

Ищется интегральная поверхность, которая содержит начальную кривую

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \omega(\eta), \quad -\infty < \eta < +\infty,$$

и, следовательно, (см. примечание ¹⁾) на стр. 99) начальную полосу

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \omega(\eta), \quad p = \frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)}, \quad q = \omega'(\eta),$$

причем предполагается, что $\omega'(\eta) \neq 0$.

Если поставить A, B вместо α, β , то уравнения (27) примут вид

$$\omega(\eta) = A\xi^2 + \frac{a}{4A}\eta^2 + B, \quad \frac{a\xi\eta}{\omega'(\eta)} = 2A\xi, \quad \omega'(\eta) = \frac{a}{2A}\eta.$$

и, следовательно,

$$A = \frac{a\eta}{2\omega'(\eta)}, \quad B = \omega(\eta) - \frac{a\xi^2\eta}{2\omega'(\eta)} - \frac{\eta}{2}\omega'(\eta), \quad (**)$$

а уравнение (26) переписывается так:

$$(\eta\omega'' - \omega') [a\eta^2(x^2 - \xi^2) - (y^2 - \eta^2)\omega'^2] = 0. \quad (***)$$

Если $\eta\omega'' - \omega' \neq 0$, то нужно определить η как функцию от x, y :

$$a\eta^2(x^2 - \xi^2) = (y^2 - \eta^2)\omega'^2,$$

и подставить в соотношения (**) и (*). Так, например, для $\omega(\eta) \equiv \eta$ получают:

$$z = y\sqrt{a(x^2 - \xi^2) + 1}.$$

Если же $\eta\omega'' - \omega' = 0$, то $\omega = a\eta^2 + \beta$ с произвольными константами a, β . Дифференциальные уравнения (***)) здесь не могут служить для определения $\eta = \eta(x, y)$, но теперь из (**) получают:

$$A = \frac{a}{4a}, \quad B = \beta - \frac{a}{4a}\xi^2,$$

и, таким образом, искомым интегралом, как подтверждает проверка, служит функция

$$z = \frac{a}{4a}(x^2 - \xi^2) + ay^2 + \beta.$$

§ 10. Некоторые другие методы решения

10.1. Нормальная задача Коши¹⁾. Под задачей Коши для дифференциального уравнения

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (1)$$

понимают задачу нахождения интегральной поверхности $z = \psi(x, y)$, содержащей данную интегральную полосу

$$x = \omega_1(s), \quad y = \omega_2(s), \quad z = \omega_3(s), \quad p = \omega_4(s), \quad q = \omega_5(s). \quad (2)$$

¹⁾ См. E. Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Paris, 1921, стр. 20.

Здесь $\omega_y(s)$ — непрерывно дифференцируемые при $\alpha < s < \beta$ функции. О функции F снова делаются предположения, уже сформулированные в п. 8.1. Далее, пусть

$$F_p(\omega_1, \dots, \omega_5) \omega'_2 - F_q(\omega_1, \dots, \omega_5) \omega'_1 \neq 0, \quad (3)$$

это неравенство означает, что если кривая-носитель полосы (2) и кривая-носитель характеристической полосы § 8, (6) проектируется на плоскость x, y , то проекция первой не должна касаться проекции второй. Наконец, условимся обозначать интегральный элемент, определяемый полосой (2) для $s = s_0$, через x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 .

Из условия (3) следует, в частности, что полоса (2) содержит только правильные интегральные элементы (см. п. 8.6) и $|\omega'_1| + |\omega'_2| > 0$. В случае, если $\omega'_2(s) \neq 0^1$, это неравенство справедливо также и в окрестности этой точки; в этом случае можно преобразовать задачу Коши (1), (2) в «нормальную задачу Коши» специального вида²⁾:

$$p = f(x, y, z, q), \quad x = 0, \quad y = \eta, \quad z(0, y) = 0. \quad (4)$$

Для выполнения этого преобразования уравнение $\eta = \omega_2(s)$ разрешают относительно s и выбирают η в качестве независимого переменного. Тогда начальные условия (2) переписываются в виде

$$x = \rho(\eta), \quad y = \eta, \quad z = \sigma(\eta), \quad p = \tau(\eta), \quad q = \omega(\eta). \quad (5)$$

Если теперь подвергнуть непрерывно дифференцируемую функцию $z(x, y)$ преобразованию

$$Z(X, Y) = z(x, y) - \sigma(y), \quad X = x - \rho(y), \quad Y = y,$$

то из дифференциального уравнения (1) получится уравнение

$$F(X + \rho(Y), Y, Z + \sigma(Y), Z_X, Z_Y - Z_X \rho'(Y) + \sigma'(Y)) = 0$$

для Z , которое, благодаря условию (3), можно разрешить относительно Z_X . При этом получится первое из уравнений (4) с большими буквами вместо маленьких. Из трех первых уравнений (5) получаются последние три уравнения (4); последнее уравнение (5) переходит в уравнение $Z_Y(0, Y) = 0$, вытекающее из последнего уравнения (4); предпоследнее уравнение (5) представляет собой следствие первого уравнения (4).

¹⁾ Если $\omega'_1(s_0) \neq 0$, а $\omega'_2(s_0) = 0$, то следует поступать аналогичным образом.

²⁾ Под нормальной задачей понимается начальная задача, которая включает в себя дифференциальное уравнение в явной форме $p = f(x, y, z, q)$ и некоторое начальное условие $x = \xi, y = \eta, z(\xi, \eta) = \omega(\eta)$ при фиксированном ξ и переменном η , или же $q = f(x, y, z, p)$ и $x = \xi, y = \eta, z(\xi, \eta) = \omega(\xi)$ при фиксированном η и переменном ξ .

10.2. Общая теорема существования. Метод характеристик Коши¹⁾. В § 9 были уже изложены некоторые методы, с помощью которых в ряде случаев можно решить данное дифференциальное уравнение (1). Однако там ничего не сказано о том, при каких общих условиях интеграл данного уравнения существует.

Следующая теорема существования относится к задаче Коши.

Пусть левая часть $F(x, y, z, p, q)$ уравнения (1) — дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y, z, p, q)$. Пусть при $a < s < b$

$$x = x_0(s), \quad y = y_0(s), \quad z = z_0(s), \quad p = p_0(s), \quad q = q_0(s) \quad (6)$$

— интегральная полоса дифференциального уравнения (1)²⁾, для которой

$$F_p y'_0(s) - F_q x'_0(s) \neq 0, \quad (7)$$

причем в F_p и F_q подставлены функции (6)³⁾. Тогда задача отыскания интегральной поверхности уравнения (1), содержащей полосу (6), разрешима «в малом»; более того, полученный интеграл даже дважды непрерывно дифференцируем⁴⁾.

Получить этот интеграл — решение задачи Коши — можно следующим путем: поскольку функция F дважды непрерывно дифференцируема, то правые части характеристической системы § 8, (6) непрерывно дифференцируемы; следовательно, ее решение однозначно определено некоторыми начальными значениями x_0, y_0, z_0, p_0, q_0 при $t = 0$. Пусть этими решениями будут:

$$x = x(t, x_0, \dots, q_0), \dots, q = q(t, x_0, \dots, q_0).$$

В качестве упомянутых начальных значений выбираются элементы данной интегральной полосы (6), т. е. строятся функции

$$X(s, t) = x(t, x_0(s), \dots, q_0(s)), \dots, Q(s, t) = \\ = q(t, x_0(s), \dots, q_0(s)).$$

Эти функции в области их существования дают исключительно интегральные элементы дифференциального уравнения (1). Благодаря условию (7), уравнения

$$x = X(s, t), \quad y = Y(s, t)$$

¹⁾ [См. Курант, стр. 88—91; Степанов, стр. 393—406. — Прим. ред.]

²⁾ Можно также исходить из некоторой непрерывно дифференцируемой пространственной кривой $x = x_0(s), y = y_0(s), z = z_0(s)$ и — коль скоро это выполнено — так добавить непрерывно дифференцируемые функции $p_0(s), q_0(s)$, чтобы функции (6) удовлетворяли условию полосы и уравнению (1).

³⁾ Относительно геометрической интерпретации (7) см. 10.1. Из неравенства (7) следует, что начальная полоса (6) содержит лишь регулярные плоскостные элементы.

⁴⁾ Существует ли только один интеграл — зависит от вида области.

в каждом подынтервале $\alpha < a_0 \leq s \leq b_0 < \beta$ могут быть однозначно разрешены относительно s, t для всех достаточно малых t ; получаем две функции $s = s(x, y)$, $t = t(x, y)$. Подставляя эти две функции в соотношение $z = Z(s, t)$, мы получим искомый интеграл дифференциального уравнения (1).

Пример. $pq = 1$.

Пусть для этого дифференциального уравнения задана начальная интегральная полоса

$$x = s, \quad y = s^3, \quad z = 2s^2, \quad p = s, \quad q = \frac{1}{s} \quad (s > 0).$$

Из характеристических уравнений

$$x'(t) = q, \quad y'(t) = p, \quad z'(t) = 2pq, \quad p'(t) = 0, \quad q'(t) = 0$$

без труда определяется характеристика с начальным значением x_0, \dots, q_0 при $t = 0$:

$$x = x_0 + q_0 t, \quad y = y_0 + p_0 t, \quad z = 2p_0 q_0 t + z_0, \quad p = p_0, \quad q = q_0.$$

После подстановки уравнений начальной полосы получаем:

$$x = \frac{t}{s} + s, \quad y = st + s^3, \quad z = 2t + 2s^2, \quad p = s, \quad q = \frac{1}{s}.$$

Из второго и третьего уравнений получаем соотношение $z = 2\frac{y}{s}$, а из двух первых уравнений следует, что $y = xs^2$. Таким образом, искомым интегралом будет:

$$z = 2\sqrt{xy} \quad \text{для } x > 0, \quad y > 0.$$

10.3. Частный случай: $p = f(x, y, z, q)$. Если дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно одной из производных:

$$p = f(x, y, z, q) \tag{8}$$

и для него ищется интегральная поверхность, которая проходит через данную кривую, лежащую в плоскости, параллельной плоскости y, z^1), то при надлежащих предположениях можно дать оценку области определения интеграла.

(а) Пусть в области

$$|x - \xi| < a, \quad y, z, q \text{ — любые,} \tag{9}$$

функция $f(x, y, z, q)$ дважды непрерывно дифференцируема. Далее, пусть ее частные производные не превосходят по абсолютной величине числа A ($A > 1$). Пусть, наконец, функция $\omega(\eta)$ определена для всех η , дважды непрерывно дифференцируема и удовлетворяет неравенству

$$|\omega'(\eta)| + |\omega''(\eta)| \leq B.$$

¹⁾ [См. п. 2.6 (6) и примечание ¹⁾ на стр. 23. — Прим. ред.]

Тогда дифференциальное уравнение (8) имеет ровно одну интегральную поверхность $z = \psi(x, y)$, содержащую начальную кривую

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad z = \omega(\eta), \quad -\infty < \eta < +\infty.$$

Эта поверхность существует по крайней мере в области

$$|x - \xi| < \min\left(a, \frac{1}{3A(B+1)}\right), \quad -\infty < y < +\infty,$$

и там дважды непрерывно дифференцируема.

Эту интегральную поверхность получают методом характеристик Коши. Определяем для характеристических уравнений

$$y'(x) = -f_q, \quad z'(x) = f - qf_q, \quad q'(x) = f_y + qf_z \quad (10)$$

интегральные кривые

$$y = Y(x, \eta), \quad z = Z(x, \eta), \quad q = Q(x, \eta), \quad (11)$$

проходящие через начальные точки ($x = \xi, y = \eta, z = \omega(\eta), q = \omega'(\eta)$), и разрешаем первое из уравнений (11) относительно η : получаем функцию $\eta = \chi(x, y)$. Тогда $z = Z(x, \chi(x, y))$ — искомый интеграл; следовательно, иными словами, оба первых уравнения (11) дают этот интеграл в параметрическом представлении¹⁾.

(б) Если функция f задана не в области (9), а в какой-нибудь конечной области, то удается доказать аналогичную теорему существования в случае, когда область определения функции f можно так продолжить до области вида (9), чтобы там были выполнены предположения теоремы (а)²⁾.

