(Следует заметить, что в последнем уравнении стоит g, а не $-g$.) Каждое решение этой системы

$$x_1 = \varphi_1(t), \ \ldots, \ x_n = \varphi_n(t), \quad z = \varphi(t) \tag{3}$$

называется *характеристикой* дифференциального уравнения (1). Кривая в r-пространстве, определенная первыми n уравнениями (3), называется *характеристической кривой*.

(б) Между интегралами и характеристиками уравнения (1) существует следующая связь (ср. с п. 3.2). Рассмотрим в $\mathfrak{G}_n(r)$ непрерывно дифференцируемую функцию $\chi(r)$ и точку r, $z = \chi(r)$, принадлежащую $\mathfrak{G}_{n+1}$. Если через любую точку $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$ поверхности $z = \chi(r)$ проходит по крайней мере некоторый кусок характеристики, целиком принадлежащий поверхности, если

$$\varphi(t) = \chi(\varphi_1(t), \ \ldots, \ \varphi_n(t))$$

для некоторого куска характеристики (3), проходящего через $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$, то функция $z = \chi(r)$ в $\mathfrak{G}_n$ есть интеграл уравнения (1).

5.3. Решение уравнения посредством характеристик. Согласно п. 5.2 (б), интегралы уравнения (1) являются непрерывно дифференцируемыми поверхностями, которые можно построить из характеристик. Если характеристики некоторого уравнения хорошо обозримы, то можно на основании этого попытаться уже составить представление об интегральных поверхностях.

Проиллюстрируем это несколькими примерами.

(а) $$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c,$$

где $|a| + |b| > 0$.

Характеристические уравнения

$$x'(t) = a, \quad y'(t) = b, \quad z'(t) = c$$

показывают, что характеристиками являются линии

$$x = \xi + at, \quad y = \eta + bt, \quad z = \zeta + ct$$

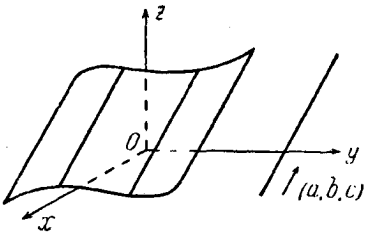

Рис. 14.

(t — параметр), причем ξ, η, ζ могут быть взяты произвольно. Иначе говоря, характеристики образуют семейство параллельных прямых, которые, в силу условия $|a| + |b| > 0$, не ортогональны плоскости x, y. Следовательно, интегральными поверхностями являются всевозможные непрерывно дифференцируемые цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны таким прямым [1]) (рис. 14); ср. с п. 2.4 (а).

(б) $$(x-a)\frac{\partial z}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial z}{\partial y} = z - c.$$

Характеристические уравнения

$$x'(t) = x - a, \quad y'(t) = y - b, \quad z'(t) = z - c$$

[1]) [То есть параллельны вектору (a, b, c). — *Прим. ред.*]

дают нам следующие характеристики:

$$x - a = C_1 e^t, \qquad y - b = C_2 e^t, \qquad z - c = C_3 e^t$$

(где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные), т. е. характеристиками является множество лучей, выходящих из точки (a, b, c). Поэтому интегральные поверхности — всевозможные непрерывно дифференцируемые коноиды с вершиной в точке (a, b, c) (рис. 15), ср. с п. 2.4 (б).

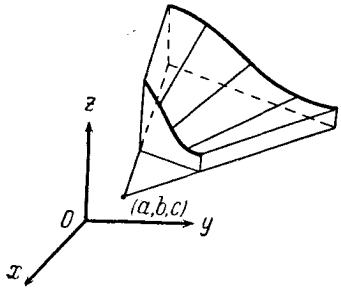

Рис. 15.

(в) $$(bz - cy)\frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az)\frac{\partial z}{\partial y} = ay - bx, \quad |a| + |b| + |c| > 0.$$

Характеристические уравнения

$$x'(t) = bz - cy, \qquad y'(t) = cx - az, \qquad z'(t) = ay - bx$$

показывают, что вдоль каждой характеристики

$$ax' + by' + cz' = 0, \quad \text{или} \quad ax + by + cz = \text{const}$$

и

$$xx' + yy' + zz' = 0, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}\ ^{1)}.$$

Следовательно, каждая характеристика принадлежит плоскости $ax + by + cz = C_1$ и одновременно шару $x^2 + y^2 + z^2 = C_2^2$; таким образом, она представляет собой круг, лежащий в этой плоскости (который может вырождаться в точку). Интегральные поверхности представляют собой всевозможные непрерывно дифференцируемые поверхности вращения (или части таковых), оси вращения которых проходят через начало координат и ортогональны плоскости $ax + by + cz = 0$ [2]) (рис. 16); ср. с п. 2.4 (в).

(г) $$(bz - cy + A)\frac{\partial z}{\partial x} + (cx - az + B)\frac{\partial z}{\partial y} = ay - bx + C.$$

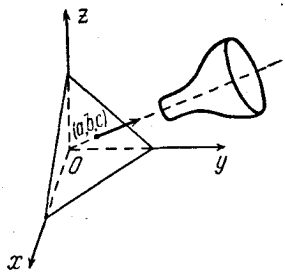

Рис. 16.

Интегральные поверхности — винтовые поверхности; это показывается так же, как и в примере (в). Поскольку вычисление проще в векторной записи, то мы положим

$$\boldsymbol{v} = (a, b, c), \qquad \boldsymbol{V} = (A, B, C), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z).$$

Тогда характеристические уравнения примут вид [3])

$$\boldsymbol{r}'(t) = \boldsymbol{V} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}. \qquad (*)$$

---

[1]) Отсюда, в силу п. 5.2 (б), следует, что $z = \sqrt{C^2 - x^2 - y^2}$ и, если $c \neq 0$, также $z = \dfrac{C - ax - by}{c}$ — интегралы данного уравнения.

[2]) [Иначе говоря, ось вращения проходит через начало координат параллельно вектору (a, b, c). — *Прим. ред.*]

[3]) [Запись $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{r}$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{r}$. *Прим. ред.*]

Будем считать, что особые случаи, рассмотренные в примерах (а) или (в), не имеют места (этого можно добиться, предполагая, что $v \neq 0$ и $V \neq 0$).

Надо доказать, что каждая характеристика $r = r(t)$ есть винтовая линия, ось которой параллельна вектору v и проходит через конечную точку Ω исходящего из начала координат вектора [1] $\frac{v \times V}{v^2}$ (рис. 17). Построим для произвольной точки $P = P(r)$ характеристики вектор

$$w = \overrightarrow{\Omega P} = r - \frac{v \times V}{v^2}.$$

Квадрат расстояния $\rho = \rho(t)$ от точки P до указанной выше оси l равен с точностью до постоянного множителя [2]

$$\rho^2 = (v \times w)^2 = \left(v \times r - v \times \frac{v \times V}{v^2}\right)^2 =$$

$$= (v \times r)^2 - 2(v \times r)\left(v \times \frac{v \times V}{v^2}\right) + \left(v \times \frac{v \times V}{v^2}\right)^2 =$$

$$= (v \times r)^2 - 2(v \times r)\frac{1}{v^2}[v(vV) - Vv^2] + \text{const} =$$

$$= (v \times r)^2 + 2(v \times r)V + \text{const} = (V + v \times r)^2 + \text{const}.$$

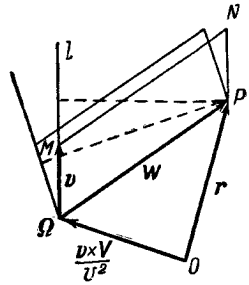

Рис. 17.

В силу характеристического уравнения (*), получаем:

$$\frac{d}{dt}(V + v \times r)^2 = 2(V + v \times r)(v \times r') =$$

$$= 2r'(v \times r') = 0;$$

этим непосредственно устанавливается, что величина ρ^2 постоянна вдоль любой характеристики. Таким образом, все точки характеристики равноудалены от оси l. Далее, имеем:

$$r'^2 = (V + v \times r)^2 = \text{const}$$

и

$$vr' = v(V + v \times r) = vV = \text{const}.$$

Таким образом, касательная в любой точке кривой $r(t)$ образует с вектором v постоянный угол, т. е. характеристики — винтовые линии с фиксированной осью l, параллельной вектору v и проходящей через точку Ω. Следовательно, все интегральные поверхности являются винтовыми поверхностями, которые можно построить из этих винтовых линий.

---

[1]) [Запись v^2 означает скалярный квадрат вектора v, т. е. квадрат его длины. — *Прим. ред.*]

[2]) [Как известно, модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, сторонами которого являются данные векторы. Следовательно, используя два выражения для квадрата площади параллелограмма ΩMNP (рис. 17), мы имеем:

$$(v \times w)^2 = \rho^2 v^2;$$

множитель v^2 является постоянным (не зависящим от параметра t, т. е. от выбора точки P). Используемые ниже свойства векторного и скалярного произведений векторов доказываются в любом курсе аналитической геометрии или векторной алгебры (см., например, Н. В. Ефимов, Краткий курс аналитической геометрии, «Наука», 1965; Я. С. Дубнов, Основы векторного исчисления, ч. I, Гостехиздат, 1950). Запись vV означает скалярное произведение указанных векторов. Все слагаемые, не зависящие от параметра t, включаются в член const, вид которого не имеет значения и потому не уточняется. — *Прим. ред.*]

5.4. Сведение квазилинейного уравнения к линейному однородному. Следуя методу п. 12.3 (а), дифференциальное уравнение (1) может быть сведено к линейному однородному дифференциальному уравнению [1])

$$\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(\boldsymbol{r}, z)\frac{\partial w}{\partial x_\nu} + g(\boldsymbol{r}, z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{4}$$

с искомой функцией $w = w(\boldsymbol{r}, z)$. Если $w(\boldsymbol{r}, z)$ — интеграл этого уравнения, то, разрешая уравнение $w = 0$ относительно z, мы получим, при необходимых предположениях, решение уравнения (1).

Точнее, верно следующее предложение. Пусть $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ — интеграл однородного уравнения (4) в $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r}, z)$. Далее, пусть $\chi(\boldsymbol{r})$ — функция в $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$ со следующими свойствами:

α) она непрерывно дифференцируема в $\mathfrak{G}_n$;

β) точки $(\boldsymbol{r}, z = \chi(\boldsymbol{r}))$ принадлежат области $\mathfrak{G}_{n+1}$;

γ) $\psi_z(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) \not\equiv 0$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}_n$;

δ) функция $\psi(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r}))$ постоянна в области $\mathfrak{G}_n$. Тогда $\chi(\boldsymbol{r})$ — интеграл [2]) квазилинейного уравнения (1) в области $\mathfrak{G}_n$.

Характеристическими уравнениями дифференциального уравнения (4) являются, согласно п. 3.2, характеристические уравнения (2) квазилинейного уравнения (1).

Пример. $(y+z)^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - x(y+2z)\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz.$

Требуется найти интегральную поверхность, проходящую через кривую $z = x^2$, $y = 0$.

Сначала попытаемся получить интеграл соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения

$$(y+z)^2\frac{\partial w}{\partial x} - x(y+2z)\frac{\partial w}{\partial y} + xz\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{*}$$

Характеристические уравнения этого последнего уравнения

$$x'(t) = (y+z)^2, \qquad y'(t) = -x(y+2z), \qquad z'(t) = xz$$

нам дают соотношения:

$$(y+z)z' + (y'+z')z = 0, \qquad xx' + yy' - zz' = 0,$$

т. е., в силу п. 3.3, уравнение (*) имеет интегралы

$$\psi_1(x, y, z) = (y+z)z, \qquad \psi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$

---

[1]) Обратим внимание на то, что функция $g(\boldsymbol{r}, z)$ написана в левой части уравнения со знаком плюс.

[2]) По вопросу, можно ли этим методом получить все интегралы уравнения (1), варьируя интегралы ψ уравнения (4), см. Kamke, DGlen, стр. 333.

Более того, они образуют интегральный базис: для произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\Omega(u, v)$ выражение

$$\psi(x, y, z) = \Omega(\psi_1(x, y, z), \psi_2(x, y, z)) \qquad (**)$$

также является интегралом уравнения (*).

Если теперь разрешить уравнение $\psi = 0$ относительно z и его решение $z = \chi(x, y)$ удовлетворяет указанным выше предположениям, то χ — интеграл исходного квазилинейного дифференциального уравнения. Этот интеграл должен при $y = 0$ иметь значение $z = x^2$, причем интеграл z должен удовлетворять уравнению $\Omega(u, v) = 0$. Следовательно, это уравнение, в частности, должно быть справедливо при

$$u = \psi_1(x, 0, x^2) = x^4, \qquad v = \psi_2(x, 0, x^2) = x^2 - x^4;$$

из этих соотношений следует: $(u + v)^2 \equiv u$. Значит, например, для $\Omega(u, v) = (u + v)^2 - u$ начальные условия выполнены и из (**) получаем:

$$\psi = (x^2 + y^2 + yz)^2 - (y + z)\, z.$$

Разрешая уравнение $\psi = 0$ относительно z, мы получим интеграл исходного уравнения.

5.5. Частный случай: $p + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, y, z)\, q_\nu = g(x, y, z)$.

(а) Если по крайней мере один из коэффициентов f_ν уравнения (1) во всей рассматриваемой области не обращается в нуль, то делением на этот коэффициент мы получаем после несложных вычислений уравнение в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x, \boldsymbol{y}, z) = \frac{\partial z}{\partial y_\nu} = g(x, \boldsymbol{y}, z); \qquad (5)$$

здесь $\boldsymbol{y}$ означает вектор с компонентами $y_1, \ldots, y_n$ и $z = z(x, \boldsymbol{y})$ — искомая функция. Характеристическая система для уравнения (5) записывается так:

$$\left.\begin{aligned} y'_\nu(x) &= f_\nu(x, \boldsymbol{y}, z), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \\ z'(x) &= g(x, \boldsymbol{y}, z) \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

(здесь положено $t = x$).

(б) Имеет место следующая теорема существования для решения задачи Коши [1]). В области

$$|x - \xi| < a; \quad \boldsymbol{y}, z \text{ — произвольные} \qquad (7)$$

рассмотрим непрерывно дифференцируемые функции $f_1, \ldots, f_n, g$ с ограниченными частными производными первого порядка по y_μ и z. Пусть абсолютные величины всех этих производных ограничены в совокупности константой A. Далее, пусть $\omega(\boldsymbol{y})$—функция, имеющая по всем y_μ ограниченные непрерывные производные первого порядка. Пусть

[1]) См. Kamke, DGlen, стр. 335—340.

абсолютные величины всех этих производных ограничены в совокупности константой C. Тогда дифференциальное уравнение (5) в области

$$|x-\xi|<\min(a,\ \alpha),\ \boldsymbol{y}\text{ — произвольное},$$

где

$$\alpha=\frac{1}{(n+1)A}\ln\left(1+\frac{n+1}{n(C+1)}\right),$$

имеет единственный интеграл $z=\chi(x,\ \boldsymbol{y})$ с начальным значением

$$\chi(\xi,\ \boldsymbol{y})=\omega(\boldsymbol{y}).$$

Этот интеграл в параметрической записи выглядит так ($\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n$ — параметры):

$$z=\varphi(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \omega(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)),$$

$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \omega(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n;$$

здесь

$$y_\nu=\varphi_\nu(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \zeta),\qquad \nu=1,\ \ldots,\ n,$$

$$z=\varphi(x,\ \xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \zeta)$$

— интегральная кривая системы (6), проходящая через точку $(\xi,\ \eta_1,\ \ldots,\ \eta_n,\ \zeta)$.

