

сано выше (см. § 2, гл. 1 и § 1, гл. 2). Кроме того, нет седловых связок и сепаратрис, «соединяющих» седло-узел и седло¹⁾.

Динамическая система, порожденная квазиобщим полем, называется *квазиобщей*.

Теорема ([201]). Если $r \geq 4$ и M — либо замкнутая ориентируемая поверхность, либо замкнутая неориентируемая поверхность рода $g \leq 3^2)$, то множество квазиобщих векторных полей класса C^r на M : 1) является C^{r-1} -подмногообразием пространства векторных полей $\chi^r(M)$, погруженным в него; 2) всюду плотно в бифуркационном множестве.

Пусть B — произвольное связное подмножество топологического пространства X . Окрестностью точки $x \in B$ во внутренней топологии будем называть содержащую x связную компоненту пересечения B с окрестностью точки x в объемлющем пространстве X . Это определение задает «внутреннюю» топологию в множестве квазиобщих векторных полей (в объемлющем пространстве $\chi^r(M)$). В случае, когда квазиобщие системы плотны в бифуркационном множестве в смысле внутренней топологии, однопараметрическое семейство общего положения содержит только грубые и квазиобщие системы (рис. 36а). Если квазиобщие системы плотны в бифуркационном множестве лишь в топологии, индуцированной вложением в пространство векторных полей, то в однопараметрических семействах неустранимым малым шевелением образом могут встречаться негрубые и неквазиобщие поля (рис. 36б).

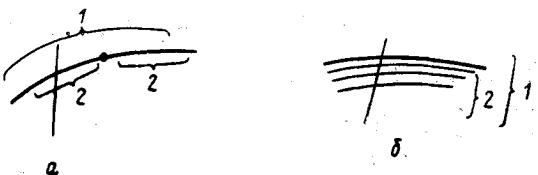


Рис. 36. Возможное расположение бифуркационных поверхностей:

«1» — негрубые векторные поля, «2» — квазиобщие поля, а. Плотность во внутренней топологии. б. Плотность в топологии объемлющего пространства. Линия, трансверсально пересекающая бифуркационные поверхности, изображает типичное однопараметрическое семейство

Теорема. Множество квазиобщих векторных полей на двумерной сфере или проективной плоскости плотно в множестве всех негрубых векторных полей с внутренней топологией.

Эта теорема следует из классических результатов [8], [9].

¹⁾ Под сепаратрисой положения равновесия типа седло-узел подразумевается здесь часть центрального многообразия, не принадлежащая двумерному устойчивому или неустойчивому множеству; другими словами, общая граница двух гиперболических секторов.

²⁾ Ограничения на топологический тип поверхности появляются из-за того, что для поверхностей, не перечисленных в формулировке теоремы, не доказана в C^r -топологии лемма о замыкании при $r \geq 2$.

Введем в рассмотрение класс $\Phi^{k,r} \subset \Psi^{k,r}$ однопараметрических семейств векторных полей на сфере, выделяемый следующими условиями: 1) каждое векторное поле в семействе либо грубое, либо квазиобщее, 2) семейство трансверсально пересекает бифуркационное множество, 3) если семейство содержит квазиобщее векторное поле, отвечающее ситуации рис. 32, то выполнены условия типичности, сформулированные в следующем пункте.

По-видимому, теорема пункта 2.2 справедлива для семейств, принадлежащих $\Phi^{k,r}(S^2)$.

2.4. Условия типичности. Предположим, что семейство $\{v_e\}$ содержит векторное поле, отвечающее ситуации рис. 32. На трансверсали l к циклу с мультиликатором $+1$ определено отображение последования f_0 векторного поля v_0 . Пусть x — локальная координата на l такая, что: 1) циклу соответствует $x=0$; 2) P_1, \dots, P_k — точки сепаратрис (различных) седел, ω -асимптотических к циклу, а Q_1, \dots, Q_m — α -асимптотических к нему, такие что

$$x(P_1) < \dots < x(P_k) < x(f_0 P_1) < 0 < x(Q_1) < \dots \\ \dots < x(Q_m) < x(f_0 Q_1).$$

Если $k \leq 1$ или $m \leq 1$, то никаких условий, кроме 1), 2) (в предыдущем пункте), на семейство не налагается. Пусть $k > 1$ и $m > 1$. Как установлено в [169], [180], f_0 можно вложить в однозначно определенный гладкий поток $\{g^t\}$ на l , так что $f_0(P) = g^1(P)$. Положим

$$P_2 = g^{t_1} P_1, \dots, P_k = g^{t_{k-1}} P_1, \quad Q_2 = g^{\bar{t}_1} Q_1, \dots, Q_m = g^{\bar{t}_{m-1}} Q_1.$$

Условия общего положения [169]:

$$|t_i - t_j| \neq |\bar{t}_\alpha - \bar{t}_\beta|, \quad 1 - |t_i - t_j| \neq |\bar{t}_\alpha - \bar{t}_\beta|, \\ i \neq j; \quad \alpha \neq \beta; \quad i, j \in \{1, \dots, k-1\}; \quad \alpha, \beta \in \{1, \dots, m-1\}.$$

В [169] приведена схема доказательства структурной устойчивости семейства (точнее, схема доказательства версальности деформации поля v_0) при выполнении сформулированных условий. Если эти условия не выполнены, то существует сколь угодно близкое к исходному семейство, содержащее векторные поля с двумя (или больше) седловыми связками (Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко, 1986).

2.5. Однопараметрические семейства на поверхностях, отличных от сферы. Ясно, что для любой поверхности можно выделить класс однопараметрических семейств векторных полей $\Phi^{k,r}(M)$, аналогичный $\Phi^{k,r}(S^2)$, т. е. класс дуг в функциональном пространстве, пересекающих бифуркационное множество лишь в точках множества квазиобщих векторных полей. Это сделано в [169], где приведена схема доказательства открытости такого класса в множестве всех однопараметрических семейств. Из-

лированные бифуркационные значения в семействе этого класса отвечают системам 1-ой степени негрубости.

Определение ([6]). Динамическая система называется системой 1-й степени негрубости, если она не груба и существует такая ее окрестность, что каждая динамическая система из этой окрестности либо груба, либо орбитально топологически эквивалентна исходной, причем сопрягающий гомеоморфизм близок к тождественному. Векторное поле, порождающее систему 1-й степени негрубости, называется векторным полем 1-й степени негрубости.

Теорема ([6], [8], [9], [15], [16]). Пусть замкнутая поверхность M либо ориентируема, либо неориентируема и рода $g \leq 3$. Тогда гладкая динамическая система на M , обладающая следующими свойствами: 1) квазиобщая; 2) не имеющая сепаратрис седел, содержащих в множестве своих предельных точек петли сепаратрис других седел (или того же самого седла); 3) не имеющая сепаратрисы седла, содержащей в множестве своих α -предельных (ω -предельных) точек негиперболический цикл, который содержался бы также в множестве ω -предельных (α -предельных) точек некоторой сепаратрисы другого или того же самого седла и, в частности, не имеющая контуров; 4) не имеющая гомоклинических траекторий негиперболического цикла — является системой 1-й степени негрубости.

Следствие. Бифуркации систем первой степени негрубости на указанных в теореме поверхностях полулокальны. (Всегда можно указать конечное множество траекторий, в окрестности которого только и происходит рождение или исчезновение неблуждающих траекторий или слияние сепаратрис). Фактически, это бифуркации полуустойчивых циклов, седловых связок и петель сепаратрисы (рис. 34).

Точки накопления бифуркационных значений в семействе из $\Phi^u(M)$ и бифуркаций в окрестностях этих точек могут быть рассмотрены аналогично соответствующим бифуркациям в семействе $\Phi^u(S^2)$, по крайней мере, если поверхность ориентируема [169]. Однако для поверхностей, на которых система может иметь нетривиальные (т. е. отличные от положения равновесия и цикла) устойчивые по Пуассону траектории, т. е. для всех поверхностей, кроме сферы S^2 , проективной плоскости P^2 и бутылки Клейна K^2 , в типичном однопараметрическом семействе могут неустранимым образом встречаться векторные поля с бесконечным неблуждающим множеством. Бифуркации в таких семействах совершенно не описаны, кроме бифуркаций систем с глобальной секущей на двумерном торе (см. следующий пункт). Однако известно, что существуют типичные однопараметрические семейства на поверхностях, отличных от S^2 , P^2 , K^2 , которые содержат негрубые векторные поля бесконечной степени негрубости (С. Х. Арансон, Функц. анализ и его прил., 1986, № 1, 62—63). Для систем на S^2 справедлив следующий результат.

Теорема ([6]—[9]). Множество систем первой степени негрубости открыто и плотно в множестве всех негрубых систем на S^2 .

Для векторных полей на двумерном торе установлен более слабый результат.

Теорема (С. Х. Арансон, 1986). Множество векторных полей первой степени негрубости на торе открыто и плотно в пространстве негрубых векторных полей без особых точек с топологией, индуцированной из $\chi^*(T^2)$. Это утверждение верно и для P^2 и K^2 .

В обеих теоремах предполагается класс гладкости не меньше 2.

2.6. Глобальные бифуркции систем с глобальной секущей на торе. Исследование потоков на торе с глобальной секущей сводится к исследованию диффеоморфизмов окружности (являющихся отображениями последования). Здесь основной характеристикой, определяющей топологическую структуру, является число вращения Пуанкаре. Оно же характеризует глобальные бифуркции, осуществляющиеся при изменении параметра.

В [82] было отмечено, что зависимость числа вращения от параметра может описываться канторовской функцией.

Определение. Непрерывная функция $\omega(\varepsilon) : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^1$ — канторовская, если: 1) на $[a, b]$ задано множество C , гомеоморфное канторову совершенному множеству; 2) функция ω постоянна на всех смежных интервалах (связных компонентах разности $[a, b] \setminus C$) и не равна константе на $[a, b]$.

Для векторного поля v_ε класса C^r , $r \geq 2$, непрерывно зависящего от ε , интервалы постоянства числа вращения могут соответствовать как рациональным, так и иррациональным значениям ω ; кроме того, некоторым рациональным значениям могут не соответствовать интервалы постоянства¹⁾.

Следующая теорема, доказанная в [17] методами работы [18] (см. [13]), устанавливает достаточные условия «общности» однопараметрического семейства отображений окружности.

Теорема. Пусть $f_\varepsilon : S^1 \rightarrow S^1$, $\varepsilon \in [a, b]$, — аналитически зависящее от ε семейство аналитических диффеоморфизмов (или аналитических гомеоморфизмов, не являющихся диффеоморфизмами) такое, что: 1) накрывающие отображения $\bar{f}_\varepsilon : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1$ имеют вид: $\bar{f}_\varepsilon(x) = x + h(x, \varepsilon)$, где h — аналитическая по x, ε функция, имеющая период 1 и такая, что при всех $x \in \mathbf{R}^1$, $\varepsilon \in [a, b]$, выполнено одно из соотношений: $dh/d\varepsilon < 0$, либо $dh/d\varepsilon > 0$; 2) $\bar{f}_\varepsilon(z)$ — целая функция комплексного переменного, и на комплексной

¹⁾ Напомним, что рациональному числу вращения соответствует поле с циклом.

плоскости (z) есть хотя бы один корень уравнения $\frac{d}{dz} \bar{f}_\varepsilon(z) = 0$.

Тогда: 1) число вращения $\omega(\varepsilon)$ диффеоморфизма \bar{f}_ε — канторовская функция, не убывающая при $\partial h/\partial \varepsilon > 0$ и не возрастающая при $\partial h/\partial \varepsilon < 0$; 2) каждое свое рациональное значение функция ω принимает на некотором интервале; 3) функция ω строго возрастает при $\partial h/\partial \varepsilon > 0$ (строго убывает при $\partial h/\partial \varepsilon < 0$) на множестве тех значений ε , которым соответствуют иррациональные значения ω .

Пример. Отображение

$$\bar{f}_\varepsilon(x) = x + \varepsilon - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi x$$

удовлетворяет всем условиям теоремы. График $\omega(\varepsilon)$ представлен на рис. 37.

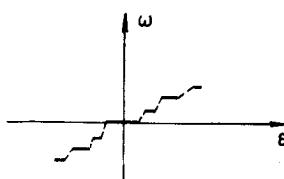


Рис. 37. График зависимости числа вращения от параметра

Замечание. Знание зависимости числа вращения от параметра позволяет указать все бифуркации, осуществляющиеся при изменении ε , за исключением, быть может, бифуркаций, происходящих при постоянном рациональном числе вращения, т. е. бифуркаций слияния и исчезновения (или возникновения) циклов при условии, что некоторые другие циклы при этом сохраняются (см. также п. 7.1).

2.7. Некоторые глобальные бифуркации на бутылке Клейна. До недавнего времени оставалась нерешенной проблема: существует ли на компактном многообразии однопараметрическое семейство векторных полей $\{v_\varepsilon\}$ с базой $[0, 1]$, имеющих при $\varepsilon < 1$ предельный цикл, длина которого неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow 1$; цикл расположен на положительном и отделенном от нуля равномерно по ε расстоянии от особых точек поля v_ε и исчезает при $\varepsilon = 1$. Такая бифуркация цикла получила название «катастрофа голубого неба» [184].

В [84] построено однопараметрическое семейство $\{v_\varepsilon\}$ векторных полей на бутылке Клейна и двумерном торе, в котором происходит катастрофа голубого неба, причем на бутылке Клейна семейство является типичным, а поле v_1 — квазиобщим: оно имеет двукратный предельный цикл L , а все остальные траектории — двоякоасимптотические к нему (при $\varepsilon = 1$ на бу-

тылке Клейна нет глобальной секущей). При $\epsilon < 1$ этот цикл исчезает, возникают два цикла L_ϵ^i , $i \in \{1, 2\}$, негомотопные L , один из которых устойчив, другой — неустойчив, а все остальные траектории блуждающие. Для всех ϵ , $0 \leq \epsilon < 1$, поле v_ϵ — грубое, откуда следует достижимость бифуркационной поверхности в точке v_1 из области грубых систем.

Для поля v_ϵ , являющегося поднятием v_ϵ при двулистном покрытии бутылки Клейна тором, при $\epsilon \neq 1$ существуют два предельных цикла \tilde{L}_ϵ^1 , \tilde{L}_ϵ^2 , являющиеся прообразами циклов L_ϵ^1 , L_ϵ^2 соответственно. При $\epsilon \rightarrow 1$ каждый цикл ведет себя следующим образом: он многократно накручивается по часовой стрелке на тор в некотором узком кольце K_1 , а затем столько же раз раскручивается (против часовой стрелки) в некотором другом кольце K_2 ; $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, границы K_1 и K_2 — гомотопные друг другу окружности (рис. 38).

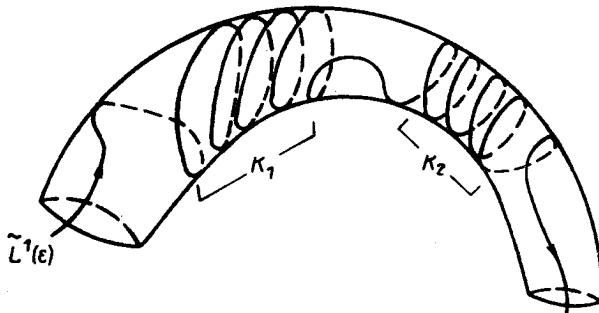


Рис. 38. Катастрофа голубого неба на двумерном торе

Кроме этого примера, других результатов по нелокальным бифуркациям на бутылке Клейна нет. Тем не менее, возможность полного описания бифуркаций в типичных однопараметрических семействах (теорема типа п. 2.2) кажется более осуществимой, чем на других поверхностях, поскольку на бутылке Клейна не могут существовать нетривиальные устойчивые по Пуассону траектории [16], [172].

2.8. Бифуркации на двумерной сфере. Многопараметрический случай. Хотя даже локальные бифуркации в высоких коразмерностях (начиная с трех) на диске полностью не исследованы, тем не менее, полезно затронуть вопрос о нелокальных бифуркациях в многопараметрических семействах векторных полей на двумерной сфере. При их описании возникает необходимость выделения множества траекторий, определяющих перестройки в семействе.

Определения (В. И. Арнольд, 1985).

1. Конечное подмножество фазового пространства называется *несущим бифуркацию*, если существует сколь угодно ма-

лая его окрестность и (зависящая от нее) окрестность бифуркационного значения параметра такие, что вне этой окрестности множества деформация (при значениях параметра из второй окрестности) топологически тривиальна.

Пример 1. Любая точка седловой связки (включая оба седла) несет бифуркацию, даже если добавить к ней еще любые другие точки. В системе с двумя седловыми связками точка на связке (внутренняя) несет бифуркацию лишь вместе с точкой на другой связке.

2. *Носителем бифуркации* называется объединение всех минимальных несущих бифуркацию множеств (минимальное — не содержащее собственного подмножества, несущего бифуркацию).

Пример 2. В системе с одной седловой связкой (стандартно бифурцирующей) носитель совпадает с седловой связкой, включая концы — седла.