(в) Во многих случаях методом, изложенным в (а), получают интеграл даже в более широкой области, несмотря на то, что довольно сильные ограничения относительно производных функций f и ω иногда не выполнены.

Пример 1. $p = q^2$; $\omega(\eta) = \eta^2$.

Из характеристических уравнений

$$y' = -2q, \quad z' = -q^2, \quad q' = 0$$

¹⁾ Камке, D. Glen, стр. 352—358; там предполагается еще, что $|f| < A$; это предположение не является необходимым, поскольку функция f оценивается по теореме о среднем через производные.

Другие результаты относительно области существования интеграла см. T. Wazewski, Annales Soc. Polon. Math. 13 (1934), стр. 1—9; 14 (1935), стр. 149—177. По поводу предположений о дифференцируемости функций f и ω см. там же: 13 (1934), стр. 10—12; Math. Zeitschrift 43 (1938), стр. 521—532. Относительно однозначности интеграла см. А. Нага, Acta Szeged 4 (1928), стр. 103—114. Исторические замечания содержатся у Serret-Scheffers, Differential- und Integralrechnung III, S. 719 f.

²⁾ См. Камке, D. Glen, стр. 359—362; T. Wazewski, Annales, Soc. Polon. 14 (1935), стр. 149—177.

следует:

$$q = 2\eta, \quad z = \eta^2 - 4(x - \xi)\eta^2, \quad y = \eta - 4(x - \xi)\eta.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\eta = \frac{y}{1 - 4(x - \xi)} \quad \text{для } x - \xi < \frac{1}{4},$$

так что

$$z = \psi(x, y) = \frac{y^2}{1 - 4(x - \xi)}.$$

Пример 2. $p = \ln q$ ($q > 0$); $\omega(\eta) = \eta^2$ ($\eta > 0$).

Из характеристических уравнений

$$y' = -\frac{1}{q}, \quad z' = \ln q - 1, \quad q' = 0$$

следует:

$$q = 2\eta, \quad z = (\ln 2\eta - 1)(x - \xi) + \eta^2, \quad y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

Из последнего уравнения получаем:

$$\eta = \frac{y}{2} + \sqrt{\frac{y^2}{4} + \frac{x - \xi}{2}} \quad \text{для } x - \xi < \frac{y^2}{2}$$

(квадратный корень надо брать положительным, чтобы $y = \eta$ для $x = \xi$).

Отсюда находим для $x - \xi < \frac{y^2}{2}$ интеграл в параметрическом представлении

$$z = (\ln 2\eta - 1)(x - \xi) + \eta^2, \quad y = \frac{\xi - x}{2\eta} + \eta.$$

10.4. Представление решения степенным рядом в случае аналитических функций¹⁾. Рассмотрим снова задачу с начальным условием для дифференциального уравнения (8). Встречающиеся функции и переменные могут быть теперь комплексными.

Пусть в окрестности точки (x_0, y_0, z_0, q_0) функция $f(x, y, z, q)$ является аналитической функцией комплексных переменных x, y, z, q , т. е. она разлагается в абсолютно сходящийся степенной ряд

$$f(x, y, z, q) = \sum_{\kappa, \lambda, \mu, \nu} a_{\kappa, \lambda, \mu, \nu} (x - x_0)^{\kappa} (y - y_0)^{\lambda} (z - z_0)^{\mu} (q - q_0)^{\nu}.$$

Далее, пусть $\omega(y)$ в окрестности значения $y = y_0$ — регулярная функция комплексного переменного y и

$$\omega(y_0) = z_0, \quad \omega'(y_0) = q_0.$$

Тогда в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) дифференциальное уравнение (8) имеет ровно одно решение $z = \psi(x, y)$, которое

¹⁾ См. J. Horn, Partielle Differentialgleichungen, Berlin und Leipzig, 1929, стр. 161—166; O. Реггон, Math. Zeitschrift 5 (1919), стр. 154—160.

в этой окрестности является аналитической функцией, т. е. представляется абсолютно сходящимся рядом

$$\psi(x, y) = \sum_{\mu, v} c_{\mu, v} (x - x_0)^\mu (y - y_0)^v,$$

и которое при $x = x_0$ принимает значение

$$\psi(x_0, y) = \omega(y). \quad (12)$$

Коэффициенты $c_{\mu, v}$ искомой функции z можно записать так:

$$c_{\mu, v} = \frac{1}{\mu! v!} \left(\frac{\partial^{\mu+v} z}{\partial x^\mu \partial y^v} \right)_0, \quad \mu, v = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

где индекс «0» означает, что производная вычислена при значениях $x = x_0$, $y = y_0$. Но из начального условия (12) следует, что

$$\left(\frac{\partial^v z}{\partial y^v} \right)_0 = \omega^{(v)}(y_0),$$

а из уравнения (8) находим:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_0 = f(x_0, y_0, z_0, q_0),$$

или, после v -кратного дифференцирования по y ,

$$\left(\frac{\partial^{1+v} z}{\partial x \partial y^v} \right)_0 = \left(\frac{\partial^v}{\partial y^v} f \left(x, y, z(x, y), \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) \right)_0, \quad v = 1, 2, \dots$$

Дифференцируя соотношение (8) по x и затем v раз по y , получаем $\left(\frac{\partial^{2+v} z}{\partial x^2 \partial y^v} \right)_0$, $v = 0, 1, 2, \dots$ Таким образом, мы можем получить значения всех производных функций z в точке (x_0, y_0) и тем самым найти все коэффициенты $c_{\mu, v}$ разложения интеграла $\psi(x, y)$.

10.5. Более общие разложения в ряды¹⁾. Переменные теперь снова предполагаются действительными. Пусть дано дифференциальное уравнение, разрешенное относительно одной из производных:

$$p = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} f_{\mu, v}(x, y) z^\mu q^v; \quad (13)$$

отыскивается интеграл этого уравнения, который при $x = 0$ равен данной функции $\omega(y)$.

Формально процесс решения проходит так. Подставим

$$z = \sum_{\rho=1}^{\infty} \varphi_\rho(x, y) \quad (14)$$

¹⁾ См. O. Perron, Sitzungsberichte, Heidelberg, 1920, Abh. 9.

в дифференциальное уравнение (13); при этом пусть

$$\varphi_1(0, y) = \omega(y); \quad \varphi_\rho(0, y) = 0 \quad \text{для } \rho \geq 2; \quad (15)$$

тогда функция z заведомо удовлетворяет начальному условию. После подстановки (14) в (13) и проведения необходимых выкладок получаем:

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x} = \sum \frac{\mu!}{\mu_1! \dots \mu_r!} \frac{v!}{v_1! \dots v_s!} f_{\mu, v} \varphi_1^{\mu_1} \dots \varphi_r^{\mu_r} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \right)^{v_1} \dots \left(\frac{\partial \varphi_s}{\partial y} \right)^{v_s}. \quad (16)$$

Здесь суммирование производится по всем числам $\mu \geq 0$, $v \geq 0$, $\mu_1 + \dots + \mu_r = \mu$, $v_1 + \dots + v_s = v$. Правая часть уравнения (16) после упорядочения приводится к следующему виду:

$$\sum_{\rho=1}^{\infty} \frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x} = \sum_{\rho=1}^{\infty} \omega_\rho(x, y), \quad (17)$$

при этом в каждом слагаемом ω_ρ должно быть собрано конечное или бесконечное число членов правой части уравнения (16) таким образом, чтобы ω_1 не содержало функций φ_ρ , а каждое ω_ρ содержит лишь функции $\varphi_1, \dots, \varphi_{\rho-1}$.

Уравнение (17) (а вместе с ним и уравнение (13)) формально выполняется, когда функции φ_ρ выбраны так, что

$$\frac{\partial \varphi_\rho}{\partial x} = \omega_\rho, \quad \rho = 1, 2, \dots$$

Прежде всего имеем:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \omega_1(x, y), \quad \text{где } \omega_1(x, y) = f_{00}(x, y),$$

откуда, в силу (15), получается:

$$\varphi_1(x, y) = \int_0^x f_{00}(x, y) dx + \omega(y).$$

Теперь на основании (16) может быть найдена функция ω_2 ; она зависит только от $\varphi_1(x, y)$ и потому дает возможность определить

$$\varphi_2 = \int_0^x \omega_2 dx.$$

Далее может быть вычислена ω_3 ; так как она зависит, самое большое, от уже известных теперь φ_1, φ_2 , то можно найти

$$\varphi_3 = \int_0^x \omega_3 dx.$$

Продолжая таким образом, мы получим формальное решение (14).

Этот метод приводит к истинному решению, т. е. ряд (14) равномерно сходится¹⁾ в области

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b \quad (18)$$

и удовлетворяет там уравнению (13), если выполняются следующие условия:

(α) функции $f_{\mu, v}(x, y)$, $F_{\mu, v}(x, y)$ непрерывны в области (18), имеют там непрерывные частные производные любого порядка по y , причем для них выполнены неравенства

$$\left| \frac{\partial^n f_{\mu, v}}{\partial y^n} \right| \leqslant \frac{\partial^n F_{\mu, v}}{\partial y^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

стоящие справа производные растут (или постоянны) монотонно по x при фиксированном y ;

(β) функции $\omega(y)$, $\Omega(y)$ непрерывно дифференцируемы сколько угодно раз при $0 \leqslant y \leqslant b$ и удовлетворяют неравенству

$$|\omega^{(n)}(y)| \leqslant \Omega^{(n)}(y) \quad (n = 0, 1, 2, \dots);$$

(γ) дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} F_{\mu, v}(x, y) z^{\mu} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^v$$

имеет в области (18) интеграл $z(x, y)$ с непрерывными частными производными

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial z}{\partial x} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

удовлетворяющий условиям

$$z(0, y) = \Omega(y), \quad \frac{\partial^n z}{\partial y^n} \geqslant 0, \quad \frac{\partial^n}{\partial y^n} \frac{\partial z}{\partial x} \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

В частности, для специального вида функций

$$F_{\mu, v}(x, y) = \binom{\mu + v}{v} \frac{Ab^v}{c^{\mu+v} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\mu+1}}$$

¹⁾ Выполняются также равенства

$$\frac{\partial^n z}{\partial y^n} = \sum_{\rho} \frac{\partial^n \varphi_{\rho}}{\partial y^n}, \quad \frac{\partial^{n+1} z}{\partial y^n \partial x} = \sum_{\rho} \frac{\partial^{n+1} \varphi_{\rho}}{\partial y^n \partial x};$$

стоящие в их правых частях ряды сходятся также равномерно.

получаем: если коэффициенты $f_{\mu, \nu}(x, y)$ непрерывны и области (18), имеют там непрерывные частные производные любого порядка по y и если, кроме того, для $c > 0$ и $A > 0$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{\partial^n f_{\mu, \nu}}{\partial y^n} \right| \leq \binom{\mu + \nu}{n} \frac{An! b^{\nu - n}}{c^{\mu + \nu} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^{\mu + n + 1}},$$

то описанный выше метод дает при $\omega(y) \equiv 0$ интеграл (14), обращающийся в нуль при $x = 0$ и существующий в области

$$0 \leq x \leq a(y), \quad a(y) = \min \left\{ a, \frac{c}{8A} \left(1 - \frac{y}{b}\right)^2 \right\}; \quad 0 \leq y < b.$$

Упомянутые выше предположения выполняются, в частности, если для коэффициентов $f_{\mu, \nu}$ существует разложение

$$f_{\mu, \nu}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{\mu, \nu}^{(k)}(x) y^k, \quad |f_{\mu, \nu}^{(k)}| \leq \binom{\mu + \nu}{k} \binom{\mu + k}{k} \frac{Ab^{\nu - k}}{c^{\mu + k}}.$$

Пример. $p = q^2$; $z(0, y) = e^y$.

Если искать интеграл z в виде

$$z = \sum_{v=0}^{\infty} \omega_v(y) x^v; \quad \omega_0 = e^y,$$

то получается ряд

$$z = \sum_{v=0}^{\infty} c_v x^v e^{(v+1)y}, \quad (19)$$

здесь

$$c_0 = c_1 = 1, \quad c_2 = 2, \quad c_3 = \frac{16}{3}, \quad c_4 = \frac{50}{3}, \dots,$$

$$(v+1)c_{v+1} + 1 = \sum_{r+s=v} (r+1)(s+1) c_r c_s.$$

Ряд (19) сходится по крайней мере для $|xe^y| < \frac{1}{8}$.