Если привлечь получающиеся в п. 12.2 для дифференциального уравнения (5) $2n+1$ характеристических уравнений, то нетрудно показать, что введенное выше число α можно увеличить, а именно можно положить [1]):

$$\alpha=\frac{1}{A(C+1)},\quad\text{если}\quad n=1;$$

$$\alpha=\frac{1}{(n-1)A}\ln\frac{n(C+1)}{nC+1},$$

$$\text{если}\quad n\geqslant 2.$$

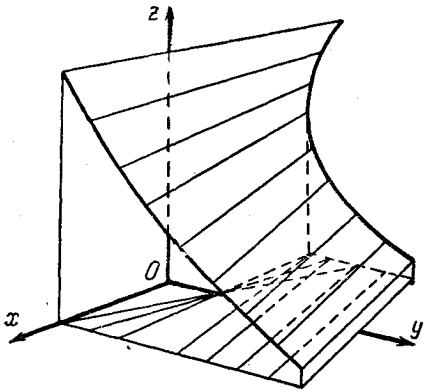

Рис. 18.

Такое число α, вообще говоря, должно быть введено, хотя характеристики, как легко видеть, в предположениях теоремы существования имеются во всей области $|x-\xi|<a$. В самом деле, уже в случае $n=1$ характеристическая полоса, которая должна лежать в плоскости x, y, с удалением от точки $x=\xi$ скручивается и перестает лежать в плоскости x, y (рис. 18).

---

[1]) См. J. Perausówna, Annales Soc. Polon. **12** (1934), стр. 1—5; T. Ważewski, Annales Soc. Polon. **12** (1934), стр. 6—15; E. Kamke, Publications de l'Institut Math. de l'Acad. Serbe. **4** (1952), стр. 61—68.

(в) Если дифференциальное уравнение (5) задано не в специальной области (7), а в некоторой более общей области $\mathfrak{G}_{n+2}(x, y, z)$, то можно, по образцу п. 3.6 (в), рассмотреть в качестве области определения коэффициентов область вида (7) или даже все x, y, z-пространство и, таким образом, с помощью (б) вывести теорему существования для подобласти области $\mathfrak{G}_{n+2}$ [1]).

(г) Пример.

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

Требуется найти интеграл $z(x, y)$ с начальным значением $z(0, y)=\omega(y)$ при заданной функции ω.

Характеристические уравнения $y'(x)=1$, $z'(x)=z$ дают нам следующее выражение для характеристики, проходящей через точку (ξ, η, ζ):

$$y=\varphi_1(x, \xi, \eta, \zeta)=x-\xi+\eta,$$
$$z=\varphi(x, \xi, \eta, \zeta)=\zeta e^{x-\xi}.$$

Поэтому, в силу начальных условий,

$$y=x+\eta, \qquad z=e^x\omega(\eta)$$

— параметрическая запись искомого интеграла. Можно еще исключить параметр η: выражение

$$z=e^x\omega(y-x)$$

даст искомый интеграл, даже если для функции ω выполнены не все предположения теоремы существования.

5.6. Решение задачи Коши.

(а) Формулировка обобщенной задачи Коши для дифференциального уравнения (1) дословно такая же, как и в п. 3.7 (б) в области $\mathfrak{G}(r)$, которая задана параметрически

$$x_\nu=u_\nu(t_1, \ldots, t_{n-1}), \qquad \nu=1, \ldots, n;$$

требуется найти интеграл уравнения (1), принимающий заданное значение

$$z=u(t_1, \ldots, t_{n-1}). \tag{8}$$

Задача разрешима при следующих предположениях [2]). Пусть коэффициенты $f_\nu(r, z)$ и $g(r, z)$ определены в области $\mathfrak{G}(r, z)$, пусть функции u_ν и u в некоторой области $H(t_1, \ldots, t_{n-1})$ непрерывно дифференцируемы. Множество точек $\mathfrak{H}(r, z)$, где $r \in \mathfrak{G}$, а z

---

[1]) См. O. Perron, Math. Zeitschrift 27 (1928), стр. 557.

[2]) См. Курант, стр. 78—83. Там же исследуется случай, когда определитель (9) обращается в нуль.

определяется по формуле (8), должно принадлежать $\mathfrak{G}$. Наконец, определитель

$$\begin{vmatrix} f_1(u_1, \ldots, u_n, u), \ldots, f_n(u_1, \ldots, u_n, u) \\ \frac{\partial u_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t_1} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial u_1}{\partial t_{n-1}}, \ldots, \frac{\partial u_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (9)$$

в области H. Через точки множества $\mathfrak{H}$ проводят характеристики

$$\left.\begin{aligned} x_\nu &= \varphi_\nu(t, u_1, \ldots, u_n, u), \qquad \nu = 1, \ldots, n, \\ z &= \varphi(t, u_1, \ldots, u_n, u); \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

первые n из этих уравнений определяют характеристическое поле $G(H)$. Уравнения (10) — параметрическая запись искомого интеграла в каждой такой части $G(H)$, которая содержит область $\mathfrak{G}$, которая обладает тем свойством, что точка $(r, z) \in \mathfrak{G}$, и в которой разрешение первых n уравнений (10) относительно $t_1, \ldots, t_{n-1}, t$ доставляет нам параметры как непрерывно дифференцируемые функции от переменных $x_1, \ldots, x_n$. В силу (9), такое разрешение заведомо возможно в достаточно малой окрестности области $\mathfrak{G}$.

(б) Для дифференциального уравнения

$$f(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + g(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{h(x, y)}{\lambda'(z)}$$

справедливо также следующее предложение [1]).

Пусть коэффициенты f, g, h непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y)$, и пусть $|f| + |g| > 0$. Далее, пусть функции $\lambda(u)$ для $u_1 < u < u_2$ пробегает все действительные числа и имеет отличную от нуля непрерывную производную. Тогда указанное дифференциальное уравнение имеет интеграл в любой односвязной подобласти $\mathfrak{g}$ области $\mathfrak{G}$, которая не имеет в конечной части плоскости x, y общих граничных точек с $\mathfrak{G}$ и в которой функции f и g ограничены.

Для $\lambda(u) = u$, $\ln u$, $\operatorname{tg} u$, $\operatorname{ctg} u$ правая часть данного дифференциального уравнения соответственно равна h, zh, $h\cos^2 z$, $-h\sin^2 z$.

5.7. Разложение в ряды. Если допустить комплексные переменные, то становится справедливой следующая теорема существования [2]). Пусть в дифференциальном уравнении (5) коэффициенты $f_\nu(x, y, z)$

---

[1]) См. E. Kamke, Math. Zeitschrift **41** (1936), стр. 66; M. Cibrario, Atti Accad. Lincei (6) **13** (1931), стр. 26—31.

[2]) [Это — частный случай общей теоремы Ковалевской. См., например, Курант, стр. 50; Степанов, стр. 335; И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, 1961, стр. 22. — *Прим. ред.*]

и $g(x, y, z)$ в некоторой окрестности точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n, \zeta)$ являются регулярными функциями переменных $x, y_1, \ldots, y_n, z$, т. е. они разлагаются в этой окрестности в абсолютно сходящиеся ряды, которые, естественно, являются степенными рядами от $x-\xi$, $y_\nu-\eta_\nu$, $z-\zeta$. Кроме того, пусть $\omega(y)$—данная функция от $y_1, \ldots, y_n$, регулярная в некоторой окрестности точки $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$, и пусть

$$\omega(\eta_1, \ldots, \eta_n)=\zeta.$$

Тогда дифференциальное уравнение (5) обладает единственным интегралом, являющимся в некоторой достаточно малой окрестности точки $(\xi, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ регулярной функцией от $x, y_1, \ldots, y_n$, которая принимает при $x=\xi$ значение

$$z(\xi, y)=\omega(y).$$

Коэффициенты искомого степенного ряда

$$z=\sum_{\nu, \nu_1, \ldots, \nu_n}' c_{\nu, \nu_1, \ldots, \nu_n}(x-\xi)^\nu (y_1-\eta_1)^{\nu_1} \ldots (y_n-\eta_n)^{\nu_n}$$

получаются подстановкой этого ряда в дифференциальное уравнение (5) и приравниванием соответствующих степеней с учетом начальных условий.

5.8. Методы решения. В ряде случаев можно прийти к цели методами, указанными в пп. 5.3 и 5.4. Если на этом пути не удается получить решения, то можно (в случае, если задано начальное значение интеграла) решать приближенно соответствующие характеристические уравнения и получить затем, следуя методам пп. 5.5 или 5.6, приближенное численное решение.

§ 6. Система линейных уравнений [1])

6.1. Частный случай: $p_\nu=f_\nu(r)$, $\nu=1, \ldots, n$. Простейшая система линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка для одной неизвестной функции n независимых переменных имеет вид

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=f_\nu(r), \qquad \nu=1, \ldots, n,$$

где снова положено r вместо вектора с компонентами $x_1, \ldots, x_n$

[1]) Изложение следует книгам A. R. Forsyth, Theory of Differential Equations, Cambridge, 1906; E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921. [См. также литературу, указанную перед § 1. — *Прим. ред.*]

и $z = z(r)$ — искомая функция. Если функции f_ν в области $\mathfrak{G}(r)$ непрерывно дифференцируемы, то каждое решение этой системы будет дважды непрерывно дифференцируемым. Тогда, поскольку [1])

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu \, \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu \, \partial x_\mu},$$

должны быть выполнены равенства

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial x_\mu}, \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, n$$

(*условия интегрируемости*).

Если это условие выполнено, то в каждой односвязной области $\mathfrak{G}$ исходная система разрешима и, более того, можно еще удовлетворить начальному условию: функция z в некоторой точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ области $\mathfrak{G}$ принимает значение ζ. Решение системы в этом случае выглядит так:

$$z = \zeta + \int\limits_{(\xi_1, \ldots, \xi_n)}^{(x_1, \ldots, x_n)} (f_1 \, dx_1 + \ldots + f_n \, dx_n),$$

причем интеграл берется по любой [2]) непрерывной спрямляемой кривой, целиком лежащей в $\mathfrak{G}$ и связывающей точки $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $(x_1, \ldots, x_n)$.

В случае конкретно заданной исходной системы можно подходить к решению несколько по-иному: сначала определяют все множество функций, удовлетворяющих первому уравнению системы, затем определяют подмножество этих функций, удовлетворяющих второму уравнению, и т. д.

Пример.

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = x_2, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = x_1.$$

Условие интегрируемости выполнено. Из первого уравнения (считая x_2 параметром) находим $z = x_1 x_2 + \varphi(x_2)$, где φ — произвольная, гладкая функция. Далее, из второго уравнения получаем $\varphi'(x_2) = 0$. Таким образом, $z = x_1 x_2 + C$.

---

[1]) [В силу известной теоремы анализа, см., например, Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*]

[2]) [Значение этого интеграла зависит лишь от начальной и конечной точек и не зависит от выбора пути интегрирования; см. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. III, Физматгиз, 1962. — *Прим. ред.*]

6.2. Общая линейная система: определения и обозначения. (а) Общая *линейная* система имеет вид[1])

$$\sum_{k=1}^{n} f^{\mu,k}(r)\frac{\partial z}{\partial x_k}+f^{\mu,0}(r)\,z=g^{\mu}(r),\qquad \mu=1,\ldots,m, \tag{1}$$

причем снова r означает вектор с компонентами $x_1,\ldots,x_n$, а $z=z(r)$ — искомая функция. Если под F^{μ} понимать оператор[2])

$$F^{\mu}=\sum_{k=1}^{n} f^{\mu,k}\frac{\partial}{\partial x_k}+f^{\mu,0},$$

то систему уравнений (1) можно записать короче:

$$F^{\mu}z=g^{\mu},\qquad \mu=1,\ldots,m. \tag{1a}$$

Если система (1) может быть разрешена относительно каких-нибудь m производных, то, обозначая независимые переменные через $x_1,\ldots,x_m$; $y_1,\ldots,y_s$ $(m+s=n)$, мы можем переписать систему в виде

$$\frac{\partial z}{\partial x_{\mu}}=\sum_{k=1}^{s} f^{\mu,k}(r,y)\frac{\partial z}{\partial y_k}+f^{\mu,0}(r,y)\,z+g^{\mu}(r,y)\qquad \mu=1,\ldots,m. \tag{2}$$

Здесь r и y обозначают соответственно векторы с компонентами $x_1,\ldots,x_m$ и $y_1,\ldots,y_s$. Система (2) называется *явным* или *каноническим видом* системы линейных дифференциальных уравнений.

Интегралом системы (1) является любой интеграл, общий для всех дифференциальных уравнений системы. Множество интегралов есть, таким образом, подмножество интегралов каждого уравнения в отдельности и поэтому может быть получено (см. п. 6.7 (б)) как сужение множества интегралов отдельных уравнений.

В дальнейшем коэффициенты системы (1) или (2) будут предполагаться непрерывно дифференцируемыми в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(r)$ или соответственно $\mathfrak{G}(r,y)$.

Для каждого интеграла z системы (1) имеем (при любых μ и ν):

$$F^{\nu}\left(F^{\mu}z-g^{\mu}\right)-F^{\mu}\left(F^{\nu}z-g^{\nu}\right)=0 \tag{3}$$

---

[1]) В параграфах, посвященных системам уравнений, целесообразно функции снабжать индексами в верху, в то время как внизу ставится переменная, по которой производится дифференцирование; например, $f^{\mu,k}_{x_\rho}=\dfrac{\partial f^{\mu,k}}{\partial x_\rho}$.

[2]) Очевидно, что $F^{\mu}(u,v)=vF^{\mu}u+uF^{\mu}v-f^{\mu,0}uv$.

(так как в скобках, в силу (1а), стоят нули). Отметим, что любая дважды непрерывно дифференцируемая функция z после применения к ней оператора F^{μ} превращается в непрерывно дифференцируемую (один раз) функцию. Уравнения (3) после выполнения необходимых (см. (1)) операций снова приобретают вид (1)

$$\sum_{\rho=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(f^{\mu\rho}_{x_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{x_k}f^{\mu k}\right)\frac{\partial z}{\partial x_\rho}+\left(f^{\mu 0}_{x_\rho}f^{\nu\rho}-f^{\nu 0}_{x_\rho}f^{\mu\rho}\right)z\right\}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(g^{\mu}_{x_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{x_k}f^{\mu k}\right)+g^{\mu}f^{\nu 0}-g^{\nu}f^{\mu 0}. \qquad (4)$$

Мы будем говорить, что уравнение (4) *получено при помощи образования* [μ, ν]-*скобок*[1]) из μ-го и ν-го уравнений системы (1).

(б) Имеет место следующий фундаментальный факт[2]): каждый интеграл системы (1) должен также удовлетворять уравнениям (4) для $1\leqslant\mu,\ \nu\leqslant m$.

Для системы (2) уравнения (4) имеют вид

$$\sum_{\rho=1}^{s}\left\{\sum_{k=1}^{s}\left(f^{\mu\rho}_{y_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{y_k}f^{\mu k}\right)-f^{\mu\rho}_{x_\nu}+f^{\nu\rho}_{x_\mu}\right\}\frac{\partial z}{\partial y_\rho}+$$
$$+\left\{\sum_{k=1}^{s}\left(f^{\mu 0}_{y_k}f^{\nu k}-f^{\nu 0}_{y_k}f^{\mu k}\right)-f^{\mu 0}_{x_\nu}+f^{\nu 0}_{x_\mu}\right\}z+$$
$$+\sum_{k=1}^{s}\left(g^{\mu}_{y_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{y_k}f^{\mu k}\right)-g^{\mu}_{x_\nu}+g^{\nu}_{x_\mu}+g^{\mu}f^{\nu 0}-g^{\nu}f^{\mu 0}=0. \qquad (5)$$

6.3. Инволюционные системы и полные системы.