3. Две деформации векторных полей с носителями бифуркации Σ_1 и Σ_2 называются *эквивалентными* или *слабо эквивалентными на носителях*, если существуют такие сколь угодно малые окрестности носителей и (зависящие от них) окрестности бифуркационных значений параметров, что ограничения семейств на эти окрестности носителей топологически эквивалентны или слабо эквивалентны¹⁾ над этими окрестностями бифуркационных значений.

Пример 3. Все деформации векторных полей с простой седловой связкой эквивалентны друг другу, независимо от числа грубых положений равновесия и циклов в системе в целом.

Пример 4. Трехпараметрические деформации векторного поля вблизи трехкратного цикла слабо топологически эквивалентны, но, вообще говоря, не эквивалентны: классификация таких деформаций по отношению топологической эквивалентности имеет функциональные инварианты (см. п. 5.11, гл. 2)

Гипотеза (В. И. Арнольд, 1985). В типичном l -параметрическом семействе векторных полей на S^2 :

1) все деформации слабо эквивалентны конечному числу (зависящему лишь от l) на своих носителях;

2) бифуркационные диаграммы, соответствующие отношению слабой эквивалентности, (локально) гомеоморфны конечному числу (зависящему лишь от l) образцов;

3) осуществляющиеся деформации версальны и слабо структурно устойчивы;

4) семейство в целом слабо структурно устойчиво;

5) носители бифуркаций состоят из конечного (зависящего лишь от l) числа (особых) траекторий;

¹⁾ Определение топологической и слабой топологической эквивалентности семейств и их структурной устойчивости и слабой структурной устойчивости аналогично приведенному в п. 2.2, лишь отрезок l нужно заменить окрестностью бифуркационного значения.

6) число точек минимального несущего множества ограничено (постоянной, зависящей лишь от l).

Слабую эквивалентность здесь нельзя заменить обычной, см. пример 4.

Доказательство или опровержение приведенных утверждений, безусловно, необходимый этап при рассмотрении нелокальных бифуркаций в типичных l -параметрических семействах. Пока известно мало: даже для семейств, состоящих из грубых и квазиобщих векторных полей, пункты 3) и 4) (а только они для подобных семейств нетривиальны) не доказаны. Насколько нам известно, при $l=2$ рассматривались лишь две нелокальные бифуркации.

Теорема 1 ([92]). В типичном двупараметрическом семействе векторных полей класса C^r , $r \geq 3$, встречаются только такие поля с петлей сепаратрисы седла, имеющего нулевую седловую величину, бифуркации которых в этом семействе изображены на рис. 39.

Теорема 2. Пусть векторное поле $v \in \chi^r(M)$, $r \geq 6$, имеет контур Γ , состоящий из двух седел O_1 , O_2 и двух сепаратрис Γ_1 , Γ_2 таких, что $\alpha(\Gamma_1) = \omega(\Gamma_2) = \{O_1\}$, $\alpha(\Gamma_2) = \omega(\Gamma_1) = \{O_2\}$. Пусть λ_{ij} — собственные числа линейной

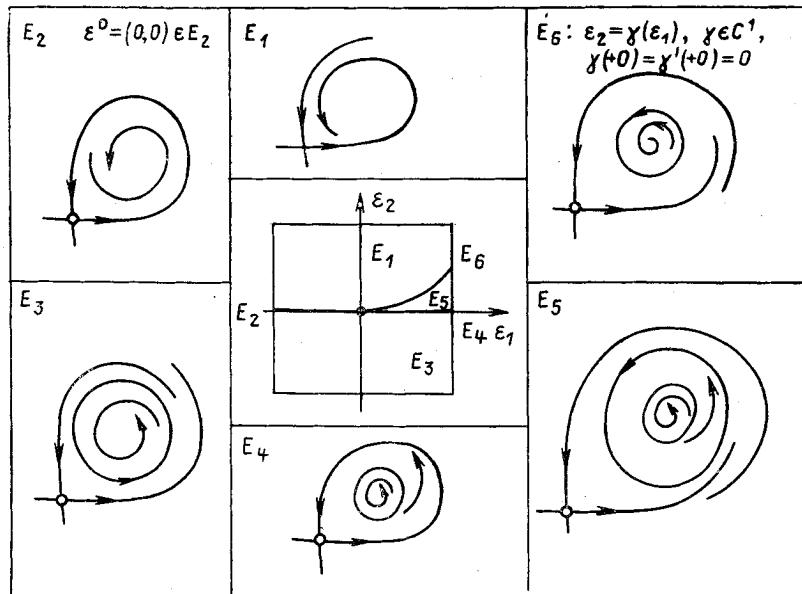


Рис. 39. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов для типичной двупараметрической деформации векторного поля с петлей сепаратрисы. Бифуркационная кривая, отвечающая полуустойчивому циклу, имеет бесконечный порядок касания с осью ε_1 в нуле

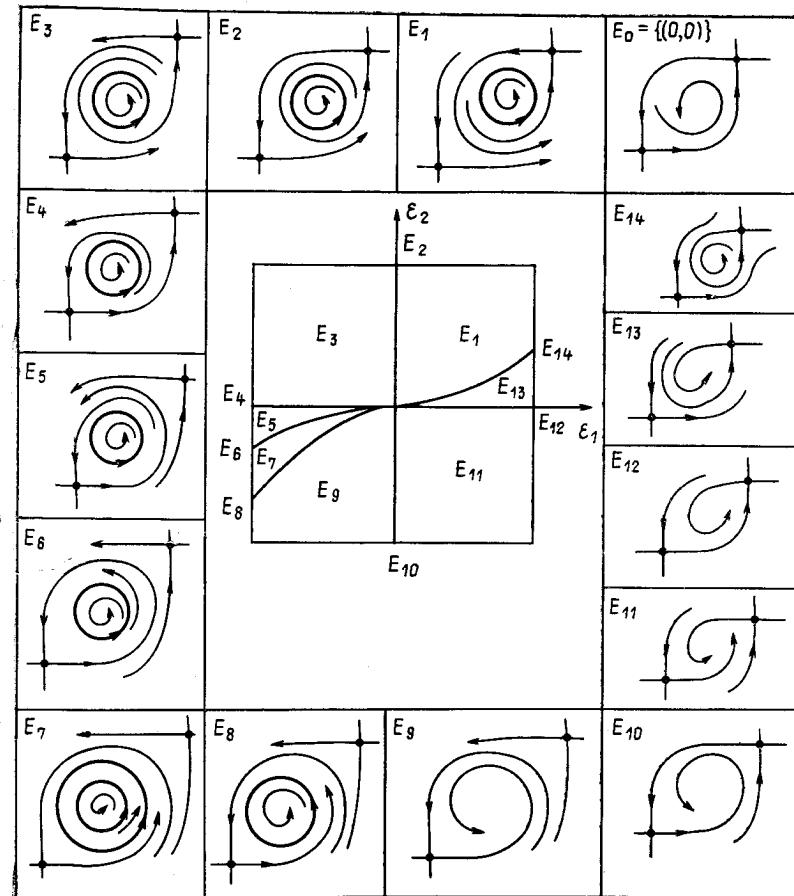


Рис. 40а. Бифуркационная диаграмма и перестройки фазовых портретов для типичной двупараметрической деформации векторного поля с контуром из двух седел. а. Седловые величины разных знаков. б. Седловые величины одного знака

части поля v_0 в точке O_i , $i, j \in \{1, 2\}$, $\sigma_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2}$; $\Delta = \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21}$. Предположим, что Γ имеет окрестность U , гомеоморфную $\mathbf{R}^1 \times S^1$, такую, что одна из компонент $U \setminus \Gamma$ не пересекается с устойчивыми и неустойчивыми многообразиями точек O_1 , O_2 . Положим $k=1$ ($k=2$), если $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$, $\Delta > 0$ ($\Delta < 0$), $k=3$, $k=4$), если $\sigma_i < 0$ ($\sigma_i > 0$), $i=1, 2$. Тогда типичная двухпараметрическая деформация $\{v_r\} \subset \chi'(M)$, $r \geq 6$, с носителем на Γ имеет бифуркационную диаграмму, изображенную на рис. 40а (рис. 40б) при $k=1$ ($k=3$), а при $k=2$ ($k=4$) — диаграмму, получающуюся из диаграммы рис. 40а (рис. 40б) сменой направ-

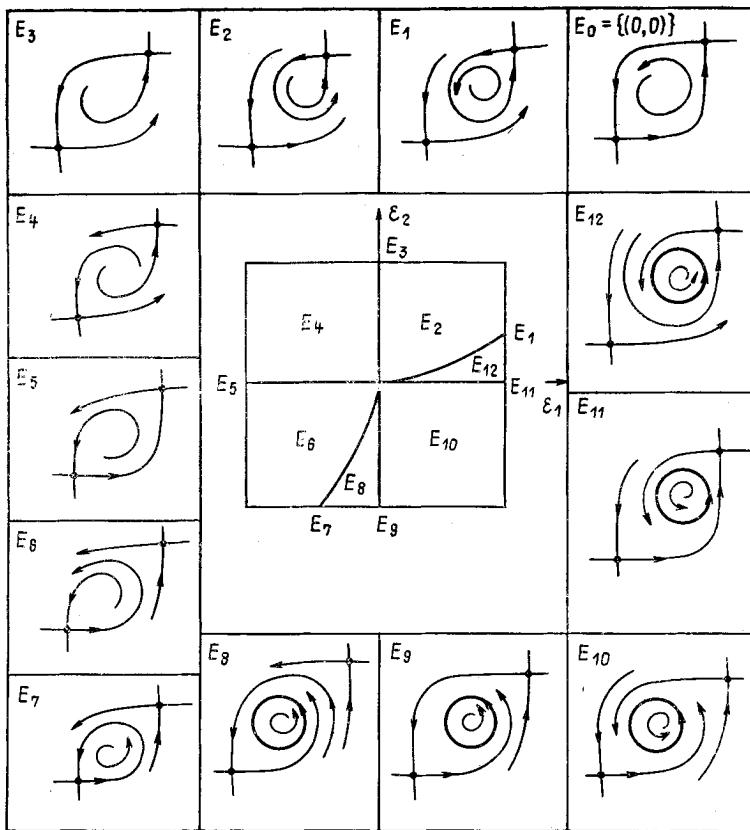


Рис. 406

ленияя времени. Перестройки фазовых портретов в теореме 2 также изображены на рис. 40а, б¹⁾.

2.9. Некоторые открытые вопросы. Кроме приведенных в предыдущих пунктах этого параграфа, выделим еще несколько вопросов.

1. Какова структура компонент бифуркационного множества, отвечающих системам с бесконечным неблуждающим множеством?

В частности, могут ли они содержать подмногообразия ко-размерности 1?

2. Что можно сказать о бифуркациях систем на неориенти-руемой поверхности рода больше 3?

¹⁾ Случай а исследован В. Ш. Ройтенбергом (1985); случай б — В. П. Ноздрачевой, (РЖМат, 1981, 8Б233); рождение циклов при бифуркациях контуров на плоскости исследовано Рейном (Lect. Notes Math., 1980, № 810)

3. Как описать однопараметрические деформации квазиобщих систем, не являющихся системами первой степени негрузости, в частности, бифуркации, в результате которых появляются и исчезают нетривиальные устойчивые по Пуассону траектории? (По-видимому, здесь не обойтись без символической динамики типа теории нидинг-последовательностей [135], [165].)

4. Что можно сказать о бифуркациях градиентных систем?

§ 3. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболической особой точки

Бифуркации, описанные в этом параграфе, происходят в однопараметрических семействах общего положения и приводят к возникновению грубого предельного цикла или нетривиального гиперболического множества.

3.1. Узел по гиперболическим переменным.

Теорема ([109]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому (критическому) значению параметра соответствует векторное поле v_0 с вырожденной особой точкой O , имеющей одно собственное значение 0, узел по гиперболическим переменным и гомоклиническую траекторию Γ точки O . Тогда все некритические поля семейства, достаточно близкие к критическому, либо имеют две особые точки, близкие к O (когда параметр лежит по одну сторону от нуля), либо имеют устойчивый (или вполне неустойчивый)¹⁾ предельный цикл, когда параметр лежит по другую сторону от нуля. Этот цикл стремится к $\Gamma \cup O$ при стремлении параметра к нулю.

Требования общности положения. 1. На росток семейства в точке $(0, 0)$ произведения фазового пространства на пространство параметров налагаются те же требования общности положения, что и в п. 2.1, гл. 1.2. На поле v_0 налагается следующее нелокальное требование: $\Gamma \cap W^s = \emptyset$. Другими словами, гомоклиническая траектория входит внутрь, а не в край устойчивого множества. 3. Локальное семейство трансверсально пересекает гиперповерхность векторных полей с вырожденной особой точкой.

Предыдущий результат можно сформулировать на языке пространств векторных полей.

Теорема. Пусть поле v_0 удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям. Тогда в пространстве $C^2(U)$ векторных полей на некоторой окрестности U кривой $\Gamma \cup O$, наделенном топологией C^2 , существует окрестность W поля v_0 , обладающая следующим свойством. Окрестность W делится на две области гиперповерхностью B , проходящей через v_0 , причем: все поля, лежащие по одну сторону от B , имеют две особые точки вбли-

¹⁾ Цикл называется вполне неустойчивым, если он становится устойчивым при обращении времени.

зи O ; все поля, лежащие по другую сторону от B , имеют устойчивый или вполне неустойчивый предельный цикл; все поля, лежащие на B , топологически эквивалентны v_0 в области U .

З а м е ч а н и е. Все теоремы о бифуркациях вырождений коразмерности 1 имеют двойственные формулировки: на языке однопараметрических семейств и на языке гиперповерхностей в функциональном пространстве. Ниже теоремы формулируются в основном на языке семейств.

3.2. Седло по гиперболическим переменным: одна гомоклиническая траектория. Векторное поле с вырожденной особой точкой типа седло по гиперболическим переменным может иметь любое конечное число гомоклинических траекторий особой точки; такие поля встречаются неустранимым образом в однопараметрических семействах общего положения. Обозначим через p число гомоклинических траекторий вырожденной особой точки O . Случай $p=1$ и $p>1$ резко отличаются друг от друга.

Т е о р е м а ([110]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому критическому значению параметра соответствует векторное поле v_0 с вырожденной особой точкой O типа седло по гиперболическим переменным, имеющей одно собственное значение 0 и одну гомоклиническую траекторию. Тогда для этого семейства справедливо заключение первой теоремы п. 3.1, только рождающийся грубый цикл будет седловым (то есть гиперболическим, но ни устойчивым, ни вполне неустойчивым).

Требования общности положения на поле v_0 и на семейство те же, что в п. 3.1 и, кроме того, требуется, чтобы устойчивое и неустойчивое множества пересекались трансверсально.

При бифуркации нескольких гомоклинических траекторий получаются поля, описываемые с помощью топологической схемы Бернулли.

3.3. Топологическая схема Бернулли. Пусть Ω — пространство бесконечных в обе стороны последовательностей, составленных из p символов $\{1, \dots, p\}$ с расстоянием

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|\alpha_k - \alpha'_k|}{2^{|k|}},$$

$$\omega = (\dots \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \dots), \quad \omega' = (\dots \alpha'_{-1}, \alpha'_0, \alpha'_1, \dots).$$

Через $\sigma: \Omega \rightarrow \Omega$ обозначим гомеоморфизм, сдвигающий каждый член последовательности на следующее место:

$$\sigma\omega = \omega', \quad \omega = \{\alpha_k\}, \quad \omega' = \{\beta_k\}, \quad \beta_{k-1} = \alpha_k.$$

Пара (σ, Ω) называется *топологической схемой Бернулли*. Надстройка над топологической схемой Бернулли — это периодическое векторное поле X_σ , преобразование монодромии которого совпадает с σ . Это поле получается из стандартного векторного

поля $\partial/\partial t$ на прямом произведении $I \times \Omega$, $I = \{t \in [0, 1]\}$, с помощью склейки \times точек $(0, \omega)$ и $(1, \omega)$. Фазовый поток на подмножестве Σ евклидова пространства топологически эквивалентен надстройке над схемой Бернулли, если существует гомеоморфизм $\Sigma \rightarrow I \times \Omega / \times$, переводящий исходное поле в X_σ .

Замечание. Подмножество Σ похоже на прямое произведение канторова совершенного множества на окружность.

Пример. Пусть K_1 и K_2 — два квадрата на плоскости со сторонами длины 1, параллельными координатным осям, и центрами $(1, 0)$ и $(3, 0)$. Рассмотрим отображение $f: K_1 \cup K_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; отображение $f|_{K_i}: (x, y) \mapsto A((x, y) + a_i)$ — суперпозиция переноса на вектор a_i и гиперболического поворота $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (10x, 0.1y)$ (рис. 41), $a_1 = (-1, 1)$, $a_2 = (-3, 3)$. Множество точек плоскости, на которых определены все (положительные и отрицательные) итерации отображения f , гомеоморфно отображается на пространство последовательностей из двух символов следующим образом: точке P соответствует последовательность $a_k(P)$, причем $a_k(P) = i$, если и только если $f^k(P) \in K_i$. Нетрудно доказать, что это отображение — гомеоморфизм; очевидно, он сопрягает отображение f со сдвигом σ .