10.6. Методы решения.

(а) Если никаких начальных условий не дано, то для отыскания интегралов уравнения (1) можно применить метод Лагранжа, который состоит в том, чтобы попытаться получить нетривиальный первый интеграл (см. п. 9.1) и действовать дальше, согласно п. 9.3, или, если удается получить два таких первых интеграла, согласно п. 9.2. На этом пути можно получить даже полный интеграл. Для уравнений специальных видов можно использовать методы, излагаемые в § 11.

(б) Если требуется найти поверхность, проходящую через данную начальную кривую или через данную начальную полосу, то поступают следующим образом:

- (а) если известен полный интеграл, то действуют согласно п. 9.6;
- (б) можно использовать метод п. 10.2; при известных условиях можно ограничиться приближенным решением характеристических уравнений и получить искомую интегральную поверхность приближенно;
- (в) особые интегралы находятся в соответствии с п. 8.8 (б);
- (г) приближенное решение может быть найдено также использованием развитого в пп. 10.4, 10.5 метода разложения в ряды.

§ 11. Решение частных видов нелинейных уравнений с двумя независимыми переменными

11.1. $F(x, y, z, p) = 0$ и $F(x, y, z, q) = 0$. С первым уравнением можно обращаться как с обыкновенным дифференциальным уравнением¹⁾ с независимой переменной x и параметром y . Вместо постоянной интегрирования в этом случае в ответе появится произвольная непрерывно дифференцируемая функция от y . Второе уравнение рассматривается аналогично.

11.2. $F(p, q) = 0$. Для каждой пары чисел a, b , которые удовлетворяют уравнению $F(a, b) = 0$, плоскость

$$z = ax + by + c$$

при любом c является интегралом. Если функция F дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $p = a_0, q = b_0$ и если, кроме того, $|F_p| + |F_q| > 0$, то эти плоскости для всех значений a, b , лежащих достаточно близко к точке (a_0, b_0) , составляют полный интеграл рассматриваемого дифференциального уравнения.

Из характеристических уравнений

$x'(t) = F_p, \quad y'(t) = F_q, \quad z'(t) = pF_p + qF_q, \quad p'(t) = 0, \quad q'(t) = 0$
находим характеристику, проходящую при $t = 0$ через плоскостной элемент x_0, y_0, z_0, a, b :

$$\left. \begin{aligned} p &= a, & q &= b, \\ x - x_0 &= F_p(a, b)t, & y - y_0 &= F_q(a, b)t, \\ z - z_0 &= (aF_p + bF_q)t. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Если $|F_p(a, b)| + |F_q(a, b)| > 0$, то эта характеристика — прямая

¹⁾ [Не разрешенным относительно производной; см., например, Степанов, стр. 104—139. — Прим. ред.]

линия, принадлежащая плоскости

$$z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0).$$

Таким образом, регулярными интегральными поверхностями являются все непрерывно дифференцируемые поверхности $z = \psi(x, y)$, которые могут быть построены из таких прямых (1), причем выполнено дополнительное условие $F(a, b) = 0$. Эти интегральные поверхности — развертывающиеся поверхности. Если ограничиться важды непрерывно дифференцируемыми интегральными поверхностями, то мы не получим никаких других регулярных поверхностей.

Наконец, надо еще исследовать, имеются ли особые интегральные поверхности, содержащие отдельные особые элементы.

11.3. $F(z, p, q) = 0$. Для произвольных $a, b, |a| + |b| > 0$, сделаем подстановку:

$$z = \xi(\xi), \quad \xi = ax + by.$$

Тогда $p = a\xi'(\xi)$, $q = b\xi'(\xi)$, и, таким образом, из дифференциального уравнения с частными производными получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(\xi, a\xi', b\xi') = 0.$$

Разрешим его относительно ξ' : $\xi' = f(\xi)$; тогда при $f \neq 0$

$$\int \frac{d\xi}{f(\xi)} = \xi + c = ax + by + c$$

— полный интеграл исходного уравнения.

Получающиеся решения — цилиндрические поверхности, образующие которых параллельны плоскости x, y , поскольку решение z есть функция только $ax + by$.

Пример. $9(p^2z + q^2) = 4$.

Указанная выше подстановка дает:

$$3\xi' \sqrt{a^2\xi + b^2} = \pm 2,$$

откуда получаем:

$$(a^2\xi + b^2)^{\frac{3}{2}} = \pm a^2(\xi + c) \quad \text{при } a \neq 0,$$

$$\xi = \pm \frac{2\xi}{3b} + c \quad \text{при } a = 0,$$

и, следовательно, решения имеют вид соответственно

$$(a^2z + b^2)^3 = a^4(ax + by + c)^2, \quad z = \pm \frac{2}{3}y + c.$$

11.4. $p = f(x, q)$ и $q = g(y, p)$. Если в первом уравнении рассматривать q как параметр: $q = a$, то получится полный интеграл

$$z = \int f(x, a) dx + ay + b.$$

Аналогично полный интеграл второго уравнения записывается так

$$z = \int g(y, a) dy + ax + b.$$

Эти полные интегралы являются цилиндрами с образующими параллельными плоскостями yz и xz соответственно.

11.5. $f(x, p) = g(y, q)$ и $F[f(x, p\varphi(z)), g(y, q\varphi(z))] = 0$. Эти дифференциальные уравнения — с разделяющимися переменными.

При решении первого дифференциального уравнения полагают:

$$f(x, p) = a, \quad g(y, q) = a$$

для любой постоянной a и решают эту систему дифференциальных уравнений; получается полный интеграл исходного уравнения. Другая форма этого метода: выполняется подстановка $z = u(x) + v(y)$; тогда для u, v получают обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f(x, u') = a, \quad g(y, v') = a.$$

Метод п. 9.3 приводит к такому же результату.

О решении второго, более общего дифференциального уравнения см. п. 13.3.

11.6. $f(x, p) + g(y, q) = z$. После подстановки $z = u(x) + v(y)$ получают:

$$f(x, u'(x)) - u(x) = v(y) - g(y, v'(y)).$$

Решив обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f(x, u') - u = a, \quad v - g(y, v') = a$$

с произвольным a , мы получим для данных дифференциальных уравнений полные интегралы.

11.7. $p = f\left(\frac{y}{x}, q\right)$ и $F\left(\frac{y}{x}, p, q, xp + yq - z\right) = 0$. Первое из этих дифференциальных уравнений — частный случай второго.

Из характеристических уравнений следует:

$$xp'(t) + yq'(t) = 0$$

и, далее,

$$\frac{d}{dt}(z - xp - yq) = 0,$$

т. е. $z - xp - yq$ — первый интеграл. Поэтому, согласно п. 9.3, получают интегралы данных дифференциальных уравнений, разрешая оба уравнения

$$xp + yq = z + a, \quad F\left(\frac{y}{x}, p, q, a\right) = 0$$

относительно p, q и вычисляя по ним z .

11.8. $F(xp + yq, z, p, q) = 0$. Из характеристических уравнений следует, что q/p — первый интеграл. Следовательно, согласно п. 9.3, получаем полный интеграл данного дифференциального уравнения, решая систему дифференциальных уравнений

$$F(p(x + ay), z, p, ap) = 0, \quad q = ap.$$

11.9. $p^2 + q^2 = f(x^2 + y^2, yp - xq)$. Из характеристических уравнений вытекает, что $yp - xq$ — первый интеграл. В силу п. 9.3, полагая $yp - xq = a$, можно определить z из соотношений

$$p = \frac{ay}{r} + \frac{xR}{r}, \quad q = -\frac{ax}{r} + \frac{yR}{r},$$

где

$$r = x^2 + y^2, \quad R^2 = rf(r, a) - a^2.$$

Отсюда получается полный интеграл

$$z = -a \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \int \frac{R}{2r} dr + b.$$

Рассматриваемое дифференциальное уравнение можно также преобразовать к полярным координатам ρ, ϑ , положив

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \quad x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta.$$

Тогда получается дифференциальное уравнение

$$\zeta_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \zeta_\vartheta^2 = f(\rho^2, -\zeta_\vartheta)$$

типа 11.4; отсюда при $\zeta_\vartheta = -a$ находим:

$$\zeta = -a\vartheta \pm \int \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho^2 f(\rho^2, a) - a^2} d\rho + b.$$

11.10. $F[f(x)p, g(y)q, z] = 0$. После замены в этом уравнении переменных

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \eta = \int \frac{dy}{g(y)} \quad (2)$$

приходим к дифференциальному уравнению типа 11.3:

$$F(\xi, \eta, \zeta) = 0.$$

$$(a) \quad \sum_{v=1}^n [f(x)p]^{\alpha_v} [g(y)q]^{\beta_v} h_v(z) = 0.$$

Заменой переменных (2) это уравнение приводится к виду

$$\sum_{v=1}^n \xi_v^{\alpha_v} \eta^{\beta_v} h_v(\zeta) = 0.$$

$$\text{Пример. } \left(\frac{p}{\cos^2 x} \right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y} \right)^b Z^c = Z^{\frac{ac}{a-b}}.$$

Замена переменных

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x, \quad \eta = \frac{y}{2} - \frac{1}{4} \sin 2y$$

приводит к уравнению

$$\xi_x^a + \xi_y^b \zeta^c = \zeta^{\frac{ac}{a-b}}. \quad (3)$$

$$(6) \quad \sum_{v=1}^n a_v p^{\alpha_v} q^{\beta_v} z^{\gamma_v} = 0, \quad (1) \quad (\alpha_v + \beta_v + \gamma_v) \lambda - (\alpha_v + \beta_v) = \delta$$

для фиксированных (не зависящих от v) чисел λ и δ .

Это — однородное уравнение. Замена $z = u^\lambda$ в случае, если все $a_v = \text{const}$, приводит к уравнению типа 11.2:

$$\sum_{v=1}^n a_v \lambda^{\alpha_v + \beta_v} u_x^{\alpha_v} u_y^{\beta_v} = 0.$$

Если же $a_v = a_v(x, y)$, то та же замена приводит к уравнению типа 11.13.

Пример. Написанное выше дифференциальное уравнение (3) как раз рассматриваемого типа. Для $\lambda = \frac{a-b}{a-b-c}$, $\delta = \frac{ac}{a-b-c}$ и $\zeta = u^\lambda$ получаем:

$$\lambda^a u_\xi^a + \lambda^b u_\eta^b = 1.$$

(в) Если для дифференциального уравнения (б) имеет место условие: $\alpha_v + \beta_v + \gamma_v = \delta$ — фиксированное (не зависящее от v) число, то это уравнение подстановкой $z = e^u$ приводится к типу 11.2:

$$\sum a_v u_x^{\alpha_v} u_y^{\beta_v} = 0.$$

11.11. $f(p, q) = xp + yq$; f однородна по p, q . Пусть $f(p, q)$ — однородная функция n -й степени.

¹⁾ Обобщением этого уравнения является случай 13.4.

Два последних характеристических уравнения § 8, (6) данного дифференциального уравнения имеют вид $p' = p$, $q' = q$. Отсюда следует, что $\frac{q}{p}$ — первый интеграл. Для $q = ap$ из дифференциального уравнения получается соотношение

$$f(p, ap) = xp + ayp,$$

т. е.

$$p^{n-1}f(1, a) = x + ay,$$

и, следовательно,

$$q = ap, \quad p = \left(\frac{x + ay}{f(1, a)}\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Таким образом,

$$z = \frac{n-1}{n} \left(\frac{x + ay}{f(1, a)}\right)^{\frac{n}{n-1}} f(1, a) + b$$

— полный интеграл.

11.12. $z = xp + yq + f(p, q)$ и $F(p, q, z - xp - yq) = 0$.
Это — дифференциальные уравнения Клеро¹⁾.

Если функция $F(u, v, w)$ определена в точке (a, b, c) и равна в ней нулю: $F(a, b, c) = 0$, то $z = ax + by + c$, очевидно, является решением второго дифференциального уравнения.

Если второе дифференциальное уравнение разрешить относительно $z - xp - yq$, то тем самым оно сводится к первому дифференциальному уравнению.

