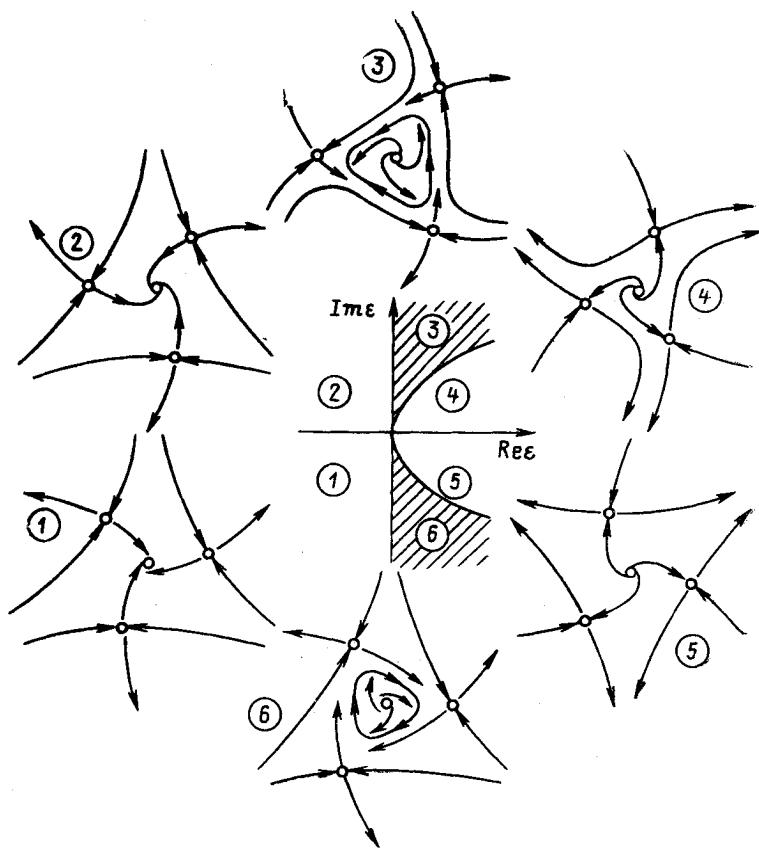


Рис. 24. Бифуркации в главном Z_3 -эквивариантном семействе

В каждом из главных Z_q -эквивариантных семейств при некоторых значениях параметров, образующих линии на плоскости ε , возникают сепаратрисные многоугольники. Сдвиг по фазовым кривым поля семейства за единицу времени приближает q -ю степень преобразования монодромии предельного цикла, теряющего устойчивость с прохождением пары мультиплликаторов через сильный резонанс. Особым точкам полей семейства соответствуют неподвижные точки q -й степени преобразования монодромии и $2\pi q$ -периодические циклы периодического уравнения; входящим и выходящим сепаратрисам седел — устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек. Две сепаратрисы особых точек, раз пересекшись, должны совпадать на всем своем протяжении. Не так обстоит дело с инвариантными кривыми неподвижных точек диффеоморфизмов. Эти кривые пересекаются, вообще говоря, трансверсально, а для диффеомор-

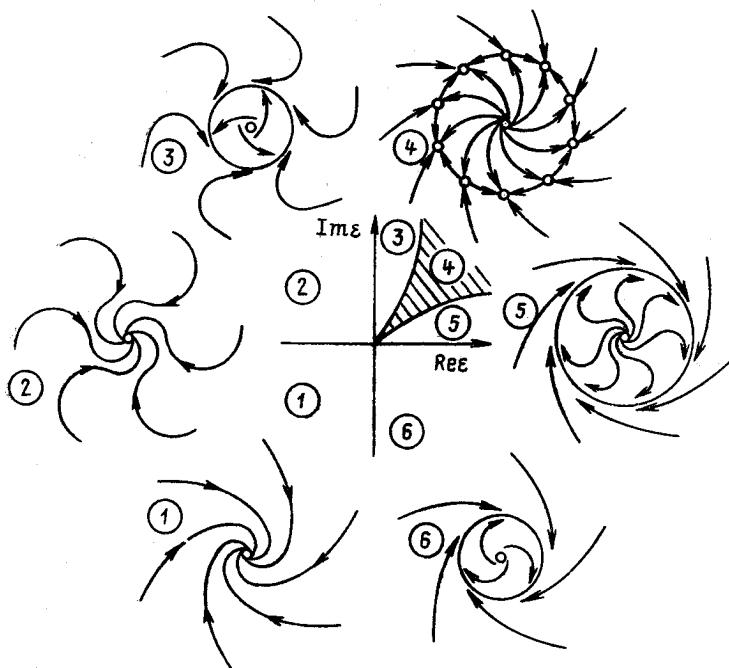


Рис. 25. Бифуркции в главном Z_5 -эквивариантном семействе

физмов типичного однопараметрического семейства могут касаться при некоторых значениях параметров. Такое касание называется гомоклиническим или гетероклиническим в зависимости от того, касаются ли инвариантные кривой одной или разных особых точек диффеоморфизма. Рассмотрим значение параметра главного Z_q -эквивариантного семейства, соответствующее векторному полю с петлей сепаратрисы (случай $q=1, 2$) или сепаратрисным многоугольникам (случай $q=2, 3, 4$). Следует ожидать, что существует близкое значение параметра семейства периодических дифференциальных уравнений, которому соответствует гомоклиническое или гетероклиническое касание инвариантных многообразий неподвижных точек q -й степени преобразования монодромии. Бифуркции таких диффеоморфизмов описаны в § 6 главы 3. Здесь отметим только, что при таких бифуркциях возникают, как правило, нетривиальные гиперболические множества.

Гипотеза. В типичных двупараметрических семействах векторных полей, в которых происходит потеря устойчивости предельным циклом с прохождением через сильный резонанс, встречаются векторные поля с нетривиальными гиперболическими множествами. Соответствующие им значения параметра подходят к критическим узкими языками.

З а м е ч а н и я. 1. Насколько нам известно, эта гипотеза не доказана, хотя близкие утверждения формулировались давно ([20, § 213]).

2. Объединение гиперболического множества, возникающего при гомоклиническом касании, и всех траекторий, которые к нему притягиваются, вообще говоря, имеет в фазовом пространстве меру нуль. Однако множество траекторий положительной меры находится вблизи гиперболического чрезвычайно долгое, по сравнению с периодом цикла, время (с точки зрения физического наблюдателя это время можно считать бесконечным). Поэтому при потере устойчивости предельным циклом вблизи сильного резонанса следует ожидать возникновения хаоса.

3. Рассмотрим однопараметрическое семейство, в котором происходит потеря устойчивости предельным циклом при переходе пары мультиликаторов через единичную окружность вблизи точки -1 . При изменении параметра семейства возможна такая последовательность событий: устойчивый цикл мягко теряет устойчивость с образованием тора, на котором быстро образуется перетяжка, так что форма меридиана тора приближается к восьмерке; при подходе к центру восьмерки (где находится неустойчивый цикл) притягивающее множество, оставаясь близким к тору с почти стянувшимся в восьмерку меридианом, разрушается вблизи гомоклинической сепаратрисы (Ю. И. Неймарк).

В этом случае фазовая траектория совершает витки вокруг то одной, то другой половины разрушенного тора, перескакивая с одной стороны на другую случайным на вид образом.

§ 4. Бифуркации предельных циклов при прохождении пары мультиликаторов через $\pm i$

Для исследования потери устойчивости циклом с мультиликаторами, близкими к $\pm i$, необходимо изучить семейство уравнений

$$z = \delta z + Pz|z|^2 + Q\bar{z}^3. \quad (10)$$

Ниже описываются бифуркации фазовых портретов в этом семействе.

4.1. Вырожденные семейства. Здесь ищутся те значения P и Q , при которых в семействе (10) с параметром $\delta \in \mathbb{C} \setminus 0$ (при фиксированных P и Q) происходят нетипичные бифуркации.

Л е м м а. Семейство (10) с параметром $\delta \in \mathbb{C} \setminus 0$ при $PQ \neq 0$ эквивалентно (может быть, после обращения времени) индуцированному из семейства

$$\dot{z} = \varepsilon z + Az|z|^2 + \bar{z}^3 \quad (11_A)$$

с параметром $\varepsilon : |\varepsilon| = 1$, причем $A = a + bi$, $a \leq 0$, $b \leq 0$.

◀ Равенства $|\varepsilon| = 1$ можно добиться умножением времени на подходящую константу. Изменяя, если нужно, знаки времени и

$\operatorname{Im} z$, добиваемся неравенств $a \leq 0$, $b \leq 0$. Подобием $z \mapsto cz$ добиваемся равенства $B = 1$. Каждое преобразование сохраняет результаты предыдущих, и вместе они превращают семейство (10) в семейство (11). ►

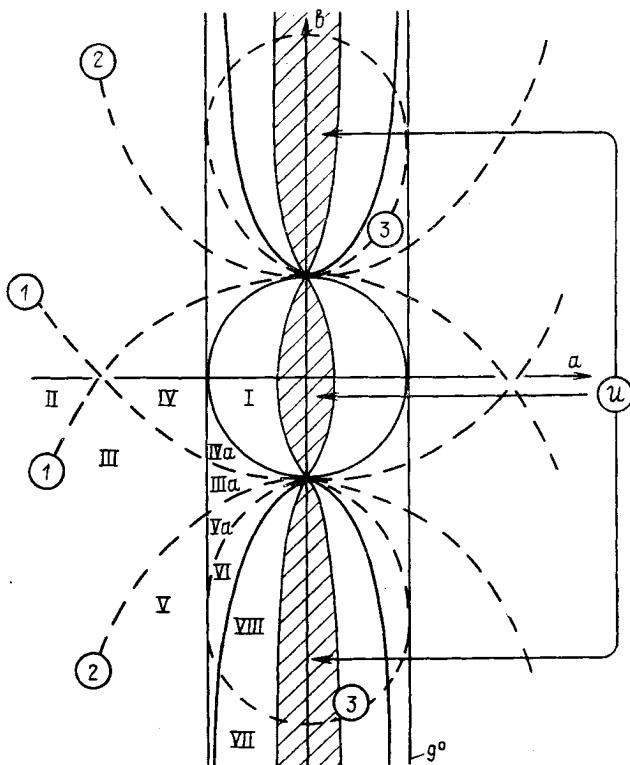


Рис. 26. Множество значений A , соответствующих вырожденным главным Z -эквивариантным семействам (показано жирными и пунктирными линиями). Заштрихована область значений параметра A , для которой исследованы предельные циклы в семействах (11_A)

Значения A , для которых в однопараметрическом семействе (11_A) встречаются вырождения коразмерности 2 или выше, будем называть вырожденными. Найденные в настоящее время вырожденные значения A изображены на рис. 26; сплошные линии найдены аналитически, пунктирные — численно.

4.2. Вырожденные семейства, найденные аналитически. Названные семейства описаны в таблице ниже (см. табл. 1). В первом столбце указана компонента множества вырожденных значений A , во втором — вырождение коразмерности выше 1,

происходящее в соответствующих семействах (11_A), в третьем — значение α ($\epsilon = e^{i\alpha}$), при котором это вырождение происходит (иногда α задается неявно).