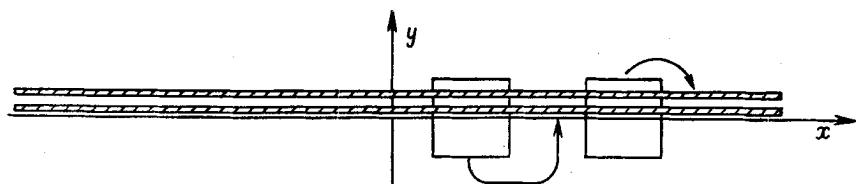


Рис. 41. Модельное отображение в задаче о бифуркации двух гомоклинических траекторий седлоузла

3.4. Седло по гиперболическим переменным: несколько гомоклинических траекторий.

Теорема ([113]). В типичном однопараметрическом семействе векторных полей встречаются векторные поля с вырожденной особой точкой O , имеющей одно собственное значение 0, седло по гиперболическим переменным и p гомоклинических траекторий Γ_i точки O , $p > 1$. Тогда для всех полей v_ϵ , соответствующих достаточно близким к критическому значениям параметра, лежащим по одну сторону от критического значения, справедливо следующее утверждение. Для некоторой окрестности U объединения $O \cup \Gamma_i$ ограничение потока поля v_ϵ на множество неблуждающих траекторий топологически эквивалентно надстройке над топологической схемой Бернулли из p символов.

Требования общности положения на семейство — те же, что в п. 3.2. Механизм возникновения инвариантного множества при $p=2$ иллюстрируется примером п. 3.2.

Предположим теперь, что $S_O^u \cap S_O^s = O \cup \left(\bigcup_{i=1}^p \Gamma_i \right)$, причем

устойчивое и неустойчивое множества пересекаются трансверсально по Γ_i , $i=1, \dots, p$. Предположим также, что поле v_0 лежит на границе множества векторных полей Морса—Смейла, его неблуждающее множество конечно, гиперболично (кроме нуля), и устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических неблуждающих траекторий трансверсально пересекаются между собой и с $S_O^u, S_O^s, W_O^u, W_O^s$. Из следующей теоремы вытекает достижимость бифуркационной поверхности с обеих сторон.

Теорема. При выполнении сформулированных условий для векторного поля v_0 существует такая окрестность U поля v_0 в $\chi^r(M)$, что для любой системы $v \in U$, не имеющей равновесия в окрестности точки O , справедлива аксиома А и условие сильной трансверсальности Смейла.

Напомним, что векторное поле удовлетворяет аксиоме А, если его множество неблуждающих точек гиперболично и в нем плотны периодические траектории поля. Условие сильной трансверсальности состоит в следующем: устойчивые и неустойчивые многообразия всех неблуждающих траекторий пересекаются трансверсально. Подробнее о гиперболической теории см. том 2 настоящего издания.

3.5. Главные семейства. Построим сначала главные семейства — нормальные формы деформаций векторных полей из п. 3.2 в трехмерном фазовом пространстве; этих семейств два. Рассмотрим куб K_0 : $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \leq 1$, $|z| \leq 1$ и векторное поле в K_0 :

$$v_\epsilon^\circ = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (z^2 + \epsilon) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Склейм точки граней $z=1$ и $z=-1$ куба K_0 двумя разными способами. Положим

- 1) $f_0^+ : (x_1, x_2, 1) \rightarrow (x_1, x_2, -1);$
- 2) $f_0^- : (x_1, x_2, 1) \rightarrow (-x_1, -x_2, -1).$

Получим трехмерные многообразия K^+ и K^- , гомеоморфные друг другу (и прямому произведению двумерного диска на S^1), и векторные поля v_ϵ^+ и v_ϵ^- соответственно. Легко проверяется, что:

1) при $\epsilon < 0$ v_ϵ^\pm имеет в K^\pm два гиперболических положения равновесия O_1, O_2 : $\dim W_{O_1}^s = 2$, $\dim W_{O_2}^u = 2$, причем $W_{O_1}^s$ и $W_{O_2}^u$ трансверсально пересекаются по двум гиперболическим траекториям Γ_1 и Γ_2 ; 2) при $\epsilon \rightarrow 0$ O_1 и O_2 сливаются по траектории Γ_1 , образуя O при $\epsilon = 0$; Γ_2 превращается в гомоклиническую

траекторию Γ ; 3) при $\varepsilon > 0$ векторное поле v_ε^+ имеет седловой предельный цикл L_ε ($x_1 = x_2 = 0$), который является единственной неблуждающей траекторией поля v_ε^\pm в K^\pm , причем для поля v_ε^+ устойчивое и неустойчивое многообразия цикла являются цилиндрами, а для v_ε^- — листами Мёбиуса.

Теорема (о версальности). Росток однопараметрического семейства общего положения векторных полей $\{w_\varepsilon\}$ на гомоклинической траектории негиперболической особой точки — седла по гиперболическим переменным в \mathbb{R}^3 — топологически эквивалентен ростку одного из главных семейств $\{v_\varepsilon^+\}$ или $\{v_\varepsilon^-\}$ на гомоклинической траектории поля v_0^+ или v_0^- .

Доказательство теоремы проводится с использованием техники работ [113], [32]. Для произвольного n имеет место аналог этой теоремы — главное семейство получается надстройкой гиперболического положения равновесия над $\{v_\varepsilon^+\}$ или $\{v_\varepsilon^-\}$.

Аналогично строятся главные деформации уравнений, описанных в п. 3.1, и формулируется теорема об их версальности. Для каждого n главная деформация единственна.

§ 4. Бифуркации гомоклинических траекторий негиперболического цикла

Бифуркации, названные в заглавии, приводят к возникновению инвариантных торов и бутылок Клейна, к рождению сложных инвариантных множеств со счетным числом циклов и странных аттракторов. Некоторые случаи изучены не полностью; в п. 4.11 формулируются открытые вопросы. В конце параграфа рассматривается структурная устойчивость однопараметрических семейств диффеоморфизмов.

4.1. Структура семейства гомоклинических траекторий. Как указывалось в § 1, точке общего положения на границе множества систем Морса—Смейла соответствует поле с гомоклинической траекторией негиперболического цикла, только если один мультиликатор этого цикла равен 1. На бифуркации такого поля существенно влияет компактность или некомпактность объединения цикла и множества его гомоклинических траекторий.

Остановимся на компактном случае; некомпактный обсуждается в п. 4.7.

Лемма ([30], [33]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения встретилось векторное поле с негиперболическим циклом, имеющим мультиликатор 1, объединение которого со всеми его гомоклиническими траекториями компактно. Тогда это объединение состоит из конечного числа (скажем, p) непрерывных двумерных многообразий, каждое из которых гомеоморфно тору или бутылке Клейна. Если цикл — типа узел

по гиперболическим переменным, то $p=1$, и рассматриваемое объединение совпадает с S^u или S^s для устойчивого или неустойчивого узла соответственно.

Другое важное свойство, определяющее характер бифуркации (а также гладкость описанных в лемме многообразий), — это так называемая критичность цикла.

4.2. Критические и некритические циклы. Пусть гладкое векторное поле имеет предельный цикл с мультипликатором единицы типа «устойчивый узел по гиперболическим переменным». Тогда некоторая окрестность цикла наделена гладким слоением со слоями коразмерности 1, инвариантным относительно потока и *сильно устойчивым*: каждый слой экспоненциально сжимается при сдвиге вдоль траекторий поля за положительное время [162], [180]. Один из слоев совпадает с устойчивым многообразием цикла. Аналогично описывается *сильно неустойчивое* слоение в случае неустойчивого узла по гиперболическим переменным.

Пусть цикл векторного поля имеет мультипликатор 1 и является седлом по гиперболическим переменным. Тогда ограничение поля на центрально устойчивое (центрально неустойчивое) многообразие $W^{sc}(W^{uc})$ имеет цикл типа устойчивый (неустойчивый) узел по гиперболическим переменным. На многообразиях W^{sc} и W^{uc} можно определить, как и выше, *сильно устойчивое* и *сильно неустойчивое* слоения, обозначаемые через F^{ss} и F^{uu} .

Определение ([180]). Предельный цикл векторного поля с мультипликатором единицы называется *s-критическим*, если либо существует гиперболическое положение равновесия или гиперболический цикл, чье устойчивое или неустойчивое многообразие касается одного из слоев F^{ss} на S^s , либо неустойчивое множество цикла касается одного из этих слоев. В последнем случае объединение гомоклинических траекторий цикла называется *s-критическим*. Аналогично определяются *u-критические* цикл и объединение его гомоклинических траекторий: нужно только заменить F^{ss} , S^s , S^u на F^{uu} , S^u и S^s . Цикл и объединение его гомоклинических траекторий называются *критическими*, если они *s-* или *u-критические*, и *некритическими* в противном случае (рис. 42).

Замечание. Торы и бутылки Клейна в лемме п. 4.1 — гладкие, если объединение гомоклинических траекторий цикла некритическое; в противном случае среди них есть негладкие.

4.3. Рождение гладкого двумерного аттрактора. Мы используем определение аттрактора из [26, стр. 42], которое воспроизводится ниже на стр. 155. Результаты этого и следующего пунктов параллельны результатам § 3, только вместо негиперболических особых точек с собственным значением нуль бифурцируют негиперболические циклы с мультипликатором 1. В ре-

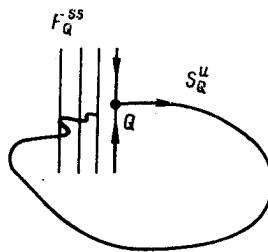


Рис. 42. Трансверсальное сечение множества гомоклинических траекторий s -критического цикла (компактный случай)

зультате вместо грубых положений равновесия рождаются грубые циклы, вместо циклов — торы или бутылки Клейна и т. д.

Теорема ([31]). В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее следующими свойствами:

1°. Поле имеет негиперболический цикл L с мультипликатором 1.

2°. Объединение цикла и его гомоклинических траекторий некритично и компактно.

3°. Цикл L — устойчивый узел по гиперболическим переменным.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1°. Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля и достаточно близким к нулю, имеют гладкие двумерные аттракторы M_ϵ^2 , диффеоморфные тору или бутылке Клейна. При $\epsilon \rightarrow 0$ аттрактор M_ϵ^2 стремится к объединению $S_L^u \cup L$, которому он гомеоморфен.

2°. Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по другую сторону от нуля, имеют по два грубых предельных цикла и не имеют других неблуждающих траекторий и некоторой окрестности объединения множества гомоклинических траекторий цикла L с самим циклом. ▲

Случай неустойчивого узла по гиперболическим переменным сводится к предыдущему обращением времени; рождается гладкий *репеллер*¹⁾, диффеоморфный тору или бутылке Клейна.

4.4. Рождение сложных инвариантных множеств (некритический случай).

¹⁾ Репеллер — инвариантное множество динамической системы, превращающееся в аттрактор при обращении времени.

Теорема. В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее свойствами 1° и 2° из теоремы п. 4.3, а также свойством

3° . Цикл L — типа седло по гиперболическим переменным, и объединение его гомоклинических траекторий связно.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда для семейства справедливы заключения 1° и 2° теоремы п. 4.3; только «аттрактор M_e^2 » в утверждении 1° нужно заменить на «инвариантное многообразие M_e^2 », оно не является ни аттрактором, ни репеллером. ▲

При бифуркации цикла, объединение гомоклинических траекторий которого некритично и состоит из p торов и бутылок Клейна ($p > 1$), рождается инвариантное гиперболическое множество, содержащее счетное число двумерных инвариантных многообразий.

Теорема. В однопараметрическом семействе общего положения может встретиться векторное поле, обладающее свойствами 1° и 2° из теоремы п. 4.3, а также свойством

$3''$. Цикл L — седло по гиперболическим переменным, и объединение его гомоклинических траекторий состоит из p связных компонент.

Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1° . Все поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля и достаточно близким к нулю, имеют инвариантные множества Ω_e .

2° . Все компоненты линейной связности пространства Ω_e двумерны. Существует взаимно однозначное отображение множества этих компонент на множество траекторий топологической схемы Бернулли из p символов. Компонента линейной связности компактна, если и только если соответствующая траектория периодична.

3° . Для семейства справедливо заключение 2° теоремы пункта 4.3. ▲

Теоремы этого пункта анонсированы в [33] для $n=4$.

4.5. Критический случай. В случае, когда объединение гомоклинических траекторий цикла с мультипликатором 1 компактно и критично, при бифуркации соответствующего поля могут возникнуть странные аттракторы.

«Теорема» ([31], [180]). В однопараметрических семействах общего положения может встретиться векторное поле (скажем, v_0), обладающее свойствами 1° и 3° из теоремы п. 4.3; а также свойством $2'':$ объединение цикла L и его гомоклинических траекторий является компактным и критическим; множество S_L^u касается некоторых слоев вполне устойчивого слоения F_L^{ss} . Пусть такое поле соответствует нулевому значению параметра семейства. Тогда

1°. По одну сторону от нуля имеется открытое множество с предельной точкой 0, состоящее из счетного объединения интервалов. Каждому значению ε из этого множества соответствует поле v_ε семейства, имеющее странный аттрактор M_ε . Этот аттрактор содержит счетное множество периодических траекторий и стремится к объединению $S_L \cup L$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

2°. Справедливо заключение 2° теоремы пункта 4.3. ▲

Эта теорема, в несколько иных терминах, сформулирована в [180], где дан набросок ее доказательства¹⁾. Полное доказательство теоремы получено в [31] при дополнительном требовании на поле v_0 (не повышающем коразмерности вырождения, но сужающем область рассматриваемых вырожденных полей на гиперповерхности коразмерности 1 в функциональном пространстве). Сформулируем это требование и заодно поясним механизм возникновения странного аттрактора.

Предположим для простоты, что преобразование монодромии цикла L (как функция от начальных условий и параметра) может быть продолжено в окрестность пересечения плоскости, трансверсальной к полю, и объединения гомоклинических траекторий цикла. На этой плоскости циклу соответствует неподвижная точка Q диффеоморфизма f_0 , соответствующего полю v_0 . Один мультиликатор этой неподвижной точки разен 1, остальные по модулю меньше 1. Объединение гомоклинических траекторий высекает на трансверсали кривую S_Q^u , которая становится замкнутой при добавлении точки Q (рис. 42). Сильно устойчивое слоение, соответствующее полю v_0 , высекает на трансверсали сильно устойчивое слоение F_Q^{ss} диффеоморфизма f_0 ; кризая S_Q^u касается некоторых слоев этого слоения.

Прежде чем формулировать дополнительное требование на поле v_0 , приведем грубое рассуждение, подтверждающее существование аттрактора. Поскольку в некоторой окрестности точки Q диффеоморфизм f_0 — сжимающий по гиперболическим переменным, существует некоторая окрестность U «гомоклинической кривой» $S_Q^u \cup Q$, замыкание которой \bar{U} компактно и переходит в U под действием f_0 . Тогда для всех достаточно малых ε , $f_\varepsilon \bar{U} \subset U$. Пересечение

$$A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} f_\varepsilon^k U$$

и будет максимальным аттрактором диффеоморфизма f_ε . Ниже в этом параграфе эпитет «максимальный» опускается.

¹⁾ Аналог этой теоремы для случая седла по гиперболическим переменным (когда вместо аттрактора рождается сложное инвариантное множество) анонсирован в [33]. Отметим, что полное доказательство теоремы до сих пор не опубликовано и, по-видимому, не получено.

Предположим, что при малых $\varepsilon > 0$ точка Q исчезает, а при $\varepsilon < 0$ распадается на две невырожденные. Пусть w — окрестность точки Q , в которой определено проектирование $\pi: w \rightarrow W_Q^c$ вдоль слоев сильно устойчивого слояния F_Q^{ss} диффеоморфизма f_0 на его центральное многообразие. Окрестность w делится многообразием W_Q^s на две части w^+ и w^- , определяемые требованиями: $\pi f_0 w^- \subset w$, $\pi f_0^{-1} w^+ \subset w$. Поскольку все точки на S_Q^u — гомоклинические, то для любой дуги $\Gamma \subset w^+$ существует такое k , что дуга $f_0^k \Gamma$ принадлежит w^- .

Дополнительное требование на f_0 состоит в следующем. Существует дуга $\Gamma \subset S_Q^u \cap w^-$, обладающая следующими свойствами

1°. Начало Γ переходит в конец под действием f_0 .

2°. Существует целое k и слой $F \subset w^-$ слояния F^{ss} такие, что: область, заключенная в окрестности w между слоями F и $f_0 F$ высекает на кривой $\Gamma' = f_0^k \Gamma$ две дуги, трансверсальные слоению F^{ss} (см. рис. 43).

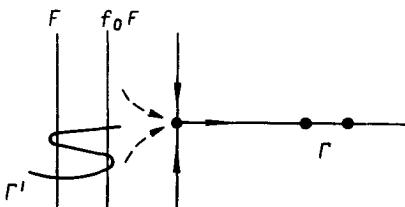


Рис. 43. Пересечение неустойчивого множества s -критического цикла со связной компонентой фундаментальной области преобразования монодромии

Поясним теперь, почему при сколь угодно малых положительных ε аттрактор A_ε бывает странным.