(а) Система (1) называется *инволюционной*, если соответствующие ей уравнения (4) удовлетворяются для всех непрерывно дифференци-

---

[1]) Так как уравнения, получаемые при помощи образования [μ, ν]-скобок и [ν, μ]-скобок, отличаются лишь знаком, а уравнение, получаемое при помощи образования [μ, μ]-скобок, есть тождество $0=0$, то уравнения (4) имеет смысл рассматривать для $1\leqslant\mu<\nu\leqslant m$. Отметим, что уравнения (4) не являются частным случаем уравнений § 14, (14); в то же время приводимые ниже уравнения (5) есть частный случай уравнений § 14, (2). Примеры см. в ч. II, 5.6 и II, 5.11.

[2]) Этот факт верен не только для дважды непрерывно дифференцируемых функций z, но и для функций, лишь один раз непрерывно дифференцируемых. См. E. Schmidt, Monatshefte f. Math. **48** (1939), стр. 426—432; O. Perron, Math. Annalen **117** (1941), стр. 687—693; A. Ostrowski, Commentarii math. Helvetici **15** (1942), стр. 217—221.

руемых функций z, т. е. если коэффициенты системы (1) удовлетворяют так называемым *условиям интегрируемости*:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(f^{\mu\rho}_{x_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{x_k}f^{\mu k}\right)=0,\quad \mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m;\quad \rho=0,\ 1,\ \ldots,\ n,\\&\sum_{k=1}^{n}\left(g^{\mu}_{x_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{x_k}f^{\mu k}\right)=f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu},\quad \mu,\ \nu=1,\ \ldots,\ m.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

В частности, система (2) инволюционна, если выполнены ее условия интегрируемости:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{s}\left(f^{\mu\rho}_{y_k}f^{\nu k}-f^{\nu\rho}_{y_k}f^{\mu k}\right)=f^{\mu\rho}_{x_\nu}-f^{\nu\rho}_{x_\mu},\quad \mu,\nu=1,\ \ldots,\ m;\quad \rho=0,\ \ldots,s,\\&\sum_{k=1}^{s}\left(g^{\mu}_{y_k}f^{\nu k}-g^{\nu}_{y_k}f^{\mu k}\right)=g^{\mu}_{x_\nu}-g^{\nu}_{x_\mu}+f^{\mu 0}g^{\nu}-f^{\nu 0}g^{\mu},\mu,\nu=1,\ \ldots,\ m.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

Система (2) в этом случае называется также *якобиевой системой*.

(б) Система (1) называется *полной*, если каждое из соответствующих ей уравнений (4) для любой функции z является лишь линейной комбинацией уравнений самой системы (1), т. е. если для произвольной непрерывно дифференцируемой функции z

$$F^{\mu}\left(F^{\nu}z-g^{\nu}\right)-F^{\nu}\left(F^{\mu}z-g^{\mu}\right)\equiv\sum_{k=1}^{m}\lambda_k(r)\left(F^{k}z-g^{k}\right)$$

с подходяще подобранными (не зависящими от μ и ν) функциями $\lambda_k(r)$.

(в) Для решения системы (1) ее преобразуют следующим образом в полную систему.

Если какое-либо из уравнений (1) в $\mathfrak{G}(r)$ для произвольной непрерывно дифференцируемой функции z является линейной комбинацией остальных, например,

$$F^{\mu}z-g^{\mu}=\sum_{\rho\neq\mu}\lambda_\rho(r)\left(F^{\rho}z-g^{\rho}\right)$$

для некоторых функций $\lambda_\rho(r)$, то это уравнение можно опустить. В этом случае система (1) сводится к системе с меньшим числом

(линейно-независимых) уравнений, которую мы будем называть приведенной[1]).

В силу п. 6.2 (б), каждое решение системы (1) должно удовлетворять уравнениям (4). Поэтому систему (1) можно дополнить теми из уравнений (4), которые не являются линейными комбинациями уравнений (1). Получается снова система вида (1), но уже с m_1 уравнениями. Если $m_1 > m$, то к полученной системе снова применяют описанные рассуждения (коэффициенты системы (1) предполагаются достаточно гладкими) и т. д. Если после конечного числа шагов мы уже не встретим новых уравнений[2]), то полученная система будет полной. Эту систему, согласно 6.5 (в), можно преобразовать в инволюционную. Примеры см. в ч. II, гл. 5.

Необходимое условие разрешимости полученной полной и, таким образом, первоначальной системы состоит во всяком случае в том, чтобы она, рассматриваемая как алгебраическая система уравнений для величин $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}$, была разрешима. Если при этом разрешении все z_{x_ν} оказываются равны нулю, то система не имеет никаких решений, кроме тривиальных $z = \text{const}$.

6.4. Метод Майера для решения якобиевой системы. Пусть в области

$$a_\rho \leqslant x_\rho \leqslant b_\rho, \quad \rho = 1, \ldots, m^{3)}, \quad y \text{ произвольно} \tag{8}$$

---

[1]) В литературе (см., например, E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux derivées partielles du premier ordre Paris, 1921; C. Carathéodory, Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, Leipzig und Berlin, 1935) встречается утверждение, что каждая приведенная система состоит не более чем из $n+2$ уравнений, причем об области, для которой должно быть верно это утверждение, ничего не говорится. В доказательстве обычно утверждается, что если какие-нибудь $n+3$ уравнения охватываются матрицей коэффициентов

$$(f^{\mu 0}, f^{\mu 1}, \ldots, f^{\mu n}, g^{\mu}) \quad \mu = 1, \ldots, n+3$$

с числом строк, превышающим число столбцов, то некоторые строки получаются из других линейной комбинацией и, таким образом, для $m \geqslant n+3$ некоторые строки системы (1) могут быть вычеркнуты. Что для каждой фиксированной точки r_0 в этом случае некоторые строки есть линейные комбинации других, конечно, верно, но неверно, что это имеет место для тех же строк во всей области $\mathfrak{G}(r)$ или хотя бы лишь в достаточно малой окрестности фиксированной, но, вообще говоря, произвольной точки r_0. Последнее, однако, становится верным, если матрица имеет в точке r_0 ранг, наивысший среди рангов в некоторой окрестности точки r_0.

[2]) В литературе (см. книги, указанные в сноске [1])) встречается утверждение, что этот случай всегда наступает и что приведенная полная система состоит всегда из $n+2$ уравнений. Это заблуждение покоится на том же ошибочном заключении, которое было разъяснено в примечании [1]).

[3]) В этом неравенстве один или оба знака равенства могут быть опущены; случаи $a_\rho = -\infty$, $b_\rho = +\infty$ не исключаются.

коэффициенты $f^{\mu k}$, $k \geqslant 1$, системы (2) ограничены [1]), все $f^{\mu k}$ и g^{μ} непрерывно дифференцируемы, и пусть условия интегрируемости (7) выполнены (т. е. система (2) является якобиевой; см. п. 6.3 (а)). Далее, пусть задана функция $\omega(y)$, непрерывно дифференцируемая по любому y_{μ}. Тогда якобиева система (2) в области (8) имеет единственный интеграл $z = \psi(r, y)$, удовлетворяющий начальному условию

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_m, y) = \omega(y)$$

для произвольных ξ_ρ, удовлетворяющих условию $a_\rho \leqslant \xi_\rho \leqslant b_\rho$, $\rho = 1, \ldots, m$ [2]).

Доказать это проще всего применением метода Майера. При этом методе независимые переменные x_ρ представляются как функции от $m+1$ аргументов $u, u_1, \ldots, u_m$, а именно:

$$x_\rho = \xi_\rho + u u_\rho, \qquad \rho = 1, \ldots, m \tag{9}$$

(*преобразование Майера*). Тогда из системы (2) для функции $\mathfrak{Z}(u, u_1, \ldots, u_r, y) = z(r, y)$ получаем уравнение

$$\mathfrak{Z}_u = \sum_{k=1}^{s} \mathcal{F}^k \mathfrak{Z}_{y_k} + \mathcal{F}^0 \mathfrak{Z} + \mathcal{G}, \tag{10}$$

где

$$\mathcal{F}^k = \sum_{\rho=1}^{r} u_\rho f^{\rho k}, \quad k = 0, 1, \ldots, s, \qquad \mathcal{G} = \sum_{\rho=1}^{r} u_\rho g^{\rho},$$

а из начальных условий для z следует, что

$$\mathfrak{Z}(0, u_1, \ldots, u_m, y) = \omega(y). \tag{11}$$

Уравнение (10) является линейным дифференциальным уравнением для $\mathfrak{Z}$, причем u, y выступают в качестве независимых переменных, а $u_1, \ldots, u_m$ — как параметры. Для решения задачи (10), (11) применяются методы из § 4. Если найдено непрерывно дифференцируемое по всем $r+s+1$ аргументам решение $\mathfrak{Z}$ задачи (10), (11), то

$$z(r, y) = \mathfrak{Z}(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_r - \xi_r, y)$$

является искомым решением системы (2).

Таким образом, якобиева система (2) преобразованием Майера однозначно сводится к одному линейному дифференциальному

---

[1]) Это предположение может быть заменено также требованием ограниченности всех производных $f^{\mu k}_{y_\rho}$ для $k \geqslant 1$.

[2]) Более общую теорему см. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 275.

уравнению. Теоретически этот метод очень удобен, при решении же конкретных задач можно поступать и по-другому.

Пример. $\frac{\partial z}{\partial x_1} = z + \frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x_2} = z + \frac{\partial z}{\partial y}$; искомая функция $z = z(x_1, x_2, y)$. Данная система инволюционна.

Для $\mathfrak{Z}(u, u_1, u_2, y)$ получается линейное дифференциальное уравнение

$$\mathfrak{Z}_u = (u_1 + u_2)(\mathfrak{Z}_y + \mathfrak{Z}). \qquad (*)$$

Соответствующим трехчленным линейным однородным уравнением для $\mathcal{W} = \mathcal{W}(u, y, \mathfrak{Z})$ (см. пп. 4.2 или 5.4) является уравнение

$$\mathcal{W}_u - (u_1 + u_2)\mathcal{W}_y + (u_1 + u_2)\mathfrak{Z}\mathcal{W}_{\mathfrak{Z}} = 0.$$

Для него функции

$$\mathfrak{Z}e^y, \quad (u_1 + u_2)u + y$$

образуют интегральный базис, и таким образом, решениями будут являться функции

$$\mathcal{W} = \mathfrak{Z}e^y - \Omega[(u_1 + u_2)u + y]$$

(где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция). Далее, для уравнения (*) решениями служат функции

$$\mathfrak{Z} = e^{-y}\Omega[(u_1 + u_2)u + y].$$

Наконец, для исходной системы получаем интегралы

$$z = e^{-y}\Omega(x_1 + x_2 + y)$$

в случае, когда выбраны $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

6.5. Свойства полной системы[1]).

(а) Каждая полная система (1) (см. п. 6.3 (б)) преобразованием

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(y_1, \ldots, y_n), \quad y_\nu = \chi_\nu(x_1, \ldots, x_n), \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

переводится снова в полную систему, если функции χ_ν дважды непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(r)$, эта область взаимно однозначно переводится в некоторую область $y_1, \ldots, y_n$-пространства, и если

$$\frac{\partial(\chi_1, \ldots, \chi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0.$$

Если система (1) была инволюционной, то получающаяся после указанного преобразования система также будет инволюционной.

(б) Каждая система, алгебраически эквивалентная полной системе, является полной. Точнее, пусть (1) — полная система, и пусть функ-

---

[1]) Результаты, приводимые здесь, можно найти в книгах: A. R. Forsyth, Theory of Differential Equation, Cambridge, 1906; E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921.

ции $A_{\mu\nu}(r)$ ($\mu, \nu = 1, \ldots, m$) непрерывно дифференцируемы в $\mathfrak{G}(r)$ и $\det|A_{\mu\nu}| \neq 0$. Тогда если определить операторы и функции

$$G^{\mu} = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} F^{k} \quad \text{и} \quad h^{\mu}(r) = \sum_{k=1}^{m} A_{\mu k} g^{k}(r), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

то система

$$G^{\mu} z = h^{\mu}(r), \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

— полная.

(в) Пусть в области $\mathfrak{G}(r)$ задана полная система (1), причем $m \leqslant n$. Если во всей области $\mathfrak{G}$ некоторый фиксированный минор порядка m матрицы коэффициентов

$$(f^{\mu\nu}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m; \ \nu = 1, \ldots, n)$$

отличен от нуля, например,

$$\det|f^{\mu\nu}| \neq 0 \qquad (\mu, \nu = 1, \ldots, m),$$

то система (1) относительно $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$ однозначно разрешима и в этом разрешенном виде инволюционна.

6.6. Однородные системы. Система (1) называется *однородной* системой, если все $f^{\mu 0} = 0$ и все $g^{\mu} = 0$, т. е. если система имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(r) \frac{\partial z}{\partial x_{\nu}} = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, m. \tag{12}$$

При этом о коэффициентах $f^{\mu\nu}$ пока предполагается, что они все в области $\mathfrak{G}(r)$ непрерывны.

(а) Если $\psi^1(r), \ldots, \psi^k(r)$ — интегралы уравнения (12), то для произвольной дифференцируемой функции $\Omega(u_1, \ldots, u_k)$, определенной для значений ψ^{μ}, сложная функция $\Omega(\psi^1, \ldots, \psi^k)$ является интегралом уравнения (12).

(б) Если $m < n$ и ранг матрицы коэффициентов $(f^{\mu\nu})$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не меньше m, то для любых $n - m + 1$ интегралов $\psi^1(r), \ldots, \psi^{n-m+1}(r)$ системы (12) все определители порядка $n - m + 1$ матрицы

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^{n-m+1})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

обращаются в области $\mathfrak{G}$ в нуль.

(в) Если $m < n$ и матрица коэффициентов $(f^{\mu\nu})$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не имеет ранг, меньший m, то $n - m$ интегралов

$\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^{n-m}(\boldsymbol{r})$ системы (12) называются *интегральным базисом* (*фундаментальной системой интегралов*) системы (12) в том случае, если функциональная матрица

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^{n-m})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не имеет ранг, меньший $n-m$.

(г) Если система (12) имеет в области $\mathfrak{G}$ интегральный базис $\psi^1, \ldots, \psi^{n-m}$, то существует множество интегралов этой системы, состоящее из непрерывно дифференцируемых функций $\psi(\boldsymbol{r})$, для которых матрица

$$\frac{\partial(\psi, \psi^1, \ldots, \psi^{n-m})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$$

всюду в области $\mathfrak{G}$ имеет ранг, не превосходящий $n-m$.