Таблица 1

Компонента	Вырождение	Значения α
$a^2 + b^2 = 1$	Вырожденные особые точки рождаются на бесконечности	$ a \sin \alpha - b \cos \alpha = 1$
$b = \pm \frac{1 + a^2}{\sqrt{1 - a^2}}$	Особые точки, отличные от нуля, неэлементарны (оператор линеаризации — нильпотентный).	$ a \sin \alpha - b \cos \alpha = 1$
$ a = 1$	Одновременно происходят две бифуркации коразмерности 1: ненулевые особые точки становятся вырожденными, и особая точка 0 меняет характер устойчивости.	$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$
$a = 0$	Уравнение гамильтоново	$\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$

4.3. Вырожденные семейства, найденные численно. Названные семейства соответствуют объединению трех линий, показанных пунктиром на рис. 26. Если A принадлежит линии 1 или 2, то одно из уравнений семейства (11_A) имеет сложный цикл (сепаратрисный многоугольник) с четырьмя особыми точками типа седло-узел, причем центральное многообразие одной особой точки является устойчивым (или неустойчивым) многообразием другой (рис. 27 а, б). Если A принадлежит кривой 3, то одно из уравнений семейства (11_A) имеет сложный цикл с че-

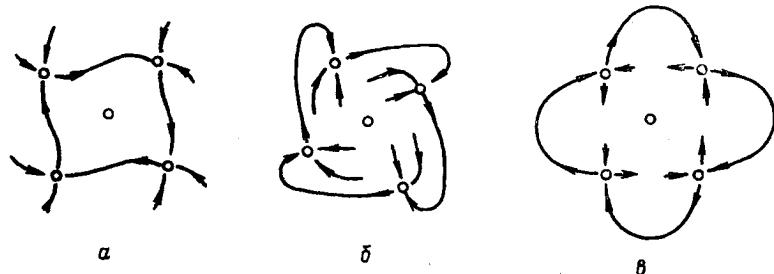


Рис. 27. Вырождения, соответствующие:
а — кривой 1, б — кривой 2, в — кривой 3

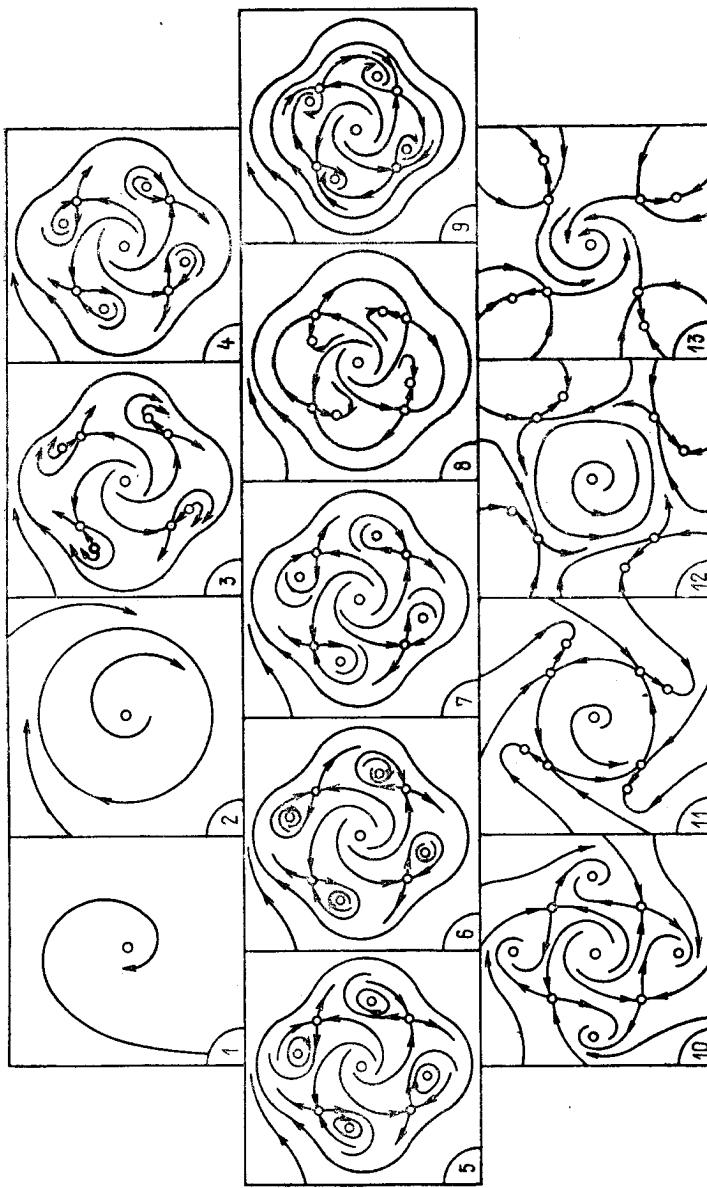


Рис. 28. Последовательность перстроек, заведомо происходящих в главном Z_4 -эквивариантном семействе, соответствующем значению параметра A из некоторой подобласти области VIII

тырьмя особыми точками типа седло (рис. 27 θ), и главный член преобразования монодромии этого цикла линеен (преобразование монодромии определено на внешней полутрансверсали).

4.4. Бифуркации в невырожденных семействах. Связные компоненты, на которые линии вырожденных значений A делят третий квадрант, занумерованы на рис. 26. На рис. 28 показана последовательность бифуркаций в семействе (11_A) , если A принадлежит области VIII. Последовательность заведомо происходящих перестроек для остальных областей указана в [20], [41].

В областях, номера которых отличаются только буквой a , последовательность перестроек, по-видимому, одна и та же, за единственным исключением: в семействах (11_A) , соответствующих одной из двух таких областей, сначала исчезают ненулевые особые точки, а затем предельный цикл, обходящий 0, исчезает в нуле; в семействах, соответствующих другой области, эти события происходят в обратном порядке. Линии 1, 2, 3 и связанные с ними вырождения были предсказаны в [20], [21] и исследованы в [41], [42].

4.5. Предельные циклы систем с симметрией четвертого порядка. Предельные циклы систем (11_A) , близких к гамильтоновым, исследованы в [88]. А именно, доказано, что существует окрестность U мнимой оси с выколотыми точками $A = \pm i$ (заштрихована на рис. 26), обладающая следующим свойством. Для каждой точки A из этой окрестности уравнения семейства (11_A) имеют не более двух предельных циклов; случаи 0, 1 и 2 циклов реализуются.

З а м е ч а н и е. Неизвестно:

1. Есть ли еще вырожденные значения A , кроме указанных выше?
2. Не происходит ли в невырожденных семействах (11_A) других перестроек, кроме описанных в [20], [21]?
3. Сколько предельных циклов может иметь уравнение (10)?

§ 5. Конечногладкие нормальные формы локальных семейств

Семейство дифференциальных уравнений приводится к нормальной форме аналитическим или бесконечногладким преобразованием лишь в исключительно редких случаях. Полезную информацию можно часто извлечь и из конечногладкого приведения. Например, C^1 -гладкое приведение позволяет следить за направлениями инвариантных многообразий и т. д. Конечно-гладкие нормальные формы семейств используются при нормализации уравнений быстрых движений в теории релаксацион-

ных колебаний (п. 2.1, гл. 4) и при исследовании нелокальных бифуркаций (гл. 3).

5.1. Обзор результатов. Интегрируемые конечно гладкие нормальные формы удается получить для деформаций ростков векторных полей в гиперболической неподвижной точке или ростков векторных полей на гиперболическом цикле, в предположении, что линеаризация соответствующих ростков нерезонансна или имеет однократный резонанс. Удается также написать конечно гладкую версальную деформацию ростка векторного поля с одним нулевым собственным значением в особой точке.

На этом положительные результаты, в значительной мере, исчерпываются. Уже деформация ростка отображения

$$x \mapsto x + x^2 + \dots$$

имеет функциональный инвариант даже относительно C^1 -гладкой классификации: две деформации с разными функциональными инвариантами не являются C^1 -гладко эквивалентными. Аналогично обстоит дело с деформациями других негиперболических ростков диффеоморфизмов или векторных полей на циклах, встречающихся в однопараметрических семействах общего положения. Функциональные инварианты имеет также C^1 -гладкая классификация деформаций ростков векторных полей в особой точке с парой чисто мнимых собственных значений.

Общие теоремы о конечногладких нормальных формах, не обязательно интегрируемых, содержатся в п. 5.3.

5.2. Определения и примеры.

Определение 1. Деформация ростка векторного поля в особой точке называется C^k -гладко (орбитально) версальной, если любая деформация этого ростка C^k -гладко (орбитально) эквивалентна индуцированной из исходной.

Определение 2. Деформация ростка векторного поля в особой точке называется конечногладко (орбитально) версальной, если для любого k у нее существует представитель, являющийся C^k -гладко (орбитально) версальной деформацией этого ростка.

Аналогично определяется конечногладко (орбитально) версальная деформация ростка векторного поля на цикле и диффеоморфизма в неподвижной точке.

Замечание. Конечногладкая версальная деформация является «сколь угодно гладкой», но не «бесконечногладкой». Дело в том, что чем выше гладкость диффеоморфизма, сопрягающего произвольную деформацию и индуцированную из версальной, тем меньше, вообще говоря, область изменения параметров. Аналогично обстоит дело с гладкостью центрального многообразия: для гладкого векторного поля оно сколь угодно гладко, но не бесконечногладко: чем выше требования гладкости, тем меньшая окрестность особой точки на центральном многообразии этой гладкостью обладает.

Пример 1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= 0, \\ \dot{x} &= x^2 - \varepsilon, \\ \dot{y} &= -y + f(x, y)(x^2 - \varepsilon).\end{aligned}\tag{12}$$

Центральное многообразие этой системы двумерно; исследуем его пересечения с плоскостями $\varepsilon = \text{const}$. Система (12) получается добавлением уравнения $\dot{\varepsilon} = 0$ к семейству из последних двух уравнений. При $\varepsilon > 0$ уравнение этого семейства имеет две особые точки: седло $S_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon}, 0)$ и узел $N_\varepsilon(-\sqrt{\varepsilon}, 0)$, отношение α собственных значений которого равно $1/2\sqrt{\varepsilon}$. Пересечение центрального многообразия системы (12) с плоскостью $\varepsilon = \text{const}$ содержит (гладкую) сепаратрису седла S_ε и фазовую кривую, входящую в узел N_ε . Через узел N_ε проходят (при нецелом α) ровно две гладкие инвариантные кривые соответствующего уравнения; остальные фазовые кривые входят в узел, имея в точке $-\sqrt{\varepsilon}$ лишь конечное число односторонних производных (оно равно $[\alpha]$ — целой части α). Поэтому, выбрав функцию f так, чтобы в системе (12) «развести» сепаратрису седла и гладкое инвариантное многообразие узла, получим, что центральное многообразие системы (12) негладко. Гладкость его части, заключенной в полосе $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, не превосходит $1/2\sqrt{\varepsilon_0}$ и стремится к бесконечности при $\varepsilon_0 \rightarrow 0$.

Пример 2. Рассмотрим деформацию ростка векторного поля в особой точке типа седло на плоскости, заданную как одно уравнение:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\varepsilon)x + \dots, \\ \dot{\varepsilon} &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}.\end{aligned}\tag{13}$$

Если отношение α собственных значений оператора $A(0)$ отрицательно и иррационально, то формальная нормальная форма этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A(\varepsilon)x, \\ \dot{\varepsilon} &= 0.\end{aligned}$$

Однако поскольку собственные значения оператора $A(0)$ разных знаков (особая точка 0 — седло), отношение собственных чисел оператора $A(\varepsilon)$ принимает рациональные значения на любом интервале изменения параметров (если деформация типична). Поэтому существуют сколь угодно малые значения ε , для которых формальная нормальная форма уравнения

$$\dot{x} = A(\varepsilon)x + \dots$$

содержит нелинейные (резонансные) члены. Следовательно, замены класса C^∞ , превращающей исходное семейство в семейство

линейных уравнений, не существует. Однако чем меньше база семейства, тем выше порядок резонансов, имеющихся у уравнения семейства. Резонанс высокого порядка не препятствует C^k -гладкой эквивалентности уравнения своей линейной части, если порядок резонанса достаточно велик по сравнению с k (Стернберг [159: 3—5]). Локальное семейство (13) при иррациональном α конечногладко эквивалентно линейному. Поэтому отношение конечногладкой эквивалентности вполне естественно при изучении нормальных форм локальных семейств.

5.3 Общие теоремы и деформации нерезонансных ростков.

Теорема 1 (Г. Р. Белицкий [38], [39]). Гладкий росток диффеоморфизма в гиперболической неподвижной точке имеет C^k -гладко версальную конечнопараметрическую деформацию для любого k . Эта деформация C^k -гладко эквивалентна полиномиальной. Если мультиплекаторы ростка образуют мультипликативно нерезонансный набор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$:

$$\lambda_j \neq \lambda^s$$

при любых $j \in \{1, \dots, n\}$, $s \in \mathbb{Z}_+^n$, $s = (s_1, \dots, s_n)$, $|s| = s_1 + \dots + s_n \geq 2$, то версальная деформация ростка эквивалентна линейной

$$x \mapsto A(\varepsilon)x.$$

Аналог справедлив для дифференциальных уравнений.

Замечания. 1. Семейство $\{A(\varepsilon)\}$ является версальной деформацией оператора $A(0)$; также деформации найдены в [19].

2. В приложениях часто используются замены невысокого класса гладкости; поэтому ниже выделяются требования на росток, позволяющие оценить класс гладкости замен, нормализующих его деформацию. Следующая теорема справедлива для деформаций любых, а не только гиперболических ростков.

Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке

$$(x, y) \mapsto (x', y'), \quad x' = A^c x + \dots, \quad y' = A^h y + \dots$$

(c — от centre, h — от hyperbolic); все собственные значения оператора A^c лежат на единичной окружности, а оператора A^h — вне ее. Переменные $y = (y_1, \dots, y_h)$ называются *гиперболическими*, а собственные значения оператора A^h — *мультиплекаторами, соответствующими гиперболическим переменным*.

Теорема 2а (Такенс [202]). Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке, для которого модули мультиплекторов, соответствующих гиперболическим переменным, образуют нерезонансный набор. Тогда для любого k существует представитель ростка, C^k -эквивалентный следующему

$$f : (x, y) \mapsto (f_0(x), A(x)y), \tag{14}$$

здесь $y = (y_1, \dots, y_h)$ — набор гиперболических переменных, $y = 0$

— центральное многообразие, x — карта на центральной многообразии, f_0 — росток диффеоморфизма, все мультиплаторы которого по модулю равны единице.