Рассмотрим такую окрестность V дуги Γ , образ которой $V' = f_0^k V$ (являющийся окрестностью дуги Γ') целиком принадлежит w^- . Для любого $\varepsilon_0 > 0$ существует положительное $\varepsilon < \varepsilon_0$ и целое $N(\varepsilon)$ такие, что

1°. Образ $V'' = f_\varepsilon^{N(\varepsilon)} V$ представляет собой подкову, сильно сжатую по гиперболическим переменным (при $\varepsilon \rightarrow 0$ степень $N(\varepsilon)$ стремится к бесконечности) и не сильно искаженную в направлении, параллельном касательной в нуле к W_Q^s (это последнее искажение оценивается равномерно по ε).

2°. Существует такая последовательность интервалов на отрезке $[0, \varepsilon_0]$, стремящаяся к нулю, что для значения ε из любого из этих интервалов подкова V'' пересекает область V по двум связным компонентам, образ каждой из которых при проектиро-

вании π содержит Γ . Хотя отображение $\Phi_\varepsilon = f^{k+N(\varepsilon)} : V \rightarrow V''$ — не настоящая подкова Смейла¹⁾ (есть сжатие в одном направлении, но нет растяжения в дополнительном), можно доказать существование счетного числа циклов у диффеоморфизма Φ_ε , а значит, и f_ε .

Тем самым, аттрактор A_ε не является одномерным многообразием.

С другой стороны, при достаточно малом ε , некоторая степень диффеоморфизма f_ε уменьшает двумерные объемы. Поэтому аттрактор A_ε не является и многообразием размерности выше 1. Следовательно, аттрактор A_ε — странный.

4.6. Двухшаговый переход от устойчивости к турбулентности. Можно представить себе однопараметрическое семейство векторных полей, в котором значениям параметра меньше первого критического соответствуют поля с глобально устойчивой особой точкой. При прохождении первого критического значения рождается устойчивый предельный цикл; при прохождении второго критического значения этот цикл исчезает, как описано в п. 4.5. При этом рождается странный аттрактор и наступает хаос.

Здесь рассматриваются только бифуркации, заметные для «физического наблюдателя», который видит только перестройки устойчивых (установившихся) режимов.

4.7. Некомпактное множество гомоклинических траекторий. Всюду в этом пункте цикл L — узел по гиперболическим переменным, для определенности — устойчивый.

Будем предполагать, что векторное поле, имеющее цикл с мультиликатором 1 и с некомпактным объединением множества гомоклинических траекторий с L , удовлетворяет следующим условиям общности положения: его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических положений равновесия и гиперболических, кроме L , циклов, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально между собой и с S_L^u , S_L^s , W_L^s , W_L^u , последние пересекаются трансверсально в каждой точке, не принадлежащей L .

Следующая лемма доказывается аналогично [198].

Л е м м а. При сформулированных предположениях векторное поле v_0 имеет контур Q_0, Q_1, \dots, Q_k , содержащий $L = Q_j$ и такой, что устойчивые и неустойчивые множества элементов контура пересекаются трансверсально (случай 2, п. 1.5).

Переобозначим элементы контура так, чтобы $L = Q_0 (= Q_k)$. Из трансверсальности пересечений многообразий и λ -леммы несложно вывести.

Следствие. Для любого семейства векторных полей $\{v_\varepsilon\}$, пересекающего бифуркационное множество в точке v_0 и не имею-

¹⁾ О подкове Смейла см. том 2 настоящего издания, стр. 131.

шего при $\varepsilon > 0$ предельных циклов в окрестности L , существует $(k-1)$ последовательностей $\{\varepsilon_i^s\}$, $i \in \mathbb{N}$, $s \in \{1, \dots, k-1\}$, $\varepsilon_i^s \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$, таких, что при $\varepsilon = \varepsilon_i^s$ векторное поле v_ε имеет гомоклиническую траекторию положения равновесия или цикла Q_s .

Будем говорить, что имеет место случай В, если $k=2$, и Q_1 — положение равновесия типа седло либо с ведущим устойчивым направлением, отвечающим вещественному собственному числу, либо, в противном случае, с отрицательной седловой величиной (см. п. 5.1). Во всех других случаях будем говорить, что имеет место случай А.

Из предыдущего следствия вытекает

Теорема ([28]). Если имеет место случай А, то на отрезке $(0, \varepsilon_0]$, ε_0 — достаточно мало, существует $(k-1)$ последовательностей интервалов $\{\delta_i^s\}_{i \in \mathbb{N}}$, $s \in \{1, \dots, k-1\}$, стягивающихся к нулю при $i \rightarrow \infty$ таких, что при $\varepsilon \in \delta_i^s$ векторное поле v_ε имеет счетное множество седловых предельных циклов.

Следствие. Предположим, что в дополнение к условиям теоремы выполнено следующее условие: для любого положения равновесия или цикла Q такого, что $S_L^u \cap W_Q^s \neq \emptyset$, имеет место включение $W_Q^u \setminus Q \subset S_L^s$. Тогда при $\varepsilon \in \delta_i^s$ векторное поле v_ε имеет странный аттрактор в окрестности S_L^u , стремящийся к этому множеству при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Случай В, насколько нам известно, не исследован.

4.8. Перемежаемость. Предположим, что выполнены условия предыдущего следствия, либо условия теоремы п. 4.5, т. е. у векторного поля v_ε существует странный аттрактор для $\varepsilon > 0$. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\psi(x)$ на фазовом пространстве. Пусть $x = x(t)$ — траектория, принадлежащая странному аттрактору. Тогда график функции $\psi(x(t))$ в общем случае имеет следующий вид: длинный цуг близких к периодическим осцилляций — на этом интервале времени изображающая точка находится в малой окрестности исчезнувшего цикла — затем «турбулентный» всплеск, затем снова интервал периодичности и т. д. Такой режим был назван в [170] *перемежаемостью*. Перемежаемость свидетельствует о бифуркации возникновения странного аттрактора при исчезновении полуустойчивого цикла и часто встречается в моделях реальных процессов (см., например [63], [171]).

Кроме перечисленных случаев, перемежаемость может быть обусловлена исчезновением цикла с мультипликатором 1, узлового по гиперболическим переменным, имеющего гомоклиническую траекторию, принадлежащую W^s (векторное поле в этом случае уже не принадлежит границе множества систем Морса—Смейла, см. [81]).

4.9. Достижимость, недостижимость. Пусть v_0 — векторное поле общего положения (т. е. удовлетворяющее условиям, анало-

гичным сформулированным в начале п. 4.7) на границе множества систем Морса—Смейла B_1 , имеющее негиперболический цикл L . Предположим, что имеет место одна из следующих возможностей: 1) L —цикль с мультипликатором (-1) ; 2) L —цикль с парой невещественных мультипликаторов (напомним, см. п.п. 1.4, 1.6, что в случаях 1) и 2) L не входит в состав контура, и не имеется двоякоасимптотических к L траекторий, отличных от L); 3) L —цикль с мультипликатором $+1$, и либо: (3a), $S_L^u \cap S_L^s = L$ (нет гомоклинических траекторий цикла L), либо (3b) $S_L^u \cap S_L^s$ —бутылка Клейна, гладко вложенная в фазовое пространство, либо (3c) $S_L^u \cap S_L^s$ —гладкий тор.

Лемма. При выполнении сформулированных условий в окрестности v_0 в $\chi'(M)$ всюду плотны системы Морса—Смейла.

Эта лемма следует из теоремы Купки—Смейла [138] и из всюду плотности систем Морса—Смейла на торе и бутылке Клейна.

Остается решить вопрос о достижимости или недоступности бифуркационной поверхности и, в последнем случае, определить бифуркции, которыми недоступность обусловлена.

Утверждение. В случае 1) пересечение $B_1 \cap \mathfrak{A}$ связано, где $\mathfrak{A} \subset \chi'(M)$ —шар достаточно малого диаметра с центром в v_0 , и все векторные поля в $\mathfrak{A} \setminus B_1$ являются полями Морса—Смейла.

Как следствие получаем достижимость с обеих сторон B_1 в точке v_0 .

Утверждение легко следует из некоторого варианта теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий от параметров, вытекающего, например, из [162].

В случае 2) после рождения тора «почти» для любого однопараметрического семейства векторных полей при изменении параметра число вращения меняется, следовательно, происходит бесконечное множество бифуркаций. Однако есть семейства, для которых при изменении параметра число вращения на торе не меняется—бифуркационная поверхность может быть и достижимой.

В случае 3) информацию о достижимости соберем в следующую таблицу, детализирующую часть общей таблицы 2 пункта 1.8.

Здесь через W_1^s и W_2^u обозначены устойчивые и неустойчивые многообразия гиперболических положений равновесия или циклов. Поясним, из-за чего может возникать недоступность в случае (3a) на рис. 44, где изображен диффеоморфизм двумерного диска, имеющий при $\varepsilon=0$ неподвижную точку Q с мультипликатором 1, и два седла Q_1 , Q_2 , причем S_Q^u трансверсально пересекается с $W_{Q_2}^s$, а $W_{Q_1}^u$ содержит точку P простого касания со слоем слое-

Т а б л и ц а 2

Подкласс		Достижимость
(3a) $S_L^s \cap S_L^u = L$	s -критический цикл, и $S_L^u \cap W_1^u \neq \emptyset$, $\dim W_1^s < n$, или u -критический, и $S_L^s \cap W_2^u \neq \emptyset$, $\dim W_2^u < n$	+ —
	остальные случаи	++
(3b) $S_L^s \cap S_L^u = K^2$	некритический	++
	критический	+ —
(3c) $S_L^u \cap S_L^s = T^2$		+ —

ния F_Q^{ss} . При $\varepsilon > 0$ окрестность P диффеоморфно отображается в окрестность точки на $W_{Q_2}^s$, и, при подходящем выборе ε , $W_{Q_2}^u$ и $W_{Q_1}^s$ имеют точку простого касания.

В случае (3c) недостижимость связана с изменением числа вращения на возникшем торе, а в случае (3b) — с возникновением точек простого касания устойчивых и неустойчивых многообразий гиперболических циклов на бутылке Клейна и «далеких» положений равновесия или циклов.

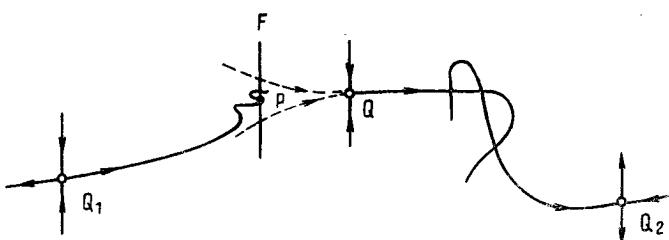


Рис. 44. Неподвижные точки и инвариантные кривые диффеоморфизма диска, принадлежащего недостижимой части бифуркационной поверхности

4.10. Устойчивость семейств диффеоморфизмов. В работах [178]—[180] исследовались общие свойства однопараметрических семейств диффеоморфизмов, были сформулированы раз-

личные определения устойчивости и установлены необходимые и (или) достаточные условия различных типов устойчивости, некоторые из которых были доказаны. Изложение следует работе [180].

Пусть M — компактное C^∞ -гладкое многообразие без края, $\text{Diff}(M)$ — множество C^∞ -диффеоморфизмов, MS — множество диффеоморфизмов Морса—Смейла, $\mathcal{P}(M)$ — множество C^∞ дуг диффеоморфизмов M . То есть если I — единичный интервал, то $\mathcal{P}(M)$ состоит из C^∞ -отображений $\Phi : M \times I \rightarrow M \times I$ таких, что $\Phi(m, \varepsilon) = (\varphi_\varepsilon(m), \varepsilon)$, где $m \mapsto \varphi_\varepsilon(m)$ — C^∞ -диффеоморфизм для каждого $\varepsilon \in I$. Элементы $\mathcal{P}(M)$ будем называть однопараметрическими семействами диффеоморфизмов или *дугами диффеоморфизмов*.

Для каждой дуги $\{\Phi_\varepsilon\} \subset \mathcal{P}$ с $\Phi_0 \in MS$ пусть $b(\Phi) = \inf\{\varepsilon \in I, \Phi_\varepsilon \in MS\}$. Будем считать, что $b(\Phi) < 1$. Если дуги $\{\Phi_\varepsilon\}, \{\Psi_\varepsilon\} \subset \mathcal{P}$, то будем говорить, что $(h, \{H_\varepsilon\})$ — сопряженность между ними, если $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ — гомеоморфизм, такой что $h(b(\Phi)) = b(\Psi)$, $H_\varepsilon : M \rightarrow M$ — гомеоморфизм, сопрягающий Φ_ε и $\Psi_{h(\varepsilon)}$ для всех ε в некоторой окрестности $[0, b(\Phi)]$, и H_ε непрерывно зависит от ε . Если гомеоморфизм H_ε сопрягает Φ_ε и Ψ_ε лишь для $\varepsilon \leq b(\Phi)$ и не обязан быть непрерывным по ε , то говорят, что $(h, \{H_\varepsilon\})$ — левая сопряженность для $\{\Phi_\varepsilon\}, \{\Psi_\varepsilon\}$. Сопряженность и левая сопряженность определяют отношения эквивалентности в множестве дуг в \mathcal{P} , начинающихся с диффеоморфизмов Морса—Смейла. Дуга $\{\Phi_\varepsilon\} \in \mathcal{P}$ называется *устойчивой* или *левоустойчивой*, если она внутренняя точка соответствующего класса эквивалентности.

Обозначим через $v(\varphi)$ векторное поле, порождающее поток, являющийся надстройкой над диффеоморфизмом φ . Обозначим через R множество дуг $\{\varphi_\varepsilon\}$ в пространстве диффеоморфизмов, таких что $v(\varphi_b) \in B_1$, $v(\varphi_\varepsilon)$ трансверсально пересекает B_1 в точке $v(\varphi_b)$; $v(\varphi_b)$ удовлетворяет условиям типичности, главное из которых состоит в следующем. Неблуждающее множество $v(\varphi_b)$ состоит из конечного множества циклов, причем если один из них не гиперболический, то его устойчивые и неустойчивые множества и многообразия трансверсально пересекаются между собой и с многообразиями других циклов, а если все циклы гиперболичны, то их многообразия трансверсально пересекаются по всем траекториям, за исключением одной.

В [180] наложены еще некоторые технические условия на локальное поведение траекторий в окрестностях гиперболических точек, не нарушающие общности положения, но сужающие рассматриваемый класс дуг. Здесь мы их не формулируем, но предполагаем выполненными.

Теорема 1. 1) Дуга $\{\varphi_\varepsilon\} \in R$ левоустойчива тогда и только тогда, когда $v(\varphi_b)$ имеет негиперболический предельный цикл.

2) Дуга $\{\varphi_\varepsilon\}$ устойчива тогда и только тогда, когда: а) $\{\varphi_\varepsilon\}$ — левоустойчива, б) $v(\varphi_b)$ не имеет цикла с парой невещественных мультиплликаторов, с) если $v(\varphi_b)$ имеет цикл с мультиплликатором 1, то этот цикл некритический, не входит в состав контура и не имеет гомоклинических траекторий.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_\varepsilon\}$, $\varepsilon \in [0, 1]$, — дуга диффеоморфизмов такая, что предельное множество каждого диффеоморфизма φ_ε состоит лишь из конечного множества траекторий. Тогда $\{\varphi_\varepsilon\}$ устойчива в том и только том случае, если на $[0, 1]$ существует лишь конечное множество бифуркационных значений, скажем, b_1, \dots, b_k , и для каждого $i \in \{1, \dots, k\}$ справедливы следующие утверждения:

а) $v(\varphi_{b_i}) \in B_1$ и не имеет цикла с парой невещественных мультиплликаторов; б) $v(\varphi_\varepsilon)$ трансверсально пересекает B_1 в точке $v(\varphi_{b_i})$; с) если $v(\varphi_{b_i})$ имеет цикл с мультиплликатором 1, то этот цикл некритический, не входит в состав контура и не имеет гомоциклических траекторий.

Такие ограничительные условия устойчивости связаны с существованием числовых инвариантов топологической эквивалентности — модулей, возникающих при нетрансверсальном пересечении устойчивых и неустойчивых многообразий (см. ниже § 6).

4.11. Некоторые открытые вопросы. Перечислим некоторые задачи о бифуркациях коразмерности 1 векторных полей Морса—Смейла, связанных с нарушением гиперболичности циклов.

1. Исследовать бифуркации векторных полей, имеющих контур, в состав которого входит лишь цикл с мультиплликатором 1 и седло либо с вещественным устойчивым ведущим направлением, либо с комплексным, но с отрицательной седловой величиной (случай В п. 4.7).

2. Дать возможно полное описание бифуркаций векторных полей, имеющих критический цикл, узловой по гиперболическим переменным с мультиплликатором 1 и компактным множеством гомоклинических траекторий. Для одномерного аналога этой задачи некоторые результаты имеются в [180], где используется язык нидинг-последовательностей и множеств вращения.

3. Исследовать бифуркации векторных полей, имеющих критический цикл с мультиплликатором 1, седловой по гиперболическим переменным, хотя бы в случае компактного множества гомоклинических траекторий.