Дифференциальное уравнение

$$z = xp + yq + f(p, q) \quad (4)$$

имеет для каждого двух чисел a и b , таких, что значение $f(a, b)$ определено, интеграл

$$z = ax + by + f(a, b). \quad (5)$$

Если функция f дважды непрерывно дифференцируема, то эти плоскости составляют полный интеграл.

(а) Если при фиксированном a производная $f_{vv}(a, v) \neq 0$ в некотором интервале $v_1 < v < v_2$, то

$$y = -f_v(a, v), \quad z = ax + vy + f(a, v)$$

— параметрическое представление интеграла. Если при фиксированном b производная $f_{uu}(u, b) \neq 0$ в некотором интервале $u_1 < u < u_2$, то интеграл имеет вид

$$x = -f_u(u, b), \quad z = ux + by + f(u, b).$$

¹⁾ [См. Курант, стр. 102—103. — Прим. ред.]

(б) Пусть функция $f(u, v)$ непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(u, v)$; пусть, далее,

$$\frac{\partial(f_u, f_v)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

и область $\mathfrak{G}(u, v)$ однозначно отображается на область $\bar{\mathfrak{G}}(x, y)$ функциями

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v).$$

Тогда дифференциальное уравнение (4) имеет в области $\bar{\mathfrak{G}}(x, y)$ нелинейный интеграл, который параметрически задается уравнениями.

$$x = -f_u(u, v), \quad y = -f_v(u, v), \quad z = ux + vy + f(u, v)$$

(особый интеграл). Он, однако, иногда не существует (см. пример, ч. II, 6.7).

Каждая развертывающаяся поверхность, имеющая на каждой своей прямой точку касания с особой интегральной поверхностью, является интегральной поверхностью. Поверхность, проходящую через данную начальную кривую, геометрически получают так: определяют плоскости, которые одновременно касаются начальной кривой и особой поверхности, и затем строят огибающую их поверхность.

11.13. $F(x, y, p, q) = 0$. Характеристические уравнения § 8, (6) без «условия полосы» имеют вид

$$x'(t) = F_p, \quad y'(t) = F_q, \quad p'(t) = -F_x, \quad q'(t) = -F_y. \quad (6)$$

Это — так называемые канонические уравнения (см. п. 12.10); они образуют разрешимую систему. Если решение этих уравнений (6) найдено, то из условия полосы

$$z'(t) = p(t)x'(t) + q(t)y'(t)$$

можно затем получить недостающую функцию $z(t)$ квадратурами.

Если известно однопараметрическое семейство интегралов $z = \psi(x, y, a)$, которые дважды непрерывно дифференцируемы по всем трем аргументам, и если, кроме того, $|\psi_{ax}| + |\psi_{ay}| > 0$, то функция $z = \psi(x, y, a) + b$ является полным интегралом, а характеристические кривые $x = x(t)$, $y = y(t)$ удовлетворяют уравнению

$$\psi = \text{const.} \quad (7)$$

Свойство (7) находит применение при решении уравнений движения механики (см. ч. II, 6.65).

11.14. $F(x, y, z, p, q) = 0$. Преобразование Лежандра¹⁾. Пусть функция $z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y)$, пусть

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \not\equiv 0 \text{ ни в какой подобласти области } \mathfrak{G}, \quad (8)$$

и пусть область $\mathfrak{G}(X, Y)$ взаимно однозначно отображается функциями

$$X = z_x(x, y), \quad Y = z_y(x, y) \quad (9)$$

на область $\bar{\mathfrak{G}}(X, Y)$. Если сделать замену

$$Z(X, Y) = xz_x + yz_y - z, \quad (10)$$

то Z по-прежнему будет иметь в области $\bar{\mathfrak{G}}$ непрерывные частные производные второго порядка. Преобразование

$$x = Z_X, \quad y = Z_Y, \quad z = XZ_X + YZ_Y - Z \quad (11)$$

называется *преобразованием Лежандра* (*дуальным преобразованием*).

С его помощью (поскольку для интеграла выполняются указанные предположения) дифференциальное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (12)$$

переходит в уравнение

$$F(Z_X, Z_Y, XZ_X + YZ_Y - Z, X, Y) = 0, \quad (13)$$

которое иногда проще первоначального дифференциального уравнения (12). Если $Z = Z(X, Y)$ — интеграл уравнения (13), то соотношения (11) дают параметрическое представление соответствующего интеграла $z(x, y)$ дифференциального уравнения (12).

При преобразовании (11) некоторые интегралы могут пропадать. Например, в дифференциальном уравнении Клеро (4) пропадают плоские интегральные поверхности (5), потому что для них не выполняется неравенство (8). По этой же причине пропадают²⁾ развертывающиеся поверхности в п. 11.12 (а). Напротив, в п. 11.12 (б) преобразование Лежандра применимо. Преобразованное уравнение

$$Z = -f(X, Y)$$

уже не является дифференциальным, однако, непосредственно дает решение. Переходя к первоначальным переменным, получаем решение дифференциального уравнения Клеро в параметрическом виде

$$x = -f_X(X, Y), \quad y = -f_Y(X, Y), \quad z = xX + yY + f(X, Y),$$

совпадающее с указанным в п. 11.12 (б).

¹⁾ [См. Курант, стр. 43—49. — Прим. ред.]

²⁾ О том, как получать интегралы, теряющиеся при этом методе решения, см. ч. II, 6.36.

11.15. $F(x, y, z, p, q) = 0$. Преобразование Эйлера. Пусть функция $z(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(x, y)$, пусть $z_{xx} \neq 0$, и пусть область $\mathfrak{G}(x, y)$ может быть посредством взаимно однозначного преобразования

$$X = z_x(x, y), \quad Y = y$$

отображена на область $\bar{\mathfrak{G}}(X, Y)$. Определим функцию

$$Z(X, Y) = xz_x - z;$$

она дважды непрерывно дифференцируема в области $\bar{\mathfrak{G}}$. Преобразование

$$X = z_x, \quad Y = y, \quad Z = xz_x - z, \quad Z_Y = -z_y$$

и обратное ему преобразование

$$x = Z_X, \quad y = Y, \quad z = XZ_X - Z, \quad z_y = -Z_Y$$

называются *преобразованием Эйлера*.

С помощью этого преобразования дифференциальное уравнение

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

переходит (коль скоро интегралы удовлетворяют указанным предположениям) в дифференциальное уравнение

$$F(Z_X, Y, XZ_X - Z, X, -Z_Y) = 0,$$

которое иногда проще первоначального.

Если это преобразование применить к дифференциальному уравнению Клеро (4), то плоские интегральные поверхности (5) пропадают, потому что для них не выполняется неравенство $z_{xx} \neq 0$ (или $z_{yy} \neq 0$). Напротив, преобразование Эйлера в п. 11.12 (а) применимо и переводит уравнение Клеро в дифференциальное уравнение

$$Z = YZ_Y - f(X, -Z_Y),$$

которое может быть рассмотрено как обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром X и которое имеет решение

$$Z = -bY - f(X, b),$$

приводящее к выражению

$$z = xX + bY + f(X, b), \quad x = -f_X(X, b),$$

для интеграла уравнения Клеро, тождественному со вторым из решений, указанных в п. 11.12 (а).

11.16. $F(xp - z, y, p, q) = 0$. Подстановка $z = Cx + u(y)$ приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$F(-u(y), y, C, u'(y)) = 0$$

для функции $u(y)$.

Для решений z , удовлетворяющих условию $z_{xx} \neq 0$, дифференциальное уравнение переводится преобразованием Эйлера в уравнение

$$F(Z, Y, X, -Z_Y) = 0$$

типа 11.1.

11.17. $xf(y, p, xp - z) + qg(y, p, xp - z) = h(y, p, xp - z)$.

Преобразованием Эйлера из данного нелинейного дифференциального уравнения получают квазилинейное уравнение

$$f(Y, X, Z)Z_X - g(Y, X, Z)Z_Y = h(Y, X, Z).$$

11.18. $qf(u) = xp - yq; xf(u) = xp - yq; xf(u, p, q) + yg(u, p, q) = h(u, p, q)$, где $u = xp + yq - z$. Преобразованием Лежандра из этих нелинейных дифференциальных уравнений получают квазилинейные уравнения:

$$Yf(Z) - XZ_X + YZ_Y = 0,$$

$$YZ_Xf(Z) - XZ_X + YZ_Y = 0,$$

$$f(Z, X, Y)Z_X + g(Z, X, Y)Z_Y = h(Z, X, Y).$$

ГЛАВА III

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С n НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 12. Нелинейное уравнение с n независимыми переменными: $F(r, z, p) = 0$.

12.1. Общие понятия, обозначения и терминология. *Общее (нелинейное) дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для одной неизвестной функции $z = z(x_1, \dots, x_n)$ в независимых переменных имеет вид*

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (1)$$

а уравнение, разрешенное относительно одной из производных, записывается в форме

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f\left(x, y_1, \dots, y_n, z, \frac{\partial z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial y_n}\right). \quad (2)$$

С помощью сокращенных обозначений

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad p_v = \frac{\partial z}{\partial x_v}, \quad q_v = \frac{\partial z}{\partial y_v},$$

а также r для вектора с компонентами x_1, \dots, x_n , y — для y_1, \dots, y_n , p — для p_1, \dots, p_n и q — для q_1, \dots, q_n уравнения (1), (2) можно записать короче:

$$F(r, z, p) = 0 \quad (1a)$$

и

$$p = f(x, y, z, q) = 0. \quad (2a)$$

О функциях F и f предполагается, что они в рассматриваемой области своих $2n+1$ (соответственно $2n+2$) переменных непрерывно дифференцируемы.

Под *плоскостным элементом* здесь понимается система $2n+1$ чисел

$$x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n \text{ или, короче, } r, z, p; \quad (3)$$

первые $n+1$ чисел называются *носителем* плоскостного элемента, последние n чисел называют *направляющими коэффициентами* (ср. с п. 8.2).

Плоскостной элемент (3) называется *обыкновенным (регулярным, правильным)* или *особым (нерегулярным)* по отношению к дифференциальному уравнению (1), в зависимости от того (ср. с п. 8.6), будет ли в точке (r, z, p) $\sum_{v=1}^n |F_{p_v}| > 0$ или $F_{p_1} = \dots = F_{p_n} = 0$.

Очевидно, что для дифференциального уравнения (2) имеются только правильные плоскостные элементы.

Плоскостной элемент (3) называется *интегральным элементом* уравнения (1), если он (ср. с п. 8.7) удовлетворяет уравнению (1а). Функция $z = \psi(x, y)$ есть *интеграл* уравнения (1), если она непрерывно дифференцируема и если все плоскостные элементы, которые можно с ее помощью сконструировать,

$$x_1, \dots, x_n, \psi, \psi_{x_1}, \dots, \psi_{x_n} \quad (4)$$

или, короче¹⁾,

$$r, \psi, \operatorname{grad}_x \psi \quad (4a)$$

являются интегральными элементами уравнения (1).

Об определениях *частного интеграла, общего интеграла* см. п. 8.8.

Интеграл $z = \psi(r)$ уравнения (1) называется *особым*, если он содержит только особые интегральные элементы поверхности (4), т. е. если величины (4) одновременно удовлетворяют $n+1$ уравнению²⁾

$$F = 0, \quad F_{p_1} = 0, \dots, \quad F_{p_n} = 0. \quad (5)$$

Подставим функцию ψ в уравнение (1) и продифференцируем получившееся соотношение частным образом по x_v ; тогда получится, что (дважды непрерывно дифференцируемый) особый интеграл, кроме $n+1$ уравнения (5), должен также удовлетворять еще n уравнениям

$$F_{x_v} + p_v F_z = 0, \quad v = 1, \dots, n. \quad (6)$$

Следовательно, особые интегралы дифференциального уравнения (1) можно получить, найдя непрерывно дифференцируемые функции $z = \psi$, удовлетворяющие уравнениям (5), или дважды непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие уравнениям (5), (6).

¹⁾ [Если дана функция $F(x, y)$, то $\operatorname{grad}_x F = \{F_{x_1}(x, y), \dots, F_{x_n}(x, y)\}$ ее вектор-градиент по x . — Прим. ред.]

²⁾ Отсюда ясно, что для дифференциального уравнения (2) особых интегралов не существует.