Эта теорема может быть усилена. Для каждого k определим «запрещенный порядок резонанса» $N(k)$ следующим образом: пусть $|\lambda_1| \leq \dots \leq |\lambda_s| < 1 < |\lambda_{s+1}| \leq \dots \leq |\lambda_h|$. Положим:

$$\beta(k) = \left[\frac{\ln |\lambda_1| - k \ln |\lambda_h|}{\ln |\lambda_s|} + k \right] + 1;$$

$$N(k) = \left[\frac{\ln |\lambda_h| - \beta(k) \ln |\lambda_1|}{\ln |\lambda_{s+1}|} + \beta(k) \right] + 1.$$

Теорема 2б ([202]). Рассмотрим росток диффеоморфизма в неподвижной точке, для которого модули мультипликаторов, соответствующих гиперболическим переменным, не подчинены резонансным соотношениям порядка $N(k)$ и ниже, то есть

$$|\lambda_j| \neq |\lambda|^s$$

при $|s| \leq N(k)$. Тогда диффеоморфизм C^k -гладко эквивалентен диффеоморфизму (14). Аналоги теорем 2а и 2б справедливы для дифференциальных уравнений.

В частности, рассмотрим росток векторного поля в особой точке, для которого вещественные части собственных значений, соответствующих гиперболическим переменным, образуют нерезонансный набор. Для любого k существует представитель ростка, C^k -гладко эквивалентный следующему:

$$\dot{x} = w(x),$$

$$\dot{y} = A(x)y,$$

где y — набор гиперболических переменных, x — карта на центральном многообразии. ▲

Эти результаты могут быть названы «теоремами о конечно-гладкой надстройке седла» и являются конечно гладким аналогом принципа сведения [20], [26]. Они обладают меньшей общностью: на мультипликаторы (или собственные значения особой точки) налагаются арифметические требования, которых нет в теореме сведения. Перейдем к деформациям гиперболических резонансных ростков.

Определение. Центральным многообразием локального семейства уравнений в точке $(0, 0)$ называется центральное многообразие соответствующего семейству $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$ уравнения $\dot{x} = v(x, \varepsilon)$, $\dot{\varepsilon} = 0$.

Аналогично определяется центральное многообразие локального семейства диффеоморфизмов или периодических дифференциальных уравнений.

Теорема 3. а) Рассмотрим семейство векторных полей в особой точке (ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке, периодических векторных полей на цикле). Для каждого нату-

рального k существует такое $N(k) = N$, что все представители N -струи семейства на его центральном многообразии C^k -эквивалентны.

б) Пусть $\alpha = \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j| / \min_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|$. Тогда можно взять $N(k)$ в виде $N(k) = 2[2(k+1)\alpha] + 2$, где $[a]$ — целая часть числа a .

Замечание. Подчеркнем, что все упомянутые в теореме представители — это ростки семейств с общим центральным многообразием, N -струи которых во всех точках центрального многообразия совпадают.

Теорема 3а Для ростков диффеоморфизмов легко следует из общей теоремы Белицкого (в которой дана несколько более слабая оценка сверху на $N(k)$) [38, теорема 2.3.2].

Теорема 3б доказана В. С. Самоволом [97], получившим также независимое доказательство теоремы 3а. Эти результаты применяются ниже к типичным однопараметрическим деформациям гиперболических ростков; для этих деформаций удается выписать интегрируемые нормальные формы.

5.4. Приведение к линейной нормальной форме. Из предыдущей теоремы немедленно получается

Следствие. Пусть k -произвольное натуральное число. Если собственные значения особой точки гиперболического ростка векторного поля не удовлетворяют резонансному соотношению порядка $N(k)$ или ниже, то версальная деформация ростка C^k -гладко эквивалентна версальной деформации его линейной части. Другими словами, любая деформация ростка C^k -гладкой заменой превращается в семейство линейных векторных полей.

Заметим, что величина $N(k)$ зависит от числа a , измеряющего разброс вещественных частей собственных значений особой точки. Следующая теорема требует отсутствия лишь некоторых резонансов порядка 2.

Теорема (Е. П. Гомозов [64]). Пусть мультипликаторы гиперболического ростка диффеоморфизма в неподвижной точке не удовлетворяют ни одному из соотношений вида

$$|\lambda_i| = |\lambda_j| \cdot |\lambda_k| \text{ при } |\lambda_j| < 1 < |\lambda_k|.$$

Тогда любая гладкая деформация этого ростка C^1 -эквивалентна своей линеаризации.

5.5. Деформации ростков диффеоморфизмов типа Пуанкаре. Напомним, что росток диффеоморфизма в неподвижной точке — типа Пуанкаре, если его мультипликаторы лежат по одну сторону от единичной окружности (либо все вне окружности, либо все внутри).

Теорема (Н. Н. Брушлинская [47]). Версальная деформация ростка диффеоморфизма типа Пуанкаре в неподвижной точке эквивалентна полиномиальному семейству диффеоморфиз-

мов, зависящему от $d+m$ параметров. Здесь d — число параметров версальной деформации линейной части исходного ростка, а m — число резонансных соотношений, которым удовлетворяет набор его мультипликаторов. Если деформация гладкая (аналитическая), то нормализующие замены также гладки (аналитичны).

Аналогичные теоремы справедливы для ростков векторных полей в особой точке и на цикле.

5.6. Деформации однорезонансных гиперболических ростков.

Определение 1. Набор $\lambda \in \mathbb{C}^n$ называется *k-резонансным* (*мультипликативно k-резонансным, периодически k-резонансным*), если число образующих аддитивной группы, порожденной множеством векторов $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid (r, \lambda) = 0\}$ (соответственно, множеством $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid \lambda = 1\}$ или $\{r \in \mathbb{Z}_+^n \mid (r, \lambda) \in 2\pi i \mathbb{Z}\}$, равно k). При $k=1$ *k-резонансный* набор называется однорезонансным. Линейное векторное поле со спектром λ , а также линейный диффеоморфизм или периодическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad (t, x) \in S^1 \times \mathbb{R}^n, \quad S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

задаваемые оператором со спектром λ , называются *k-резонансными*, если набор λ — *k-резонансный*.

Определение 2. Если все резонансные соотношения для спектра линейной части векторного поля в особой точке (диффеоморфизма в неподвижной линейной частью) являются следствиями одного соотношения.

$$(r, \lambda) = 0, \quad (15)$$

соответственно

$$\lambda^r = 1 \quad (16)$$

или

$$(r, \lambda) + 2\pi i l = 0, \quad (17)$$

то поле (соответственно, диффеоморфизм или периодическое дифференциальное уравнение) называется *сильно однорезонансным*.

Определение 3. Пусть A — оператор линейной части сильно однорезонансного векторного поля в особой точке или диффеоморфизма в неподвижной точке, или периодического дифференциального уравнения с автономной линейной частью, λ — спектр A . Оператору A соответствует вещественный резонансный моном, определяемый следующим образом.

Пусть z_1, \dots, z_n — координаты в жордановом базисе оператора A , причем сопряженным собственным значениям соответствуют сопряженные на \mathbb{R}^n наборы координатных функций. *Резонансным мономом*, соответствующим оператору A , назовем

в первых двух случаях выражение $\operatorname{Re} z^r$, а в третьем $\operatorname{Re}(z^r \cdot e^{2\pi i u t})$. Будем говорить, что первый из этих мономов соответствует соотношению (15) или (16), а второй — соотношению (17).

Определение 4. а) Главным семейством ростков сильно однорезонансных векторных полей в особой точке называется семейство

$$w(x, \varepsilon) = Xg(\mu, \varepsilon), \quad X = \operatorname{diag} x, \quad (18)$$

где μ — соответствующий (15) резонансный моном, g — векторный полином по μ , коэффициенты которого являются параметрами семейства; их набор обозначается ε .

б) Главным семейством ростков сильно однорезонансных диффеоморфизмов в неподвижной точке называется семейство

$$f(x, \varepsilon) = g_w^1(x, \varepsilon),$$

где w — семейство полей из определения а), g^1 — сдвиг за единичное время по фазовым кривым поля, μ — соответствующий (16) резонансный моном.

в) Главным семейством ростков сильно однорезонансных периодических векторных полей на цикле называется семейство (18), в котором μ — резонансный моном, соответствующий соотношению (17).

Теорема. Пусть v — гиперболический сильно однорезонансный росток векторного поля в особой точке. Тогда

а) Для каждого натурального k любая гладкая деформация ростка v C^k -гладко эквивалентна индуцированной из главного семейства (18), в котором g — векторный полином степени $N(k)$; $N(k)$ — то же, что в теореме 3.

б) Если росток v не принадлежит исключительному подмножеству коразмерности бесконечность, то любая гладкая деформация этого ростка конечногладко эквивалентна индуцированной из главного семейства (18); степень полинома g в этом семействе зависит от деформируемого ростка и не зависит от класса гладкости сопрягающего диффеоморфизма.

в) Исключительное подмножество в этой теореме — то же, что в теореме Ихикавы о формальной конечной определенности для векторных полей [26, п. 3.4, гл. 3].

Аналог теоремы а) верен для ростков диффеоморфизмов в неподвижной точке и периодических векторных полей на цикле.

Теорема. В типичных гладких конечнопараметрических семействах векторных полей на плоскости встречаются только такие ростки седловых резонансных векторных полей (резонанс $p\lambda_1 + q\lambda_2 = 0$, p и q натуральны и взаимно просты), которые гладко орбитально эквивалентны ростку

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 \pm u^\mu + a_0 u^{2\mu}), \\ \dot{y} &= -yp/q.\end{aligned}$$

Типичная деформация такого ростка конечногладко эквивалентна деформации, индуцированной из главной:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x(1 + P_{\mu-1}(u, \varepsilon) \pm u^\mu + au^{2\mu}), \\ \dot{y} &= -yp/q,\end{aligned}$$

и конечногладко орбитально версальна. Здесь $u = x^p y^q$ — резонансный моном, $(\varepsilon, a) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu, a) \in \mathbb{R}^{\mu+1}$ — многомерный параметр семейства,

$$P_{\mu-1}(u, \varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 u + \dots + \varepsilon_\mu u^{\mu-1}. \quad (19)$$

Замечание. Теорема о формальной конечной определенности для ростков диффеоморфизмов, аналогичная теореме Ихикавы, доказана недавно М. Б. Житомирским; отсюда легко следуют аналогичные результаты и для периодических векторных полей. Вероятно, аналог теоремы б) также справедлив для обоих этих случаев.

Перейдем к исследованию деформаций негиперболических ростков.

5.7. Деформации ростков векторных полей с одним нулевым собственным значением в особой точке.

Определение. Главной $(v+1)$ -параметрической деформацией ростка векторного поля на прямой называется семейство ростков, задающих уравнения

$$\dot{x} = \pm x^{v+1} + P_{v-1}(x, \varepsilon) + ax^{2v+1}. \quad (20)$$

Здесь $P_{v-1}(x, \varepsilon) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 x + \dots + \varepsilon_v x^{v-1}$; деформируемый росток соответствует значению параметра $\varepsilon = 0$, $a = a_0 \in \mathbb{R}$.

Замечание. v -параметрические главные семейства параметризуются одним дискретным (равным плюс или минус единице) и одним непрерывным параметром (равным a_0). Различные главные семейства не являются конечногладко эквивалентными, если сопрягающий диффеоморфизм сохраняет ориентацию.

Теорема. Типичное μ -параметрическое семейство векторных полей на прямой в окрестности каждой вырожденной особой точки заменой переменных и параметров приводится к одному из главных семейств (20) при $v+1 \leq \mu$ или к семейству

$$\dot{x} = \pm x^{\mu+1} + P_{\mu-1}(x, \varepsilon) + a(\varepsilon) x^{2\mu+1}. \quad (21)$$

Соответствующая замена — аналитическая, гладкая или конечногладкая, если исходное семейство аналитично, гладко или конечногладко. Точнее, для любого натурального k существует такое $N(k)$, что если исходное семейство — класса $C^{N(k)}$, то нормализующая замена — класса k .

Эта теорема для аналитического и (бесконечно) гладкого случая доказана В. П. Костовым, а для конечно гладкого —

Ю. С. Ильяшенко и С. Ю. Яковенко (1985). Доказательство в аналитическом случае опубликовано в [77].

Из утверждения о конечногладкой нормализации и теоремы о конечногладкой надстройке седла для дифференциальных уравнений (п. 5.3) вытекает

Следствие. Пусть v — росток гладкого векторного поля в особой точке с собственным значением 0 и одномерным центральным многообразием. Пусть кратность этой особой точки равна $\mu+1$, и вещественные части ее ненулевых собственных значений образуют нерезонансный набор. Росток с такими свойствами встречается в типичном семействе, зависящем не менее чем от μ параметров. Деформация такого ростка в типичном гладком $(\mu+1)$ -параметрическом семействе конечногладко эквивалентна главной

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \pm x^{\mu+1} + P_{\mu-1}(x, \varepsilon) + ax^{2\mu+1}, \\ \dot{y} &= A(x, \varepsilon)y.\end{aligned}$$

Деформируемому ростку соответствует $\varepsilon=0$, $a=a_0$, где a_0 — некоторая вещественная константа.

Замечания. 1. Главная деформация зависит от $(\mu+1)$ -мерного параметра $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mu, a)$ и функционального параметра A .

2. Следствие становится неверным, если в его заключении конечногладкую эквивалентность заменить аналитической или бесконечногладкой.

Это следствие позволяет нормализовать уравнение быстрых движений близ типичной точки складки медленной поверхности (§ 2, гл. 4).