Замечание. Все бифуркации в § 4 глобальны — мы заранее не знаем конечного множества траекторий, в окрестности которого осуществляются бифуркационные явления.

§ 5. Гиперболические особые точки с гомоклинической траекторией

В этом параграфе описаны бифуркации при переходе через гиперповерхность в функциональном пространстве, состоящую из векторных полей с гиперболической особой точкой, имеющей гомоклиническую траекторию. Исследуется окрестность точек общего положения на этой гиперповерхности как принадлежащих, так и не принадлежащих границе множества систем Морса—Смейла.

5.1. Предварительные понятия: ведущие направления и седловые величины. Рассмотрим росток $v(x) = Ax + \dots$ гладкого векторного поля в гиперболической особой точке O типа седло, $\dim W_O^s = s > 0$, $\dim W_O^u = u > 0$.

Расположим собственные значения $\{\lambda_j, \mu_k\}$ оператора A так, что

$$\operatorname{Re} \lambda_s \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_1 < 0 < \operatorname{Re} \mu_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_u.$$

Сумма $\sigma = \operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \mu_1$ называется *седловой величиной* ростка (и соответствующей особой точки O).

Если $\operatorname{Re} \lambda_1 = \dots = \operatorname{Re} \lambda_k > \operatorname{Re} \lambda_{k+1}$, то инвариантное подпространство оператора A , соответствующее собственным значениям $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, называется *ведущим устойчивым направлением* ростка в особой точке; аналогично определяется *ведущее неустойчивое направление*. Название объясняется тем, что почти все фазовые кривые уравнения $\dot{x} = v(x)$ с началом на устойчивом многообразии особой точки O входят в особую точку, касаясь ведущего устойчивого направления; исключение составляют кривые, заполняющие подмногообразие меньшей размерности, чем W_O^s . Для линейного уравнения это очевидно, для нелинейного доказано в [186].

5.2. Бифуркации гомоклинических траекторий седла, происходящие на границе множества систем Морса—Смейла. В однопараметрических семействах общего положения встречаются векторные поля с гомоклинической траекторией гиперболического седла, не устранимые малым шевелением семейства. Будем считать, что в однопараметрических семействах такие поля соответствуют нулевому значению параметра (называемому также *критическим значением*).

Теорема ([109], [112]). Пусть в однопараметрическом семействе общего положения нулевому значению параметра соответствует дифференциальное уравнение с гомоклинической траекторией гиперболического седла, удовлетворяющее одному из следующих условий:

1. Седловая величина отрицательна и ведущее неустойчивое направление одномерно.

2. Седловая величина положительна и ведущее устойчивое направление одномерно.

Тогда все некритические векторные поля семейства, достаточно близкие к критическому, в некоторой окрестности гомоклинической траектории задают системы Морса—Смейла не более чем с двумя неблуждающими траекториями, одна из которых — особая точка поля. Векторные поля семейства, соответствующие значениям параметра по одну сторону от нуля, не имеют других неблуждающих траекторий; соответствующие значениям параметра по другую сторону от нуля имеют предельный цикл. Размерность устойчивого многообразия этого цикла на единицу превышает размерность устойчивого многообразия седла или совпадает с ней, в зависимости от того, отрицательна или положительна седловая величина σ . ▲

З а м е ч а н и я. 1. Утверждение теоремы для $\sigma > 0$ получается из утверждения для $\sigma < 0$ обращением времени.

2. В случае общего положения ведущее направление либо одномерно (тогда ему соответствует вещественное собственное значение), либо двумерно (и тогда ему соответствует пара комплексно сопряженных собственных значений). Будем говорить, что в первом случае ведущее направление *вещественно*, а во втором — *комплексно*.

Из теоремы вытекает, что при выполнении ее условий бифуркационная поверхность B_1 достижима в точке общего положения с обеих сторон.

5.3. Требования общности положения. Чтобы для однопараметрического семейства векторных полей выполнялось утверждение предыдущей теоремы, это семейство должно удовлетворять следующим требованиям общности положения. Первые три требования налагаются на векторное поле, соответствующее критическому значению параметра.

1°. Ведущее направление, устойчивое в первом случае ($\sigma < 0$) и неустойчивое во втором ($\sigma > 0$) либо вещественно и одномерно, либо комплексно и двумерно.

2°. Гомоклиническая траектория входит в особую точку при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$, касаясь ведущих направлений.

Чтобы сформулировать третье требование, понадобятся некоторые сведения об уравнении в вариациях вдоль гомоклинической траектории седла. Пусть

$$\dot{x} = v(x), \quad v(0) = 0, \quad v_*(0) = A$$

— уравнение, соответствующее критическому значению параметра, $\varphi(t)$ — гомоклиническая траектория седла O ; $\varphi(0) = x$, X — операторнозначное решение уравнения в вариациях по начальному условию:

$$\dot{X} = (v_* \circ \varphi(t)) X(t); \quad X(0) = E.$$

Предложение. Для каждого ненулевого вектора $\xi \in T_x \mathbb{R}^n$ существуют пределы

$$\lambda_+(\xi) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln |X(t)\xi|}{t}, \quad \lambda_-(\xi) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln |X(t)\xi|}{t}.$$

Каждый из этих пределов равен вещественной части одного из собственных значений оператора A (и называется характеристическим показателем Ляпунова для уравнения в вариациях). Множество векторов ξ , задаваемых любым из неравенств $\lambda_+(\xi) \leq \lambda$ и $\lambda_-(\xi) \leq \lambda$, представляет собой плоскость без 0. Размерность этой плоскости такая, как если бы в определении характеристических показателей Ляпунова вместо $X(t)$ стояло $\exp At$.

З а м е ч а н и я 1. Это предложение очевидно, если росток поля в точке O гладко эквивалентен своей линейной части, и доказано в [51] для произвольного ростка.

2. Пусть ведущее неустойчивое направление поля v в точке O вещественно и одномерно. Тогда плоскости

$$L_-(x) = \{\xi \in T_x \mathbb{R}^n \mid \lambda_+(\xi) \leq \lambda_1\},$$

$$L_+(x) = \{\xi \in T_x \mathbb{R}^n \mid \lambda_-(\xi) \leq -\lambda_1\}$$

имеют размерности s и $n-1$ соответственно. Отметим, что

$$L_-(x) = T_x W_O^s \text{ и } L_+(x) \supset T_x W_O^{n-s}.$$

3°. Третье требование общности положения на поле v при $s < 0$. Пусть x — точка гомоклинической траектории. Требуется, чтобы плоскости $L_-(x)$ и $L_+(x)$ пересекались трансверсально (то есть по прямой, порожденной вектором $v(x)$).

При $\sigma > 0$ третье требование на векторное поле получается из предыдущего обращением времени.

Четвертое требование налагается на семейство полей, обозначенное ниже $\{v_\epsilon\}; v_0 = v$.

4. Рассмотрим точку x гомоклинической траектории и росток $(n-1)$ -мерной плоскости Π в этой точке, трансверсальный полю v_ϵ при малых ϵ . Устойчивое многообразие W_ϵ^s и неустойчивое W_ϵ^{n-s} особой точки O поля v_ϵ пересекают Π по подмногообразиям суммарной размерности $n-2$. При $\epsilon=0$ эти многообразия пересекаются в точке x .

Требование общности положения состоит в том, что при отклонении ϵ от нуля эти многообразия расходятся на расстояние порядка ϵ .

З а м е ч а н и е. Требование 4 можно ослабить и теорема пункта 5.2 останется справедливой — это следует из теоремы п. 5.5.

5.4. Главные семейства в \mathbb{R}^3 и их свойства. В этом пункте строятся «топологические нормальные формы семейств в окрестности гомоклинической траектории седла в \mathbb{R}^3 ». Соответствующие теоремы версальности формулируются в п. 5.5. Семейства строятся с помощью описанных ниже склеек из линий-

ного и стандартных векторных полей. Будем считать, что устойчивое многообразие W^s линейного поля двумерно, случай $\dim W^s = 1$ сводится к этому обращению времени. Семейство будет 4: они различаются знаком седловой величины и топологией инвариантного многообразия, полученного продолжением W^s .

Обозначим через K_1 и K_2 два экземпляра куба $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$. В кубе K_1 рассмотрим векторные поля v^- и v^+ :

$$v^- = -4y \frac{\partial}{\partial y} - 3x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \sigma = -1,$$

$$v^+ = -4y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x} + 2z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \sigma = 1.$$

В кубе K_2 рассмотрим поле $v_\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}$.

Рассмотрим следующие отображения склейки:

$$f: (-1, y, z) \mapsto (1, y, z),$$

$$f^\pm: (x, y, 1) \mapsto (1, \pm y, \pm x).$$

Склейм пары точек $P \in K_2$ и $f(P) \in K_1$, а также $Q \in K_1$ и $f^\pm(Q) \in K_2$ (рис. 45). На множестве внутренних точек из каждого из полученных пространств можно задать структуру гладкого многообразия так, что полученные поля будут гладкими. Обозначим эти многообразия M^+ и M^- (M^\pm получено с помощью f^\pm).

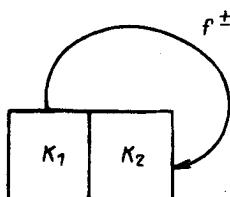


Рис. 45. Построение многообразий M^\pm

Семейство полей v_ε^{++} на M^+ , соответствующих (v^+, v_ε) , обозначим V^{++} ; (v^-, v_ε) на $M^+ - V^+$; (v^+, v_ε) на $M^- - V^{+-}$; (v^-, v_ε) на $M^- - V^{--}$. Многообразия M^+ и M^- с полями на них могут быть гладко вложены в \mathbf{R}^3 . Четыре семейства V^{++}, \dots, V^{--} называются главными. Поля семейств V^{++}, \dots, V^{--} , соответствующие $\varepsilon = 0$, имеют гомоклиническую траекторию, склеенную из кусков координатных осей Ox и Oz . На двумерной трансверсали

$$D_h = \{(x, y, z) | x = 1, |y| \leq 1, 0 < z < h\} \subset K_1$$

при достаточно малых h и ε определено отображение последовательности поля каждого из главных семейств: точка $P \in D_h$ переходит

в точку первого возвращения на грань $x=1$ куба K_1 положительной полутраектории с началом P поля главного семейства, соответствующего параметру ε . Соответствующие преобразования монодромии обозначаются $\Delta_\varepsilon^{++}, \dots, \Delta_\varepsilon^{--}$. Вычислим эти преобразования.

Обозначим через Δ^+ (или Δ^-): $\Gamma_h \rightarrow \{z=1\}$ отображение соответствия для поля v^+ (или v^-), переводящее точку $P \in D_h$ в точку на грани $z=1$, через которую положительная полутраектория поля с началом P выходит из куба K_1 . Пусть Δ_ε — отображение грани $x=1$ куба K_2 в плоскость $x=-1$ вдоль траекторий поля v_ε : $\Delta_\varepsilon(1, y, z) = (-1, y, z+\varepsilon)$. Отображение Δ_ε^{++} имеет вид (см. рис. 45, 46)

$$\Delta_\varepsilon^{++} = f \circ \Delta_\varepsilon \circ f^+ \circ \Delta^+.$$

Имеем

$$\Delta^\pm(1, y, z) = (z^{v^\pm}, yz^2, 1), \quad v^- = \frac{3}{2}, \quad v^+ = \frac{1}{2},$$

$$\Delta_\varepsilon^{++}(1, y, z) = \left(1, yz^2, z^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right).$$

Аналогично

$$\Delta_\varepsilon^{+-}(1, y, z) = \left(1, -yz^2, -z^{\frac{1}{2}} + \varepsilon\right),$$

$$\Delta_\varepsilon^{-+}(1, y, z) = \left(1, yz^2, z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\right),$$

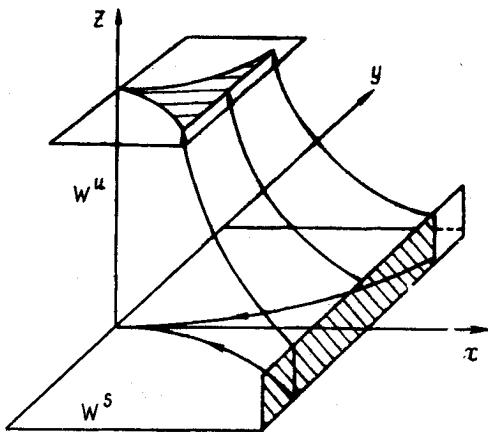
$$\Delta_\varepsilon^{--}(1, y, z) = \left(1, -yz^2, -z^{\frac{3}{2}} + \varepsilon\right).$$

При достаточно малых \hbar отображения $\Delta_\varepsilon^{-+}, \Delta_\varepsilon^{--}$ сжимающие, а отображения $\Delta_\varepsilon^{++}, \Delta_\varepsilon^{+-}$ «гиперболические» — они растягивают в направлении z и сжимают в направлении y . Отсюда можно вывести следующие результаты:

1. Поля V^{-+}, V^{--} при $\varepsilon > 0$ имеют устойчивый предельный цикл $L^-(\varepsilon)$, а при $\varepsilon < 0$ — не имеют. Неблуждающее множество V^{-+}, V^{--} состоит из особой точки O при $\varepsilon < 0$, $O \cup L^-(\varepsilon)$ при $\varepsilon > 0$ и $O \cup \Gamma$ при $\varepsilon = 0$, Γ — гомоклиническая кривая.

2. Поля V^{++}, V^{+-} имеют седловой предельный цикл $L^+(\varepsilon)$ с двумерными устойчивыми и неустойчивыми многообразиями при $\varepsilon < 0, \varepsilon > 0$ соответственно, причем для $V^{++} (v^{+-})$ устойчивое и неустойчивое многообразия гомеоморфны цилиндрам (листам Мёбиуса). Никаких неблуждающих траекторий, кроме O и цикла $L^+(\varepsilon)$ при $\varepsilon \neq 0$ и гомоклинической траектории Γ при $\varepsilon = 0$, поля V^{++}, V^{+-} не имеют.

3. Аналогичные утверждения верны для однопараметрических семейств гладких векторных полей, достаточно C^1 -близких в K_i , $i \in \{1, 2\}$ к главным семействам.



a

$\epsilon < 0$				
$\epsilon = 0$				
$\epsilon > 0$				
Δ_ϵ				$\Delta_\epsilon^+ -$

Рис. 46 а. Отображение соответствия для гиперболического седла. б. Образ и прообраз отображения последований, соответствующего гомоклинической траектории седла

Для главных семейств существование циклов полей v_ϵ (или, что то же, неподвижных точек отображений последований) исследуется элементарно, поскольку отображения Δ_ϵ сохраняют y -координату лишь при $y=0$, следовательно, достаточно изучить одномерные отображения $\Delta_\epsilon|_{y=0}$. Графики этих отображений и их неподвижные точки показаны на рис. 47.

5.5. Версальность главных семейств.

Теорема. Росток однопараметрического семейства общего положения векторных полей $\{v_\epsilon\}$ на гомоклинической траектории гиперболического седла в \mathbb{R}^3 с вещественными одномерны-

ми ведущими направлениями в седле (может быть, после обращения времени) топологически эквивалентен ростку одного из главных семейств V^{++}, \dots, V^{--} на гомоклинической траектории поля $v_0^{++}, \dots, v_0^{--}$.

Главные семейства векторных полей в \mathbb{R}^n с гиперболическим седлом, у которого ведущее устойчивое и неустойчивое направления одномерны (и, следовательно, вещественны) и при $\varepsilon=0$ имеется гомоклиническая траектория, получаются из опи-

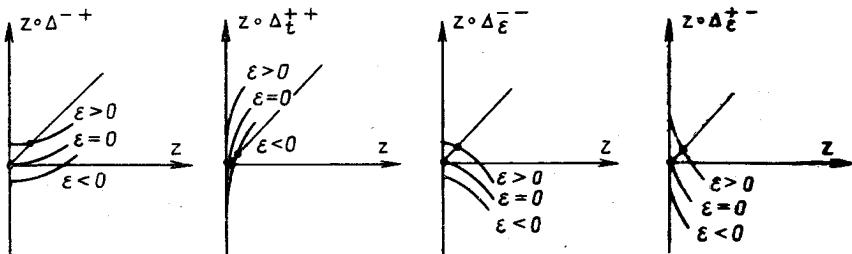


Рис. 47. Графики факторизованных преобразований монодромии в главных семействах

санных выше (при $n=3$) надстройкой седла и исследуются аналогично: для произвольного n верен аналог предыдущей теоремы.

5.6. Седло с комплексным ведущим направлением в \mathbb{R}^3 . Все семейства, описанные в теореме пункта 5.2, имеют одинаковые неблуждающие траектории. Однако топологической эквивалентности семейств в случае комплексного ведущего направления препятствует наличие числового модуля. Опишем его для систем в \mathbb{R}^3 .

Теорема (В. С. Афраймович, Ю. С. Ильяшенко, 1985 г.). Пусть гладкое векторное поле в \mathbb{R}^3 имеет гомоклиническую траекторию гиперболического седла с собственными значениями $\alpha \pm i\beta$, λ , $\alpha \cdot \lambda < 0$. Тогда отношение α/λ является топологическим инвариантом.