(д) Для однородной якобиевой системы (2) (т. е. $f^{\mu 0} = g^{\mu} = 0$) в предположениях п. 6.4 в области (8) существует интегральный базис $\psi^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ldots, \psi^s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$, т. е. функциональный определитель

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^s)}{\partial(y_1, \ldots, y_s)} \neq 0. \tag{13}$$

(е) Пусть задана однородная якобиевая система (2) (т. е. $f^{\mu 0} = g^{\mu} = 0$) в предположениях п. 6.4. Если $\psi^1(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}), \ldots, \psi^s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$—$k$ раз непрерывно дифференцируемый интегральный базис, так что справедливо неравенство (13), и уравнения

$$\eta_\nu = \psi^\nu(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{y}), \qquad \nu = 1, \ldots, s, \tag{14}$$

однозначно разрешимы относительно $y_\varkappa$ для фиксированного $\boldsymbol{r}_0(\xi_1, \ldots, \xi_r)$ и для произвольных η_ν, то множество k раз непрерывно дифференцируемых интегралов $\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y})$ этой системы дается формулой

$$\psi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{y}) = \Omega(\psi^1, \ldots, \psi^s),$$

где $\Omega(u_1, \ldots, u_s)$ пробегает все k раз непрерывно дифференцируемые функции, определенные для значений ψ^ν. Предположение о разрешимости уравнений (14) выполнено, в частности, если $\psi^\nu(\boldsymbol{r}_0, \boldsymbol{y}) = y_\nu$; этот интеграл в данном случае называется также *главным интегралом*.

6.7. Редукция однородной системы.

(а) Пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ для данной однородной системы (12) с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами $f^{\mu\nu}$ известно h частных интегралов $\psi^1(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^h(\boldsymbol{r})$, для которых

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^h)}{\partial(x_1, \ldots, x_h)} \neq 0.$$

Можно пытаться упростить эту систему посредством введения новых независимых переменных

$$y_1 = \psi^1(r), \ \ldots, \ y_h = \psi^h(r), \quad y_{h+1} = x_{h+1}, \ \ldots, \ y_n = x_n. \tag{15}$$

Преобразованием (15) область $\mathfrak{G}(r)$ взаимно однозначно отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(r)$; при этом функции $f^{\mu\nu}(r)$ переходят в функции $\overline{f}^{\mu\nu}(y)$. Тогда решениями системы (12) являются непрерывно дифференцируемые функции $z(y) = \zeta(y)$, удовлетворяющие системе

$$\sum_{\nu=h+1}^{n} \overline{f}^{\mu\nu}(y) \frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu} = 0, \qquad \mu = 1, \ \ldots, \ m, \tag{16}$$

в которой $y_1, \ldots, y_h$ рассматриваются как параметры.

Если система (12) — полная или инволюционная, то то же самое верно для системы (16) в случае, если функции ψ^ν дважды непрерывно дифференцируемы.

Пример. $p_1 + p_2 - 2p_3 = 0,$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - (x_1 + x_2) p_3 + x_4 p_4 = 0.$$

Система полная. Функция $\psi = x_1 + x_2 + x_3$ есть, очевидно, интеграл. После замены переменных

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4), \quad y_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3, \quad y_4 = x_4$$

приходим к системе

$$\zeta_{y_2} - 2\zeta_{y_3} = 0, \quad y_2\zeta_{y_2} + (y_3 - y_1)\zeta_{y_3} + y_4\zeta_{y_4} = 0$$

и для нее находим (например, согласно (б)) интеграл $\dfrac{2y_2 + y_3 - y_1}{y_4}$. Таким образом, для первоначальной системы получен интегральный базис

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad \frac{x_2 - x_1}{x_4}.$$

(б) Пусть для какого-нибудь из дифференциальных уравнений (12), например для m-го, известен интегральный базис $\psi^1(r), \ldots, \psi^{n-1}(r)$. Тогда интегралом этого же уравнения будет также функция $\zeta(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})$ при произвольной непрерывно дифференцируемой функции $\zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$. Можно попытаться так сузить множество таких функций ζ, чтобы выражения $\zeta(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})$ удовлетворяли также остальным уравнениям системы (12). С этой целью подставляют $z(r) = \zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$ с $y_\nu = \psi^\nu(r)$ в систему (12) и исследуют получающуюся таким образом систему дифференциальных уравнений для $\zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$.

Более точно, имеет место следующий факт. Пусть в области $\mathfrak{G}(r)$ задана инволюционная система (12), коэффициенты которой

непрерывно дифференцируемы. Пусть, например, для m-го уравнения дважды непрерывно дифференцируемые функции $\psi^1(r), \ldots, \psi^{n-1}(r)$ образуют интегральный базис:

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Посредством преобразования переменных

$$y_1 = \psi^1(r), \ldots, y_{n-1} = \psi^{n-1}(r), \quad y_n = x_n \tag{17}$$

область $\mathfrak{G}(r)$ отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(y_1, \ldots, y_n)$; при этом вместе с любыми двумя точками $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$ и $(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n^*)$ к области $\mathfrak{G}$ принадлежит также и соединяющая их кривая[1]). Наконец, пусть ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ коэффициенты f^{mn} не обращаются тождественно в нуль. Тогда интегралами системы (12) являются функции $z(r) = \zeta(\psi^1, \ldots, \psi^{n-1})$, где $\zeta(y_1, \ldots, y_{n-1})$ — решения системы

$$\sum_{k=1}^{n-1} g^{\mu k} \frac{\partial \zeta}{\partial y_k} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m-1, \tag{18}$$

причем

$$g^{\mu k} = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu} \psi^k_{x_\nu}, \quad \mu = 1, \ldots, m-1; \quad k = 1, \ldots, n-1,$$

и эти функции, после подстановки (17), зависят лишь от $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Система (18), таким образом, снова инволюционна. В качестве примера см. ч. II, 5.2.

(в) Пусть известен интеграл какого-нибудь из уравнений системы (12). Тогда можно попытаться найти, согласно п. 3.5, интегральный базис для этого уравнения и далее применить метод (б). Другой возможный метод решения принадлежит Якоби.

Пусть система (12), записанная в сокращенном виде (см. (1а))

$$F^\mu z = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

с оператором

$$F^\mu = \sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(r) \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$

инволюционна, т. е. равенство

$$F^\rho F^\sigma z = F^\sigma F^\rho z \qquad (1 \leqslant \sigma, \rho \leqslant m) \tag{20}$$

---

[1]) Если это не так, то область $\mathfrak{G}$ следует соответствующим образом уменьшить.

справедливо для всех дважды непрерывно дифференцируемых функций $z(\boldsymbol{r})$. Далее, пусть $\psi^1(\boldsymbol{r})$ — достаточное число раз дифференцируемый[1]) интеграл первого из уравнений (19).

Попытаемся теперь по *методу Якоби*[2]) получить общее решение двух первых уравнений системы (19), затем общее решение первых трех уравнений этой системы и т. д. до получения общего решения системы (19). В силу условий интегрируемости (20), имеем: $F^1F^2\psi^1 = F^2F^1\psi^1 = 0$, так как по предположению $F^1\psi^1 = 0$. Поэтому функция $\psi^2 = F^2\psi^1$ также удовлетворяет первому из уравнений системы (19). Соответственно устанавливается, что аналогично конструируемые функции

$$\psi^3 = F^2\psi^2, \quad \psi^4 = F^2\psi^3, \ \ldots$$

все удовлетворяют первому из уравнений системы (19). На основании п. 6.6 (б) и (е) можно заключить, что найдется такое число $j \leqslant n-1$, что функция ψ^{j+1} представляется как непрерывно дифференцируемая функция от $\psi^1, \ldots, \psi^j$, т. е.

$$\psi^{j+1}(\boldsymbol{r}) = U(\psi^1, \ldots, \psi^j), \tag{21}$$

причем

$$\frac{\partial(\psi^1, \ldots, \psi^j)}{\partial(x_1, \ldots, x_j)} \neq 0.$$

Теперь так определим непрерывно дифференцируемую функцию $\Psi(y_1, \ldots, y_j)$, чтобы сложная функция

$$\chi(\boldsymbol{r}) = \Psi(\psi^1, \ldots, \psi^j) \tag{22}$$

удовлетворяла второму из уравнений (19)[3]), т. е. чтобы

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{2,\nu} \sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} \psi^\rho_{x_\nu} = 0.$$

Это дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$\sum_{\rho=1}^{j} \Psi_{y_\rho} F^2\psi^\rho = 0,$$

или, в силу определения ψ^ρ, в виде

$$\sum_{\rho=1}^{j} \psi^{\rho+1}\Psi_{y_\rho} = 0;$$

---

[1]) Получить более точную формулировку предположений, при которых описываемый метод ведет к цели, можно без труда.

[2]) См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921, стр. 77—81.

[3]) Функция $\chi(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет первому из уравнений (19), в силу 6.6 (а).

наконец, в силу (21), имеем окончательно:

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} \psi^{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(\psi^1, \ldots, \psi^j)\Psi_{y_j} = 0.$$

Если положить

$$\psi^1(r) = y_1, \ \ldots, \ \psi^j(r) = y_j,$$

то это уравнение приобретает вид

$$\sum_{\rho=1}^{j-1} y_{\rho+1}\Psi_{y_\rho} + U(y_1, \ldots, y_j)\Psi_{y_j} = 0.$$

Если найдено нетривиальное решение $\Psi(y_1, \ldots, y_j)$ этого линейного однородного уравнения[1]), то функция (22) является общим решением двух первых уравнений системы (19).

Теперь попытаемся, зная функцию χ, получить общее решение трех первых уравнений системы (19). Как и ранее, первые шаги следуют из соотношений (20): функции

$$\chi^1 = \chi, \quad \chi^2 = F^3\chi^1, \quad \chi^3 = F^3\chi^2, \ \ldots$$

удовлетворяют одновременно двум первым уравнениям системы (19). Пусть k — такое наименьшее число, что

$$\chi^{k+1} = V(\chi^1, \ldots, \chi^k)$$

— непрерывно дифференцируемая функция первых k интегралов χ^ρ. Найдем функцию $\Phi(y_1, \ldots, y_k)$ такую, что $\Phi(\chi^1(r), \ldots, \chi^k(r))$ удовлетворяет также третьему уравнению системы (19). Для Φ получим снова некоторое однородное линейное дифференциальное уравнение, и т. д.

Если процесс преждевременно не оборвется, получают, наконец, нетривиальное решение системы (19). Этот метод громоздок, но все же во многих случаях бывает полезен, например, когда известно лишь некоторое частное решение системы (12).

Пример. Пусть дана инволюционная система

$$p_3 + x_1 p_4 = 0, \quad p_2 + x_2 p_4 = 0, \quad p_1 + (3x_1^2 + x_3)\, p_4 = 0.$$

Непосредственно видно, что функция $\psi^1 = x_1 x_3 - x_4$ является решением первого уравнения. Далее, имеем:

$$\psi^2 = F^2\psi^1 = -x_2, \qquad \psi^3 = F^2\psi^2 = -1;$$

---

[1]) Его характеристическая система

$$y_1'(t) = y_2, \quad y_2'(t) = y_3, \ \ldots, \ y_{j-1}'(t) = y_j, \quad y_j'(t) = U(y_1, \ldots, y_j)$$

эквивалентна одному дифференциальному уравнению n-го порядка

$$y_1^{(j)}(t) = U\left(y_1, y_1', \ldots, y_1^{(j-1)}\right).$$

следовательно, $j=2$, $U=-1$. Тем самым для функции $\Psi(y_1, y_2)$ получено дифференциальное уравнение $y_2\Psi_{y_1}-\Psi_{y_2}=0$ с решением $\Psi=2y_1+y_2^2$. Поэтому общим решением двух первых уравнений будет

$$\chi=\chi^1=2(x_1x_3-x_4)+x_2^2.$$

Далее, находим:

$$\chi^2=F^3\chi^1=-6x_1^2, \qquad \chi^3=F^3\chi^2=-12x_1=-\sqrt{-24\chi^2};$$

поэтому $k=2$, $\chi^3=V(\chi^1, \chi^2)=-\sqrt{-24\chi^2}$, а для Φ получается дифференциальное уравнение

$$y_2\Phi_{y_1}-\sqrt{-24y_2}\,\Phi_{y_2}=0$$

с решением

$$\Phi(y_1, y_2)=y_1+\frac{1}{3\sqrt{6}}(-y_2)^{\frac{3}{2}}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид $\Phi(\chi^1, \chi^2)$, т. е.

$$2(x_1x_3-x_4)+x_2^2+2x_1^3.$$

6.8. Редукция общей системы. Пусть общая линейная система (1) имеет в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ непрерывно дифференцируемые коэффициенты, и пусть она там полная (см. п. 6.3 (б)). Пусть для соответствующей линейной однородной системы (12), которая также полна, известен интегральный базис $\psi^{m+1}(\boldsymbol{r}), \ldots, \psi^n(\boldsymbol{r})$:

$$\frac{\partial(\psi^{m+1}, \ldots, \psi^n)}{\partial(x_{m+1}, \ldots, x_n)}\neq 0.$$

Пусть область $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$ преобразованием

$$y_1=x_1, \ \ldots, \ y_m=x_m, \quad y_{m+1}=\psi^{m+1}(\boldsymbol{r}), \ \ldots, \ y_n=\psi^n(\boldsymbol{r}) \tag{23}$$

взаимно однозначно отображается на область $\overline{\mathfrak{G}}(\boldsymbol{y})$. Наконец, пусть в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r})$

$$\det\left|f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r})\right|\neq 0 \qquad (\mu, \nu=1, \ldots, m). \tag{24}$$

Тогда интегралы системы (1), будучи непрерывно дифференцируемыми функциями $z(\boldsymbol{r})=\zeta(\boldsymbol{y})$, удовлетворяют системе

$$\sum_{\nu=1}^{m} g^{\mu\nu}(\boldsymbol{y})\frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu}+g^{\mu 0}(\boldsymbol{y})\zeta=h^\mu(\boldsymbol{y}), \quad \mu=1, \ldots, m. \tag{25}$$

Здесь $g^{\mu\nu}$, h^μ — функции, полученные из $f^{\mu\nu}$ и g^μ соответственно заменой переменных (23). Система (25) в случае, если ψ^μ дважды непрерывно дифференцируемы, в силу 6.5 (а), снова полна и может быть записана, согласно (24), в форме

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y_\mu}=\gamma^\mu(\boldsymbol{y})\zeta+\delta^\mu(\boldsymbol{y}), \qquad \mu=1, \ldots, m.$$

В силу 6.5 (в), эта последняя система инволюционна. Если все $\gamma^\mu = 0$, то получается

$$\zeta = \int \sum_{\mu=1}^{m} \delta^\mu(y)\, dy_\mu + \Omega(y_{m+1}, \ldots, y_n),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

6.9. Методы решения. Если задана система (1), то прежде всего надо установить, полна ли она. Если это не так, то ее дополняют, согласно п. 6.3 (в), до некоторой полной системы. Затем решают соответствующую однородную систему. Для этого в нашем распоряжении имеются методы п. 6.6 или метод Майера (см. п. 6.4). Этот последний особенно полезен тогда, когда требуется найти решение с заданным начальным условием. Если данная система не однородна, то можно, согласно п. 6.8, использовать решение однородной системы.

§ 7. Система квазилинейных уравнений

7.1. Частный случай.