5.8. Функциональные инварианты диффеоморфизмов прямой. Функциональные инварианты возникают в C^1 -классификации отображений прямой, имеющих более одной гиперболической неподвижной точки (Г. Р. Белицкий и др.). Рассмотрим диффеоморфизм интервала, имеющий две гиперболические неподвижные точки — притягивающую и отталкивающую. В окрестности каждой из этих точек диффеоморфизм единственным образом включается в гладкий поток.

Другими словами, росток диффеоморфизма в неподвижной точке является ростком преобразования фазового потока за время 1 единственного C^1 -гладкого векторного поля. Оба возникающие вблизи неподвижных точек поля разносятся диффеоморфизмом на весь интервал между особыми точками. Факторпространство этого интервала по действию диффеоморфизма диффеоморфно окружности. На этой окружности возникают два векторных поля без особых точек, для которых окружность — цикл с периодом 1. Поэтому на окружности возникают две карты, определенные однозначно с точностью до сдвига: времена движения, соответствующие каждому из полей. Функция пе-

перехода от одной карты к другой порождает функциональный модуль исходного диффеоморфизма. А именно, эта функция перехода — диффеоморфизм окружности: $t \mapsto t + \Phi(t)$.

Сдвиги в образе и в прообразе переводят этот диффеоморфизм в следующий:

$$t \mapsto t + \psi(t), \quad \psi(t) = \Phi(t + a) + b - a;$$

здесь a и b — некоторые константы. Выбирая подходящие a и b , можно добиться равенства $\bar{\Phi} \equiv \int_{S^1} \Phi = 0$. Функциональным модулем классификации диффеоморфизмов интервала с двумя гиперболическими неподвижными точками является класс эквивалентных диффеоморфизмов окружности вида $t \mapsto t + \Psi(t)$, $\bar{\Psi} = 0$. Отношение эквивалентности: $\Psi \approx \bar{\Psi} \Leftrightarrow \Psi(t + a) = \bar{\Psi}(t)$ для некоторого a .

5.9. Функциональные инварианты локальных семейств диффеоморфизмов. Рассмотрим локальное семейство диффеоморфизмов прямой

$$(f; 0, 0); \quad f(x, \varepsilon) = f_\varepsilon(x) : x \mapsto x - \varepsilon + ax^2 + \dots, \quad a \neq 0. \quad (22)$$

При $\varepsilon > 0$ отображение f_ε имеет две гиперболические неподвижные точки. Как показано в п. 5.8, конечногладкая классификация таких отображений имеет функциональный модуль — диффеоморфизм окружности в себя. Локальному семейству (22) соответствует класс эквивалентности ростков по ε в нуле семейств диффеоморфизмов окружности

$$\Phi(f) = \{\Phi_\varepsilon : S^1 \rightarrow S^1\}, \quad \Phi_\varepsilon = \text{id} + \Psi_\varepsilon, \quad \bar{\Psi}_\varepsilon = 0; \quad \varepsilon > 0, \quad (23)$$

$$\varepsilon^{k-1} \Psi_\varepsilon^{(k-1)} \xrightarrow{\sim} \text{при } \varepsilon \rightarrow 0; \quad (23a)$$

при $\varepsilon \leq 0$ по определению полагаем $\Phi_\varepsilon = \text{id}$ ($\Psi_\varepsilon \equiv 0$).

Из C^k -гладкости локального семейства f следует, что соответствующее семейство Φ C^k -гладко.

Два семейства Φ и Ψ вида (23) эквивалентны, если существует функция a класса C^k такая, что

$$\Psi_\varepsilon(t + a(\varepsilon)) = \Phi_\varepsilon(t), \quad (24)$$

где a — C^k -гладкая функция, и $a \equiv 0$ при $\varepsilon \leq 0$.

Теорема (С. Ю. Яковенко, 1985). 1. C^k -гладкому локальному семейству (22) соответствует класс ростков в нуле по ε гладких эквивалентных семейств диффеоморфизмов окружности (23), удовлетворяющих ограничению (23a) с отношением эквивалентности (24). 2. Каждый такой класс реализуется, как функциональный инвариант некоторого локального семейства (22). 3. Если функциональные инварианты и мультиплекторы

неподвижных точек, рассматриваемые как функции параметра, для двух C^k -гладких семейств совпадают, то семейства C^1 гладко эквивалентны при $k \geq 8$.

5.10. Функциональные инварианты семейств векторных полей. C^1 -гладкая классификация деформаций ростков векторных полей в особой точке с парой чисто мнимых собственных значений также имеет функциональные инварианты. Ограничим семейство на его центральное многообразие. Получим (конечно гладкую) деформацию ростка векторного поля с линейной частью типа центр на плоскости. Преобразование монодромии, соответствующее продеформированному ростку, имеет две гиперболические неподвижные точки (для тех значений параметра, которым соответствует цикл продеформированного уравнения): одна точка — особая, другая принадлежит циклу. Функциональный инвариант C^1 -классификации таких преобразований построен выше.

Аналогично строится функциональный инвариант классификации типичных однопараметрических деформаций ростков диффеоморфизмов с мультипликатором — 1.

5.11. Функциональные инварианты топологической классификации локальных семейств диффеоморфизмов прямой (по Руссари). Существует континуум топологически неэквивалентных трехпараметрических деформаций ростка диффеоморфизма $(\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $x \mapsto x + ax^4 + \dots$

Теорема. Типичной гладкой трехпараметрической деформации ростка диффеоморфизма прямой $f: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, $x \mapsto x + ax^4 + \dots$, $a \neq 0$, соответствует функциональный инвариант: однопараметрическое семейство классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности; отношение эквивалентности такое же, как п. 5.8. Для μ -параметрических деформаций ростка $x \mapsto x + ax^{\mu+1} + \dots$, $a \neq 0$, функциональным инвариантом является $(\mu-2)$ -параметрическое семейство классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности ($\mu \geq 3$).

Руссари не описывает множества всех семейств диффеоморфизмов окружности, возникающих как функциональные инварианты локальных семейств диффеоморфизмов прямой, однако указывает, что это множество континуально.

Приведем набросок доказательства теоремы. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ — типичная трехпараметрическая деформация ростка f . Неподвижные точки диффеоморфизмов f_ε сливаются, если и только если ε принадлежит поверхности, диффеоморфной ласточкиному хвосту. Будем считать, что соответствующий диффеоморфизм пространства параметров уже сделан; тогда поверхность слияния неподвижных точек будет ласточкиным хвостом. Точкам общего положения на ласточкином хвосте соответствуют диффеоморфизмы с одной двукратной неподвижной точкой; остальные неподвижные точки (если они есть), просты. Точкам на линии Γ самопересечения ласточкиного хвоста соответствуют диф-

феоморфизмы с двумя двукратными неподвижными точками. Линия Γ и будет базой семейства диффеоморфизмов окружности, которое является инвариантом деформации $\{f_\varepsilon\}$.

При $\varepsilon \in \Gamma$ диффеоморфизму f_ε соответствует функциональный инвариант — класс эквивалентных диффеоморфизмов окружности на себя. А именно, росток диффеоморфизма f_ε в каждой из двух его полуустойчивых неподвижных точек порождается ростком векторного поля: росток диффеоморфизма является сдвигом за единичное время по фазовым кривым поля. Росток каждого из порождающих полей однозначно определен диффеоморфизмом f_ε . Оба поля разносятся с помощью f_ε на весь интервал между неподвижными точками диффеоморфизма, и на всём этом интервале порождают f_ε . Тем самым, построены два векторных поля на интервале, перестановочные с диффеоморфизмом интервала на себя без неподвижных точек. Такая пара полей порождает диффеоморфизм окружности на себя, определенный с точностью до сдвига в образе и в прообразе, как это описано в п. 5.8. Два диффеоморфизма окружности эквивалентны, если они имеют вид $t \mapsto t + \varphi(t)$, $t \mapsto t + \psi(t)$, причем $\varphi(t+a) = \psi(t) + b$ для некоторых a и b . Семейство таких классов эквивалентных диффеоморфизмов окружности, построенных для отображений f_ε при $\varepsilon \in \Gamma$, и образует функциональный инвариант деформации $\{f_\varepsilon | \varepsilon \in (\mathbb{R}^3, 0)\}$.

Докажем теперь, что функциональные инварианты эквивалентных деформаций совпадают. Если два семейства эквивалентны, то поверхности (ласточкины хвости) в базе, соответствующие диффеоморфизмам обоих семейств, имеющим негиперболические неподвижные точки, совпадают. Пусть f_ε и g_ε — диффеоморфизмы двух семейств, соответствующие значению параметра на линии самопересечения Γ ласточкиного хвоста. Существует богатое множество гомеоморфизмов, сопрягающих f_ε и g_ε ; большинство из них не переводит друг в друга соответствующие порождающие поля.

Пусть H — гомеоморфизм, сопрягающий семейства $\{f_\varepsilon\}$ и $\{g_\varepsilon\}$. Из теоремы о жесткости (п. 1.1, гл. 2) следует, что гомеоморфизм $H(\cdot, \varepsilon)$ при $\varepsilon \in \Gamma$ переводит порождающие поля диффеоморфизма f_ε в порождающие поля диффеоморфизма g_ε . Следовательно, функциональные инварианты диффеоморфизмов f_ε и g_ε совпадают.►

З а м е ч а н и я. 1. Теорема о жесткости навязывает некоторую гладкость сопрягающему отображению, которое по определению было лишь гомеоморфизмом. Поэтому для отображений, осуществляющих лишь топологическую, а не гладкую эквивалентность семейств диффеоморфизмов, удалось провести те же построения, что и для гладких отображений в п. 5.9.

2. Теорема о жесткости существенным образом связана с непрерывной зависимостью сопрягающего гомеоморфизма от параметра. Поэтому слабая эквивалентность деформаций ростков

диффеоморфизмов прямой не порождает функциональных инвариантов (см. п. 2.2, гл. 2).

Следствие. 1. Топологическая классификация трехпараметрических деформаций векторных полей с четырехкратным предельным циклом (вырождение коразмерности три) имеет функциональные модули.

Чтобы в этом убедиться, нужно применить теорему Руссари к соответствующему семейству преобразований монодромии.

2. Топологическая классификация четырехпараметрических деформаций ростка векторного поля на плоскости с двумя чисто мнимыми ненулевыми собственными значениями и дополнительным трехкратным вырождением линейной части (короче — ростка класса B_4 , см. п. 3.1, гл. 1) имеет функциональные модули.

Действительно, соответствующее семейство преобразований монодромии имеет двупараметрическое подсемейство, состоящее из диффеоморфизмов с двумя двукратными неподвижными точками.

Поэтому при изучении многопараметрических деформаций векторных полей на плоскости целесообразно ослабить отношение эквивалентности до слабой эквивалентности.

§ 6. Универсальность Фейгенбаума для диффеоморфизмов и потоков

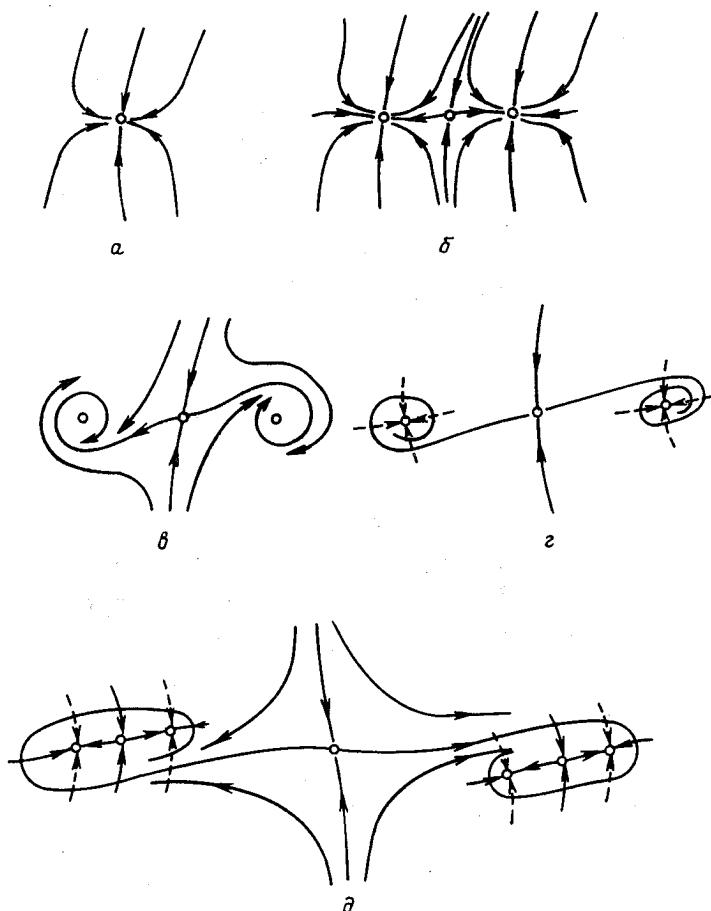
Одна из возможных бифуркаций аттрактора, часто реализующихся в системах, зависящих от параметра, — последовательность удвоений периода устойчивого цикла. Эта последовательность бифуркаций, происходящая на конечном интервале изменения параметра, приводит систему от устойчивого периодического режима к хаосу.