◀ 1°. Заменой времени добиваемся равенства $\lambda=1$; докажем, что α — топологический инвариант. Рассмотрим преобразование монодромии Δ гомоклинической траектории седла γ . Для этого выберем произвольную точку $P \in \gamma (Q \in \gamma)$ достаточно близко к седлу на его устойчивом двумерном многообразии W^s (неустойчивом одномерном многообразии W^u). Требования близости формулируются ниже. Многообразие W^s делит окрестность седла на две части. Ту часть, в которую траектория γ входит при $t \rightarrow -\infty$, обозначим U^+ . Возьмем две трансверсальные гладкие двумерные площадки $\Gamma \ni P$ и $\Gamma' \ni Q$ (рис. 48а). Обозначим через Γ^+ пересечение $U^+ \cap \Gamma$. Если площадка Γ^+ достаточно мала, то определено отображение соответствия $\Delta_1 : \Gamma^+ \rightarrow \Gamma'$; точка $P \in \Gamma^+$ переходит в конец дуги фазовой кривой рассматри-

ваемого поля с началом P и концом на Γ' , расположенной целиком в U^+ (рис. 48а). Пусть $f: (\Gamma', Q) \rightarrow (\Gamma, P)$ — росток преобразования монодромии (отображения последования), соответствующего дуге гомоклинической траектории γ с началом Q и концом P . Очевидно, f — росток диффеоморфизма. Росток преобразования монодромии $\Delta: (\Gamma^+, P) \rightarrow (\Gamma, P)$ равен произведению ростков $f \circ \Delta_1$. Можно считать, что представитель ростка Δ_1 (обозначаемый тем же символом) определен на площадке Γ^+ , и его образ принадлежит площадке $\Gamma \equiv \Gamma$.

2°. Воспользуемся следующей теоремой Белицкого [39].

Пусть гладкое векторное поле имеет гиперболическое седло с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и пусть не выполнено ни одно из соотношений $\operatorname{Re} \lambda_i = \operatorname{Re} \lambda_j + \operatorname{Re} \lambda_k$. Тогда росток поля в седле C^1 -эквивалентен своей линейной части.

Рассматриваемое поле удовлетворяет условию теоремы Белицкого, поскольку вещественные части собственных значений седла равны $\alpha, \alpha, 1; \alpha < 0$. Следовательно, существует C^1 -гладкая карта (x, y, z) в некоторой окрестности U седла, линеаризующая наше поле. В этой карте W^s задается уравнением $z=0$, а W^u — уравнениями $x=y=0$. Пусть $P \in U, Q \in U$ (требование близости точек P и Q к седлу). Растижением осей добиваемся равенств

$$x(P)=1, \quad (x, y, z)(Q)=(0, 0, 1).$$

Пусть площадки Γ и Γ' лежат в плоскостях $\Pi_1: x=1$ и $\Pi_2: z=1$ соответственно, с картами $(y, z)|_{\Pi_1}$ и $(x+iy)|_{\Pi_2}$. В этих координатах

$$\Delta_1(1+iy, z) = (z^{-(\alpha+i\beta)} \cdot (1+iy), 1). \quad (1)$$

Действительно, время перехода точки $(1, y, z)$ на площадку Π_2 равно $\ln \frac{1}{z}$, а преобразование фазового потока линейной системы

$$(x+iy) \cdot = (\alpha+i\beta)(x+iy), \quad \dot{z}=z$$

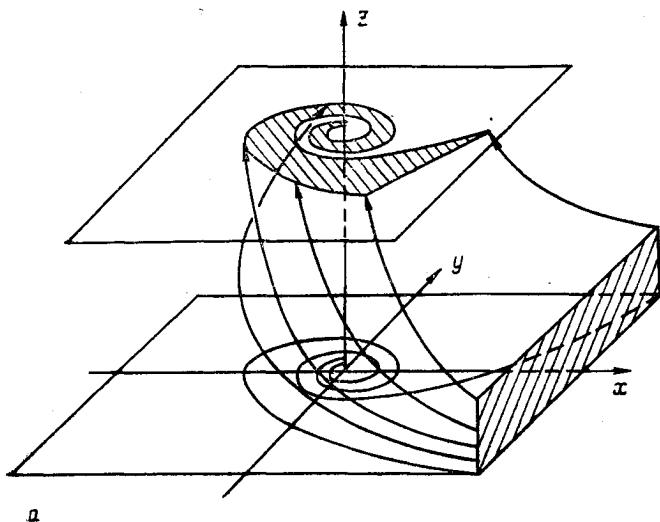
имеет вид

$$g^t(x, y, z) = (e^{(\alpha+i\beta)t}(x+iy), e^t z).$$

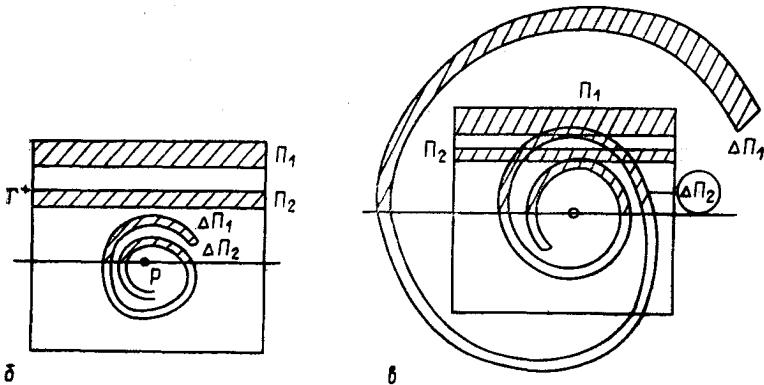
Образ $\Delta_1(\Gamma^+)$ площадки Γ^+ на площадке Γ' — это «толстая» спираль с центром 0; образ $\Delta(\Gamma^+)$ — аналогичная, диффеоморфно преобразованная «спираль» с центром P на Γ^+ (рис. 48а). Пересечение $\Gamma^+ \cap \Delta(\Gamma^+)$ распадается на счетное число компонент — «полувитков», занумерованных в порядке их расположения вдоль спирали. Пусть Π_n — криволинейный четырехугольник — прообраз n -й связной компоненты пересечения $\tilde{\Gamma}^+ \cap \Delta(\Gamma^+)$, ($\tilde{\Gamma}^+ = U^+ \cap \tilde{\Gamma}$).

Случай 1. $\alpha + i\beta \leq 0$. Рассмотрим отображение k натурального ряда в себя, заданное формулой (см. рис. 48б):

$$k(n) = \min \{k \mid \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset\}.$$



а



б

в

Рис. 48. а. Отображение соответствия для седла с комплексным ведущим устойчивым направлением. б, в. Преобразование монодромии гомоклинической траектории седла с парой комплексных собственных значений. Заштрихованы полувитки и их прообразы. б) $\alpha + \lambda < 0$, в) $\alpha + \lambda > 0$

Случай 2. $\alpha + \lambda > 0$ (рис. 48 в). Положим:

$$n(k) = \max \{ n \mid \Pi_k \cap \Delta \Pi_n \neq \emptyset \}.$$

Замечание. Функции k (и n) определены и при $\alpha + \lambda > 0$ ($\alpha + \lambda \leq 0$ соответственно). Но при этом $k(n) \equiv n$ ($n(k) \equiv k$) — это вытекает из доказательства следующей леммы.

30. Лемма. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = -\alpha$; $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n(k)}{k} = -\frac{1}{\alpha}$ при $\alpha + \lambda < 0$
и $\alpha + \lambda > 0$ соответственно.

◀ Определим $\arg \Delta(y, z)$, как непрерывную функцию на Γ^+ так, что $\arg \Delta(y, z)|_{\Pi_1} \in [0, \pi]$. Тогда

$$|\arg \Delta(y, z)||_{\Pi_n} \in [2\pi(n-1), \pi(2n-1)].$$

Пусть, для определенности, отображение f сохраняет ориентацию; тогда полярный угол меняется под действием f на ограниченную величину. По формуле (1)

$$\arg \Delta_1(y, z) = -\beta \ln z + \arg(1+iy).$$

Тогда

$$\arg \Delta(y, z) = -\beta \ln z + O(1)$$

при $z \rightarrow 0$. Следовательно,

$$\max |\ln z| |_{\Delta \Pi_n} = \left| \frac{\alpha}{\beta} 2\pi n \right| + O(1).$$

Но

$$|\ln z| |_{\Pi_n} = \left| \frac{2\pi k}{\beta} \right| + O(1).$$

Пересечение $\Pi_k \cap \Delta \Pi_n$ заведомо непусто, если

$$\max |\ln z| |_{\Pi_k} \leq \max |\ln z| |_{\Delta \Pi_n},$$

и пусто, если

$$\min |\ln z| |_{\Pi_k} > \max |\ln z| |_{\Delta \Pi_n}.$$

Следовательно,

$$k(n) = |\alpha| \cdot n + O(1) \quad \text{при } |\alpha| \geq 1,$$

$$n(k) = \frac{1}{|\alpha|} k + O(1) \quad \text{при } |\alpha| < 1,$$

что и доказывает лемму. ►

40. Теорема немедленно следует из леммы. Действительно, пусть два поля, удовлетворяющие условиям теоремы, орбитально топологически эквивалентны. Тогда функции k и n для этих полей совпадают с точностью до $O(1)$. Действительно, пусть Γ^+ и Γ' — трансверсальные площадки для первого поля, Γ_1^+ и Γ_1' — аналогичные площадки для второго и H — гомеоморфизм, переводящий фазовые кривые первого поля в фазовые кривые второго. Образы $H\Gamma^+$ и $H\Gamma'$ негладки, но пересекают каждую фазовую кривую поля, расположенную в некоторой окрестности этих площадок-образов, в одной точке, поскольку H — гомеоморфизм. Уменьшая, если надо, Γ^+ и Γ' и проектируя площадки $H\Gamma^+$ и $H\Gamma'$ на Γ_1^+ и Γ_1' вдоль фазовых кривых второго поля, получаем вместо площадок Γ_1^+ и Γ_1' принадлежащие им площадки $\pi H\Gamma^+$ и $\pi H\Gamma'$ (π — проектирование вдоль фазовых кривых второго поля). Ясно, что замена площадок Γ^+ и Γ' на меньшие меняет функции k и n на $O(1)$. ►

5.7. Добавление: бифуркации гомоклинических петель вне границы множества систем Морса—Смейла.

Теорема. Пусть в теореме пункта 5.2 оба условия 1 и 2 нарушены, то есть при $\sigma < 0$ ($\sigma > 0$) ведущее неустойчивое (соответственно, устойчивое) направление комплексно (и двумерно). Тогда все векторные поля семейства $\{v_\varepsilon\}$, достаточно близкие к критическому, имеют гиперболические инвариантные множества; преобразование монодромии поля v_ε имеет при $\varepsilon \neq 0$ конечное число подков Смейла, неограниченно растущее при стремлении ε к нулю и равное бесконечности для поля v_0 . Каждое из полей v_ε при достаточно малом ε имеет счетное множество гиперболических предельных циклов, устойчивые многообразия которых имеют такую же размерность, как устойчивое многообразие гиперболического седла.

Более точно структура гиперболического подмножества при $\varepsilon \neq 0$ описывается следующим утверждением.

Теорема ([111], [114]). Пусть $\Omega(\rho)$, $\rho > 1$, — подмножество схемы Бернуlli из бесконечного числа символов, определяемое следующим образом: $(\dots m_{-1}, m_0, \dots, m_i, \dots) \in \Omega(\rho)$ в том и только том случае, если $m_{j+1} < \rho m_j$, $j \in \mathbb{Z}$. Тогда поле v_0 при $\sigma < 0$ имеет гиперболическое подмножество, траектории которого находятся во взаимно однозначном соответствии, сохраняющем асимптотические свойства¹¹⁾, с множеством $\Omega(\rho)$, где ρ не превышает $-\operatorname{Re} \lambda_1 / \operatorname{Re} \mu_1$.

Замечание. Предельное значение ρ совпадает с модулем п. 5.6.

Для трехмерной системы бифуркационные явления при изменении параметра зависят не только от σ , но от новой седловой величины $\sigma_1 = 2 \operatorname{Re} \lambda_1 + \mu_1$.

Теорема ([40], [147]). Если $\sigma < 0$, то: 1) при $\sigma_1 < 0$ поле v_ε при ε из счетного множества интервалов будет иметь устойчивый цикл, смена устойчивости которого сопровождается бифуркацией, связанной с рождением цикла удвоенного периода; 2) при $\sigma_1 > 0$ существует счетное множество интервалов, для значений ε из которых поле v_ε имеет неустойчивый (устойчивый при $t \rightarrow -\infty$ цикл). ▲

Поясним механизм возникновения счетного числа периодических траекторий при $n=3$. В этом случае отображение последования, соответствующее гомоклинической траектории при нулевом значении параметра, уже изучено в п. 5.4; его образ и прообраз изображены на рис. 48 в. Ограничение отображения последования на криволинейный четырехугольник Π_k при достаточно большом k представляет собой подкову Смейла; число таких подков счетно. Для любого натурального N при достаточно близком к нулевому значении параметра отображение по-

¹¹⁾ Т. е. периодическим траекториям соответствуют периодические, асимптотическим друг к другу — асимптотические и т. д.

следования имеет не менее чем N подков Смейла. Каждой подкове соответствует счетное множество периодических траекторий.

В заключение приведем таблицу 3, в которой подытожены утверждения данного параграфа. Здесь символами R и C обозначено вещественное и комплексное ведущие направления, а символом « Ω » обозначена ситуация, когда существует нетри-виальное гиперболическое подмножество.

Таблица 3

$\sigma < 0$			$\sigma > 0$		
Неуст.	R	C	Неуст.	R	C
уст.			уст.		
R	$\dim W_L^s = \dim W_O^s + 1$	Ω	R	$\dim W_L^s = \dim W_O^s$	$\dim W_L^s = \dim W_O^s$
C	$\dim W_L^s = \dim W_O^s + 1$	Ω	C	Ω	Ω

§ 6. Бифуркции, связанные с нетрансверсальными пересечениями

В этом параграфе рассматриваются бифуркции векторного поля, лежащего на границе множества систем Морса—Смейла, для которого неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических положений равновесия и гиперболических циклов, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально по всем траекториям, за исключением одной — простого касания либо квазитрансверсального пересечения.

6.1. Векторные поля без контуров и гомоклинических траекторий. Простым следствием теоремы Купки—Смейла является

Утверждение. Если описанное в начале параграфа поле v_0 не имеет контуров и гомоклинических траекторий, то в окрестности v_0 в $\chi'(M)$ всюду плотны векторные поля Морса—Смейла. (Всюду ниже $r \geq 2$, если v_0 не имеет положений равновесия с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения в них и циклов с мультиплликаторами $e^{\pm i\varphi}$; в противном случае $r \geq 3$).

Тем не менее, при возмущении v_0 могут происходить бифуркции.

Определение. Две траектории Γ_1, Γ_2 динамической системы называются *внутренне эквивалентными*, если существует

гомеоморфизм фазового пространства¹⁾ на себя, переводящий траектории в траектории, сохраняющий ориентацию на них и переводящий Γ_1 в Γ_2 .

Очевидно, разбиение на классы внутренне эквивалентных траекторий является топологическим инвариантом динамической системы. Бифуркации могут происходить без рождения или исчезновения неблуждающих траекторий, а быть связанными с изменением классов внутренней эквивалентности.

Определение ([30]). Траектория называется *особой*, если для нее существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого ε -близкого к тождественному гомеоморфизму фазового пространства на себя, переводящего траектории в траектории и сохраняющего ориентацию на них, она остается инвариантной.

Очевидно, особая траектория принадлежит классу внутренней эквивалентности, содержащему не более счетного множества траекторий. Положение равновесия, предельный цикл, гетероклиническая траектория, принадлежащая $W_1^s \cap W_2^u$, $\dim W_1^s + \dim W_2^u - n = 1$, являются особыми.

6.2. Теорема о недостижимости. Пусть L_1 и L_2 — циклы векторного поля V_0 такие, что пересечение $W_{L_1}^s \cap W_{L_2}^u$ содержит траекторию простого касания либо квазитрансверсального пересечения.

Теорема. Если $W_{L_1}^u (W_{L_2}^s)$ содержит особую траекторию, не совпадающую с $L_1 (L_2)$, то бифуркационная поверхность B_1 недостижима в точке v_0 хотя бы с одной стороны.

При выполнении условий теоремы, $W_{L_1}^s (W_{L_2}^u)$ является «гладким» пределом многообразий той же размерности других положений равновесия или циклов как для поля v_0 , так и для близкого векторного поля v . Поэтому для любого семейства $\{v_\varepsilon\}$

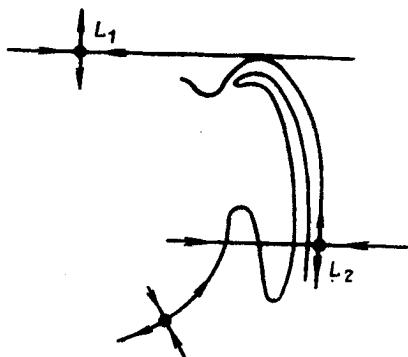


Рис. 49. Неподвижные точки и инвариантные кривые диффеоморфизма плоскости, принадлежащего недостижимой части бифуркационной поверхности

¹⁾ Оно предполагается здесь компактным.