Полный интеграл уравнения (1) есть n -параметрическое семейство интегралов

$$z = \psi(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) = \psi(\mathbf{r}, \mathbf{a}), \quad (7)$$

здесь \mathbf{a} означает вектор с компонентами a_1, \dots, a_n таких, что функция ψ вместе с производными ψ_{x_μ} в некоторой области пространства \mathbf{r}, \mathbf{a} имеет непрерывные частные производные по всем $2n$ аргументам x_v, a_v , и функциональная матрица

$$\frac{\partial (\psi, \psi_{x_1}, \dots, \psi_{x_n})}{\partial (a_1, \dots, a_n)} \quad (8)$$

в каждой точке рассматриваемой области имеет ранг n .

12.2. Характеристические полосы и интегральные поверхности. Под *полосой* (ср. п. 8.3) понимают однопараметрическое семейство плоскостных элементов

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad z = z(t), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t), \quad (9)$$

таких, что эти вектор-функции непрерывно дифференцируемы по t в интервале $\alpha < t < \beta$ и выполняется *условие полосы*¹⁾

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{p}(t) \quad (10)$$

или подробнее

$$\mathbf{z}'(t) = \sum_{v=1}^n x'_v(t) p_v(t). \quad (10a)$$

Полоса называется *интегральной полосой* дифференциального уравнения (1), если она (ср. с п. 8.7) состоит только из интегральных элементов.

Характеристической полосой (*характеристикой*) дифференциального уравнения (1) называется (ср. с пп. 8.4, 8.5) полоса (9), которая удовлетворяет *характеристическим уравнениям* (*характеристической системе*)

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{P}, \quad \mathbf{z}'(t) = \mathbf{p}\mathbf{P}, \quad \mathbf{p}'(t) = -\mathbf{X} - \mathbf{F}_z \mathbf{p}; \quad (11)$$

здесь

$$\mathbf{P} = (F_{p_1}, \dots, F_{p_n}) = \text{grad}_{\mathbf{p}} F, \quad \mathbf{X} = (F_{x_1}, \dots, F_{x_n}) = \text{grad}_{\mathbf{x}} F. \quad (12)$$

Первые n этих уравнений образованы по аналогии с § 8, (6); $(n+1)$ -е уравнение есть *условие полосы* (10); последние n уравнений получаются (ср. с п. 8.4) из условия, чтобы полоса (4) принадлежала интегральной поверхности $z = \psi$.

¹⁾ Это условие является необходимым для того, чтобы плоскостной элемент (9) принадлежал некоторой непрерывно дифференцируемой поверхности $z = \psi(\mathbf{r})$. [Символ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ означает скалярное произведение векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . — Прим. ред.]

Для дифференциального уравнения (2) в качестве характеристических уравнений берутся уравнения

$$y'(x) = -Q, \quad z'(x) = f - qQ, \quad q'(x) = Y + f_z q; \quad (13)$$

здесь

$$Q = (f_{q_1}, \dots, f_{q_n}) = \text{grad}_q f, \quad Y = (f_{y_1}, \dots, f_{y_n}) = \text{grad}_y f.$$

(а) Функция $F(r, z, p)$ вдоль каждой характеристической полосы уравнения (1) постоянна; характеристическая полоса является интегральной полосой, если она содержит хотя бы один интегральный элемент (ср. с п. 8.7); функция F есть (очевидный) первый интеграл (ср. с п. 9.1) уравнения (1).

(б) Если $z = \psi(r)$ — дважды непрерывно дифференцируемый в области $\mathfrak{G}(r)$ интеграл уравнения (1) и если

$$r_0, z_0 = \psi(r_0), \quad p_0 = (\text{grad } \psi)_{r=r_0} \quad (14)$$

— произвольный плоскостной элемент этого интеграла, то все характеристические полосы, содержащие этот плоскостной элемент, принадлежат интегральной поверхности, коль скоро точки r этой характеристической полосы принадлежат области $\mathfrak{G}(r)$.

Таким образом, дважды непрерывно дифференцируемые интегральные поверхности могут быть построены из характеристик.

(в) Если $z = \psi(r)$ и $z = \chi(r)$ в области $\mathfrak{G}(r)$ — два интеграла дифференциального уравнения (1) с общим плоскостным элементом (14) и если функции ψ, χ дважды непрерывно дифференцируемы, то все характеристические полосы уравнения (1), содержащие плоскостной элемент (14), одновременно принадлежат обеим интегральным поверхностям, если только точка $r(t)$ принадлежит области \mathfrak{G} .

Если этот общий плоскостной элемент регулярный, то обе интегральные поверхности имеют общую кривую, не вырождающуюся в точку.

12.3. Сведение уравнения к такому, которое содержит лишь производные искомой функции.

(а) Пусть $w = \varphi(r, z)$ — непрерывно дифференцируемая функция $n+1$ независимого переменного x_1, \dots, x_n, z и $z = \psi(r)$ — непрерывно дифференцируемая функция, для которой

$$\varphi(r, \psi(r)) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi_z(r, \psi(r)) \neq 0^1).$$

Если $z = \psi(r)$ — интеграл дифференциального уравнения (1), то из соотношения $\varphi(r, \psi(r)) = 0$ после частного дифференцирования следует:

$$\varphi_{x_v} + \varphi_z \psi_{x_v} = 0, \quad v = 1, \dots, n,$$

¹⁾ Для каждого интеграла $z = \psi$ функция с такими свойствами всегда существует, например, $\varphi = z - \psi$.

т. е. для $z = \psi$ справедливо равенство

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, -\frac{\varphi_{x_1}}{\varphi_z}, \dots, -\frac{\varphi_{x_n}}{\varphi_z}\right) = 0.$$

Если, обратно, $w = \varphi(r, z)$ при $\varphi_z \neq 0$ — интеграл дифференциального уравнения

$$F\left(x_1, \dots, x_n, z, -\frac{w_{x_1}}{w_z}, \dots, -\frac{w_{x_n}}{w_z}\right) = 0 \quad (15)$$

и если равенство $\varphi = 0$ справедливо для непрерывно дифференцируемой функции $z = \psi(r)$, т. е. $\varphi(r, \psi(r)) \equiv 0$, то ψ — интеграл уравнения (1)¹⁾.

Итак, находя интегралы $\varphi(r, z)$ уравнения (15), удовлетворяющие условию $\varphi_z \neq 0$, и разрешая относительно z уравнение $\varphi = 0$, мы получаем интегралы уравнения (1)²⁾.

Дифференциальное уравнение (15) уже больше не содержит саму искомую функцию w .

Пример. $xw_y = z$.

Преобразованное дифференциальное уравнение (15) имеет вид

$$xw_x w_y - zw_z^2 = 0.$$

Из характеристических уравнений получаются первые интегралы: xw_x и yw_y . Следовательно, можно составить инволюционную систему

$$w_x = \frac{A}{x}, \quad w_y = \frac{B}{y}, \quad w_z = \sqrt{\frac{AB}{z}},$$

из которой находим

$$w = A \ln|x| + B \ln|y| + 2\sqrt{ABz} + C.$$

Следовательно, искомые интегралы

$$z = \frac{1}{4AB} (A \ln|x| + B \ln|y| + C)^2.$$

(б) Пусть $u = u(r, t)$ — непрерывно дифференцируемая функция от $n+1$ независимого переменного, удовлетворяющая соотношению

$$u = tu_t + c \quad (c — \text{константа}), \quad (16)$$

и $u_t = z$ — интеграл уравнения (1)³⁾. Тогда функция u удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u_t, \frac{u_{x_1}}{t}, \dots, \frac{u_{x_n}}{t}\right) = 0,$$

¹⁾ Для примера см. п. 5.4.

²⁾ Можно ли этим способом получить все интегралы уравнения (1) — зависит от того, справедлива ли для уравнения (15) теорема существования, в силу которой для каждой непрерывно дифференцируемой функции $z = \psi(r)$ имеется интеграл $w = \varphi(r, z)$ уравнения (15), который обращается в нуль для этих значений.

³⁾ Если $z(r)$ — интеграл уравнения (1), то очевидно, что функция $u = tz(r) + \text{const}$ обладает требуемыми свойствами.

в которое сама функция u не входит¹⁾. Обратно, если u — интеграл этого уравнения и если уравнение (16) имеет непрерывно дифференцируемое решение $t = \chi(r)$, то $z = u_t(r, \chi(r))$ — интеграл уравнения (1).

При мер. Для приведенного в (а) примера преобразованное уравнение выглядит теперь так:

$$xyu_xu_y - t^2u_t = 0.$$

Оно снова имеет первые интегралы xu_x , yu_y . Следовательно, можно составить инволюционную систему

$$u_x = \frac{A}{x}, \quad u_y = \frac{B}{y}, \quad u_t = \frac{AB}{t^2},$$

из которой находим:

$$u = A \ln|x| + B \ln|y| - \frac{AB}{t} + C.$$

Уравнение (16) имеет вид

$$A \ln|x| + B \ln|y| + C = 2 \frac{AB}{t}.$$

Если теперь найденное отсюда t подставить в соотношение $z = u_t = \frac{AB}{t^2}$, то для z снова получается выписанное выше в (а) выражение.

12.4. Представление решения степенным рядом в случае аналитических функций. Если встречающиеся функции и переменные — комплексные, то для дифференциального уравнения (2) имеет место обобщение теоремы п. 10.4.

Пусть в окрестности точки (x_0, y_0, z_0, q_0) задана аналитическая функция $f(x, y, z, q)$ своих $2n+2$ переменных. Пусть далее, $\omega(y)$ — аналитическая функция в окрестности значения y_0 , и пусть

$$z_0 = \omega(y_0), \quad q_0 = (\text{grad } \omega)_{y=y_0}.$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) имеет ровно одно аналитическое решение $z = \psi(x, y)$, которое при $x = x_0$ принимает значение $\psi(x_0, y) = \omega(y)$.

Коэффициенты степенного ряда для ψ могут быть получены применением к ψ обычного метода степенных рядов и приравниванием коэффициентов при соответствующих степенях с учетом начальных условий²⁾.

12.5. Общая теорема существования. Метод характеристик Коши. Для дифференциального уравнения (1) можно доказать общую теорему существования (ср. с п. 10.2) с помощью *метода характеристик*.

¹⁾ Этот метод сведения уравнения (1) к уравнению, не содержащему неизвестной функции, известен под названием *метода Якоби — Майера*.

²⁾ См. О. Реггон, Math. Zeitschrift 5 (1919), стр. 154—160.

*теристик Коши*¹⁾). Для этого полезно обобщить понятие полосы, данное в п. 12.2.

(а) Под *k-мерной полосой* ($k \leq n$) понимается *k*-параметрическое семейство плоскостных элементов

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t_1, \dots, t_k), \quad z = z(t_1, \dots, t_k), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}(t_1, \dots, t_k), \quad (17)$$

которое имеет следующие свойства:

(а) функции \mathbf{r} , z , \mathbf{p} непрерывно дифференцируемы в области $H = H(t_1, \dots, t_k)$;

(б) справедливо условие полосы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_v} = \mathbf{p} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t_v}, \quad v = 1, \dots, k; \quad (18)$$

(γ) матрица

$$\frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (t_1, \dots, t_k)}$$

имеет в каждой точке области H ранг k .

Последнее условие есть выражение того, что полоса действительно *k*-мерна. Условие (18) является необходимым для того, чтобы плоскостные элементы (17) принадлежали непрерывно дифференцируемой поверхности $z = z(\mathbf{r})$. *k*-мерная полоса называется *интегральной k-мерной полосой* уравнения (1), если она содержит только интегральные элементы уравнения (1).

(б) *n*-мерная интегральная полоса определяет («в малом») дважды непрерывно дифференцируемый интеграл уравнения (1). Так как для нее определитель

$$\frac{\partial (x_1, \dots, x_n)}{\partial (t_1, \dots, t_n)} \neq 0,$$

то первые n из уравнений (17) могут быть однозначно разрешены относительно t_1, \dots, t_n в окрестности каждой точки (t_{10}, \dots, t_{n0}) , а потому функция $z(t_1, \dots, t_n)$ превращается в непрерывно дифференцируемую функцию от x_1, \dots, x_n с частными производными p_1, \dots, p_n , которые в свою очередь также непрерывно дифференцируемы (в силу (18)).

Таким образом, для дифференциального уравнения (1) существование интеграла «в малом» вытекает из существования *n*-мерной интегральной полосы.