6.1. Каскад удвоений. Последовательность бифуркаций удвоения в однопараметрических семействах происходит следующим образом. Устойчивый первоначально цикл — аттрактор теряет устойчивость с прохождением мультиплликатора через -1 . В этот момент от него ответвляется, в типичном семействе систем, устойчивый цикл вдвое большего, в момент бифуркации, периода; он замыкается после двух обходов теряющего устойчивость цикла (п. 1.2). При дальнейшем изменении параметра новый цикл испытывает ту же бифуркацию удвоения, затем родившийся аттрактор, с примерно четырехкратным, периодом, удваивается еще раз и т. д. Оказывается, весь этот каскад удвоений, в бесконечном количестве, происходит в типичном семействе на конечном отрезке изменения параметра. Более того, промежутки между последовательными удвоениями убывают асимптотически в геометрической прогрессии. Знаменатель этой прогрессии универсален — не зависит от рассматриваемого

семейства, то есть одинаков для всех типичных семейств, равен $1/4,6692\dots$; $4,6692\dots$ и называется *константой Фейгенбаума* [57].

6.2. Перестройки неподвижных точек. Аналогичные каскады удвоений наблюдаются в типичных семействах диффеоморфизмов: неподвижная точка, устойчивая при значениях параметра, меньших первого критического, теряет устойчивость при прохождении мультипликатора через -1 с образованием устойчивого цикла периода 2, затем этот цикл теряет устойчивость с образованием устойчивого цикла периода 4 и т. д. Промежутки между последовательными бифуркациями убывают, как и для систем с непрерывным временем.

Линеаризация диффеоморфизма в неподвижной точке, теряющей устойчивость с прохождением мультипликатора через



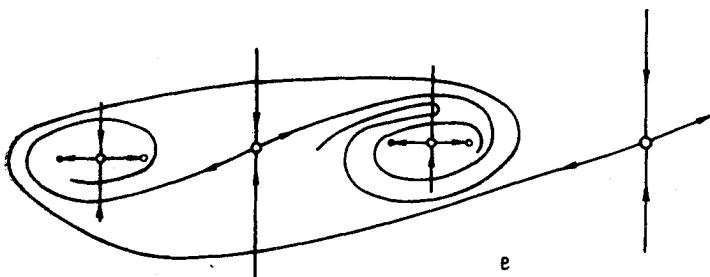


Рис. 29. Три последовательных бифуркации удвоения для диффеоморфизма плоскости. Бифуркации происходят при переходе от рис. *a* к рис. *b*, от *g* к *d* и от *d* к *e*. На рис. *a* и *g* показаны перестройки неподвижных точек квадрата диффеоморфизма. На рис. *g* сплошными линиями показаны инвариантные кривые диффеоморфизма, а пунктирными — инвариантные кривые его квадрата; на этих кривых диффеоморфизм действует как инволюция. На рис. *d* сплошными линиями показаны инвариантные кривые квадрата диффеоморфизма, а пунктирными — инвариантные кривые его четвертой степени. Кривые рис. *e* инвариантны относительно шестнадцатой степени диффеоморфизма. Неустойчивое многообразие каждой седловой неподвижной точки содержит в своем замыкании неустойчивые многообразия всех седловых неподвижных точек, рождающихся при последующих бифуркациях. На рис. *e* изображены лишь «центральная» и «левая» части множества неподвижных точек и инвариантных кривых шестнадцатой степени диффеоморфизма

—1, не может иметь вещественных собственных чисел при всех значениях параметра: в противном случае один из мультиликаторов неподвижной точки должен был бы пройти через нуль, и отображение не было бы диффеоморфизмом. Перестройки биквадрата диффеоморфизма плоскости при двух последовательных удвоениях показаны на рис. 29.

6.3. Каскад n -кратных увеличений периода. В двупараметрических системах встречаются столь же неустранимым образом каскады утроений, учетверений, упятерений и т. д. В этих случаях знаменатель геометрической прогрессии, определяющей последовательность бифуркационных значений параметров, — комплексное число, так что бифуркационные значения ложатся асимптотически на логарифмическую спираль (в подходящей евклидовой структуре плоскости параметров). Для утроений это число равно $(4,600\dots + i8,981\dots)^{-1}$. Вычисления показывают, что для каскада бифуркаций с прохождением пары мультиликаторов через резонанс $\exp(\pm 2\pi i p/q)$ универсальный знаменатель приблизительно равен $C(p, q)/q^2$. Тем самым, с ростом кратности увеличения периода события разворачиваются быстрее [57: 56, 57, 58].

6.4. Удвоение в гамильтоновых системах. В гамильтоновых системах также встречаются каскады удвоений, но выглядят они несколько иначе. В этом случае бифуркация удвоения состоит в том, что при изменении параметра эллиптическаяperi-

одическая траектория становится гиперболической¹⁾, но рядом с ней появляется эллиптическая периодическая траектория удвоенного периода (рис. 30). Универсальный знаменатель для удвоения в гамильтоновой системе равен $1/8,72\dots$ [57: 54, 55].

Опишем теперь механизм возникновения каскада удвоений для диффеоморфизмов. Напомним некоторые результаты из одномерной теории [57], [135]:

6.5. Оператор удвоения для одномерных отображений. Рассмотрим отображение отрезка в себя, график которого имеет вид, изображенный на рис. 31a. График квадрата отображения изображен на рис. 31б. Обведенная часть этого графика, с точностью до растяжения и обращения осей, напоминает исходный график. Это наблюдение мотивирует

Определение. Отображение отрезка $I=[-1, 1]$ в себя называется *автоквадратным*, если оно сопряжено с ограничением своего квадрата на меньший отрезок, причем сопрягающий диффеоморфизм линеен.

Последнего, вообще говоря, можно добиться выбором координат на прямой.

Теорема (Лэнфорд [57: 29], Кампанино, Эпштейн [57: 30])²⁾. Существует четное аналитическое автоквадратное отображение $g: I \rightarrow I$, для которого

$$\begin{aligned} g(0) &= 1, \quad g(1) < 0, \quad g'(x) > 0 \quad \text{при } x \in [-1, 0), \\ g(g(\alpha^{-1})) &< \alpha^{-1} < g(\alpha^{-1}), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\alpha = -1/g(1)$. В некоторой окрестности точки g в пространстве всех отображений отрезка нет других автоквадратных отображений, удовлетворяющих нормировочному требованию $g(0)=1$.

Автоквадратное отображение является неподвижной точкой «оператора удвоения»

$$Tf = \beta \circ f \circ \beta^{-1}, \quad \beta = -\frac{1}{f(1)}.$$

Этот оператор определен для всех четных отображений, удовлетворяющих условиям (25), и для всех, не обязательно четных, отображений, близких к g и переводящих 0 в 1.

Замечание. Отображения Tf и $f^2 = f \circ f$ сопряжены. По-

¹⁾ Эллиптическая периодическая траектория гамильтоновой системы — это цикл с невещественными мультипликаторами, по модулю равными единице; гиперболическая — с мультипликаторами, модуль которых не равен единице.

²⁾ Подробное доказательство см.: К. И. Бабенко, В. Ю. Петрович, О доказательных вычислениях на ЭВМ. Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. М., 1983, 183 с.

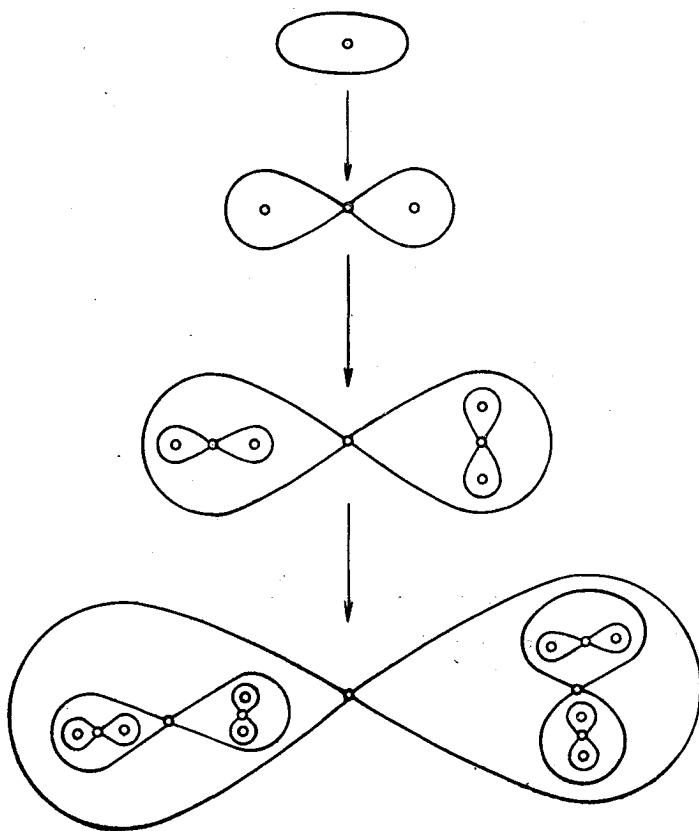


Рис. 30. Три последовательные бифуркации удвоения периода в типичном семействе отображений, сохраняющих площадь (гамильтонов случай)

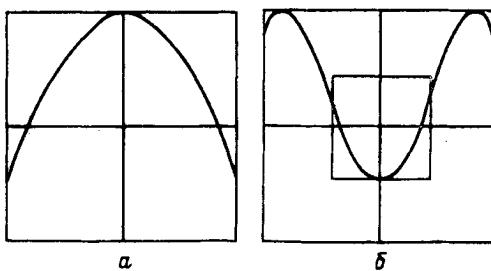


Рис. 31. Отображение отрезка, близкое к автоквадратному, и его квадрат

этому если Tf имеет цикл периода N , то f^2 имеет цикл того же периода, а отображение f — цикл вдвое большего периода.

6.6. Механизм универсального удвоения для диффеоморфизмов. Рассмотрим двумерный случай. Пусть g — автоквадратное отображение из пункта 6.5. Рассмотрим отрезок $I : x \in [-1, 1]$, $y=0$ на плоскости и построим чрезвычайно вырожденное автоквадратное отображение окрестности отрезка I в себя. Положим:

$$\Phi(x) = g(\sqrt{x}).$$

Ввиду четности и аналитичности функции g , функция Φ аналитична на отрезке $[0, 1]$ и, следовательно, аналитически продолжается в некоторую окрестность его концов. Пусть D_r — r -окрестность отрезка I на плоскости (x, y) — объединение всех кругов радиуса r с центрами на I . При достаточно малом r определено отображение

$$G : (x, y) \mapsto (\Phi(x^2 - y), 0), \quad D_r \rightarrow D_r,$$

совпадающее с g на I . Положим: $\alpha = -1/g(1) = 2,5029 \dots$, $A : (x, y) \mapsto (-\alpha x, \alpha^2 y)$. Рассмотрим спретор удвоения:

$$T : F \mapsto A \circ F \circ A^{-1}. \quad (26)$$

Если C -норма разности $F - G$ не превосходит $r/2$, то отображение TF определено в D_r . Легко проверить, что отображение G является неподвижной точкой оператора T и в этом смысле автоквадратно.

Замечание. Отображение G можно приблизить семейством диффеоморфизмов

$$G_\varepsilon : G_0 = G, \quad G_\varepsilon(x, y) = (\Phi(x^2 - y), \varepsilon x).$$

Отображение $G_\varepsilon : D_r \rightarrow \mathbb{R}^2$ — диффеоморфизм при достаточно малом r и всех достаточно малых $\varepsilon \neq 0$.

Рассмотрим окрестность автоквадратного отображения G в подходящем функциональном пространстве отображений области D_r в себя. Эта окрестность расслоена на орбиты действия группы аффинных замен переменных (точнее, разбита на классы аффинно эквивалентных отображений; допуская вольность речи, будем называть эти классы «орбитами», хотя они представляют лишь «куски» орбит). Орбита отображения G , как и близких к G отображений, — гладкое многообразие, размерность которого совпадает с размерностью аффинной группы пространства \mathbf{C}^n . Поэтому окрестность отображения G факторизуется по действию аффинной группы; пусть π — проектирование этой окрестности на соответствующее факторпространство. Оператор удвоения переставляет орбиты действия аффинной группы; поэтому он опускается до оператора, действующего на факторпространстве. Точка πG является неподвижной для этого нового

оператора. Доказано [57 : 9], что эта неподвижная точка гиперболична и имеет одномерное неустойчивое многообразие W^u и устойчивое W^s коразмерности 1. В пространстве однопараметрических семейств диффеоморфизмов открытое множество образуют семейства, трансверсально пересекающие многообразие $\pi^{-1}W^s$, имеющее коразмерность 1 в пространстве всех отображений области D_r в себя. В таких семействах происходит счетное число бифуркаций удвоения периода; механизм этих бифуркаций объясняется гиперболическими свойствами оператора удвоения так же, как и в одномерном случае [48], [57].