(а) Пусть для функции $z = z(\boldsymbol{r})$ дана система

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu} = f^\nu(\boldsymbol{r}, z), \qquad \nu = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ снова обозначает набор $x_1, \ldots, x_n$, коэффициенты f^ν предполагаются в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r}, z)$ непрерывно дифференцируемыми[1]). Тогда каждый интеграл (1) дважды непрерывно дифференцируем, а потому имеется соотношение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_\nu\, \partial x_\mu}, \qquad \nu, \mu = 1, \ldots, n.$$

Отсюда вытекает, принимая во внимание уравнения (1), что для каждого интеграла z системы (1) справедливы равенства

$$f^\mu_{x_\nu} + f^\mu_z f^\nu = f^\nu_{x_\mu} + f^\nu_z f^\mu, \qquad 1 \leqslant \mu, \nu \leqslant n. \tag{2}$$

---

[1]) Система (1) иногда записывается также в виде одного дифференциального уравнения

$$dz = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu(\boldsymbol{r}, z)\, dx_\nu.$$

Однако следует иметь в виду, что это уравнение обычно понимают как сокращенную запись уравнения

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{\nu=1}^{n} f^\nu(\boldsymbol{r}, z) \frac{dx_\nu}{dt},$$

для которого требуется определить функции $z(t), x_1(t), \ldots, x_n(t)$, удовлетворяющие этому уравнению.

Если эти равенства выполняются тождественно относительно $\boldsymbol{r}$ и z, то (1) называется *инволюционной системой*. Равенства (2) называются *условиями интегрируемости* системы (1).

Если функции f^ν в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| < a \leqslant \infty \quad (\nu = 1, \ldots, n), \qquad |z - \zeta| < b \leqslant \infty,$$

где $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \zeta)$ — фиксированная точка, непрерывно дифференцируемы и ограничены, например $|f^\nu| \leqslant A$, и если выполнены условия интегрируемости (2), то система (1) в области

$$|x_\nu - \xi_\nu| < \alpha \quad (\nu = 1, \ldots, n),$$

где

$$\alpha = \min\left(a, \frac{b}{nA}\right),$$

имеет интеграл $z = \psi(\boldsymbol{r})$ с начальным значением

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \zeta\,^{1)}. \tag{1a}$$

(б) Интеграл этот может быть построен, например, *последовательным решением уравнений*. Для этого сначала рассматривают первое из уравнений (1) в специальной форме

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = f^1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, z)$$

с начальным условием

$$z(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \zeta.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение; пусть его решение $z = \varphi^1(x_1)$ найдено. Второй шаг состоит в решении уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x_2} = f^2(x_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n, z)$$

с начальным условием

$$z(x_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = \varphi^1(x_1),$$

причем теперь x_1 рассматривается как параметр. Это снова обыкновенное дифференциальное уравнение; пусть $z = \varphi^2(x_1, x_2)$ — его решение. На следующем шаге решается задача

$$\frac{\partial z}{\partial x_3} = f^3(x_1, x_2, x_3, \xi_4, \ldots, \xi_n, z),$$
$$z(x_1, x_2, \xi_3, \ldots, \xi_n) = \varphi^2(x_1, x_2),$$

---

[1]) См. A. J. Macintyre, Proceedings Edinburgh math. Soc. (2) **4** (1935), стр. 112—117; L. Bruwier, Bulletin Liège **8** (1939), стр. 105—116; T. Y. Thomas, Annals of Math. **35** (1934), стр. 730—734; W. Mayer, T. Y. Thomas, Math. Zeitschrift **40** (1936), стр. 658—661; P. Gillis, Bulletin Liège **9** (1940), стр. 197—212; W. Wirtinger, Monatschefte f. Math. **34** (1926), стр. 81—88.

причем x_1, x_2 рассматриваются как параметры, и т. д. Последним шагом является решение задачи

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = f^n(x_1, \ldots, x_n, z),$$

$$z(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_n) = \varphi^{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

где $x_1, \ldots, x_{n-1}$ — параметры. Ее решение $z = \psi(x_1, \ldots, x_n)$ является, как устанавливается с помощью условий интегрируемости, искомым интегралом системы (1).

(в) Интеграл системы (1), удовлетворяющий условию (1а), можно искать, следуя *методу Майера* (см. п. 6.4). Если положить

$$\mathfrak{Z}(u, u_1, \ldots, u_n) = z(\boldsymbol{r});$$

$$x_\nu = \xi_\nu + uu_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n,$$

то из системы (1) получаем уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial u} = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu f^\nu, \tag{3}$$

а из начальных условий следует, что

$$\mathfrak{Z}(0, u_1, \ldots, u_n) = \zeta. \tag{4}$$

Уравнение (3) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с параметрами $u_1, \ldots, u_n$. Если $\mathfrak{Z}$ — его решение, удовлетворяющее начальному условию (4), то

$$z = \mathfrak{Z}(1, x_1 - \xi_1, \ldots, x_n - \xi_n)$$

— искомый интеграл системы (1).

7.2. Общая квазилинейная система. Она имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, z) \frac{\partial z}{\partial x_\nu} = g^\mu(\boldsymbol{r}, z), \quad \mu = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

и является частным случаем теории § 14. Следовательно, справедливо приведенное там утверждение. Преобразованием, указанным в п. 12.3 (а), система (5) может быть приведена к однородной системе

$$\sum_{\nu=1}^{n} f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, z) \frac{\partial w}{\partial x_\nu} + g^\mu(\boldsymbol{r}, z) \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, m. \tag{6}$$

Пусть функции $f^{\mu\nu}(\boldsymbol{r}, z)$, $g^{\mu}(\boldsymbol{r}, z)$ непрерывны в области $\mathfrak{G}_{n+1}(\boldsymbol{r}, z)$; пусть $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ — интеграл однородной системы (6) в $\mathfrak{G}_{n+1}$. Далее, пусть $\chi(\boldsymbol{r})$ непрерывная функция в $\mathfrak{G}_n(\boldsymbol{r})$, для которой точка $(\boldsymbol{r}, z = \chi(\boldsymbol{r}))$ лежит в $\mathfrak{G}_{n+1}$, коль скоро $\boldsymbol{r}$ принадлежит $\mathfrak{G}_n$, и для которой

$$\psi(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) = \text{const};$$

$\psi_z(\boldsymbol{r}, \chi(\boldsymbol{r})) \not\equiv 0$ ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}_n$.

Тогда $z = \chi(\boldsymbol{r})$ — интеграл системы (5) (ср. с п. 5.4). Иначе говоря, интеграл системы (5) получается из интеграла $w = \psi(\boldsymbol{r}, z)$ системы (6) разрешением уравнения $\psi = 0$ относительно z.

ГЛАВА II

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 8. Общие понятия, обозначения и терминология

8.1. Геометрическая интерпретация уравнения. *Общее (нелинейное) дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка для одной неизвестной функции* $z = z(x, y)$ *двух независимых переменных* имеет вид

$$F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \tag{1}$$

или, если снова использовать обозначения $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$,

$$F(x,\ y,\ z,\ p,\ q) = 0; \tag{1a}$$

при этом $F = F(x, y, z, p, q)$ — данная функция, которая предполагается имеющей в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ пространства x, y, z, p, q непрерывные частные производные первого порядка по всем пяти переменным.

Уравнение, *разрешенное относительно одной из производных*, имеет вид

$$p = f(x,\ y,\ z,\ q) \quad \text{или} \quad q = f(x,\ y,\ z,\ p); \tag{2}$$

уравнение (1) называется уравнением, *не разрешенным относительно производной*.

По поводу определения *интегральной поверхности* см. пп. 1.1 и 8.8.

Дифференциальное уравнение (1) каждой точке (x_0, y_0, z_0) пространства x, y, z ставит в соответствие семейство плоскостных элементов x_0, y_0, z_0, p, q (ср. с п. 2.1), направляющие коэффициенты p, q которых связаны соотношением

$$F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p,\ q) = 0.$$

Плоскостные элементы, соответствующие в силу этого уравнения точке (x_0, y_0, z_0), определяют однопараметрическое семейство плоскостей, огибающей которого является, вообще говоря, невырожденная[1]) коническая поверхность с вершиной (x_0, y_0, z_0) (рис. 19). Этот конус[2]) называют *конусом Монжа* (*направляющим конусом*, *конусом T*) дифференциального уравнения (1) в данной точке.

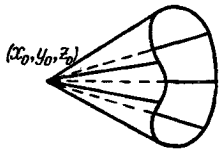

Рис. 19.

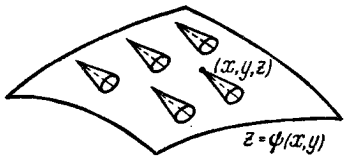

Рис. 20.

Следовательно, в силу дифференциального уравнения (1), каждой точке (x, y, z) (разумеется, в случае, если уравнение (1а) для этой точки имеет вещественные решения p, q[3])) ставится в соответствие направляющий конус. Само дифференциальное уравнение (1) представляется геометрически полем конусов в пространстве x, y, z (аналогично полю направлений на плоскости в случае обыкновенного дифференциального уравнения) (рис. 20).

В этой геометрической интерпретации задача решения уравнения (1) означает следующее: требуется найти такую непрерывно дифференцируемую поверхность $z = \psi(x, y)$, в каждой точке которой плоскостной элемент x, y, $z = \psi(x, y)$, $p = \psi_x(x, y)$, $q = \psi_y(x, y)$

---

[1]) [Если функция F линейна по p и q, т. е. в случае квазилинейного уравнения, получается пучок плоскостей, проходящих через прямую, называемую «осью Монжа» (см. пп. 2.1 и 5.1). Если функция F нелинейна, то получается общий случай: возможные касательные плоскости к интегральной поверхности в точке (x_0, y_0, z_0) определяются одновременно двумя уравнениями

$$F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0,$$
$$z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0),$$

т. е. они образуют семейство плоскостей от одного параметра, проходящих через фиксированную точку. Огибающей такого семейства является конус. — *Прим. ред.*]

[2]) [Точнее, рассматривается достаточно малая часть полости конуса, соответствующая достаточно малой области изменения p и q. В целом конус Монжа может состоять из нескольких отдельных полостей. — *Прим. ред.*]

[3]) Если, например, $F = p^2 + q^2 + 1$, то не существует (вещественного) плоскостного элемента, удовлетворяющего уравнению (1). При наглядном истолковании обычно отказываются от таких случаев. Но они, помимо случайных ограничений из следующего пункта этой главы, которые ни в коем случае не содержат теоремы существования, отнюдь не исключены. Примем, далее, во внимание, что также случай $F = 0$ до сих пор не исключался.

удовлетворяет уравнению (1а). Другими словами, в каждой точке (x, y, z) интегральной поверхности $z=\psi(x, y)$ ее касательная плоскость одновременно должна быть касательной плоскостью направляющего конуса, соответствующего рассматриваемой точке [1]) (рис. 20).

Пусть данное дифференциальное уравнение (1) квазилинейно:

$$f(x, y, z)\,p+g(x, y, z)\,q=h(x, y, z), \quad |f|+|g|>0; \tag{3}$$

тогда направляющий конус, принадлежащий точке (x_0, y_0, z_0), вырождается в прямую линию

$$x-x_0=f_0t, \qquad y-y_0=g_0t, \qquad z-z_0=h_0t, \tag{3а}$$

где t — параметр, а f_0, g_0, h_0 — значения функций f, g, h в точке (x_0, y_0, z_0). Семейство касательных плоскостей направляющего конуса превращается в данном случае в пучок плоскостей, проходящих через эту прямую, кроме плоскости, перпендикулярной к плоскости x, y (см. пп. 2.1 и 5.1).

8.2. Геометрическая интерпретация характеристик. Линейные и квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка можно сводить к системе обыкновенных дифференциальных уравнений постольку, поскольку их интегральные поверхности могут быть построены из характеристик. Аналогичное сведéние возможно также для уравнения (1).

Для квазилинейного дифференциального уравнения (3) каждая характеристика в каждой своей точке имеет касательной ось пучка плоскостей, построенного для данной точки, т. е. каждой точке пространства (x, y, z) поставлено в соответствие определенное направление, геометрически заданное осью соответствующего пучка. Это поле направлений аналитически описывается характеристической системой [2]). При переносе этого обстоятельства на дифференциальное уравнение (1) сразу же возникает осложнение, состоящее в том,

---

[1]) [Таким образом, интегральная поверхность в каждой точке касается соответствующего конуса Монжа. Ср. с геометрической интерпретацией интегральной кривой обыкновенного дифференциального уравнения. — *Прим. ред.*]

[2]) [В самом деле, характеристическая система уравнения (3)

$$x'(t)=f(x, y, z), \quad y'(t)=g(x, y, z), \quad z'(t)=h(x, y, z)$$

показывает, что в произвольной точке (x_0, y_0, z_0) характеристики направляющим вектором касательной к характеристике служит вектор $(f(x_0, y_0, z_0), g(x_0, y_0, z_0), h(x_0, y_0, z_0))$, являющийся одновременно направляющим вектором оси (3а) пучка плоскостей, соответствующего данной точке. — *Прим. ред.*]

что каждой точке пространства здесь соответствует направляющий конус с бесконечным множеством образующих[1]).

Однако если уже имеется интегральная поверхность $z=\psi(x, y)$ нелинейного уравнения (1), то точке (x_0, y_0, z_0) этой поверхности однозначно соответствует некоторое направление, именно, направление прямой, по которой плоскость, касательная к поверхности $z=\psi(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0), касается конуса Монжа, построенного в этой точке. Следовательно, это направление играет здесь роль, аналогичную роли направления характеристики в линейном случае. Прямая, имеющая данное направление, определяется только тогда, когда известны направляющие коэффициенты $p=\psi_x(x_0, y_0)$ и $q=\psi_y(x_0, y_0)$, или, в общем случае, два направляющих коэффициента p_0 и q_0, соответствующие точке (x_0, y_0, z_0). Эти направляющие коэффициенты в случае нелинейного уравнения (1) также подлежат определению, т. е. наряду с тремя функциями $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ необходимо еще найти две функции $p(t)$, $q(t)$.

Эти пять функций

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t), \quad p=p(t), \quad q=q(t) \tag{4}$$

играют в случае нелинейного уравнения (1) роль, аналогичную роли характеристики уравнения (3)[2]). Для их определения необходимо, согласно предыдущему, удовлетворить следующим условиям.

(α) В каждой точке $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$ пространственной кривой $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ ее касательная должна быть образующей конуса Монжа, принадлежащего точке (x_0, y_0, z_0)[3]).

(β) Так как интегральная поверхность должна будет строиться из характеристик, то плоскостные элементы (4) должны быть плоскостными элементами интегральной поверхности (т. е. *принадлежать* интегральной поверхности).

---

[1]) [Направления образующих конуса Монжа, соответствующего некоторой точке, называются *характеристическими направлениями*. Если в случае квазилинейного уравнения (3) каждой точке пространства соответствует единственное характеристическое направление — направление оси Монжа, то в случае нелинейного уравнения (1) каждой точке пространства соответствует однопараметрическое семейство характеристических направлений. — *Прим. ред.*]

[2]) Сначала, быть может, несколько мешает, что z, p, q встречаются в различных значениях, именно, во-первых, в качестве независимых переменных, от которых зависит функция $F(x, y, z, p, q)$ или рассматриваемая область $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$; во-вторых, символы z, p, q могут обозначать функции от x, y в дифференциальном уравнении (1), причем $p=z_x$, $q=z_y$ и, наконец, в-третьих, символы z, p, q могут быть функциями независимой переменной t в уравнениях (4). Однако, как вскоре будет видно, не составляет труда придерживаться этих различных значений, и поэтому обозначение их различными символами принесло бы ненужные усложнения.

[3]) [Пространственная кривая, имеющая в каждой своей точке характеристическое направление (т. е. в каждой ее точке касательная является образующей соответствующего конуса Монжа), называется *фокальной кривой* или *кривой Монжа*. — *Прим. ред.*]

(β^*) Это последнее требование будет, однако, заменено в аналитической формулировке определения характеристик более слабым: Плоскостные элементы (4) должны принадлежать поверхности $z=\psi(x, y)$, для которой $F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)$ постоянна[1]).