(в) Пусть функция $F(\mathbf{r}, z, \mathbf{p})$ дважды непрерывно дифференцируема в области $\mathfrak{G}(\mathbf{r}, z, \mathbf{p})$. Пусть, далее,

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad z = z_0(t_1, \dots, t_{n-1}), \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}_0(t_1, \dots, t_{n-1}) \quad (19)$$

¹⁾ [См. Курант, стр. 105—111; Степанов, стр. 406—420.—
Прим. ред.]

— данная $(n - 1)$ -мерная полоса дифференциального уравнения (1), определенная в области $H_{n-1} = H_{n-1}(t_1, \dots, t_{n-1})$; полученные, согласно формулам (19), величины должны принадлежать области \mathfrak{G} . Наконец, пусть определитель

$$\left| \begin{array}{c} F_{p_1}, \dots, F_{p_n}, \\ \frac{\partial x_{01}}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial x_{0n}}{\partial t_1} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \frac{\partial x_{01}}{\partial t_{n-1}}, \dots, \frac{\partial x_{0n}}{\partial t_{n-1}} \end{array} \right| \neq 0; \quad (20)$$

здесь в функции F_{p_y} первой строки подставлены функции (19), а x_{0y} — компоненты вектора $r_0(t_1, \dots, t_n) = (x_{01}, \dots, x_{0n})$.

Так как функция F дважды непрерывно дифференцируема, то правые части характеристических уравнений (11) непрерывно дифференцируемы. Их решение $r(t), z(t), p(t)$, следовательно, однозначно определено начальными значениями r_0, z_0, p_0 , принимаемыми при $t = 0$. Определим, далее, функции (будем писать t_n вместо t):

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{R}(t_1, \dots, t_n) = r(t, r_0(t_1, \dots, t_{n-1}), z_0(t_1, \dots, t_{n-1}), \\ \quad p_0(t_1, \dots, t_{n-1})), \\ \mathcal{Z}(t_1, \dots, t_n) = z(t, r_0(t_1, \dots, t_{n-1}), z_0(t_1, \dots, t_{n-1}), \\ \quad p_0(t_1, \dots, t_{n-1})), \\ \mathcal{P}(t_1, \dots, t_n) = p(t, r_0(t_1, \dots, t_{n-1}), z_0(t_1, \dots, t_{n-1}), \\ \quad p_0(t_1, \dots, t_{n-1})). \end{array} \right\} \quad (21)$$

Эти функции $\mathcal{R}, \mathcal{Z}, \mathcal{P}$ образуют n -мерную интегральную полосу в области $H_n(t_1, \dots, t_n)$, которая совпадает с областью H_{n-1} при $t_n = 0$. Область H_n определена, так как для каждой точки (t_1, \dots, t_{n-1}) из H_{n-1} можно определить интеграл изменения переменной t_n , который содержит значение $t_n = 0$ и в котором существует решение (21) характеристических уравнений (11).

12.6. Частный случай: $p = f(x, y, z, q)$. Если дано дифференциальное уравнение (2), то при надлежащих предположениях можно указать некоторые оценки для области существования решения (ср. с п. 10.3).

(а) Пусть функция $f(x, y, z, q)$ в области

$$|x - \xi| \leq a, \quad y, z, q \text{ — произвольны,} \quad (22)$$

дважды непрерывно дифференцируема по всем $2n+2$ аргументам, и пусть в этой области справедливы оценки

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_x|, |f_{y_v}|, |f_z|, |f_{q_v}| \\ |f_{y_\mu y_v}|, |f_{y_\mu z}|, |f_{y_\mu q_v}|, |f_{zz}|, |f_{zq_v}|, |f_{q_\mu q_v}| \end{array} \right\} \leq A. \quad (23)$$

Пусть, далее, функция $\omega(y)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем y_v и удовлетворяет неравенству

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{v=1}^n |\omega_{y_\mu y_v}| \leq B, \quad \mu = 1, \dots, n. \quad (24)$$

Наконец, пусть определены числа

$$0 < \beta < \frac{1}{A} \ln \left(1 + \frac{\ln 3}{2n(B+1)} \right) \quad \text{и} \quad a = \min(a, \beta). \quad (25)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2) имеет в области

$$|x - \xi| \leq a, \quad y \text{ — произвольно}, \quad (26)$$

ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(x, y)$, который при $x = \xi$ принимает значение

$$\psi(\xi, y) = \omega(y). \quad (27)$$

Доказательство дает одновременно метод для фактического построения интеграла. Находим характеристики дифференциального уравнения (2), т. е. интегральные кривые системы ($v = 1, \dots, n$)

$$y'_v(x) = -f_{q_v}, \quad z'(x) = f - \sum_{\mu=1}^n q_\mu f_{q_\mu}, \quad q'_v(x) = f_{y_v} + q_v f_z,$$

которые при $x = \xi$ проходят через точки

$$(\eta_1, \dots, \eta_n, \omega(\eta_1, \dots, \eta_n), \omega_{\eta_1}, \dots, \omega_{\eta_n}).$$

Эти характеристики существуют для любого η_v в интервале $|x - \xi| \leq a$; обозначим их через

$$y_v = Y_v(x, \eta_1, \dots, \eta_n), \quad z = Z(x, \eta_1, \dots, \eta_n), \\ q_v = Q_v(x, \eta_1, \dots, \eta_n).$$

Можно показать, что первые n из этих уравнений однозначно разрешимы относительно η_v для любого y_v и что это $2n+1$ уравнение дает, таким образом, для искомого интеграла $z = \psi(x, y)$ и его производных $\psi_{y_v} = Q_v$ параметрическое представление (с параметрами η_1, \dots, η_n).

(б) Если f удовлетворяет предположениям не во всей области (22), а, например, в конечном кубе, то можно поступить, как намечено в п. 10.3 (б)¹⁾.

(в) Сделанные в (а) предположения о функциях f и ω могут быть ослаблены²⁾.

(г) Если функции f , ω зависят еще от параметров λ_μ , $\mu = 1, \dots, m$, то можно доказать следующее³⁾.

Пусть функция⁴⁾ $f(x, y, z, q, \lambda)$ в области⁵⁾ $|x - \xi| \leq a$; y, z, q — любые; $\Lambda_\mu \leq \lambda_\mu \leq \Lambda_\mu^*$, $k \geq 1$ раз непрерывно дифференцируема по всем $2n + m + 2$ аргументам x, y, z, q, λ . Далее, пусть выполнено условие (23), и в области

$$y — \text{любое}; \quad \Lambda_\mu \leq \lambda_\mu \leq \Lambda_\mu^* \quad (28)$$

функция $\omega(y, \lambda)$ k раз непрерывно дифференцируема по y, λ . Наконец, пусть справедливо неравенство (24) и числа α, β выбраны согласно (25).

Тогда дифференциальное уравнение

$$p = f(x, y, z, q, \lambda)$$

имеет в области (26) при данном λ ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(x, y, \lambda)$, который при $x = \xi$ принимает значение $\psi(\xi, y, \lambda) = \omega(y, \lambda)$. Функция $\psi(x, y, \lambda)$ в области

$$|x - \xi| \leq a; \quad y — \text{любое}; \quad \Lambda_\mu \leq \lambda_\mu \leq \Lambda_\mu \quad (29)$$

k раз непрерывно дифференцируема по всем своим $n + m + 1$ аргументу x, y, z, q .

12.7. Полный интеграл; получение частных интегралов из полного.

(а) Существование полных интегралов⁶⁾. Пусть функция $f(x, y, z, q)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $|x - \xi| \leq a$; y, z, q — любые, и пусть выполняются неравен-

¹⁾ См. T. Ważewski, Annales Soc. Polon **14** (1935), стр. 149—177.

²⁾ См. T. Ważewski, Annales Soc. Polon **14** (1935), стр. 149—177; T. Ważewski, Math. Zeitschrift **43** (1938), стр. 521—532; E. Dingle Math. Zeitschrift **44** (1938), стр. 445—451.

³⁾ См. E. Kamke, Math. Zeitschrift **49** (1943), стр. 256—284.

⁴⁾ В соответствии с принятыми ранее обозначениями λ означает вектор с компонентами $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.

⁵⁾ Здесь, а также в неравенствах (26), (28), (29) знак равенства может быть опущен без всяких дополнительных оговорок.

⁶⁾ См. L. Bieberbach, Theorie der Differentialgleichungen, Berlin, 1930, стр. 301—314.

ства (23). Тогда для любого $b > 0$ найдется $a > 0$ такое, что дифференциальное уравнение (2) в области

$$|x - \xi| \leq a, \quad |y_v| \leq b, \quad v = 1, \dots, n,$$

имеет полный интеграл.

Это следует из п. 12.6 (г), если считать функцию f не зависящей от λ , и положить

$$\omega(y, \lambda) = \lambda_0 + \sum_{v=1}^n \lambda_v y_v.$$

Если $\psi(x, y, \lambda)$ — интеграл, существующий в силу п. 12.6 (г), то в точке $x = \xi$

$$\frac{\partial(\psi, \psi_{y_1}, \dots, \psi_{y_n})}{\partial(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 & \dots & y_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

таким образом, якобиан отличен от нуля также и в некоторой окрестности значения $x = \xi$.

В том случае, когда о функции f известно лишь то, что она в окрестности точки (ξ, y_0, z_0, q_0) дважды непрерывно дифференцируема, также можно доказать, что дифференциальное уравнение (2) в достаточно малой окрестности точки (ξ, y_0) имеет полный интеграл.

Для дифференциального уравнения (1) полный интеграл существует в окрестности каждого регулярного плоскостного элемента, если функция F в этой окрестности дважды непрерывно дифференцируема.

(б) Получение частных интегралов из полного. Пусть $\psi(r, a)$ — полный интеграл дифференциального уравнения (1); здесь $a = (a_1, \dots, a_n)$. Подставим вместо констант a_v непрерывно дифференцируемые функции $a^v(r)$ ¹ и положим²

$$\Psi(r) = \psi(r, a^1(r), \dots, a^n(r)).$$

Тогда

$$\Psi_{x_v} = \psi_{x_v} + \sum_{k=1}^n \psi_{a_k} a_x^k, \quad v = 1, \dots, n.$$

¹) Для нумерации используются верхние индексы, внизу пишется аргумент, по которому производится дифференцирование, например: $a_{x_v}^k = \frac{\partial a^k}{\partial x_v}$.

²) Результат будет справедлив в достаточно малой окрестности некоторой точки; в каждом конкретном примере область допустимых значений функций $a^k(r)$ требует отдельного изучения.

Следовательно, Ψ — интеграл уравнения (1), если

$$\sum_{k=1}^n \psi_{a_k} a_{x_v}^k = 0, \quad v = 1, \dots, n, \quad (30)$$

причем в производные ψ_{a_k} подставлены функции $a_k = a^k(r)$. Таким образом, если выбирать непрерывно дифференцируемые функции $a^k(r)$, удовлетворяющие условию (30), то указанный способ дает нам частные интегралы.

Если для всех $k = 1, 2, \dots, n$

$$\psi_{a_k}(r, a^1(r), \dots, a^n(r)) = 0^1) \quad (31)$$

то Ψ — особый интеграл уравнения (1).

Пусть для m ($m < n$) непрерывно дифференцируемых функций $\Phi^\rho(a)$, $\rho = 1, \dots, m$ и n непрерывно дифференцируемых функций $a^v(r)$, $v = 1, \dots, n$ справедливы равенства

$$\Phi^\rho(a^1, \dots, a^n) = 0, \quad \rho = 1, 2, \dots, m, \quad (32)$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^n \Phi_{a_k}^\rho a_{x_v}^k = 0, \quad v = 1, \dots, n, \quad (33)$$

причем в функции $\Phi_{a_k}^\rho$ подставлены значения $a_k = a^k$. Далее, пусть для m функций $\lambda_\rho(r)$, $\rho = 1, \dots, m$ справедливы равенства

$$\psi_{a_k}(r, a^1, \dots, a^n) = \sum_{\rho=1}^m \lambda_\rho \Phi_{a_k}^\rho, \quad k = 1, \dots, n. \quad (34)$$

Тогда уравнения (30) являются следствиями (33), и, следовательно, функция Ψ есть интеграл уравнения (1).