Когда параметр семейства пробегает отрезок между соседними бифуркационными значениями, отвечающими удвоению периода, один из мультиликаторов соответствующего цикла меняется от значения 1 до значения -1 , выходя по дороге в комплексную область. Интересно исследовать асимптотику кривой, пробегаемой этим мультиликатором на плоскости \mathbf{C} . В настоящее время оценен сверху радиус круга с центром 0, в котором лежит дуга невещественных значений мультиликатора; этот радиус убывает, как повторная геометрическая прогрессия $\exp(-\alpha 2^n)$.

Пусть двумерная область D_r , оператор удвоения (26), его неподвижная точка $G : D_r \rightarrow \mathbf{R}$ и его инвариантная гиперповерхность $\pi^{-1}W^s$ — те же, что и выше.

Теорема (М. В. Якобсон, 1985). Существует окрестность отображения G в функциональном пространстве, обладающая следующим свойством. Пусть одномерное семейство диффеоморфизмов принадлежит этой окрестности и трансверсально пересекает гиперповерхность $\pi^{-1}W^s$. Тогда

1. Последовательность бифуркационных значений параметра, соответствующих выходу в комплексную область мультиликаторов цикла периода 2^n , возникающего в каскаде удвоений, имеет вид $\varepsilon_n = c\delta^{-n} + O(\delta^{-n}\sigma^n)$, где δ — константа Фейгенбаума, σ — максимальное сжимающее собственное значение линеаризации оператора удвоения в неподвижной точке G , c — константа, зависящая от семейства.

2. Соответствующая последовательность дуг, пробегаемых невещественным мультиликатором цикла периода 2^n , лежит в круге радиуса $\exp(-\alpha 2^n)$ с центром 0; здесь α — положительная константа, зависящая от семейства. \blacktriangleleft

Ослабленное первое утверждение теоремы: $\varepsilon_n = O(\delta^{-n})$ немедленно следует из теории универсальности Фейгенбаума. Доказательство первого утверждения в его полном объеме выходит за рамки настоящего обзора; наметим доказательство второго.

◀ Если мультиликатор $\lambda_n(\varepsilon)$ неподвижной точки диффеоморфизма плоской области $f_\varepsilon^{2^n}$ (он же — мультиликатор цикла диффеоморфизма f_ε с периодом 2^n) — невещественный, то второй мультиликатор с ним комплексно сопряжен, и якобиан диффео-

морфизма в этой точке равен $|\lambda_n(\varepsilon)|^2$. С другой стороны, если диффеоморфизм f_ε достаточно близок к отображению G , образ которого одномерен, то якобиан f_ε всюду в области определения меньше некоторой константы $\exp(-2\alpha) < 1$. Тогда якобиан диффеоморфизма $f_\varepsilon^{2^n}$ всюду в D_r меньше $\exp(-2\alpha \cdot 2^n)$. Отсюда

$$|\lambda_n(\varepsilon)| < \exp(-\alpha \cdot 2^n). \blacktriangleright$$

Теорема справедлива и для отображений областей любой размерности (а не только двумерных). Доказательство утверждения 2 использует тот факт, что все отображения, близкие к отображению на прямую, сжимают двумерные объемы.

Глава 3

НЕЛОКАЛЬНЫЕ БИФУРКАЦИИ

В этой главе описаны бифуркации систем, принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла. Напомним, что точка P называется *неблуждающей точкой* потока $\{f^t\}$ (или диффеоморфизма f), если для любой окрестности $U \ni P$ существует последовательность $t_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$ ($k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$) такая, что $f^{t_i} U \cap U \neq \emptyset$ ($f^{k_i} U \cap U \neq \emptyset$). Поток (или диффеоморфизм) компактного многообразия называется *системой Морса—Смейла*, если

1. Множество неблуждающих точек потока или диффеоморфизма состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий.

2. Все неподвижные точки и периодические траектории — гиперболические.

3. Устойчивые и неустойчивые многообразия неподвижных точек и циклов пересекаются трансверсально.

Границу множества систем Морса—Смейла можно разбить на следующие части:

1. Системы с конечным множеством неблуждающих траекторий, содержащие либо негиперболические неподвижные точки или циклы, либо траектории нетрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек или (и) циклов, либо и те, и другие одновременно.

2. Системы с бесконечным множеством неблуждающих траекторий.

Бифуркации, осуществляющиеся при переходе через первую часть границы, изучены сравнительно подробно и описаны в §§ 1—6. Вторая часть границы и соответствующие ей бифуркации почти не исследованы; совсем недавно доказана ее не-

пустота для систем с более чем двумерным фазовым пространством. Эти результаты изложены в § 7.

Некоторые бифуркации, описанные в этой главе, приводят к возникновению странных аттракторов. Существуют разные, не эквивалентные между собой определения аттракторов. На «физическом» уровне строгости аттрактор — это множество траекторий в фазовом пространстве, отвечающее «установившимся режимам». Обсуждение различных определений аттрактора и описание некоторых бифуркаций аттракторов содержатся в § 8.

В §§ 5, 6 и др. приводятся сведения о бифуркациях в классе систем с нетривиальными неблуждающими множествами.

§ 1. Вырождения коразмерности 1. Сводка результатов

1.1. Локальные и нелокальные бифуркации. Обозначим через $\chi^r(M)$ банахово пространство C^r -гладких векторных полей с C^r -топологией, $r \geq 1$, на C^∞ -гладком многообразии M , через $\Sigma^r(M)$ — множество векторных полей, порождающих структурно устойчивые (или грубые¹⁾) динамические системы.

Определение. Множество $B^r(M) = \chi^r(M) \setminus \Sigma^r(M)$ называется *бифуркационным*.

Пусть $v(\varepsilon)$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^k$, — k -параметрическое непрерывное семейство векторных полей.

Определение. Значения ε , для которых $v(\varepsilon) \in B^r(M)$, называются *бифуркационными*, а изменение топологической структуры разбиения фазового пространства на траектории динамической системы, порожденной векторным полем $v(\varepsilon)$, при переходе через бифуркационное значение ε , называется *бифуркацией*.

Аналогично определяются бифуркации для динамических систем с дискретным временем — диффеоморфизмы.

Очевидно, бифуркационное множество содержит векторные поля, имеющие негиперболические особые точки или негиперболические циклы, а также векторные поля, имеющие гиперболические особые точки и (или) циклы, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются нетрансверсально.

Определение. Фазовая кривая векторного поля называется *гомоклинической траекторией* особой точки (или цикла),

¹⁾ Напомним (см. [11], [166]), что первоначальное определение структурной устойчивости отличается от определения грубости отсутствием требования близости к тождественному гомеоморфизму, осуществляющего топологическую эквивалентность исходной и возмущенной систем. Открытость множества векторных полей, порождающих структурно устойчивые системы, следует непосредственно из определения, в отличие от грубых. С другой стороны, нам не известны примеры структурно устойчивых систем, не являющихся грубыми, поэтому в настоящее время «структурная устойчивость» часто используется как синоним «грубости», т. е. оба термина подразумевают близость сопрягающего гомеоморфизма к тождественному.

если она входит в эту точку (наматывается на цикл) как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow -\infty$; другими словами, если α - и ω -предельные множества совпадают с особой точкой (циклом). Фазовая кривая называется *гетероклинической траекторией*, если ее α - и ω -предельные множества являются различными особыми точками илициклами.

Определение. Бифуркации, осуществляющиеся в малой фиксированной окрестности положения равновесия (или цикла) и связанные с нарушением его гиперболичности, называются *локальными*. Бифуркации, осуществляющиеся в малой фиксированной окрестности конечного числа гомо- или (и) гетероклинических траекторий, называются *полулокальными*; все остальные (не локальные и не полулокальные) — *глобальными*.

Заметим, что эти определения относятся, в первую очередь, к постановке задачи: локальные бифуркации могут сопровождаться полулокальными, а полулокальные — глобальными.

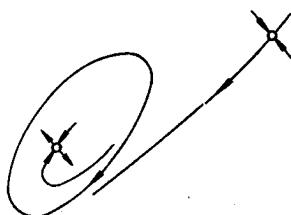


Рис. 32. Фазовые кривые векторного поля на плоскости, однопараметрическая деформация которого имеет счетное множество бифуркационных значений

Пример. Изображенная на рис. 32 система имеет при $\epsilon = \epsilon_0$ полуустойчивый предельный цикл, на который наматывается неустойчивая сепаратриса седла и с которого сматывается устойчивая сепаратриса другого седла. После исчезновения цикла, скажем, при $\epsilon > \epsilon_0$, сепаратрисы этих седел замыкаются, когда параметр ϵ пробегает последовательность значений $\epsilon_i > \epsilon_0$, $\epsilon_i \rightarrow \epsilon_0$. Локальная бифуркация здесь — слияние устойчивого и неустойчивого циклов в полуустойчивый при $\epsilon = \epsilon_0$ и его исчезновение при $\epsilon > \epsilon_0$. Она сопровождается счетным множеством полулокальных бифуркаций — замыкания сепаратрис при $\epsilon = \epsilon_i$.

Перечислим вырождения коразмерности 1, связанные с нарушением требований на системы Морса—Смейла.

1.2. Негиперболические особые точки. На границе множества систем Морса—Смейла встречаются системы с негиперболическими точками (циклами). Локальные бифуркации таких точек и циклов описаны в главах 1 и 2. Однако с негиперболичес-

кими точками и циклами связаны вырождения нелокального характера, которые приводят к полулокальным бифуркациям. Опишем гомоклинические траектории негиперболических особых точек.

Определение. Устойчивым (неустойчивым) множеством негиперболической особой точки векторного поля называется объединение всех положительных (отрицательных) полутраекторий поля, стремящихся к этой точке.

Аналогично определяются устойчивое и неустойчивое множества негиперболического цикла и негиперболической неподвижной точки диффеоморфизма.

Замечание. Суммарная размерность устойчивого и неустойчивого множества негиперболической особой точки с одномерным центральным многообразием равна $n+1$ (n — размерность фазового пространства). Поэтому в классе векторных полей с такой особой точкой наличие гомоклинической траектории этой точки — явление общего положения.

Устойчивое, неустойчивое и центральное многообразие точки и цикла определены в [162] и обозначаются W^s , W^u и W^c (или W_O^s , W_O^u , W_O^c ; W_L^s , W_L^u , W_L^c , где O и L — соответствующие точка и цикл). Устойчивое и неустойчивое множества точки и цикла обозначаются S^u и S^s (или S_O^s , S_O^u , S_L^s , S_L^u , где O и L — соответствующие точка и цикл).

Если все не лежащие на мнимой оси собственные значения матрицы линейной части векторного поля в особой точке находятся в правой (левой) полуплоскости, то скажем, что особая точка — неустойчивый (устойчивый) узел по гиперболическим переменным. В противном случае особая точка называется седлом по гиперболическим переменным.

Пример 1. Рассмотрим негиперболическую особую точку O векторного поля с одномерным центральным многообразием, ограничение поля на которое имеет вид $(ax^2 + \dots) \partial/\partial x$, $a \neq 0$. Если эта особая точка — узел по гиперболическим переменным, то росток в точке O одного из множеств S^s , S^u диффеоморфен ростку луча в его вершине, а росток другого множества — ростку полупространства в граничной точке. Если особая точка O — седло по гиперболическим переменным, то ростки множеств S^s и S^u диффеоморфны росткам полупространства размерности выше единицы в граничной точке; $\dim S^s = \dim W^s + 1$, $\dim S^u = \dim W^u + 1$.

Пример 2. Рассмотрим негиперболическую особую точку векторного поля с двумерным центральным многообразием и парой чисто мнимых собственных значений; ограничение поля на центральное многообразие имеет нормализованную 3-струю, задающую уравнение вида:

$$\dot{z} = i\omega z + az|z|^2, \quad \operatorname{Re} a \neq 0$$

(см. § 2, гл. 1). Пусть для определенности $\operatorname{Re} a < 0$. Тогда ростки множеств S^s и S^u — это ростки многообразий размерности $\dim W^s + 2$ и $\dim W^u$ соответственно; сумма этих размерностей равна n .

Замечание. В классе векторных полей, имеющих особую точку с парой чисто мнимых собственных значений, поля общего положения не имеют гомоклинической траектории особой точки.

1.3. Негиперболические циклы. Исследуем гомоклинические траектории негиперболических циклов. В однопараметрических семействах общего положения могут встречаться негиперболические циклы, имеющие один мультиплликатор 1 или -1 или пару невещественных мультиплликаторов $e^{\pm i\theta}$. Если остальные мультиплликаторы лежат внутри (вне) единичной окружности, то будем говорить, что такой цикл — типа устойчивый (неустойчивый) узел по гиперболическим переменным. В противном случае цикл — типа седло по гиперболическим переменным. Аналогичные определения даются для неподвижной или периодической точки диффеоморфизма. Опишем устойчивые и неустойчивые множества негиперболических циклов, предполагая, что выполнены требования общности положения из § 1 главы 2.