8.3. Определение полосы. Пусть плоскостные элементы (4) принадлежат какой-нибудь непрерывно дифференцируемой поверхности $z=\psi(x, y)$. Подставим функции (4) в равенство $z=\psi(x, y)$:

$$z(t)\equiv\psi(x(t), y(t)),$$

и продифференцируем получившееся тождество по t. Тогда мы придем к следующему равенству, называемому *условием полосы*:

$$z'(t)=p(t)\,x'(t)+q(t)\,y'(t). \tag{5}$$

Это приводит нас к определению полосы, не зависящему уже от какой-либо поверхности $z=\psi(x, y)$. Под *полосой* понимается однопараметрическое семейство плоскостных элементов (4), заданных в интервале $\alpha<t<\beta$ непрерывно дифференцируемыми функциями, для которых выполняется условие (5)[2]). Пространственная кривая, определенная тремя первыми функциями (4), называется *носителем полосы*. Кривая-носитель может в частном случае вырождаться в точку.

8.4. Вывод характеристической системы.

(а) Рассмотрим общее дифференциальное уравнение (1) при необходимых для дальнейшего предположениях о дифференцируемости и

---

[1]) [Плоскостные элементы (4) принадлежат некоторой поверхности $z=\psi(x, y)$, если выполнены следующие условия:

$$z(t)\equiv\psi(x(t), y(t)),\quad \psi'_x(x(t), y(t))=p(t),$$
$$\psi'_y(x(t), y(t))=q(t).$$

Иначе говоря, кривая $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ лежит на поверхности $z=\psi(x, y)$, а касательная плоскость в каждой точке этой кривой к поверхности имеет направляющими коэффициентами значения $p(t)$ и $q(t)$. — *Прим. ред.*]

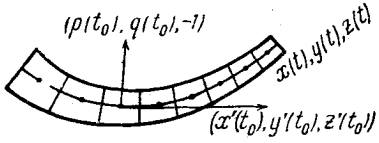

Рис. 21.

[2]) [Равенство (5) показывает, что вектор $(p(t), q(t), -1)$ ортогонален вектору $(x'(t), y'(t), z'(t))$, касательному к пространственной кривой $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Следовательно, плоскостные элементы (4) определяют пространственную кривую $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ и касающуюся ее в каждой точке плоскость с направляющими коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ (см. подстр. примечание [1]). Таким образом, аналитически полосу можно определить как совокупность плоскостных элементов, удовлетворяющих дополнительному условию (5). Говоря геометрически, под полосой понимают конфигурацию, состоящую из кривой и семейства касающихся ее плоскостей (рис. 21). — *Прим. ред.*]

условии $|F_p|+|F_q|>0$. Из требования (α) п. 8.2 получаем соотношение[1]):

$$x'(t):y'(t):z'(t)=F_p:F_q:(pF_p+qF_q),$$

причем в F_p, F_q подставлены функции (4). Если это соотношение выполнено, то касательная к кривой $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ является образующей соответствующего конуса Монжа. Отсюда путем надлежащего выбора параметра t получаем первые три уравнения (6). Из требования (β*) для некоторой поверхности $z=\psi(x, y)$, для которой $F(x, y, \psi, \psi_x, \psi_y)=\text{const}$, частным дифференцированием по x и y получаем два последних уравнения (6).

Это приводит нас к определению характеристической полосы, не зависящему от каких-либо известных пространственных кривых или поверхностей. Пусть функция $F(x, y, z, p, q)$ имеет в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$ пространства x, y, z, p, q непрерывные частные производные первого порядка. Функции (4) со значениями в области $\mathfrak{G}$, непрерывно дифференцируемые при $\alpha<t<\beta$, определяют *характеристическую полосу* (*характеристику*) уравнения (1), если они удовлетворяют системе пяти обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)=F_p,\ y'(t)=F_q,\ z'(t)=p(t)F_p+q(t)F_q,\\ &p'(t)=-F_x-p(t)F_z,\ q'(t)=-F_y-q(t)F_z;\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

при этом функции (4) подставлены в производные от F в качестве аргументов[2]). Уравнения (6) называются *характеристическими уравнениями* (*характеристической системой*) дифференциального уравнения в частных производных (1).

Поскольку в предположениях об F получается, что правые части системы (6) лишь непрерывны, то система (6) может иметь более одного решения. Если же потребовать, чтобы функция F была дважды непрерывно дифференцируема, то характеристическая полоса будет лишь одна (см. далее п. 8.6).

(б) Если дано дифференциальное уравнение типа (2), например

$$p=f(x, y, z, q), \tag{7}$$

то система пяти характеристических уравнений (6) сводится к трем уравнениям. Первое характеристическое уравнение $x'(t)=1$ позволяет нам положить: $t=x$. Так как в дальнейшем для построения интегральных поверхностей из характеристических полос будут рассматриваться только такие плоскостные элементы (4), которые

---

[1]) [Доказательство можно найти в книгах Степанов или Курант. — *Прим. ред.*]

[2]) [Отметим, что каждая полоса (см. п. 8.3), удовлетворяющая первым трем из уравнений (6) и соотношению $F(x, y, z, p, q)$, называется *фокальной полосой*. — *Прим. ред.*]

удовлетворяют исходному дифференциальному уравнению (7), то в третьем уравнении (6) можно заменить p на f. Окончательно для определения функций $y(x)$, $z(x)$, $q(x)$ получается три уравнения:

$$y'(x) = -f_q, \quad z'(x) = f - qf_q, \quad q'(x) = f_y + qf_z. \tag{8}$$

Они называются *характеристическими уравнениями* дифференциального уравнения (7).

Для определения *характеристической полосы* добавляют еще одно уравнение

$$p(x) = f(x, y(x), z(x), q(x)). \tag{9}$$

(в) Для квазилинейного дифференциального уравнения (3) первые три из уравнений (6) имеют вид

$$x'(t) = f, \quad y'(t) = g, \quad z'(t) = pf + qg.$$

В последнем из этих уравнений $pf + qg$ может быть заменено на h, так как для построения интегральной поверхности из характеристик рассматриваются только такие элементы поверхности, которые удовлетворяют уравнению (3).

8.5. Другие выводы характеристической системы. Получение характеристик с помощью требований (α) и (β) или (β^*) п. 8.2 имеет преимущество в наглядности. Однако недостаток такого определения характеристической системы состоит в том, что этот метод с трудом допускает перенесение на общий случай (больше искомых функций, независимых переменных больше двух, дифференциальные уравнения более высокого порядка). Поэтому здесь намечены еще три других метода. Третий из них — самый короткий и легче всего переносим на общие случаи.

(а) Ищутся плоскостные элементы (4), которые принадлежат одновременно нескольким интегральным поверхностям, например $z = \psi(x, y)$ и $z = \chi(x, y)$. Эти интегралы предполагаются дважды непрерывно дифференцируемыми. Кроме того, ни в каком подынтервале интервала $\alpha < t < \beta$ все три разности

$$\psi_{xx} - \chi_{xx}, \quad \psi_{xy} - \chi_{xy}, \quad \psi_{yy} - \chi_{yy}$$

после подстановки $x(t)$, $y(t)$ не должны быть тождественно равны нулю.

Тогда из уравнения (1) после подстановки интегралов и дифференцирования по x и по y следуют два уравнения для функции ψ:

$$\left.\begin{aligned} F_x + F_z\psi_x + F_p\psi_{xx} + F_q\psi_{yx} = 0, \\ F_y + F_z\psi_y + F_p\psi_{xy} + F_q\psi_{yy} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

а также два аналогичных уравнения с χ вместо ψ. Подставим теперь сюда функции (4); тогда по предположению коэффициенты F_x, F_y,

F_z, F_p, F_q, ψ_x, ψ_y уравнений (10) совпадают с соответствующими коэффициентами, которые появляются в уравнениях для χ. Получается поэтому система

$$\left.\begin{aligned}(\psi_{xx}-\chi_{xx})F_p+(\psi_{yx}-\chi_{yx})F_q=0,\\(\psi_{xy}-\chi_{xy})F_p+(\psi_{yy}-\chi_{yy})F_q=0\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

с подставленными сюда функциями (4).

С другой стороны, мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}z(t)=\psi(x(t),\ y(t)),\\p(t)=\psi_x(x(t),\ y(t)),\ q(t)=\psi_y(x(t),\ y(t)),\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

и аналогичные уравнения остаются справедливыми для χ вместо ψ. Отсюда следует после дифференцирования условие полосы

$$z'=px'+qy',\tag{13}$$

также еще четыре соотношения: два для ψ

$$p'=\psi_{xx}x'+\psi_{xy}y',\quad q'=\psi_{yx}x'+\psi_{yy}y'\tag{14}$$

и остальные два с χ вместо ψ. Из этих четырех уравнений следует:

$$(\psi_{xx}-\chi_{xx})x'+(\psi_{xy}-\chi_{xy})y'=0,$$
$$(\psi_{yx}-\chi_{yx})x'+(\psi_{yy}-\chi_{yy})y'=0.$$

Так как ни в какой части интервала $(\alpha,\ \beta)$ все скобки $\neq 0$ и так как $\psi_{xy}=\psi_{yx}$, $\chi_{xy}=\chi_{yx}$, то сравнение этих уравнений с уравнениями (11) дает

$$y'F_p-x'F_q=0.$$

Если $|x'|+|y'|>0$, то выбором надлежащего переменного можно достичь того, чтобы были удовлетворены оба первых уравнения (6). Но тогда, в силу (13), удовлетворится также и 3-е уравнение системы (6). Наконец, уравнения (10) после подстановки функций (4) дадут соотношения

$$p'(t)=\frac{d}{dt}\psi_x(x(t),\ y(t))=-F_x-pF_z,$$

$$q'(t)=\frac{d}{dt}\psi_y(x(t),\ y(t))=-F_y-qF_z,$$

а это — два последних уравнения системы (6).

(б) Пусть $z=\psi(x,\ y)$ — дважды непрерывно дифференцируемая интегральная поверхность дифференциального уравнения (1); пусть (4) — плоскостные элементы, принадлежащие этой интегральной поверхности. Если в уравнение (1) поставить $z=\psi$, то получаются, как и в (а), соотношения (10) и (12) — (14). Подставим теперь в (10)

функции (4), а потом уравнения (14) прибавим к соответствующим уравнениям (10); тогда получим:

$$\left.\begin{aligned} p' + F_x + pF_z &= \psi_{xx}(x' - F_p) + \psi_{xy}(y' - F_q), \\ q' + F_y + qF_z &= \psi_{yx}(x' - F_p) + \psi_{yy}(y' - F_q). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Уравнения (13) и (15) справедливы для каждой полосы, принадлежащей интегральной поверхности. Оба уравнения (15) существенно упрощаются, когда полоса выбирается так, что

$$x' = F_p, \quad y' = F_q,$$

т. е. когда получаются как раз характеристические уравнения (6).

(в) Пусть дана пространственная кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Возникает вопрос, когда она единственным образом может быть дополнена до такой однопараметрической совокупности плоскостных элементов (4), каждый из которой удовлетворяет уравнению (1)? Это как раз тот случай, когда $p(t)$, $q(t)$ могут быть выбраны единственным образом такими непрерывно дифференцируемыми функциями, что выполняется условие полосы

$$px' + qy' - z' = 0$$

и удовлетворяется уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0.$$

Если числа $p_0 = p(t_0)$, $q_0 = q(t_0)$ удовлетворяют обоим только что написанным уравнениям, то, в силу теоремы о неявных функциях, существуют (в некоторой окрестности значения t_0) непрерывные функции $p(t)$, $q(t)$, удовлетворяющие обоим этим уравнениям, если только функциональный определитель

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

Обратно, если это условие не выполнено, то

$$\begin{vmatrix} x' & y' \\ F_p & F_q \end{vmatrix} \equiv 0 \tag{17}$$

для некоторой полосы (4); если, кроме того, $|F_p| + |F_q| > 0$ или $|x'| + |y'| > 0$, то при надлежащем выборе параметра t

$$x' = F_p, \quad y' = F_q.$$

Следовательно, условие, противоположное неравенству (16), приводит непосредственно к первым двум из характеристических уравнений (6). Третье из уравнений (6) является не чем иным, как условием полосы. Оба последних уравнения получают, как в п. 8.4.

8.6. Обыкновенные и особые плоскостные элементы. Плоскостной элемент x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 называется *обыкновенным* (*регулярным*, *правильным*) или *особым* (*нерегулярным*) для дифференциального уравнения (1), смотря по тому, будет ли $|F_p|+|F_q|>0$ или $|F_p|+|F_q|=0$ в точке $(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0)$.

Для каждой характеристической полосы, содержащей по крайней мере один обыкновенный плоскостной элемент, ни кривая-носитель, ни ее проекция на плоскость x, y не состоят только из одной точки. Если характеристическая полоса содержит особый плоскостной элемент, то она может иметь различные свойства, как показывают приводимые примеры.

В следующих примерах 0, 0, 0, 0, 0 — особый плоскостной элемент; исследуется характеристическая полоса, которая проходит через него при $t=0$.

(а) $$p^2+q^2=x+y.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p, \quad y'=2q, \quad z'=2p^2+2q^2, \quad p'=1, \quad q'=1.$$

Из двух последних уравнений следует $p=q=t$, после чего из двух первых находим $x=y=t^2$. Кривая-носитель состоит, следовательно, не только из одной точки.

(б) $$(p+1)x+(q+1)y=z.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=x, \quad y'=y, \quad z'=xp+yq, \quad p'=-1, \quad q'=-1.$$

Из двух первых уравнений следует $x=y=0$, после чего из третьего находим $z=0$; в то же время оба последних уравнения дают $p=q=-t$. Кривая-носитель состоит здесь только из одной точки, но ей соответствует бесконечно много направляющих коэффициентов.

(в) $$p^2+q^2-xp-yq+z=0.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p-x, \quad y'=2q-y, \quad z'=2p^2+2q^2-xp-yq, \quad p'=0, \quad q'=0.$$

Из двух последних уравнений следует $p=q=0$, после чего из трех первых находим $x=y=z=0$. Характеристическая полоса состоит из единственного плоскостного элемента.

(г) $$p^2+q^2+x^2+y^2=0.$$

Характеристические уравнения таковы:

$$x'=2p, \quad y'=2q, \quad z'=2p^2+2q^2, \quad p'=-2x, \quad q'=-2y.$$

Из них следует соотношение $xx'+yy'+pp'+qq'=0$, или $x^2+y^2+p^2+q^2=0$, т. е. $x=y=p=q=0$. Из третьего характеристического уравнения находим: $z=C$ при любом C. Поэтому особыми плоскостными элементами будут:

$$x=0, \quad y=0, \quad z=C, \quad p=0, \quad q=0.$$

Одновременно это и единственные интегральные элементы. Следовательно, как непосредственно видно из дифференциального уравнения, интегральной поверхности не существует.

8.7. Интегральные полосы и интегральные поверхности. Плоскостной элемент x, y, z, p, q называется *интегральным элементом* дифференциального уравнения (1), если $F(x, y, z, p, q)=0$. Полоса (4), (5) называется *интегральной полосой*, если она состоит только из интегральных элементов.

(а) Функция $F(x, y, z, p, q)$ постоянна вдоль каждой характеристической полосы дифференциального уравнения (1), т. е.

$$F(x(t),\ y(t),\ z(t),\ p(t),\ q(t))=\text{const};$$

поэтому характеристическая полоса является интегральной полосой, если она содержит хотя бы один интегральный элемент.