векторных полей найдутся сколь угодно близкие к нулю значения ϵ , для которых $W_{L_2}^u(\epsilon)$ ($W_{L_2}^s(\epsilon)$) будет иметь траекторию нетрансверсального пересечения (см. рис. 49). Здесь $W_{L_2}^u(\epsilon)$ — неустойчивое многообразие гиперболического цикла поля v_ϵ , лежащего в окрестности L_2 ; аналогично определяется $W_{L_1}^s(\epsilon)$.

6.3. Модули. В [183] было обнаружено, что топологическая сопряженность диффеоморфизмов с «одинаковым» геометрическим расположением устойчивых и неустойчивых многообразий влечет за собой условия типа равенства на мультиликаторы периодических траекторий. Точнее, пусть $f(f')$ —диффеоморфизм замкнутого многообразия с гиперболическими неподвижными точками p , q (p' , q') типа седло. Пусть $\lambda_1(\lambda'_1)$ —наибольшее по модулю собственное значение $Df(p)$ ($Df'(p')$) из всех собственных значений, меньших по модулю единицы, а $\gamma_2(\gamma'_2)$ —наименьшее по модулю собственное значение $Df(q)$ ($Df'(q')$) из всех собственных значений, больших по модулю единицы. Предположим, что $\lambda_1(\lambda'_1)$, $\gamma_2(\gamma'_2)$ имеет кратность 1. Тогда [162] существует гладкое инвариантное многообразие $W_p^{u1}(W_{p'}^{u1})$, касательное в точке p (p') к сумме $TW_p^u \oplus R_{\lambda_1} (TW_{p'}^u \oplus R_{\lambda'_1})$ ¹⁾, где $R_{\lambda_1} (R_{\lambda'_1})$ —собственное подпространство, отвечающее λ_1 , λ'_1 (λ'_1 , λ_1); а также—гладкое инвариантное многообразие $W_q^{s1}(W_{q'}^{s1})$, касательное в точке q (q') к сумме $TW_q^s \oplus R_{\gamma_2} (TW_{q'}^s \oplus R_{\gamma'_2})$, где $R_{\gamma_2} (R_{\gamma'_2})$ —собственное подпространство, отвечающее γ_2 , γ'_2 (γ'_2 , γ_2).

Определение ([137], [180]). Точка r простого касания либо квазитрансверсального пересечения $W_p^u \cap W_q^s$ называется *точкой регулярного пересечения коразмерности 1*, если W_p^u трансверсально к W_q^{s1} , а W_q^s трансверсально к W_p^{u1} в этой точке.

Хотя многообразия W_p^{u1} и W_q^{s1} не единственны, тем не менее, поскольку все многообразия $W_p^{u1}(W_q^{s1})$ касаются друг друга в точке p (q), то определение точки регулярного пересечения корректно.

Теорема ([137], [180]). Пусть $f(f')$ — C^2 -диффеоморфизм, имеющий неподвижные гиперболические точки p (p'), q (q') и траекторию Γ , состоящую из точек регулярного пересечения. Тогда если существует топологическая сопряженность между f и f' , определенная в некоторой окрестности $\bar{\Gamma}$, то

¹⁾ TW —касательное пространство к W .

²⁾ Если $\lambda_1 \in \mathbb{R}^1$, то $\dim R_{\lambda_1} = 1$, в противном случае $\dim R_{\lambda_1} = 2$.

$$\frac{\log |\lambda_1|}{\log |\gamma_2|} = \frac{\log |\lambda'_1|}{\log |\gamma'_2|}.$$

Здесь λ_1 , λ'_1 , γ_2 и γ'_2 — те же, что в начале пункта.

Поясним теорему для $m=2$ на рис. 50.

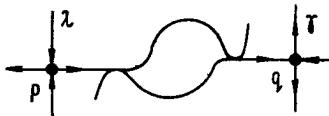


Рис. 50. Диффеоморфизм плоскости, топологическим инвариантом которого является отношение $\log \gamma / \log \lambda$

Несложно сконструировать диффеоморфизм, имеющий больше одного модуля устойчивости. Для этого достаточно, чтобы неустойчивое (устойчивое) многообразие точки $p(q)$ было предельным для неустойчивых (устойчивых) многообразий других седловых точек (как, например, в теореме пункта 6.2). В [139] выведены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы диффеоморфизм, лежащий на границе множества систем Морса—Смейла, имел единственный модуль.

6.4. Системы с контурами. Предположим, что v_0 имеет контур $\{Q_0, \dots, Q_k\}$, причем траектория простого касания или квазитрансверсального пересечения принадлежит $W_{Q_{j+1}}^s \cap W_{Q_j}^u$.

Существование на границе множества систем Морса—Смейла векторных полей с контурами установлено в [58]. На рис. 51 приведен пример подобного диффеоморфизма.

Утверждение. В любой окрестности v_0 в $\chi^r(M)$ содержатся векторные поля со счетным множеством циклов.

Доказательство заключается в том, что с помощью λ -леммы устанавливается наличие у близкого к v_0 векторного поля гомоклинической кривой, принадлежащей трансверсальному пересечению многообразий см. [178], [182]).

Такое резкое увеличение неблуждающего множества называется Ω -взрывом [182].

Замечание. Если v_0 — векторное поле с гомоклинической траекторией простого касания устойчивого и неустойчивого многообразий цикла, то утверждение остается справедливым (см. п. 6.6).

6.5. Диффеоморфизмы с нетривиальными базисными множествами. Для диффеоморфизмов утверждение пункта 6.4 было усилено в [178], [180]: было показано, что в окрестности точки на бифуркационной поверхности существуют диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме А Смейла, с нульмерными нетривиальными базисными множествами. Точнее, пусть

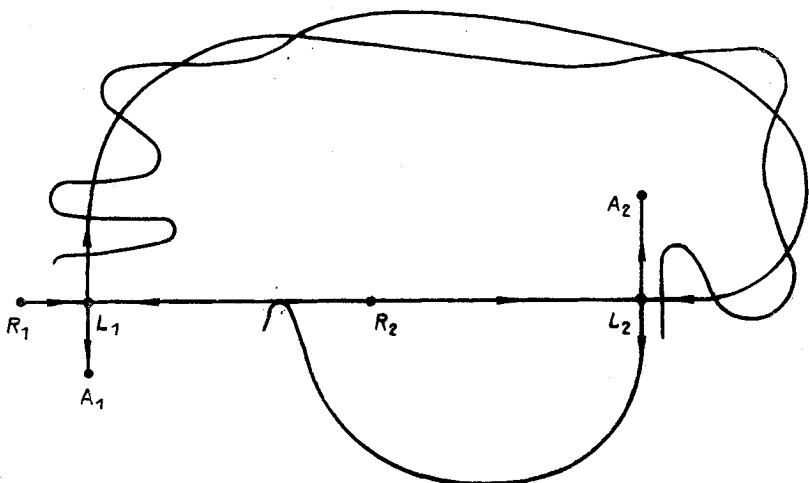


Рис. 51. Критический момент перед Ω -взрывом. Неподвижные точки A_1, A_2 — устойчивые, R_1, R_2 — неустойчивые узлы, а L_1, L_2 — седла

M — компактное связное C^∞ -многообразие, $\text{Diff}^r(M)$ — пространство C^r -диффеоморфизмов M с равномерной C^r -топологией, $I = [0, 1]$, и для $k \geq 1$, $r \geq 1$, $\Phi^{k,r} = C^k(I, \text{Diff}^r(M))$ — пространство C^k -отображений I в $\text{Diff}^r(M)$ с равномерной C^k -топологией. Элемент $\xi \in \Phi^{k,r}$ — это C^k -кривая C^r -диффеоморфизмов. Пусть $U^{k,r} \subset \Phi^{k,r}$ — множество дуг $\xi \in \Phi^{k,r}$, таких, что $\xi_0 \in MS$, и если $1 > b = \inf\{\varepsilon \mid \xi_\varepsilon \notin MS\}$, то $v_0(\xi_b) \in \mathcal{B}_1$ и удовлетворяет условиям общности положения, где $MS \subset \text{Diff}^r(M)$ — множество диффеоморфизмов Морса—Смейла (см. § 4). Для $\delta > 0$ пусть $U_\delta = [b_0, b_0 + \delta]$.

Теорема ([178]). Существует множество второй категории $\mathcal{B} \subset U^{k,r}$, $k \geq 1$, $r \geq 2$, такое, что если $\xi \in \mathcal{B}$, то верно следующее: для любого $\varkappa > 0$ существует $\delta > 0$ и открытое подмножество $\mathcal{B}_\delta \subset U_\delta$, так что: а) мера Лебега \mathcal{B}_δ меньше, чем $\varkappa\delta$; в) если $\xi \in U_\delta \setminus \mathcal{B}_\delta$, то ξ_ε — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме А Смейла (см. п. 3.4); с) существуют такие ε в $U_\delta \setminus \mathcal{B}_\delta$, для которых неблуждающее множество ξ_ε бесконечно, нульмерно, а если устойчивые многообразия всех Q_i имеют одну и ту же размерность, то это верно для любого ε из \mathcal{B}_δ .

Утверждение теоремы проще всего понять на примере векторных полей в \mathbb{R}^3 , для которых верны аналогичные результаты.

6.6. Векторные поля в \mathbb{R}^3 с гомоклинической траекторией цикла. Пусть векторное поле $v_0 \in C^r$, $r \geq 3$, в трехмерном пространстве имеет предельный цикл L седлового типа и траекторию $\Gamma \subset W_L^s \cap W_L^u$, принадлежащую простому касанию его устойчивого и неустойчивого многообразий. Тогда у $L \cup \Gamma$ сущ-

ствует окрестность U , гомеоморфная полноторию U_0 с приклеенной ручкой $U_1 \cup L$ лежит внутри заполненного тора, а $\Gamma \cap (U \setminus U_0)$ — связно, т. е. Γ «обходит» ручку только один раз. У системы v_0 в $\chi'(\mathbf{R}^3)$ существует окрестность $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_0 \cup \mathfrak{U}_2$, где в \mathfrak{U}_1 лежат системы, не имеющие гомоклинических траекторий $\tilde{\Gamma}$, для которых $\tilde{\Gamma} \cap (U \setminus U_0)$ связно, \mathfrak{U}_2 состоит из систем, каждая из которых имеет две гомоклинические траектории Γ_1, Γ_2 такие, что $\Gamma_i \cap (U \setminus U_0)$ связно, Γ_i принадлежит трансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий седлового цикла, $i \in \{1, 2\}$, а в \mathfrak{U}_0 содержатся системы, «подобные» v_0 , т. е. имеющие гомоклиническую траекторию простого касания.

Пусть λ, γ — мультиплликаторы цикла L : $|\lambda| < 1, |\gamma| > 1$.

Определение. Цикл L называется *диссипативным*, если $|\lambda\gamma| < 1$. Аналогично определяется *диссипативная неподвижная точка* типа седло диффеоморфизма M .

Если $\gamma > 0$, то многообразие W_L^u гомеоморфно цилиндру и разделяется циклом L на два множества: $W_1^u, W_2^u, W_1^u \cap W_2^u = \emptyset$. Пусть $\Gamma \subset W_1^u$.

Теорема ([61], [62]). Если: 1) $\gamma > 0$, 2) $\bar{W}_1^u \cap (W_2^u \setminus L) = \emptyset$, 3) цикл L — диссипативен, то существует настолько малая окрестность \mathfrak{U} , $\chi'(\mathbf{R}^3) \supset \mathfrak{U} \ni v_0$, что все векторные поля в \mathfrak{U} являются векторными полями Морса — Смейла в \bar{U} .

Поясним этот результат на примере. Рассмотрим однопараметрическое семейство C^1 -диффеоморфизмов $f_\varepsilon: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, которое в окрестности U_0 неподвижной точки O в начале координат имеет вид $(x, y) \mapsto (\lambda x, \gamma y)$, $0 < \lambda < 1 < \gamma$, $\lambda\gamma < 1$. Пусть $P = (0, y^*)$, $Q = (x^*, 0)$, $x^* > 0, y^* > 0$, $f_0^s P = Q$, $s \in \mathbf{N}$, — гомоклинические точки, по которым устойчивое и неустойчивое многообразия точки O имеют простое касание (рис. 52). Пусть $U_0 \supset \Pi_0 = \{(x, y) \mid |x - x^*| \leq \varepsilon_0, |y| \leq \varepsilon_0\}$, $U_0 \supset \Pi_1 = \{(x, y) \mid |x| \leq \varepsilon_1, |y - y^*| \leq \varepsilon_1\}$; $\Pi_0 \cap f_0(\Pi_0) = \emptyset$, $\Pi_1 \cap f_0^{-1}(\Pi_1) = \emptyset$. Предположим, что f_0^s в Π_1 записывается виде: $x_0 - x^* = b(y_1 - y^*)$, $y_0 = cx_1 + d(y_1 - y^*)^2 + \varepsilon$; $(x_0, y_0) \in \Pi_0$, $(x_1, y_1) \in \Pi_1$. Это означает, что отрезок неустойчивого многообразия $x_1 = 0, |y_1 - y^*| \leq \varepsilon_1$ переходит в отрезок параболы $y_0 = \frac{1}{b^2}(x_0 - x^*)^2 + \varepsilon$. Таким образом, при $d < 0, \varepsilon = 0$ выполнено условие 2) теоремы. Видно, что при $d < 0, \gamma > 0, \varepsilon < 0$ точки из малой зависящей от ε окрестности точки P попадают в область с отрицательными значениями y , т. е. P — блуждающая точка (см. рис. 52).

6.7. Символическая динамика. Структуру неблуждающего множества векторного поля v , близкого к v_0 , можно описать следующим образом [61], [62]. Пусть Ω — инвариантное подмножество топологической схемы Бернулли из трех символов $\{0, 1, 2\}$, выделяемое следующими условиями:

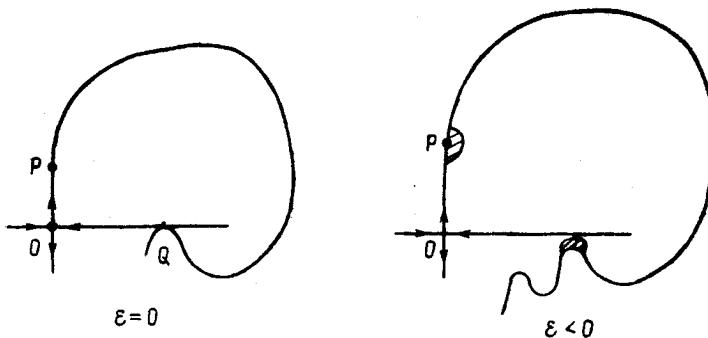
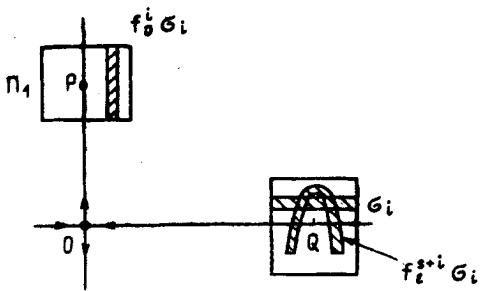


Рис. 52. Подкова Смейла для отображения $P_{e^{s+i}}$ (сверху). Окрестность точки P и ее прообраз при $\varepsilon=0$ и $\varepsilon<0$ (снизу)

1) Ω содержит неподвижную точку $(\dots, 0, 0, \dots)$.

2) После каждого из символов 1, 2 обязательно следует символ 0.

Отсюда следует, что каждой траектории из Ω соответствует последовательность натуральных чисел $(\dots p_i, p_{i+1}, \dots)$, где p_i — длина отрезка из нулей, содержащегося между двумя отличными от нуля символами. Траекториям, $\alpha(\omega)$ -асимптотическим к $(\dots, 0, 0 \dots)$, ставится в соответствие последовательность (p_0, p_1, \dots) или $(p_0 \dots, p_k)$, где $p_0 = \infty$, $p_k = \infty$.

3) Существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что все $p_i \geq k$.

4) Существуют константы $\tilde{\gamma} > 1$, $0 < \tilde{\lambda} < 1$, $d \neq 0$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $c \neq 0$, $e \neq 0$ такие, что для каждой траектории из Ω выполнены неравенства

$$\frac{v_1 \tilde{\gamma}^{-p_i} - c v_2 \tilde{\lambda}^{p_{i+1}} - e}{\text{sign } d} > 0.$$

Теорема ([61], [62]). Для любого векторного поля $v \in \mathfrak{U}$ существуют такие константы k , v_1 , v_2 , $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\lambda}$, e , d , где $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\gamma}$ — мультипликаторы цикла, близкого к L , $d < 0$, а $e > 0$ при $d \in \mathfrak{U}_2$

и $e < 0$ при $v \in U_1$, что справедливо следующее утверждение: если $\Omega \neq \emptyset$, то у инвариантного множества траекторий, целиком содержащихся в U , существует гиперболическое подмножество; его траектории находятся во взаимно однозначном соответствии с траекториями множества Ω , при котором циклам соответствуют периодические траектории сдвига $\sigma|\Omega$ и сохраняются асимптотические свойства траекторий.