Практически при данных Φ^ρ исходят из $n+m$ уравнений (32) и (34) для $n+m$ функций a^k , λ_ρ . Если из этих уравнений найдены непрерывно дифференцируемые функции a^k , то их надо только подставить в функцию Ψ вместо аргументов a_k .

Пример. Рассмотрим снова пример п. 9.5 (в):

$$pq = z, \quad \psi = (x-a)(y-b).$$

Пусть $m = 1$ и $\Phi(a, b) = aA + bB$, где A, B — произвольные постоянные, не равные нулю. В этом случае уравнения (32) и (34) имеют вид

$$\alpha A + \beta B = 0, \quad \beta - y = \lambda A, \quad \alpha - x = \lambda B,$$

¹⁾ Условие (31) справедливо, если имеет место равенство (30) и определитель $\frac{\partial(a^1, \dots, a^n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$, однако условие (31) проще, чем это комбинированное условие.

и, следовательно,

$$\alpha = \frac{Ax - By}{2A}; \quad \beta = -\frac{Ax - By}{2B}.$$

Таким образом, интеграл

$$\Psi = \frac{1}{4AB} (Ax + By)^2.$$

(в) О существовании данного интеграла среди интегралов, определенных посредством полного интеграла. Пусть $z = \chi(r)$ — фиксированный интеграл дифференциального уравнения (1). Если для выбранных соответствующим образом непрерывно дифференцируемых функций $\alpha^k(\eta)$ справедливы соотношения

$$\left. \begin{aligned} \psi(r, \alpha^1, \dots, \alpha^n) &= \chi(r), \\ \psi_{x_v}(r, \alpha^1, \dots, \alpha^n) &= \chi_{x_v}(r), \quad v = 1, \dots, n, \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

то этот интеграл находится среди частных интегралов, определяемых методом (б) из полного интеграла $\Psi(r, \alpha)$.

Практически поступают так: из уравнений (35) вычисляют функции α^k и исследуют, выполняется ли для них уравнения (30).

12.8. Метод Якоби¹⁾. Пусть F^1 — левая часть дифференциального уравнения (1) — дважды непрерывно дифференцируема. Дополним это уравнение «не зависящими» друг от друга уравнениями того же типа

$$F^2 = 0, \dots, F^k = 0$$

до инволюционной системы²⁾ k уравнений. В общем случае получается $k = n$ или $k = n + 1$. (Если z само не входит в систему, то $k = n$.) Эта система строится способом, изложенным в § 14. По сравнению с п. 14.9 (г) в рассматриваемом случае одного дифференциального уравнения (1) нет ничего нового, только изучаемая там первоначальная система m уравнений здесь состоит только из одного уравнения.

Чтобы получить систему k уравнений, разыскивают прежде всего дважды непрерывно дифференцируемую функцию F^2 , которая состоит в инволюции с функцией F^1 , т. е. является решением линейного однородного дифференциального уравнения (см. пп. 9.1 и 14.4)

$$[F^1, Z] = 0,$$

¹⁾ Более подробно см. в § 14.

²⁾ Определение см. в п. 14.1 (б).

или, что то же самое, постоянна вдоль каждой характеристической полосы уравнения (1). Такие функции называются *первыми интегралами* уравнения (1). Их часто удается найти, комбинируя характеристические уравнения, как это всегда пытаются делать при решении дифференциальных уравнений с частными производными. Если при этом удается получить даже больше таких функций: F^2, \dots, F^n , находящихся в инволюции друг к другу, то все эти функции можно использовать для построения инволюционной системы¹⁾.

Если найдены функции F^2, \dots, F^k (где $k = n$ или $k = n + 1$), то каждую функцию F^v для $v \geq 2$ можно заменить через $F^v - A_v$ с произвольными константами A_v . Тогда на основании п. 14.3 получается даже полный интеграл уравнения (1).

12.9. Частный случай: $p = f(x, y, q)$.

(а) Для дифференциального уравнения

$$p = f(x, y, q), \quad (36)$$

в котором y опять означает совокупность y_1, \dots, y_n ; q — совокупность q_1, \dots, q_n ; $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q_v = \frac{\partial z}{\partial y_v}$, а сама искомая функция $z = z(x, y)$ отсутствует, понятие полного интеграла может быть усилено. Именно, под *полным интегралом* здесь понимается интеграл, зависящий от параметров a и $\alpha = (a_1, \dots, a_n)$:

$$z = \psi(x, y, \alpha) + a,$$

который в рассматриваемой области дважды непрерывно дифференцируем по всем $2n+1$ аргументам x, y, α и удовлетворяет неравенству

$$\frac{\partial(\Psi_{y_1}, \dots, \Psi_{y_n})}{\partial(a_1, \dots, a_n)} \neq 0. \quad (37)$$

(б) Если функция $f(x, y, q)$ в окрестности точки (x_0, y_0, q_0) дважды непрерывно дифференцируема, то уравнение (36) имеет в окрестности точки (x_0, y_0) полный интеграл в указанном выше смысле.

Его можно получить следующим путем. Найдем решения характеристической системы уравнения (36) (см. § 12, (13)):

$$y'_v(x) = -f_{q_v}(x, y, q), \quad q'_v(x) = f_{y_v}(x, y, q) \quad (v = 1, \dots, n); \quad (38)$$

$$z'(x) = f - \sum_{v=1}^n q_v f_{q_v}. \quad (39)$$

¹⁾ Если только все они функционально независимы, т. е. выполняются необходимые условия § 14, (21) и (24).

Пусть (\mathbf{b}, \mathbf{a}) — произвольная точка в достаточно малой окрестности точки (y_0, q_0) . Решение уравнения (38), которое для $x = x_0$ принимает значение (\mathbf{b}, \mathbf{a}) , имеет вид

$$y_v = Y_v(x, \mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad q_v = Q_v(x, \mathbf{b}, \mathbf{a}), \quad v = 1, \dots, n. \quad (40)$$

Если положить $z(x_0) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, то из (39) следует, что

$$z = Z(x, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \int_{x_0}^x \left(\sum_{v=1}^n Q_v F_{q_v} - F \right) dx, \quad (41)$$

причем большие буквы F, F_{q_v} означают значения функций f, f_{q_v} после подстановки в них Y_v, Q_v . Разрешая первые n уравнений (40) относительно \mathbf{b} , мы получим (для значений x, y, \mathbf{a} , принадлежащих достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, q_0)) вполне определенную дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\mathbf{b} = \mathbf{B}(x, y, \mathbf{a})$. С ее помощью из (41) находим полный интеграл уравнения (36)

$$z = \psi(x, y, \mathbf{a}) + a = Z(x, \mathbf{B}, \mathbf{a}) + a,$$

для которого $\psi(x_0, y_0, \mathbf{a}) = a + ay$.

(в) Если для дифференциального уравнения (36) найден полный интеграл¹⁾, то решения характеристических уравнений (38) можно получить из него только с помощью дифференцирования и исключения.

Пусть $f(x, y, \mathbf{q})$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности точки (x_0, y_0, q_0) ; пусть $z = \psi(x, y, \mathbf{a}) + a$ в окрестности точки (x_0, y_0, \mathbf{a}_0) — полный интеграл уравнения (36), дважды непрерывно дифференцируемый по x, y, \mathbf{a} , и пусть в точке (x_0, y_0, \mathbf{a}_0) выполняются условия

$$\psi_{y_v} = q_{0v}, \quad v = 1, \dots, n; \quad \frac{\partial(\psi_{y_1}, \dots, \psi_{y_n})}{\partial(a_1, \dots, a_n)} \neq 0.$$

Разрешим уравнения

$$\psi_{a_v}(x, y, \mathbf{a}) = b_v, \quad v = 1, \dots, n \quad (42)$$

относительно y в некоторой окрестности точки $(x_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$, где

$$b_{0v} = \psi_{a_v}(x_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0), \quad v = 1, \dots, n;$$

пусть результат будет $y = Y(x, \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Положим, далее,

$$Q_v(x, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \psi_{y_v}(x, Y, \mathbf{a}).$$

Тогда функции

$$y = Y(x, \mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad q = Q(x, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

¹⁾ Что иногда удается сделать без решения характеристической системы.

являются решениями уравнений (38). Таким образом получаются все интегральные кривые системы (38), проходящие в достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0, q_0) .

12.10. Приложение к механике¹⁾. В механике конечного числа материальных точек характеристические уравнения (38) (называемые *уравнениями Гамильтона* или *каноническими уравнениями*) записываются в виде²⁾

$$\frac{dq_v}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_v}, \quad \frac{dp_v}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_v}, \quad v = 1, \dots, n, \quad (43)$$

где *функция Гамильтона*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$$

— данная функция, а $q_v = q_v(t)$, $p_v = p_v(t)$ — искомые функции. В силу п. 12.9 можно получить решения канонических уравнений из полного интеграла $z = z(q_1, \dots, q_n)$ соответствующего уравнения с частными производными

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \mathcal{H}\left(t, q_1, \dots, q_n, \frac{\partial z}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial q_n}\right) = 0. \quad (44)$$

Это дифференциальное уравнение называется в механике *уравнением Гамильтона — Якоби*, в геометрической оптике — *уравнением эйконала*.

Пример. Пусть материальная точка (x, y) движется в плоскости x, y под действием силы тяготения со стороны массы, закрепленной в начале координат. Движение происходит согласно уравнениям³⁾

$$x''(t) = U_x, \quad y''(t) = U_y, \quad \text{где} \quad U = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

С помощью функции Гамильтона

$$\mathcal{H}(x, y, p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - U(x, y)$$

эту систему можно свести к канонической системе

$$x'(t) = \mathcal{H}_p, \quad y'(t) = \mathcal{H}_q, \quad p'(t) = -\mathcal{H}_x, \quad q'(t) = -\mathcal{H}_y.$$

Уравнение в частных производных (44) для функции $z = z(t, x, y)$ имеет вид

$$z_t + \frac{1}{2}(z_x^2 + z_y^2) = \frac{k^2}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

¹⁾ [См. Степанов, стр. 412—416; Курант, стр. 111—138, а также Ф. Р. Гантмахер, Лекции по аналитической механике, Физматгиз, 1960; И. М. Гельфанд и С. В. Фомин, Вариационное исчисление, Физматгиз, 1961.—*Прим. ред.*]

²⁾ Здесь буквы p_v, q_v имеют уже не тот смысл, какой мы придавали им до сих пор.

³⁾ [Массы предполагаются единичными. Обозначения переменных в этом примере отличаются от обозначений, принятых по всей книге.—*Прим. ред.*]

или, если подставить $\zeta(t, \rho, \vartheta) = z(t, x, y)$, где $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$,

$$\zeta_t + \frac{1}{2} \left(\zeta_\rho^2 + \frac{\zeta_\vartheta^2}{\rho^2} \right) = \frac{k^2}{\rho}.$$

Для этого дифференциального уравнения, согласно п. 13.3, имеем полный интеграл

$$\zeta = -At + B\vartheta \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \sqrt{2A + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{B^2}{\rho^2}} d\rho + C. \quad (*)$$

Решая теперь уравнения

$$\frac{\partial \zeta}{\partial A} = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial B} = \text{const},$$

получаем искомые функции

$$x(t) = \rho \cos \vartheta, \quad y(t) = \rho \sin \vartheta.$$

Если в выражении (*) для ζ взять знак $+$, то кривая, проходящая при $t = t_0$ через точку (ρ_0, ϑ_0) , запишется в следующем виде:

$$t - t_0 = \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{R}}, \quad \vartheta - \vartheta_0 = B \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{R}},$$

где $R = 2A + \frac{2k^2}{\rho} - \frac{B^2}{\rho^2}$.

Второе из этих уравнений определяет траекторию пути, а первое — время движения. Если проинтегрировать второе уравнение, то для $B \neq 0$ получим:

$$\vartheta - \vartheta_0 = \arcsin \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{B^2}{k^2 \rho} - 1 \right) + \text{const},$$

где $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2AB^2}{k^4}$. Следовательно, траекторией является коническое сечение

$$\rho = \frac{B^2}{k^2 [1 + \varepsilon \sin(\vartheta - \vartheta_0)]}.$$

12.11. Оценка Нагумо¹⁾. Пусть функция $f(x, y, z, q)$ определена в области $\mathfrak{G}(x, y, z, q)$ и удовлетворяет там условию Липшица

$$|f(x, y, z, \bar{q}) - f(x, y, z, q)| \leq A \sum_{v=1}^n |\bar{q}_v - q_v|. \quad (45)$$

Пусть для всех $v = 1, \dots, n$ функции $a_v(x), b_v(x)$ в интервале $\xi \leq x < c$ непрерывно дифференцируемы, $a_v(x) < b_v(x)$ и²⁾

$$a'_v \geq A, \quad b'_v \leq -A.$$

¹⁾ См. M. Nagumo, Journal of Math. 15 (1938), стр. 51—56; J. Szarski, Annales Soc. Polon. 22 (1950), стр. 1—34.