Для разрешенных относительно производной дифференциальных уравнений (7) каждая характеристическая полоса всегда является интегральной полосой: в этом случае справедливо уравнение (9).

(б) Если функция $z=\psi(x, y)$ в области $\mathfrak{G}(x, y)$ является дважды непрерывно дифференцируемым интегралом дифференциального уравнения (1) и если

$$x_0,\ y_0,\ \psi(x_0, y_0),\ \psi_x(x_0, y_0),\ \psi_y(x_0, y_0) \tag{18}$$

— любой плоскостной элемент этой интегральной поверхности, то любая характеристическая полоса[1]) уравнения (1), которая содержит этот плоскостной элемент, принадлежит поверхности $z=\psi(x, y)$, коль скоро две первые координаты x, y этой полосы являются точками области $\mathfrak{G}$[2]).

Следовательно, дважды непрерывно дифференцируемые интегральные поверхности могут быть построены из характеристических полос.

(в) Если $z=\psi(x, y)$ и $z=\chi(x, y)$ — две дважды непрерывно дифференцируемые в области $\mathfrak{G}(x, y)$ интегральные поверхности уравнения (1) с одним общим плоскостным элементом (18), то все характеристические полосы уравнения (1), которые содержат этот плоскостной элемент, одновременно принадлежат обеим интегральным поверхностям, если только $(x(t), y(t))$ — точки области $\mathfrak{G}$.

Если этот общий плоскостной элемент — обыкновенный, то обе интегральные поверхности, в силу п. 8.6, имеют общую кривую, не вырождающуюся в точку.

---

[1]) Если функция F дважды непрерывно дифференцируема или же благодаря каким-либо условиям гарантирована однозначная разрешимость характеристических уравнений (6) при заданных начальных условиях, то существует лишь единственная полоса такого рода.

[2]) Относительно ослабления условий о дифференцируемости см. A. Haar, Acta Szeged **4** (1928); 103—114; T. Wazewski, Annales Soc. Polon. Math. **13** (1934), 10—12; Math. Zeitschrift **43** (1938), 521—532.

8.8. Частный, особый, полный и общий интегралы.

(а) *Частный интеграл* уравнения (1) — не что иное, как некоторый интеграл дифференциального уравнения, т. е. какая-то функция $z=\psi(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (1). Поэтому термин «частный интеграл» означает, как правило, то же, что и просто «интеграл».

(б) Интеграл дифференциального уравнения (1) $z=\psi(x, y)$ называется *особым*, если он содержит только особые интегральные элементы (ср. с пп. 8.6, 8.7), т. е. когда три уравнения

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad F_p=0, \quad F_q=0 \tag{19}$$

одновременно справедливы для

$$z=\psi, \quad p=\psi_x, \quad q=\psi_y. \tag{20}$$

Если подставить (20) в (19), то после частного дифференцирования получается, что для дважды непрерывно дифференцируемых особых интегралов имеют место соотношения

$$F_x+pF_z=0, \quad F_y+qF_z=0. \tag{21}$$

Интеграл, который не содержит особых интегральных элементов, может вполне называться *обыкновенным*. Произвольный интеграл может, естественно, содержать как обыкновенные, так и особые плоскостные элементы.

Особые интегралы данного дифференциального уравнения (1) получаются, когда из уравнений (19) или (в случае, если ищут дважды непрерывно дифференцируемую интегральную поверхность) из (19) и (21) определяют все интегральные элементы x, y, z, p, q и исследуют, можно ли из них составить непрерывно дифференцируемые поверхности $z=\psi(x, y)$.

Пример. $pq=z$.

Особые плоскостные элементы получаются из соотношений

$$z=pq, \quad q=0, \quad p=0;$$

следовательно, $z=p=q=0$ при любом x, y, и эти элементы объединяются в особую интегральную поверхность $z=0$.

(в) *Полный интеграл* дифференциального уравнения (1) есть двупараметрическое семейство интегралов

$$z=\psi(x, y, a, b), \tag{22}$$

причем функция ψ вместе с ψ_x, ψ_y в некоторой области пространства x, y, a, b должна быть непрерывно дифференцируема по всем

четырем аргументам, а функциональная матрица

$$\frac{\partial(\psi, \psi_x, \psi_y)}{\partial(a, b)}$$

в каждой точке этой области должна иметь ранг 2 [1]).

Роль полного интеграла, который, впрочем, определяется дифференциальным уравнением отнюдь не однозначно, основана на том, что из него одним только процессом дифференцирования и исключения можно вывести все интегралы уравнения. Говоря грубо, полный интеграл приблизительно соответствует интегральному базису линейного однородного дифференциального уравнения (см. п. 3.4).

(г) *Общим интегралом* называется интеграл уравнения (1), который зависит от одной произвольной функции. При этом зависимость понимается так, что в (в) входит $b=\varphi(a)$ с произвольной функцией φ. Отметим, что более подходящим было бы требование, чтобы интеграл зависел от произвольной данной начальной полосы.

§ 9. Метод Лагранжа

9.1. Первые интегралы. Пусть задано квазилинейное уравнение

$$f(x, y, z)\,p+g(x, y, z)\,q=h(x, y, z); \qquad (*)$$

если $w=\psi(x, y, z)$ — интеграл соответствующего однородного уравнения

$$f(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial y}+h(x, y, z)\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (**)$$

то, согласно п. 5.4, интеграл уравнения (*) можно получить, разрешая уравнение $\psi=C$ относительно z. При этом интегралы ψ уравнения (**) являются непрерывно дифференцируемыми функциями, постоянными вдоль каждой характеристики уравнения (**), или, что то же самое, вдоль каждой характеристики уравнения (*).

Метод Лагранжа [2]) для уравнения

$$F(x, y, z;\ p, q)=0 \qquad (1)$$

состоит в реализации аналогичного подхода для дифференциального уравнения (1).

(а) О функциях $F(x, y, z, u, v)$, $G(x, y, z, u, v)$, $H(x, y, z, u, v)$, которые встречаются ниже, будем предполагать, что все они непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y, z, u, v)$.

---

[1]) Также еще требуется, чтобы через x, y, ψ, ψ_x, ψ_y доставлялись сразу все интегральные элементы уравнения (1). Однако это требование, пожалуй, нигде последовательно не проводится. Благодаря ему практическая полезность полных интегралов становилась бы излишне осложненной.

[2]) [Этот метод иногда называют *методом Лагранжа — Шарпи*; см. Степанов, стр. 381—392. — *Прим. ред.*]

Функция $G(x, y, z, u, v)$ называется *первым интегралом* уравнения (1), если она постоянна вдоль каждой характеристики уравнения (1), т. е. вдоль каждого решения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$ характеристической системы дифференциальных уравнений (см. п. 8.4)

$$\left.\begin{aligned} &x'(t)=F_u, \quad y'(t)=F_v, \quad z'(t)=uF_u+vF_v, \\ &u'(t)=-F_x-uF_z, \quad v'(t)=-F_y-vF_z. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Согласно п. 3.2, это означает, что функция G является интегралом линейного однородного дифференциального уравнения

$$F_u\frac{\partial w}{\partial x}+F_v\frac{\partial w}{\partial y}+(uF_u+vF_v)\frac{\partial w}{\partial z}- \\ -(F_x+uF_z)\frac{\partial w}{\partial u}-(F_y+vF_z)\frac{\partial w}{\partial v}=0. \tag{3}$$

Подставляя в (3) интеграл G, мы приходим к соотношению

$$[F(x, y, z, u, v),\ G(x, y, z, u, v)]\equiv 0 \text{ в } G; \tag{4}$$

выражение

$$[F, G]=-[G, F]=(F_x+uF_z)G_u+ \\ +(F_y+vF_z)G_v-(G_x+uG_z)F_u-(G_y+vG_z)F_v \tag{5}$$

носит название *скобок Якоби*. О функциях F и G, удовлетворяющих соотношению (4), говорят также, что они *находятся в инволюции друг к другу*.

В силу п. 8.7 (а), функция $F(x, y, z, u, v)$ — очевидный первый интеграл уравнения (1)[1]). Для получения остальных его первых интегралов надо решить линейное однородное дифференциальное уравнение (3) (см. § 3).

(б) Для дальнейшего оказывается очень полезно ввести еще одно понятие интеграла дифференциального уравнения (1). Функция $G(x, y, z, u, v)$ будет называться *специальным первым интегралом*[2]) уравнения (1), если она постоянна вдоль каждой характеристической интегральной полосы уравнения (1). Функция G тогда и только тогда является специальным первым интегралом уравнения (1), когда соотношение (4) выполняется для каждого интегрального элемента x, y, z, u, v этого уравнения.

Пример. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.
Характеристические уравнения таковы:

$$\begin{aligned} &x'=2x(xp+yq-z)-2pf, \\ &y'=2y(xp+yq-z)-2qf, \\ &z'=2(xp+yq)(xp+yq-z)-2(p^2+q^2)f, \\ &p'=2x(p^2+q^2)f', \quad q'=2y(p^2+q^2)f'. \end{aligned}$$

---

[1]) Это, впрочем, видно и непосредственно из уравнения (3), решением которого является $w=F$.

[2]) [В подлиннике — Vorintegral im weiteren Sinne. — *Прим. ред.*]

Из двух первых уравнений следует:

$$y'p - x'q = 2(yp - xq)(xp + yq - z),$$

а из двух последних —

$$yp' - xq' = 0.$$

Складывая эти два уравнения, получаем:

$$\frac{(yp - xq)'}{yp - xq} = 2(xp + yq - z). \qquad (*)$$

Ограничиваясь только характеристическими интегральными полосами, можно привлечь к преобразованию характеристических уравнений еще и исходное дифференциальное уравнение. Именно, исходное уравнение и третье характеристическое уравнение дают соотношение

$$z' = 2z(xp + yq - z).$$

Таким образом, уравнение (*) принимает вид

$$\frac{(yp - xq)'}{yp - xq} = \frac{z'}{z},$$

откуда видно, что $\ln|yp - xq| - \ln|z|$ или, что то же самое,

$$\frac{yp - xq}{z}$$

— специальный первый интеграл (поскольку для его образования было использовано само дифференциальное уравнение).

(в) Если функция G является специальным первым интегралом дифференциального уравнения (1) и если $p = U(x, y, z)$, $q = V(x, y, z)$ в области $\mathfrak{G}(x, y, z)$ — общее непрерывно дифференцируемое решение одновременно обоих уравнений $F = 0$ и $G = 0$, то

$$[F, G] = 0 \text{ в } \mathfrak{G},$$

если скобка Якоби вычислена для $p = U$, $q = V$. Если G и H — специальные первые интегралы дифференциального уравнения (1) и если функции $z = \psi(x, y)$, $p = U(x, y)$, $q = V(x, y)$ являются общими решениями в области $\mathfrak{G}(x, y)$ одновременно трех уравнений $F = 0$, $G = 0$, $H = 0$, то

$$[F, G] = 0 \quad \text{и} \quad [F, H] = 0 \quad \text{в} \quad \mathfrak{G},$$

если скобки Якоби вычислены для $z = \psi$, $p = U$, $q = V$.

Таким образом, решать дифференциальные уравнения (1) можно по-разному, в зависимости от того, два или только один специальный первый интеграл удается разыскать (кроме очевидного первого интеграла F).

9.2. Случай двух неочевидных первых интегралов. Если, кроме очевидного первого интеграла F дифференциального уравнения (1), известны еще два специальных первых интеграла G и H, то, со-

гласно методу, намеченному в п. 9.1, мы будем поступать следующим образом. Разрешим уравнения

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, u, v)=0, \quad G(x, y, z, u, v)=0, \\ H(x, y, z, u, v)=0 \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

относительно z, u, v. Если при этом получаются непрерывные функции $u=u(x, y)$, $v=v(x, y)$ и непрерывно дифференцируемая функция $z=z(x, y)$, то проверим, будет ли $z_x=u$, $z_y=v$. Если это так, то функция $z(x, y)$, очевидно, является, решением уравнения (1) и, более того, — общим решением трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, p, q)=0, \quad G(x, y, z, p, q)=0, \\ H(x, y, z, p, q)=0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

(а) Два уравнения вида (1) не всегда имеют одно общее решение, как показывает тривиальный пример $p=0$, $p=1$. Справедлива следующая теорема: если функция $\psi(x, y)$, определенная в области $\mathfrak{G}(x, y)$, — дважды непрерывно дифференцируемый интеграл обоих дифференциальных уравнений

$$F(x, y, z, p, q)=0, \quad G(x, y, z, p, q)=0, \tag{8}$$

то ψ удовлетворяет в $\mathfrak{G}$ и дифференциальному уравнению

$$[F(x, y, z, p, q), \quad G(x, y, z, p, q)]=0. \tag{9}$$

Таким образом, необходимым условием одновременной разрешимости обоих уравнений (8) является наличие общего решения для трех уравнений (8), (9)[1]).

(б) Для проведения намеченного выше метода надо еще потребовать соответствующих условий для функций F, H и G, H-(аналогичных условию (9)), а также функциональной независимости трех уравнений (6) в том смысле, что функциональный определитель функции F, G, H относительно z, u, v отличен от нуля. Тогда имеет место следующая теорема:

Пусть функции

$$z=\psi(x, y), \quad u=U(x, y), \quad v=V(x, y) \tag{10}$$

непрерывно дифференцируемы в области $\mathfrak{G}(x, y)$ и удовлетворяют там уравнениям (6). Далее, пусть для функций (10) скобки Якоби равны нулю:

$$[F, G]=0, \quad [F, H]=0, \quad [G, H]=0 \quad \text{в} \quad \mathfrak{G}(x, y), \tag{11}$$

---

[1]) Уравнение (9), так же как и оба уравнения (8), отнюдь не будут новыми условиями. Если, например, G является первым интегралом уравнения (1), то, в силу 9.1, уравнение (4) выполняется даже тождественно для всех пяти переменных.

а в каждой подобласти области $\mathfrak{G}$

$$\frac{\partial(F, G, H)}{\partial(z, u, v)} \neq 0. \tag{12}$$

Тогда

$$U(x, y) = \psi_x(x, y), \quad V(x, y) = \psi_y(x, y),$$

следовательно, функция $\psi(x, y)$ является общим интегралом уравнений (7) в области $\mathfrak{G}(x, y)$ и, в частности, интегралом дифференциального уравнения (1).

Предположения (11) и (12) сохраняются, если мы заменим функции G и H на $G - a$, $H - b$, где a, b — произвольные постоянные. Функции (10) можно в этом случае получить путем решения уравнений

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z, u, v) = 0, \quad G(x, y, z, u, v) = a, \\ H(x, y, z, u, v) = b, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

и, таким образом, в некоторой области получается полный интеграл $z = \psi(x, y; a, b)$ уравнения (1).

(в) При применении (б) к решению конкретного дифференциального уравнения (1) сначала составляют характеристические уравнения (2) (которые пишутся так же, как в § 8, (6), с буквами p, q вместо u, v). Далее стараются, комбинируя эти уравнения, получить такие две непрерывно дифференцируемые функции G и H, которые постоянны вдоль каждой характеристики или вдоль каждой характеристической интегральной полосы, т. е. получить два первых интеграла — собственных или специальных. При этом нужно обратить внимание на то, чтобы три функции F, G, H были функционально независимы друг от друга. Оба первых уравнения (11) заведомо выполняются (тождественно по x, y, z, u, v) для собственных первых интегралов уравнения (1), а также и для специальных первых интегралов. Наконец, разрешают уравнения (6), или более общее (13), относительно z, u, v. Подстановкой найденной функции $z = \psi(x, y)$ в уравнение (1) или проверкой выполнения всех остальных предположений (б) можно определить, является ли функция $z = \psi(x, y)$ интегралом дифференциального уравнения (1).