Пример 1. Для векторного поля на \mathbf{R}^n , имеющего цикл L с мультиплликатором ± 1 , неподвижная точка преобразования монодромии трансверсали D в окрестности L обладает одномерным центральным многообразием, и ростки множеств $S_L^s \cap D$, $S_L^u \cap D$ в неподвижной точке такие же, как ростки S_0^s , S_0^u векторного поля на \mathbf{R}^{n-1} в особой точке с одномерным центральным многообразием (см. пример 1, п. 1.2). Росток же множества $S_L^s (S_L^u)$ на L диффеоморфен ростку на окружности $\{0\} \times S^1$ прямого или косого произведения s -мерного (u -мерного) полупространства с нулем на границе на окружность S^1 . Здесь $s = \dim W_L^s$, $u = \dim W_L^u$. В частности, если L — устойчивый узел по гиперболическим переменным, то росток S_L^u на L диффеоморфен ростку на $\{0\} \times S^1$ произведения луча с вершиной нуль на окружность S^1 .

Замечание. Так как $\dim S_L^s + \dim S_L^u = n + 2$, то наличие гомоклинической траектории и даже однопараметрического семейства таких траекторий в классе векторных полей с негиперболическим циклом, имеющим мультиплликатор ± 1 , — явление общего положения.

Пример 2. Рассмотрим векторное поле на \mathbf{R}^n , имеющее цикл с мультиплликатором (-1) . Неподвижная точка преобразования монодромии трансверсали, соответствующая циклу, обладает одномерным центральным многообразием, на котором преобразование монодромии может быть записано в виде: $x \mapsto -x + ax^2 + bx^3 + \dots$. Квадрат этого преобразования записы-

вается как: $x \mapsto x - 2(a^2 + b)x^3 + \dots$, откуда ясно, что при $a^2 + b > 0$ (< 0) неподвижная точка на центральном многообразии устойчива (неустойчива). Это же верно и для цикла. Поэтому так как $u+s=n$, $s=\dim W^s$, $u=\dim W^u$, то при $a^2+b>0$, $\dim S^s=s+1$, $\dim S^u=u$, а при $a^2+b<0$, $\dim S^s=s$, $\dim S^u=u+1$. Следовательно, наличие изолированной гомоклинической траектории в классе векторных полей с таким циклом — явление общего положения при $s \geq 2$, $u \geq 2$.

Пример 3. Предположим, что векторное поле на \mathbf{R}^n имеет цикл с парой невещественных мультиликаторов $e^{\pm i\varphi}$, $\varPhi \in \left\{ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3} \right\}$. Преобразование монодромии имеет двумерное центральное многообразие, на котором (в координатах $x+iy=z$) оно может быть записано в виде $z \mapsto v z + az |z|^2 + \dots$, $v = e^{i\varphi}$. Отсюда несложно вывести, что при $\operatorname{Re} a < 0$ (> 0) неподвижная точка этого преобразования устойчива (неустойчива) на центральном многообразии. Это же справедливо и для цикла. Нетрудно убедиться, что $u+s=n-1$, где $u=\dim W^u$, $s=\dim W^s$, поэтому при $\operatorname{Re} a < 0$, $\dim S^s=s+2$, $\dim S^u=u$, а при $\operatorname{Re} a > 0$, $\dim S^s=s$, $\dim S^u=u+2$. Так как $\dim S^s+\dim S^u=n+1$, то наличие изолированной гомоклинической траектории в классе векторных полей с таким циклом — явление общего положения.

Лемма (В. С. Афраймович, 1985). Если векторное поле, удовлетворяющее требованиям, наложенным в примере 2 или 3, имеет гомоклиническую траекторию цикла, по которой трансверсально пересекаются множества S^u и S^s , то все векторные поля из некоторой окрестности поля в пространстве $\chi'(M)$ имеют бесконечное множество неблуждающих траекторий и, следовательно, поле не принадлежит границе множества векторных полей Морса—Смейла.

Поскольку в этой статье рассматриваются лишь бифуркации в окрестности границы множества систем Морса—Смейла, то всюду ниже гомоклинические траектории негиперболического цикла рассматриваются только в том случае, когда один из мультиликаторов цикла равен 1.

1.4. Нетрансверсальные пересечения многообразий.

Определение. Два гладких подмногообразия A и B n -мерного многообразия имеют *простое касание* в точке P , если сумма их размерностей не меньше n и, кроме того,

1) Прямая сумма касательных плоскостей в точке P к подмногообразиям $(n-1)$ -мерна: $\dim(T_P A + T_P B) = n-1$.

2) Если f — гладкая функция с некритической точкой P , равная нулю на A и имеющая критическую точку P на B , то второй дифференциал (гессиан) ограничения f на B в точке P — квадратичная форма на $T_P B$. Требуется, чтобы ограничение этой формы на $T_P A \cap T_P B$ было невырождено.

Замечание. Простота касания не зависит ни от выбора функции, ни от того, на каком из двух многообразий она обращается в нуль.

Определение. Два гладких подмногообразия A и B n -мерного многообразия M^n имеют *квазитрансверсальное пересечение* в точке P , если $\dim A + \dim B = n - 1$, и существуют окрестность U точки P и $(n-1)$ -мерное гладкое подмногообразие M^{n-1} многообразия M^n такие, что многообразия $A \cap U$ и $B \cap U$ принадлежат M^{n-1} и как подмногообразия M^{n-1} трансверсально пересекаются в точке P .

Лемма ([180]). Два гладких подмногообразия A и B n -мерного многообразия M имеют простое касание в точке P , если и только если существует система координат $\{(x_1, \dots, x_n)\}$ в некоторой окрестности U точки P такая, что пересечения $A \cap U$ и $B \cap U$ задаются уравнениями

$$A \cap U = \{x_k = 0, a+1 \leq k \leq n\};$$

$$B \cap U = \left\{ x_k = 0, 1 \leq k \leq n - (b+1), x_n = \sum_{i=n-b}^a \varepsilon_i x_i^2, \varepsilon_i = \pm 1 \right\}.$$

Здесь $a = \dim A$, $b = \dim B$; если $n = b+1$, то линейные уравнения во второй системе отсутствуют; $x(P) = 0$.

Определение. Два инвариантных многообразия векторного поля имеют *траекторию простого касания* (*квазитрансверсального пересечения*), если они пересекаются по неодноточечной фазовой кривой, и в какой-либо (а следовательно, и в каждой) точке этой кривой их пересечения с трансверсалю к полю имеют простое касание (квазитрансверсальное пересечение).

1.5. Контуры. Нелокальные бифуркации, связанные с простыми касаниями и квазитрансверсальными пересечениями, разбиваются на два класса с существенно различными свойствами, в зависимости от существования (или несуществования) так называемых контуров.

Определение. Последовательность Q_0, \dots, Q_k , где каждое Q_i — либо положение равновесия, либо предельный цикл, $k \geq 2$, $Q_0 = Q_k$, образует *контуры*¹⁾, если $S_{Q_{i+1}}^s \cap S_{Q_i}^u \neq \emptyset$, $i \in \{0; \dots; k-1\}$.

Теорема ([198]). Если все Q_i гиперболичны и все пересечения трансверсальны, то векторное поле (и все близкие поля) имеет счетное множество предельных циклов. ▲

Поэтому для векторного поля общего положения, имеющего контур и лежащего на границе множества векторных полей Морса—Смейла, либо:

1) все Q_i гиперболичны и существует траектория простого касания (либо квазитрансверсального пересечения), либо

¹⁾ В литературе употребляется также термин «цикль» и не всегда предполагается, что $k \geq 2$.

2) все пересечения трансверсальны, но одно (и только одно) из Q_i негиперболично (и принадлежит классу, описанному в п.п. 1.2—1.3).

З а м е ч а н и е. Пусть для векторного поля на двумерной поверхности существует контур. Если Q_i — положение равновесия, то оно либо седло, либо седло-узел, а если цикл, то — с мультипликатором $+1^{1)}$. Если в состав контура входит более одного положения равновесия или одного цикла, то векторное поле принадлежит множеству коразмерности, не меньшей двух, в пространстве векторных полей. Действительно, если в состав такого контура входит i циклов, $i \in \{0; 1; 2\}$, то существует не менее $(2-i)$ сепаратрис, соединяющих соседние седла или седлоузлы.

Таким образом, единственno возможный (в коразмерности 1) контур на поверхности состоит из цикла с мультипликатором $+1$ и седла. Векторное поле с таким контуром может возникнуть на поверхности рода больше нуля (но не на сфере или проективной плоскости) (рис. 33). Поле в этом случае — квазиобщее, но не первой степени негрубости (см. § 2).

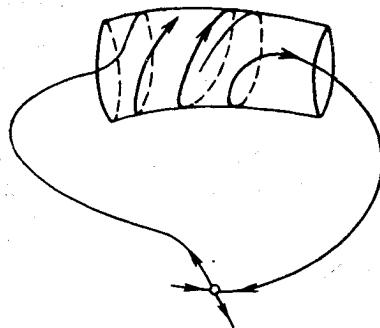


Рис. 33. Контур на двумерной поверхности, обра- зованный полуустойчивым циклом и седлом

Л е м м а. Пусть имеет место случай 2) и Q_i негиперболично. Тогда либо:

- Q_i — положение равновесия с одномерным центральным многообразием, седло по гиперболическим переменным, и имеет счетное множество гомоклинических траекторий, либо
- Q_i — цикл с мультипликатором $+1$, имеющий гомоклиническую траекторию.

Д о к а з а т е ль с т в о. Используя трансверсальность пересечений устойчивых и неустойчивых множеств и λ -лемму [138],

¹⁾ Конечно, предполагается, что особые точки и циклы принадлежат классу, описанному в п.п. 1.2, 1.3.

аналогично [198], можно показать, что Q_j имеет гомоклиническую траекторию, по которой устойчивое и неустойчивое множества пересекаются трансверсально. Следовательно, если Q_j — положение равновесия, то в силу п. 1.2, оно не может иметь двумерного центрального многообразия. Если же $\dim W_{Q_j}^c = 1$, то Q_j не может быть узлом по гиперболическим переменным (тогда было бы либо $\dim S_{Q_j}^s = 1$, и $S_{Q_j}^s \subset S_{Q_j}^u$, либо $\dim S_{Q_j}^u = 1$, и $S_{Q_j}^u \subset S_{Q_j}^s$, т. е. $k = 1$, что невозможно), и окончательно, а) следует из [32].

Пусть теперь Q_j — цикл. Если он имеет мультиплликатор (-1) , или пару мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$, то, в силу леммы пункта 1.3, векторное поле не принадлежит границе множества векторных полей Морса — Смейла.►

Случай 2а) будет рассмотрен в § 3, случай 2б) в § 4, а случай 1) — в § 6.

1.6. Бифуркационные поверхности. Рассмотрим множество \mathcal{B}_1 всех векторных полей на M , имеющих либо негиперболическую особую точку, либо негиперболический предельный цикл, либо траекторию, принадлежащую нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразия двух гиперболических особых точек или циклов, или точки и цикла.

Теорема ([199] — [201]). Существует открытое всюду плотное подмножество $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_1$, которое в окрестности каждой своей точки в $\chi'(M)$ является гладкой гиперповерхностью коразмерности один. Векторные поля в \mathcal{B}_1 имеют особые точки или циклы, или траектории простого касания, или квазитрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий, перечисленные в п.п. 1.2—1.4.

Компоненты множества \mathcal{B}_1 , отвечающие векторным полям с перечисленными в п.п. 1.2—1.4 вырождениями, будем называть бифуркационными поверхностями. Гладкость бифуркационных поверхностей можно доказать с помощью построения гладких функционалов, невырожденные уровни которых совпадают с этими поверхностями. Такие функционалы существуют для всех перечисленных бифуркационных поверхностей.

В качестве примера приведем функционал для негиперболической особой точки с одномерным центральным многообразием. Пусть векторное поле $v_0 \in \mathcal{B}_1$ имеет негиперболическую особую точку O с одномерным центральным многообразием. Введем систему координат $\{(x, y_1, \dots, y_{n-1})\}$ так, чтобы ось Ox касалась центрального многообразия в точке O , а за $y = (y_1, \dots, y_{n-1})$ выберем карту в дополнительной плоскости. Тогда любое C^2 -близкое к v_0 векторное поле v запишется в виде $\dot{x} = f(x, y)$, $\dot{y} = g(x, y)$, $\det \partial g / \partial y(0) \neq 0$. Поэтому уравнение $g = 0$ имеет единственное решение $y = \varphi(x)$. Значение f в точке экстремума функции $f(x, \varphi(x))$ и полагается равным значению функционала κ на v .

Как видно, при построении функционала векторное поле рассматривается на нулевой изоклине гиперболических переменных и проектируется на ось негиперболической переменной; за значение функционала принимается значение этой проекции в точке ее экстремума. В силу наложенных на v_0 условий, изоклина, проекция и точка экстремума гладко зависят от v .

Пример. Рассмотрим семейство $v(\varepsilon)$ уравнений на \mathbf{R}^1 :

$$\dot{x} = \alpha(\varepsilon) + \beta(\varepsilon)x + \gamma(\varepsilon)x^2 = f(x, \varepsilon), \quad \alpha(0) + \beta(0) = 0 \neq \gamma(0).$$

По определению, $v(v(\varepsilon)) = f(x_0(\varepsilon), \varepsilon) = -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\gamma}$. Если α, β, γ — гладкие функции и $\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_0(\varepsilon), \varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon = 0$, то $v(\varepsilon)$ — трансверсально \mathcal{B}_1 в точке $v(0)$.