Следствие. При $e > 0$ v имеет бесконечное множество циклов.

Действительно, положив $p_i = p_{i+1} = p$, получим, что в силу диссипативности цикла L и условий $d < 0, e > 0$ неравенство 4) выполнено для всех достаточно больших p .

Поясним эту теорему. Вернемся к примеру п. 6.6. Так как $\gamma > 0, (\lambda < 1)$, то существует $n_1 \in \mathbb{N}$ ($n_2 \in \mathbb{N}$) такое, что $\gamma^{n_1} \varepsilon_0 > y^* + \varepsilon_1, \lambda^{n_1} (x^* + \varepsilon_0) < \varepsilon_1, (\lambda^{-n_2} \varepsilon_1) > x^* + \varepsilon_0, \gamma^{-n_2} (y^* + \varepsilon_1) < \varepsilon_0$. Положим для $i \geq N = \max\{n_1, n_2\}$

$$\sigma_i = \{(x, y) \in \Pi_0 \mid |x - x^*| \leq \varepsilon_0, |\gamma^i y - y^*| \leq \varepsilon_1\}.$$

Очевидно $f_0^i \sigma_i \subset \Pi_1, \sigma_i \cap \sigma_j = \emptyset, i \neq j$. Отображение $f_\varepsilon^i f_\varepsilon^i: \sigma_i \rightarrow \Pi_0 ((x, y) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}))$ записывается в виде¹⁾ $\bar{x} - x^* = b(y\gamma^i - y^*), \bar{y} = c\lambda^i x^* + d(y\gamma^i - y^*)^2 + \varepsilon$. Легко убедиться, что на каждом прямоугольнике σ_i для соответствующего значения $\varepsilon = \varepsilon_i$ это отображение действует как диффеоморфизм подковы Смейла.

На примере легко понять, почему в окрестности v_0 существуют векторные поля, удовлетворяющие аксиоме А Смейла (теорема пункта 6.5).

Покажем, что существует такое значение параметра, что все области σ_i отображаются, как подковы Смейла. Действительно, поскольку щель, т. е. расстояние (по y) между σ_i и σ_{i+1} — величина порядка const/γ^{-i} , а величина (по x) окрестности, в которой содержится все области $f_\varepsilon^j \sigma_i, j \geq i$ — порядка $\text{const} \cdot \lambda^i$, то, в силу диссипативности седла, искомые значения параметра существуют (см. рис. 53). Отсюда вытекает, что все траектории в окрестности гомологической траектории гиперболичны, а только они и являются вновь появившимися неблуждающими траекториями.

Замечание. В [61], [62] теорема обобщена на случай систем, не лежащих на границе векторных полей Морса—Смейла, а в [67] также на случай $n > 3$.

6.8. Бифуркации „подков Смейла“. Начнем с примера пункта 6.6. Здесь при изменении ε осуществляются бифуркации, связанные с возникновением подков Смейла. Легко проверить,

¹⁾ Это отображение похоже на известное отображение Эно [161].

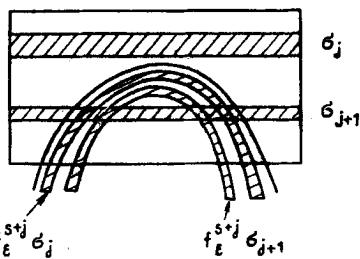


Рис. 53. Образы и прообразы «прямоугольников», лежащих в окрестности гомоклинической траектории диссипативной седловой неподвижной точки, под действием итераций диффеоморфизма

что если $\epsilon d > d(y^* \gamma^{-i} - c\lambda^i x^*) + \frac{1}{4}(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2$, то неподвижных точек отображения f_ϵ^{i+s} в σ_i нет. При $\epsilon_i^1 = (y^* \gamma^{-i} - c\lambda^i x^*) + \frac{(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d}$ возникает неподвижная точка типа седло-узел, распадающаяся на седло и узел, с которыми при дальнейшем изменении параметра вплоть до значения $\epsilon_i^2 = y^* \gamma^{-i} - c\lambda^i x^* - \frac{3(bc\lambda^i - \gamma^{-i})^2}{4d}$ бифуркаций не происходит. При $\epsilon = \epsilon_i^2$ узел (превратившийся в фокус, а затем опять в узел, но уже с отрицательными мультиликаторами) претерпевает бифуркацию удвоения периода (см. рис. 54). Результаты этого примера справедливы и в общем случае. Кроме того, они обобщены на системы с n -мерным фазовым пространством [66], [67]. Точнее говоря, пусть v_0 — C^r -гладкое, $r \geq 4$, векторное поле на $m+2$ -мерном, $m > 1$, многообразии M , причем:

- 1) v_0 имеет седловой цикл L с мультиликаторами $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \gamma$ $|\gamma| > 1 > |\lambda_1| \geq |\lambda_j|$, $j \in \{2, \dots, m\}$, λ_1 — не кратный корень характеристического уравнения;
- 2) седловая величина $|\lambda_1 \gamma| < 1$;
- 3) $W_L^s \cap W_L^u \supset \Gamma$; Γ — траектория простого касания, не принад-

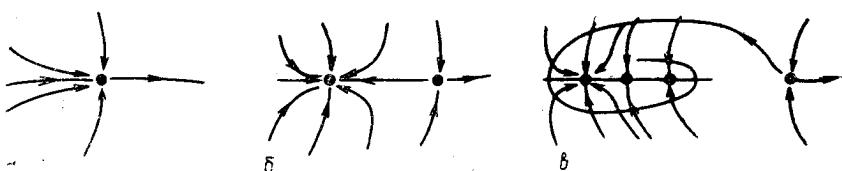


Рис. 54. Бифуркации периодических точек в окрестности гомоклинической траектории

лежащая неведущему подмногообразию устойчивого многообразия W_L^s ¹⁾.

Замечание. В [66], [67] на v_0 наложено еще одно условие, не нарушающее общности положения. Для примера пункта 6.6 это условие: $c \neq 0$.

Теорема ([66], [67]). Для любого однопараметрического семейства $\{v_\epsilon\}$ векторных полей в $\chi(M)$, $r \geq 4$, такого, что $\{v_\epsilon\}$ трансверсально к B_1 в точке v_0 , на отрезке $[-1, 1] \ni \epsilon$ существует счетное множество интервалов $\{\delta_k^1 \cup \delta_k^2\}$,

$$\overline{\delta_k^1} \cap \overline{\delta_k^2} = \{\epsilon_k^2\}; \quad \partial \delta_k^1 \cup \partial \delta_k^2 = \{\epsilon_k^1; \epsilon_k^2; \epsilon_k^3\},$$

таких что при $\epsilon \in \delta_k^1 \cup \delta_k^2$ векторное поле v_ϵ будет иметь устойчивый предельный цикл — однообходный при $\epsilon \in \delta_k^1$ и двухобходный при $\epsilon \in \delta_k^2$ ²⁾. При $\epsilon \in \bigcup_{i=1}^3 \delta_k^i$ поле v_ϵ имеет негиперболический предельный цикл: при $\epsilon = \epsilon_k^1$ — однообходный с мультиплликатором 1; при $\epsilon = \epsilon_k^2$ ($\epsilon = \epsilon_k^3$) — однообходный (двуобходный) с мультиплликатором (-1).

6.9. Векторные поля на бифуркационной поверхности.

В п. 6.7 системам на B_1 отвечает значение $e=0$. В условиях же 4) класс допустимых пар натуральных чисел p_i, p_{i+1} может меняться при незначительном изменении λ и γ , даже при $e=0$. Можно предположить, что даже на бифуркационной поверхности B_1 происходят бифуркции. Это действительно так, но лишь для векторных полей, не являющихся граничными для множества векторных полей Морса—Смейла. Справедлива

Теорема ([66], [67]). В окрестности векторного поля, удовлетворяющего условиям теоремы пункта 6.8, но не являющегося граничным для векторных полей Морса—Смейла, на бифуркационной поверхности всюду плотны векторные поля, обладающие: 1) предельным циклом типа седло-узел; 2) предельным циклом типа неориентируемый узел (с мультиплликатором, равным (-1)); 3) бесконечным множеством устойчивых предельных циклов.

В случае, если бифуркационная поверхность является граничной для векторных полей Морса—Смейла в точке v_0 , то векторные поля $\{v_0\}$ различаются модулем (см. п. 6.3), но геометрически «одинаковы». В неблуждающее множество добавляется лишь гомоклиническая траектория простого касания.

¹⁾ Неведущее подмногообразие пересекается с трансверсалью, касаясь инвариантного линейного подпространства, отвечающего мультиплликаторам $\lambda_2, \dots, \lambda_m$, если λ_1 вещественно, и $\lambda_3, \dots, \lambda_m$ — в противном случае.

²⁾ Пусть L — гиперболический цикл и Γ — его гомоклиническая траектория. Циклы последовательности $\{L_n\}$ называются k -обходными, если для любой окрестности U цикла L и любой окрестности V траектории Γ существуют такое N и такая окрестность W цикла L , что для всех $n > N$, $L_n \subset U \cap V$, и разность $L_n \setminus W$ состоит из k связных компонент.

6.10. Диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических траекторий. В окрестности диффеоморфизма двумерной поверхности, имеющего гомоклиническую траекторию простого касания, существуют диффеоморфизмы с бесконечным множеством устойчивых периодических траекторий. Точнее, имеет место

Теорема ([176], [189]). Пусть p — диссипативная гиперболическая седловая неподвижная точка C^r -диффеоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$, $r \geq 2$. Предположим, что W_p^u и W_p^s имеют траекторию простого касания. Тогда произвольно C^r -близко к f имеется диффеоморфизм g , для которого существует окрестность $\mathcal{U} \subset \text{Diff}^r(M^2)$ и множество второй категории $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ такое, что любой диффеоморфизм $h \in \mathcal{B}$ имеет бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

Модификация этой теоремы для однопараметрических семейств диффеоморфизмов приведена в [177].

Теорема. Предположим, что $\{f_\varepsilon\}$ — кривая C^3 -диффеоморфизмов компактной поверхности M такая, что: 1) при $\varepsilon = \varepsilon_0$ f_{ε_0} имеет диссипативную неподвижную седловую точку p и гомоклиническую траекторию простого касания W_p^u и W_p^s ; 2) $\{f_\varepsilon\}$ трансверсально пересекает \mathcal{B}_1 в точке f_0 . Тогда существуют значения $\varepsilon > \varepsilon_0$, для которых f_ε имеет бесконечно много устойчивых периодических траекторий.

Пример. Модель контакта Джозефсона

$$\dot{\varphi} = y, \quad \dot{y} = \rho - \sin \varphi - 1/V \beta \cdot (1 + \varepsilon \cos \varphi) y + \alpha \sin \Omega t,$$

где ρ — безразмерный ток, а y — безразмерное напряжение, при некоторых (физических) значениях параметров, как доказано в [125], имеет гомоклиническую траекторию простого касания диссипативной седловой неподвижной точки отображения последования плоскости $t=0$ в $t=\frac{2\pi}{\Omega}$. Приблизительно при этих же значениях параметра было экспериментально обнаружено явление невоспроизводимости вольт-амперной характеристики: при одних и тех же условиях опыта вольт-амперная характеристика получалась различной: за вольт-амперную характеристику в данном случае можно принять зависимость $\langle y \rangle$ от ρ , где $\langle y \rangle =$

$$= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(\tau) d\tau. \quad \text{Если учесть, что } \dot{\varphi} = y, \text{ то } \langle y \rangle = \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}, \text{ т. е. «числу вращения фазы»}.$$

Естественно предположить, что невоспроизводимость вольт-амперной характеристики объясняется наличием бесконечного предельного множества (и, в частности, счетного множества устойчивых предельных циклов с различными областями существования по параметру ρ), содержащего траектории с различными «числами вращения фазы».

§ 7. Бесконечные неблуждающие множества

Здесь описывается компонента границы множества систем Морса—Смейла, состоящая из потоков с бесконечным множеством неблуждающих траекторий. Во всех приводимых ниже примерах типичные точки границы недостижимы. Так ли это в общем случае, неизвестно. В частности, неизвестно, верно ли, что в типичном однопараметрическом семействе векторных полей рождению бесконечного неблуждающего множества предшествует одна из бифуркаций, описанных в предыдущих параграфах (появление негиперболической особой точки или цикла, или траекторий, принадлежащих простому касанию либо нетрансверсальному пересечению устойчивого и неустойчивого многообразий особой точки и (или) цикла).

7.1. Векторные поля на двумерном торе. Класс систем Морса—Смейла на двумерном торе T^2 так же, как и на любой двумерной поверхности (см. § 2), совпадает с классом структурно устойчивых (и грубых) систем. Поэтому любая негрубая система T^2 лежит на границе множества систем Морса—Смейла.

Если для некоторой системы на T^2 есть глобальная секущая, — компактная трансверсаль ко всем траекториям системы, — то можно ввести число вращения Пуанкаре, иррациональному значению которого соответствует наличие незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории. По теореме Биркгофа (см., например, [91]) в замыкании незамкнутой устойчивой по Пуассону траектории содержится континуальное множество незамкнутых устойчивых по Пуассону траекторий, каждая из которых всюду плотна в нем. Таким образом, если система имеет иррациональное число вращения, то ее неблуждающее множество содержит бесконечное множество траекторий.

Для любого однопараметрического семейства C^r -гладких, $r \geq 1$, векторных полей на T^2 , непрерывно зависящих от параметра и обладающих при каждом его значении глобальной секущей, число вращения непрерывно зависит от параметра. Если оно изменяется, то неминуемо принимает иррациональные значения. Следовательно, системы с бесконечным неблуждающим множеством встречаются неустранимым образом в однопараметрических семействах векторных полей, обладающих разными числами вращения хотя бы для двух значений параметра.

Предположим теперь, что для некоторого векторного поля на T^2 число вращения рационально. Если векторное поле — общего положения, на то T^2 имеется четное число предельных циклов, половина устойчивых, половина неустойчивых. Число вращения может измениться только после того, как эти циклы перестанут существовать. Их исчезновение связано с прохождением мультиликаторов через $+1$. Таким образом, векторное поле с бесконечным неблуждающим множеством (и с глобаль-

ной секущей) является предельным для векторных полей с циклами с мультиликатором $+1$. Точно так же множество векторных полей с данным иррациональным числом вращения является предельным для бифуркационных поверхностей, отвечающих циклам с мультиликатором единицы. Как вытекает из [18], для почти всех (по мере Лебега) чисел вращения это множество является гладким подмногообразием банахова пространства. В общем случае вопрос открыт.

Для общего двухпараметрического семейства векторных полей, в котором происходит рождение двумерного тора из цикла с мультиликатором $e^{\pm i\varphi}$, $\varphi \neq 0, \pi, 2\pi/3, \pi/2$, можно показать, что бифуркационная кривая, отвечающая в этом семействе векторным полям с некоторым фиксированным иррациональным числом вращения, будет гомеоморфным и, как вытекает из [18] для почти всех чисел вращения, диффеоморфным образом отрезка. Может ли теряться гладкость этой кривой для некоторых (иррациональных) чисел вращения, неизвестно.

7.2. Бифуркации систем с двумя гомоклиническими кривыми седла. Для простоты опишем потоки в \mathbb{R}^3 (аналогичные результаты верны для потоков в \mathbb{R}^n , имеющих седла с одномерным неустойчивым многообразием).

Пусть v — векторное поле, имеющее седло в начале координат O . Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — корни характеристического уравнения в точке O , причем $\lambda_3 > 0$, а $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$. В этом случае размерность неустойчивого (устойчивого) многообразия равна 1 (2). В устойчивом многообразии существует одномерное неведущее подмногообразие W_O^{ss} , касающееся в точке O собственного направления, отвечающего собственному значению λ_2 . W_O^{ss} делит W_O^s на две части. Предположим, что $W_O^u \subset W_O^s$, причем $W_O^u \setminus O$ лежит в одной компоненте $W_O^s \setminus W_O^{ss}$ (как говорят, имеет место случай «бабочки», а не «восьмерки»). Предположим также, что цикл, который может рождаться из каждой гомоклинической кривой, имеет положительные мультиликаторы (см. § 5). Наконец, предположим, что седловая величина $\sigma = \lambda_1 + \lambda_3$ отрицательна (см. рис. 55).

Очевидно, векторное поле v может лежать на границе множества систем Морса—Смейла (в замкнутом шаре большого радиуса в \mathbb{R}^3).

Теорема. В сколь угодно малой окрестности векторного поля v (в пространстве C^2 -гладких векторных полей на \mathbb{R}^3) существуют векторные поля, обладающие нетривиальными (т. е. отличными от особых точек и предельных циклов) устойчивыми по Пуассону траекториями.

Зафиксируем окрестность точки v и обозначим через \mathcal{B}_r множество векторных полей, лежащих в ней и обладающих бесконечным неблуждающим множеством (нетривиальными устойчивыми по Пуассону траекториями).