Пример.

$$pq = z. \tag{14}$$

Для него характеристическими будут следующие уравнения:

$$x'(t) = v, \quad y'(t) = u, \quad z'(t) = 2uv, \quad u'(t) = u, \quad v'(t) = v.$$

Из них следуют соотношения

$$u' - y' = 0, \quad v' - x' = 0, \quad u'v - uv' = 0,$$

а поэтому функции $u - y$, $v - x$ и, если можно ограничиться областью, в которой $v \neq 0$, $\frac{u}{v}$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями,

постоянными вдоль каждой характеристики уравнения (14), т. е. эти три функции являются первыми интегралами. Уравнение (14) имеет, кроме того, очевидный первый интеграл $z = uv$. Любая непрерывно дифференцируемая функция от указанных первых интегралов снова есть первый интеграл.

Если теперь положить

$$F = z - uv, \quad G = u - y, \quad H = \frac{u}{v} - 1,$$

то уравнения (6) имеют решение $z = y^2$, не являющееся, однако, интегралом уравнения (14). Это, впрочем, не противоречит теореме (б), поскольку здесь $[G, H] = \frac{u}{v^2} \neq 0$.

Если положить

$$F = z - uv, \quad G = x - v, \quad H = y - u,$$

то из уравнений (13) получим полный интеграл

$$z = (x - a)(y - b).$$

Если мы выберем первые интегралы

$$F = z - uv, \quad G = a(x - v) + y - u, \quad H = \frac{u}{v},$$

то из уравнений (13) получаем полный интеграл

$$z = \frac{1}{4a}(ax + y - b)^2.$$

9.3. Случай одного неочевидного первого интеграла. Если для дифференциального уравнения (1) найден только один первый интеграл G в собственном или специальном смысле, независимый от очевидного интеграла F, то также удается получить полный интеграл. С этой целью разрешают уравнения

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad G(x, y, z, u, v) = a \tag{15}$$

при произвольном a относительно u, v; это дает, вообще говоря, числовую систему x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, которая удовлетворяет обоим уравнениям, причем функциональный определитель $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0$ в окрестности этой точки. В этом случае оба уравнения (15) имеют в окрестности точки (x_0, y_0, z_0) непрерывно дифференцируемое решение $u = U(x, y, z)$, $v = V(x, y, z)$. Используя это решение, образуют систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = U(x, y, z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = V(x, y, z) \tag{16}$$

и ищут ее решение $z = \psi(x, y)$. Так как из предположений следует условие интегрируемости

$$U_y + VU_z = V_x + UV_z$$

в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), то (ср. с п. 7.1) такое решение существует, и при этом можно выбрать для $\psi(x_0, y_0)$ еще одно

произвольное значение b в достаточно малой окрестности z_0. Тогда функция $z=\psi(x, y; a, b)$ будет общим интегралом уравнений (16) и полным интегралом уравнения (1). Область существования этого интеграла, вообще говоря, оказывается больше, чем ожидалось по предположениям.

Пример 1. $pq=z$.

В п. 9.2 (в) были найдены первые интегралы $u-y$, $v-x$, $\frac{u}{v}$. Если положить $G=u-y$, то уравнения (15) приобретают в этом случае следующий вид:

$$uv=z, \quad u-y=b,$$

т. е. надо решить систему (см. (16))

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y+b, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y+b};$$

ее решение

$$z=(x+a)(y+b).$$

Тот же результат получают со вторым из первых интегралов; с третьим получают полный интеграл в виде

$$z=\frac{1}{4}\left(ax+\frac{y}{a}+b\right)^2.$$

Пример 2. $(xp+yq-z)^2=(p^2+q^2)f(x^2+y^2)$.

В п. 9.1 (б) был найден специальный первый интеграл $(yp-xq)/z$. Если приравнять его к A, то, разрешая это и исходные уравнения относительно p, q, получаем:

$$\frac{\partial \ln z}{\partial x}=\frac{Ay}{r^2}+\frac{x}{r^2-f}\pm\frac{x}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R},$$

$$\frac{\partial \ln z}{\partial y}=-\frac{Ax}{r^2}+\frac{y}{r^2-f}\pm\frac{y}{r^2(r^2-f)}\sqrt{R},$$

где $r^2=x^2+y^2$, $R=(A^2+r^2)f-A^2f^2$. Отсюда можно найти $\ln z$, введя вместо x, y полярные координаты.

9.4. Получение однопараметрического семейства интегралов из двух неочевидных первых интегралов. Может случиться, что наряду с очевидным первым интегралом получаются два специальных первых интеграла G, H, которые, однако, не находятся в инволюции. Тогда путем специального выбора в (13) констант a, b иногда удается добиться получения однопараметрического семейства интегралов исходного уравнения (1).

Пример. $pq=x+y+z$.

Из характеристических уравнений

$$x'=q, \quad y'=p, \quad z'=2pq, \quad p'=p+1, \quad q'=q+1$$

находим первые интегралы

$$p-q+x-y, \quad \frac{p+1}{q+1},$$

которые, однако, не находятся в инволюции. Если написать, несмотря на это, уравнения (13):

$$pq = x + y + z, \quad p - q + x - y = 2a, \quad p + 1 = b(q + 1),$$

то получим:

$$(b-1)p = b(y-x) + 2ab - b + 1, \quad (b-1)q = y - x + 2a - b + 1. \quad (*)$$

Так как $p = z_x$, $q = z_y$, то должно быть $p_y = q_x$; это условие, примененное к уравнениям (*), показывает, что $b = -1$. Для этого значения имеем:

$$2z_x = y - x + 2a - 2, \quad 2z_y = x - y - 2a - 2,$$

следовательно,

$$z = -\frac{(x-y)^2}{4} + a(x-y) - (x+y) + 1 - a^2.$$

Тем самым найдено однопараметрическое семейство интегралов заданного уравнения.

9.5. Получение частных интегралов из полного интеграла. (а) Пусть

$$z = \psi(x, y; a, b) \tag{17}$$

— полный интеграл дифференциального уравнения (1) в окрестности[1]) точки (x_0, y_0, a_0, b_0). Метод, которым из него можно образовать специальные интегралы, геометрически сводится к конструированию огибающей поверхности ко всему множеству или к некоторому подмножеству интегральных поверхностей, входящих в полный интеграл. Аналитически этот метод реализуется вариацией постоянных.

Если

$$a = \alpha(x, y), \quad b = \beta(x, y) \tag{18}$$

— непрерывно дифференцируемые функции, то из (17) после частного дифференцирования следует:

$$z_x = \psi_x + \psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x, \quad z_y = \psi_y + \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y,$$

и если

$$\psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x = 0, \quad \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y = 0, \tag{19}$$

то эти две функции (18), будучи подставлены в (17), дают интеграл дифференциального уравнения (1).

(б) Уравнения (19) удовлетворяются тривиальным образом, если $\psi_a = \psi_b = 0$. Если же эти уравнения тождественно удовлетворяются по x, y, то получают особую интегральную поверхность как огибающую совокупности интегральных поверхностей. Впрочем, для получения этих интегральных поверхностей есть прямой метод (см. п. 8.8 (б)), в общем, более удобный.

---

[1]) Предполагается, что все дальнейшие рассуждения проводятся в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

(в) Более важным является следующий случай[1]). Если $\Phi(a, b)$, $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции и если выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} |\Phi_a| + |\Phi_b| > 0, \quad \Phi(\alpha(x, y), \beta(x, y)) = 0, \\ \psi_a(x, y; \alpha, \beta)\Phi_b(\alpha, \beta) - \psi_b(x, y; \alpha, \beta)\Phi_a(\alpha, \beta) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

то функция

$$z = \psi(x, y; \alpha(x, y), \beta(x, y))$$

— также интеграл уравнения (1), являющийся огибающей поверхностью к поверхностям (17) с дополнительным условием $\Phi(a, b) = 0$. Если функция Φ дана, то оба уравнения (20) служат для вычисления функций α, β, если, конечно, решения этих уравнений существуют.

Пример. $pq = z$.
Согласно п. 9.2 (в),

$$z = (x - a)(y - b)$$

— полный интеграл. Если взять

$$\Phi(a, b) = \lambda a + \mu b \qquad (|\lambda| + |\mu| > 0),$$

то первое из условий (20) выполняется. Уравнения (20) имеют в данном случае вид

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 0, \quad \lambda(x - \alpha) - \mu(y - \beta) = 0,$$

откуда получается

$$\alpha = \frac{\lambda x - \mu y}{2\lambda}, \quad \beta = -\frac{\lambda x - \mu y}{2\mu}.$$

Таким образом, если $\lambda\mu \neq 0$, то получается интеграл

$$z = \frac{1}{4\lambda\mu}(\lambda x + \mu y)^2.$$

(г) Пусть $\chi(x, y)$ — интеграл дифференциального уравнения (1). Он, в силу (а), получается из полного интеграла (17), если выбрать подходящим образом непрерывно дифференцируемые функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$:

$$\psi(x, y; \alpha, \beta) = \chi, \quad \psi_x = \chi_x, \quad \psi_y = \chi_y \tag{21}$$

и

$$\psi_a\alpha_x + \psi_b\beta_x = 0, \qquad \psi_a\alpha_y + \psi_b\beta_y = 0. \tag{22}$$

---

[1]) К этому случаю можно прийти следующим образом. Если $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x \neq 0$, то из (19) следует, что $\psi_a = \psi_b = 0$, так что имеет место предыдущий случай. Если же, напротив, $\alpha_x\beta_y - \alpha_y\beta_x = 0$, то функции $\alpha(x, y)$, $\beta(x, y)$, в силу 2.7 (а), зависимы. Если эта зависимость осуществляется посредством функции $\Phi(a, b)$, то мы приходим как раз к случаю (в) с предположениями (20).

Практически для вычисления функций α, β используют соотношения (21), а затем проверяют, удовлетворяют ли эти функции уравнениям (22).

Рассмотрим уже решавшийся в (б) пример. Положим:

$$\psi(x, y; a, b) = (x-a)(y-b), \quad \chi(x, y) = \frac{(\lambda x + \mu y)^2}{4\lambda\mu};$$

тогда уравнения (21) приобретут следующий вид:

$$(x-a)(y-b) = \frac{(\lambda x + \mu y)^2}{4\lambda\mu}, \quad y - b = \frac{\lambda x + \mu y}{2\mu}, \quad x - a = \frac{\lambda x + \mu y}{2\lambda}.$$

В итоге получаем:

$$a = \alpha(x, y) = \frac{\lambda x - \mu y}{2\lambda}, \quad b = \beta(x, y) = \frac{\mu y - \lambda x}{2\mu}.$$

Для этих функций уравнения (22) также выполнены.

9.6. Решение задачи Коши. Пусть в окрестности точки τ_0 задана интегральная полоса

$$x = \omega_1(\tau), \quad y = \omega_2(\tau), \quad z = \omega_3(\tau), \quad p = \omega_4(\tau), \quad q = \omega_5(\tau), \tag{23}$$

это означает, что справедливы следующие равенства:

$$\omega_3' = \omega_4\omega_1' + \omega_5\omega_2' \tag{24}$$

(условие полосы) и

$$F(\omega_1, \ldots, \omega_5) = 0. \tag{25}$$

Требуется найти интегральную поверхность, содержащую полосу (23) [1]).

Попытаемся получить эту интегральную поверхность из выражения (17) для каждого интеграла. Введем функцию $t(x, y)$ такую, что $a = \alpha(t)$, $b = \beta(t)$, $t = t(x, y)$; здесь все функции непрерывно дифференцируемые. Функция $\psi(x, y)$, которая получается из (17) после подстановки этих функций, является (ср. с п. 9.5) снова интегралом уравнения (1), если

$$\psi_a(x, y; \alpha, \beta)\alpha' + \psi_b(x, y; \alpha, \beta)\beta' = 0 \tag{26}$$

для $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $t = t(x, y)$. Она содержит начальную полосу (23), если

$$\left.\begin{aligned} \omega_3(\tau) &= \psi(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)), \\ \omega_4(\tau) &= \psi_x(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)), \\ \omega_5(\tau) &= \psi_y(x, y; \alpha(\tau), \beta(\tau)) \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

---

[1]) Если задать вместо начальной полосы некоторую начальную кривую для интегральной поверхности, то ее можно дополнить до начальной полосы (23), для которой справедливы равенства (24) и (25).

для $x=\omega_1(\tau)$, $y=\omega_2(\tau)$ и

$$t(\omega_1, \omega_2)=\tau. \tag{28}$$

Уравнения (27) служат для определения функций $\alpha(t)$, $\beta(t)$; уравнения (26) и (28) — для определения функции $t(x, y)$.

Если соотношения (27) выполнены для $\tau=\tau_0$, $x=\omega_1(\tau_0)$, $y=\omega_2(\tau_0)$ и только для двух чисел a_0, b_0 вместо $\alpha(\tau)$, $\beta(\tau)$ и если, кроме того,

$$F_p(\omega_1(\tau_0), \ldots, \omega_5(\tau_0))\neq 0, \quad \psi_a\neq 0, \quad \psi_b\neq 0, \quad \psi_a\psi_{yb}-\psi_b\psi_{ya}\neq 0$$

или

$$F_q(\omega_1(\tau_0), \ldots, \omega_5(\tau_0))\neq 0, \quad \psi_a\neq 0, \quad \psi_b\neq 0, \quad \psi_a\psi_{xb}-\psi_b\psi_{xa}\neq 0$$

при $x=\omega_1(\tau_0)$, $y=\omega_2(\tau_0)$, $a=a_0$, $b=b_0$, то функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определяются однозначно из (27) как непрерывно дифференцируемые в окрестности τ_0 функции, удовлетворяющие условиям $\alpha(\tau_0)=a_0$, $\beta(\tau_0)=b_0$. Далее, еще нужно определить $t(x, y)$ из (26); тогда (28) удовлетворяется само собой.

Пример 1. $pq=z$.

В силу п. 9.2 (в), $z=(x-a)(y-b)$ — полный интеграл. Ищется интегральная поверхность, которая содержит интегральную полосу

$$x=0, \quad y=t, \quad z=t^2, \quad p=\frac{t}{2}, \quad q=2t.$$

Соотношения (24) и (25) удовлетворяются, а уравнения (27) имеют вид

$$t^2=-a(t-b), \quad \frac{t}{2}=t-b, \quad 2t=-a$$

и дают:

$$\alpha(t)=-2t, \quad \beta(t)=\frac{t}{2}.$$

Уравнение (26) имеет вид

$$2\left(y-\frac{t}{2}\right)-\frac{1}{2}(x+2t)=0$$

и дает:

$$t=y-\frac{x}{4}.$$

Таким образом,

$$\alpha=\frac{x}{2}-2y, \quad \beta=\frac{y}{2}-\frac{x}{8},$$

откуда получаем искомый интеграл

$$z=\left(y+\frac{x}{4}\right)^2.$$

Пример 2. $pq=axy$.

Дифференциальное уравнение допускает разделение переменных (см. п. 11.5); этим методом можно найти полный интеграл

$$z=Ax^2+\frac{a}{4A}y^2+B. \tag{*}$$