Из примера видно, что знание функционалов, определяющих бифуркационные поверхности, позволяет конструировать трансверсальные к ним однопараметрические семейства векторных полей.

1.7. Характеристики бифуркаций. Бифуркации удобно классифицировать по следующим характеристикам бифуркационных поверхностей:

а) Достижимость или недостижимость бифуркационной поверхности из области грубых систем, границей которой она является¹⁾. Очевидно поверхность может быть достижима с одной стороны, с обеих или не достижима ни с какой стороны. В примере п. 1.1 бифуркационная поверхность недостижима со стороны $\varepsilon > \varepsilon_0$ из-за замыкания сепаратрис при $\varepsilon = \varepsilon_i$.

в) Для бифуркационных поверхностей, принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла, приведем следующее

Определение. Бифуркация называется *не выводящей* из класса систем Морса—Смейла, если по обе стороны соответствующей бифуркационной поверхности в шаре в $\chi(M)$ достаточно малого радиуса с центром в точке на этой поверхности всюду плотны системы Морса—Смейла.

Бифуркационная поверхность может отделять системы Морса—Смейла от систем с бесконечным неблуждающим множеством — при переходе через нее может, например, рождаться странный аттрактор или нетривиальное гиперболическое множество (определение см. в [198]), или сложное предельное множество, содержащее бесконечно много траекторий.

В соответствии с указанными признаками, исследованные к настоящему времени бифуркации коразмерности 1 удобно объединить в таблицу (см. табл. 1) следующей структуры. Она со-

¹⁾ Напомним, что граничная точка v_0 открытого множества U называется *достижимой*, если существует путь (гомеоморфный образ замкнутого отрезка), все точки которого, кроме граничной, совпадающей с v_0 , целиком лежат в U .

Таблица 1

Класс	Подкласс	Достижимость, недостижимость	Не выводит, выводит из класса систем Морса-Смейла	Рождается цикл	Рождается нетривиальное предельное множество	Рождается странный атTRACTор
Негиперболическая особая точка	нет гомоклинических траекторий	++	+	0	—	—
	одна гомоклиническая траектория	++	+	1	—	—
	не меньше двух гомоклинических траекторий	++	+	∞	Ω	—
Негиперболический цикл с мультипликатором +1	нет гомоклинических траекторий	++ или +—	+	0 или 2	—	—
	объединение гомоклинических траекторий и цикла компактно	++ или +—	+ или —	к или ∞	T^2 или K^2 или Ω или ?	—
	объединение гомоклинических траекторий и цикла некомпактно	++ или +—	—	∞	Ω	—
		++	+	1	—	—
Гиперболическая особая точка с гомоклинической траекторией	нет контуров или гомоклинических траекторий	++ или +— или ——	+	0	—	—
	есть контуры или гомоклинические траектории	+— или ?	—	∞	Ω	—
Простое касание или квазитрансверсальное пересечение устойчивых и неустойчивых многообразий.						

стоит из 7 столбцов. В столбце 1 — «класс» — указывается тип особенности. В столбце 2 — «подкласс» — наличие или отсутствие гомоклинических траекторий или другая характеристика бифуркационной поверхности. В столбце 3 — «достижимость, недостижимость» — в случае достижимости бифуркационной поверхности с обеих сторон будем ставить знак «++», с одной — знак «+-», в случае недостижимости с обеих сторон — знак «--». В столбце 4 — «не выводит, выводит из класса систем Морса—Смейла» — если бифуркация не выводит из класса систем Морса—Смейла, то ставится знак «+», если выводит — знак «-». В столбце 5 — «рождается цикл» — если рождается p циклов, то ставим p , если бесконечно много циклов — то « ∞ ». В столбцах 6 и 7 — «рождается нетривиальное предельное множество» или «рождается странный аттрактор» — ставится знак «+», если рождается, и знак «-», если нет.

1.8. Сводка результатов (см. таблицу 1 стр. 96). В столбце 6 T^2 и K^2 — это двумерный тор и бутылка Клейна соответственно. В столбце 5 знак «к» обозначает возможность рождения конечного множества предельных циклов. В столбце 6 знак Ω означает наличие нетривиального гиперболического множества. Знак ? означает, что вопрос открыт.

§ 2. Нелокальные бифуркции потоков на двумерных поверхностях

Простейший пример нелокальной бифуркации на двумерной поверхности — появление «седловой связки», когда выходящая сепаратриса одного седла пересекается при изменении параметра в некоторый момент с входящей сепаратрисой другого (и, следовательно, сливается с ней при этом значении параметра). При прохождении бифуркационного значения параметра сепаратрисы обеих седел «меняются местами». Эта бифуркация встречается неустранимым образом в однопараметрических семействах векторных полей, т. е. является типичной.

Заметим, что седловая связка — это траектория, принадлежащая единственно возможному нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболических положений равновесия и (или) циклов.

Цель настоящего параграфа — описать (насколько возможно) бифуркации в типичных однопараметрических семействах векторных полей на замкнутых поверхностях, а также структуру бифуркационного множества в функциональном пространстве векторных полей.

З а м е ч а н и е. Напомним следующий результат

Теорема ([8], [9], [185]). 1. Любая грубая (структурно устойчивая) система на замкнутой поверхности является системой Морса—Смейла. 2. Множество грубых (структурно устой-

чивых) векторных полей на замкнутой двумерной поверхности открыто и плотно в $\chi^r(M)$.

Таким образом, любая негрубая система является граничной для множества систем Морса—Смейла.

2.1. Полулокальные бифуркации потоков на поверхностях.

Теорема ([8], [9]). В типичных однопараметрических семействах векторных полей на плоскости возможны лишь следующие полулокальные бифуркации:

а. Рождение цикла из гомоклинической траектории седлового узла.

б. Появление и распад седловой связки.

в. Рождение предельного цикла из петли сепаратрисы невырожденного седла.

Если *седловая величина* (сумма собственных значений линеаризации векторного поля в седле) отрицательна, то рождающийся из петли сепаратрисы цикл устойчив, если положительна, то неустойчив.

Эти бифуркации изображены на рис. 34. Их многомерные аналоги исследованы в §§ 3, 6, 5 соответственно.

Векторные поля с петлей сепаратрисы седла, имеющего нулевую седловую величину, встречаются в типичных семействах с не менее чем двумя параметрами. Бифуркации таких полей в типичных двупараметрических семействах описаны в п. 2.6. Бифуркации петли сепаратрисы в типичных многопараметрических семействах исследованы в работе [79].

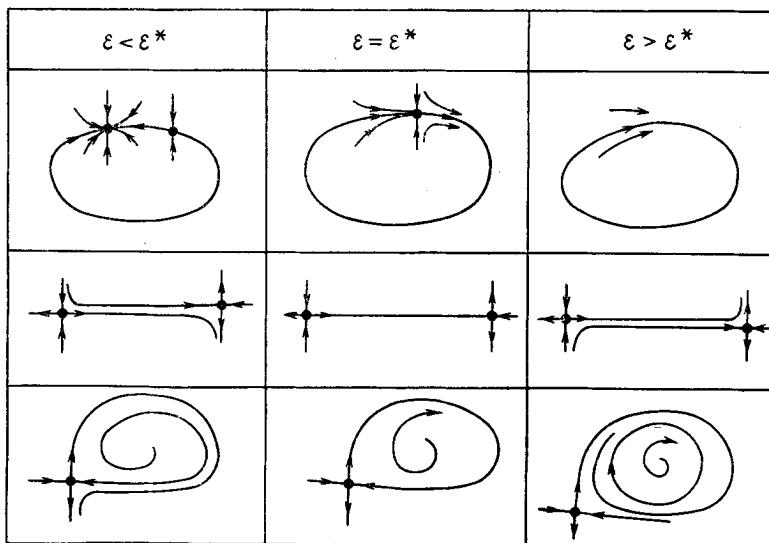


Рис. 34. Полулокальные бифуркации коразмерности 1 на поверхностях

2.2. Нелокальные бифуркции на сфере; однопараметрический случай. Начнем с определений. Пусть M — двумерная замкнутая гладкая поверхность, $\Psi^{k,r}(M)$ — множество C^k -гладких семейств C^r -гладких векторных полей на M ; это множество состоит из C^k -отображений отрезка $I=[0, 1] \ni \varepsilon$ в пространство $\Psi^r(M)$. Семейство *типовично*, если оно принадлежит множеству второй категории Бэра¹⁾ в $\Psi^{k,r}(M)$.

Определение ([169]). Два семейства $\{v_\varepsilon\}$, $\{w_\varepsilon\} \subset \Psi^{k,r}(M)$ топологически эквивалентны, если существует гомеоморфизм $H=(h, \eta): M \times I \rightarrow M \times I$ (где η — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм I) такой, что для любого $\varepsilon \in I$ гомеоморфизм $(h, \eta(\varepsilon)) \equiv h_\varepsilon: M \rightarrow M$ есть топологическая эквивалентность между v_ε и w_ε . Семейство называется структурно устойчивым, если оно топологически эквивалентно любому близкому семейству; другими словами, если оно принадлежит внутренности своего класса эквивалентности.

Определение слабой топологической эквивалентности семейств получится, если в предыдущем определении считать, что отображение $h_\varepsilon = H(\cdot, \varepsilon): M \rightarrow M$ по-прежнему гомеоморфизм, но не обязательно непрерывно зависящий от ε . Семейство называется слабо структурно устойчивым, если оно слабо топологически эквивалентно любому близкому семейству.

Легко видеть, что семейство, содержащее лишь грубые векторные поля, будет структурно устойчивым.

«Теорема». 1. В типичном однопараметрическом семействе векторных полей на S^2 , $r \geq 2$, $k \geq 1$, встречается не более счетного множества бифуркационных значений параметра (в окрестности которых семейство топологически перестраивается). При остальных значениях параметра поле грубое.

2. При изолированных бифуркационных значениях параметра возможны лишь те нелокальные бифуркции, которые перечислены в теореме пункта 2.1.

3. Точки накопления бифуркационных значений параметра являются их односторонними пределами и могут быть лишь следующих двух типов: а) в бифуркационный момент, соответствующий точке накопления бифуркационных значений параметра, векторное поле имеет петлю сепаратрисы седла, являющуюся предельной для устойчивой или неустойчивой сепаратрисы другого седла (рис. 35); б) поле имеет цикл с мультиплатором $+1$, предельный для устойчивой и неустойчивой сепаратрис двух разных седел (рис. 32). К этим точкам накапливаются бифуркационные значения, отвечающие векторным полям, имеющим седловые связки.

¹⁾ Множество второй категории Бэра — это пересечение счетного числа открытых всюду плотных множеств.

4. Однопараметрическая деформация соответствующей бифуркационному значению параметра системы, определенная типичным семейством, при значениях параметра, близких к бифуркационному, топологически версальна и структурно устойчива: любая другая деформация топологически эквивалентна индуцированной из данной, любая близкая однопараметрическая деформация топологически эквивалентна данной.

5. Семейство в целом структурно устойчиво. ▲

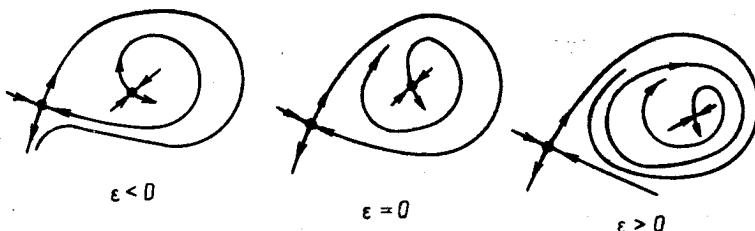


Рис. 35. Бифуркация петли сепаратрисы, предельной для сепаратрисы другого седла. При $\epsilon < 0$ показан момент возникновения седловой связки

Полное доказательство теоремы не опубликовано. Заключение 2 доказано в работах [8], [9], из которых, кроме того, можно вывести 4 (см. также [156]). Отдельные результаты содержатся в [169], [201]. Ниже будут подробнее описаны типичные семейства и уточнено, какие пункты теоремы не доказаны.

2.3. Типичные семейства векторных полей. Типичное семейство векторных полей — это дуга в функциональном пространстве, трансверсально пересекающая бифуркационную поверхность в «типичной точке». Чтобы строго определить эти точки, необходимо выделить класс систем «общего положения» в множестве всех негрубых систем.

Определение ([201]). Векторное поле на двумерной поверхности называется *квазиобщим*, если неблуждающее множество порождаемой им динамической системы состоит из конечного числа положений равновесия и циклов, причем выполнено одно из двух условий:

1) все положения равновесия и циклы гиперболичны, и имеется единственная седловая связка — сепаратриса, идущая из седла в седло;

2) все положения равновесия и циклы гиперболичны, кроме одного; набор собственных значений негиперболической особой точки или мультиплликаторов негиперболического цикла вырожден; соответствующее вырождение имеет коразмерность 1 и опи-