²⁾ Существенно, что здесь стоит константа Липшица A из (45).

Обозначим через Ω область

$$\xi \leq x < c; \quad a_v(x) \leq y_v \leq b_v(x), \quad v = 1, \dots, n. \quad (46)$$

Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в Ω и системы значений x, y, z, q принадлежат области Ω при $z = u$, $q_v = u_{y_v}$ и при $z = v$, $q_v = v_{y_v}$. Наконец, предположим, что $u_x \geq f(x, y, u, u_{y_1}, \dots, u_{y_n})$, $v_x \leq f(x, y, v, v_{y_1}, \dots, v_{y_n})$,

причем в каждой точке области Ω знак равенства может иметь место самое большое в одном из этих двух неравенств, и, кроме того,

$$u(\xi, y) > v(\xi, y) \quad \text{для } a_v(\xi) \leq y_v \leq b_v(\xi).$$

Тогда

$$u(x, y) > v(x, y)$$

во всей области Ω .

Это неравенство Нагумо может быть использовано для оценки решения дифференциального уравнения (2).

Пусть правая часть этого уравнения определена в области Ω , удовлетворяет там неравенству (45), и пусть область Ω определена условиями (46). Предположим, что в Ω существует интеграл $\psi(x, y)$ с начальным значением $\psi(\xi, y) = \omega(y)$, но саму функцию ψ вычислить сложно или она нам неизвестна.

Если нам удастся заключить функции f , ω между двумя функциями $f_v(x, y, z, q)$, $\omega_v(y)$ так, что

$$f_1 < f < f_2, \quad \omega_1 < \omega < \omega_2,$$

и если для дифференциальных уравнений $p = f_1$, $p = f_2$ можно вычислить интегралы $\Psi_1(x, y)$, $\Psi_2(x, y)$ с начальными значениями $\Psi_1(\xi, y) = \omega_1(y)$, $\Psi_2(\xi, y) = \omega_2(y)$, то в области Ω имеется оценка

$$\Psi_1(x, y) < \psi(x, y) < \Psi_2(x, y):$$

Отсюда получается неравенство Хаара п. 4.4.

§ 13. Решение частных видов нелинейных уравнений с n независимыми переменными

13.1. $F(p) = 0$. Если константы A_v таковы, что

$$F(A_1, \dots, A_n) = 0,$$

если F непрерывно дифференцируема и если $\sum_{v=1}^n |F_{p_v}| \neq 0$, то

$$z = A_0 + A_1 x_1 + \dots + A_n x_n$$

— полный интеграл.

13.2. $F(z, p) = 0$. Если сделать подстановку

$$z = \xi(\xi), \quad \xi = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n,$$

то из данного уравнения с частными производными получается для $\xi = \xi(z)$ обыкновенное дифференциальное уравнение

$$F(\xi, A_1 \xi', \dots, A_n \xi') = 0.$$

13.3. $F[f_1(x_1, p_1\varphi(z)), \dots, f_n(x_n, p_n\varphi(z))] = 0$. Это — *дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными*. Пусть постоянные A_v таковы, что

$$F(A_1, \dots, A_n) = 0.$$

Разрешим уравнение

$$f_v(x_v, p_v\varphi) = A_v$$

относительно $p_v\varphi$:

$$p_v\varphi(z) = g_v(x_v, A_v).$$

Тогда

$$\int \varphi(z) dz = \sum_{v=1}^n \int g_v(x_v, A_v) dx_v + A_0$$

— интеграл данного дифференциального уравнения.

Рассмотрим частные случаи.

$$(a) \quad f_1(x_1, p_1) f_2(x_2, p_2) \dots f_n(x_n, p_n) = a.$$

При $a = 0$ дифференциальное уравнение справедливо для всех таких z , которые удовлетворяют хотя бы одному из уравнений

$$f_k(x_k, p_k) = 0. \quad (1)$$

Если это уравнение разрешить относительно p_k :

$$p_k = \varphi_k(x_k),$$

то

$$z = \int \varphi_k(x_k) dx_k + \Omega(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$$

— решение уравнения (1), причем Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

При $a \neq 0$ подберем константы A_v так, что $A_1 \dots A_n = a$. Если уравнения

$$f_v(x_v, p_v) = A_v$$

разрешить относительно p_v :

$$p_v = \varphi_v(x_v, A_v),$$

то

$$z = A_0 + \sum_{v=1}^n \int \varphi_v(x_v, A_v) dx_v$$

— полный интеграл.

$$(6) \quad f_1(x_1, p_1) + f_2(x_2, p_2) + \dots + f_n(x_n, p_n) = 0.$$

Пусть постоянные A_v выбраны так, что $\sum_{v=1}^n A_v = 0$. Тогда, разрешая уравнения

$$f_v(x_v, p_v) = A_v$$

относительно p_v :

$$p_v = \varphi_v(x_v, A_v),$$

мы получаем полный интеграл в виде

$$z = \sum_{v=1}^n \int \varphi_v(x_v, A_v) dx_v + A_0.$$

13.4. Однородные уравнения.

Пусть левая часть уравнения

$$F(r, z, p) = 0$$

становится однородной по z, p_1, \dots, p_n , если z заменить выбранный надлежащим образом степенью z^a .

Если $a \neq 1$, то подстановкой $z = w^\lambda$, где $\lambda = \frac{a}{a-1}$, мы приведем уравнение к виду

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda^{-a}, w_{x_1}, \dots, w_{x_n}) = 0,$$

не содержащему неизвестной функции.

Если $a = 1$, то, полагая $z = e^w$, мы получаем:

$$F(x_1, \dots, x_n, 1, w_{x_1}, \dots, w_{x_n}) = 0.$$

Уравнение $F(r, p) = z^c$, где левая часть — однородная по p_1, \dots, p_n функция степени m , есть частный случай однородного уравнения при $a = \frac{m}{c}$.

13.5. $F(r, z, p) = 0$. Преобразование Лежандра. Пусть в области $\mathfrak{G}(r)$ функция $z(r)$ дважды непрерывно дифференцируема. Пусть для $1 \leq k \leq n$ область $\mathfrak{G}(r)$ можно преобразованием

$$X_1 = x_1, \dots, X_{k-1} = x_{k-1}, \quad X_k = z_{x_k}(r), \dots, X_n = z_{x_n}(r) \quad (2)$$

взаимно однозначно отобразить на область $\bar{\mathfrak{G}}(X)$. Наконец, пусть в области \mathfrak{G}

$$\det |z_{x_\mu x_v}| \neq 0 \quad (\mu, v \geq k).$$

Если положить

$$Z(X) = \sum_{\rho=k}^n x_\rho z_{x_\rho} - z(r), \quad (3)$$

то, наряду с уже приведенными соотношениями (2), (3), получаются также уравнения

$$z_{x_v} = -Z_{X_v}, \quad v = 1, \dots, k-1, \quad (4)$$

$$x_v = X_v, \quad v = 1, \dots, k-1; \quad x_v = Z_{X_v}(X), \quad v = k, \dots, n,$$

$$z(r) = \sum_{\rho=k}^n X_\rho Z_{X_\rho} - Z(X). \quad (5)$$

Преобразование (4), (5) называется *преобразованием Лежандра*.

С помощью этого преобразования (коль скоро интегралы удовлетворяют указанным предположениям) дифференциальное уравнение

$$F(r, z, p) = 0 \quad (6)$$

переходит в уравнение

$$F\left(X_1, \dots, X_{k-1}, Z_{X_k}, \dots, Z_{X_n}, \sum_{\rho=k}^n X_\rho Z_{X_\rho} - Z, -Z_{X_1}, \dots, -Z_{X_{k-1}}, X_k, \dots, X_n\right) = 0 \quad (7)$$

которое иногда проще первоначального уравнения. Если можно найти интеграл $Z(X)$ уравнения (7), то (5) — параметрическое представление интеграла уравнения (6).

При этом преобразовании некоторые интегралы могут пропасть (именно те, для которых указанные вначале предположения не выполняются). Следовательно, требуется еще исследовать, имеются ли подобные интегралы.

Если вместо (6) рассмотреть дифференциальное уравнение

$$F(r, p) = 0,$$

в которое неизвестная функция z не входит, то соответствующее преобразованное уравнение имеет вид

$$F(X_1, \dots, X_{k-1}, Z_{X_k}, \dots, Z_{X_n}, -Z_{X_1}, \dots, -Z_{X_{k-1}}, X_k, \dots, X_n) = 0.$$

$$13.6. \quad \sum_{v=1}^{k-1} p_v f_v = \sum_{v=k}^n x_v f_v - f_{n+1}, \quad \text{где} \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{и}$$

$$f_v = f_v(x_1, \dots, x_{k-1}, p_k, \dots, p_n, \sum_{v=k}^n x_v p_v - z). \quad \text{При преобразо-}$$

вании Лежандра (4), (5) данное дифференциальное уравнение переходит в квазилинейное дифференциальное уравнение

$$\sum_{v=1}^n F_v \frac{\partial Z}{\partial X_v} = F_{n+1}, \quad \text{где} \quad F_v = f_v(X_1, \dots, X_n, Z).$$

В частности, все сказанное справедливо для уравнения

$$\sum_{v=1}^n x_v f_v = f_{n+1}, \quad f_v = f_v(p_1, \dots, p_n, \sum_{v=1}^n x_v p_v - z),$$

представляющего собой частный случай уравнения 13.6 при $k = 1$.

13.7. $z = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n + f(p_1, \dots, p_n)$. Это — *дифференциальное уравнение Клеро*. Если f определена и дважды непрерывно дифференцируема в точке (A_1, \dots, A_n) , то

$$z = A_1 x_1 + \dots + A_n x_n + f(A_1, \dots, A_n)$$

— полный интеграл.

§ 14. Система нелинейных уравнений

14.1. Частный случай: $p_v = f^v(r, y, z, q)$, $v = 1, \dots, m$. Пусть дана система r дифференциальных уравнений, разрешенных относительно всех r производных:

$$p_v = f^v(r, y, z, q), \quad v = 1, \dots, m; \quad (1)$$

здесь $r = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_s)$, $q = (q_1, \dots, q_s)$, где $p_v = \frac{\partial z}{\partial x_v}$, $q_\mu = \frac{\partial z}{\partial y_\mu}$, $z = z(x, y)$ — неизвестная функция. (Случай $s = 0$ допускается.)

(а) Если функции f^v в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(r, y, z, q)$ непрерывно дифференцируемы по аргументам x_v , y_v , z , q_v , то каждый дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(r, y)$ удовлетворяет $\frac{m(m-1)}{2}$ уравнениям

$$\begin{aligned} f_{x_v}^\mu + f_z^\mu f^v + \sum_{\sigma=1}^s f_{q_\sigma}^\mu (f_{y_\sigma}^v + q_\sigma f_z^v) &= \\ = f_{x_\mu}^v + f_z^v f^\mu + \sum_{\sigma=1}^s f_{q_\sigma}^v (f_{y_\sigma}^\mu + q_\sigma f_z^\mu), & \quad (1 \leqslant \mu, v \leqslant m), \end{aligned} \quad (2)$$

куда следует подставить $z = \psi$, $q_\sigma = \psi_{y_\sigma}$.

Следовательно, для данной системы (1) всегда можно написать еще несколько уравнений (2), которые также обязаны удовлетворяться, если система имеет дважды непрерывно дифференцируемое решение.

(б) Если уравнения (2) становятся тождествами при подстановке величин r , y , z , q , то соответствующая система (1) называется *инволюционной системой* или *якобиевой системой* или *вполне инте-*

грируемой системой. Уравнения (2) называются *условиями интегрируемости* системы (1).

14.2. Теорема существования и единственности для якобиевой системы в области аналитических функций. Пусть функции $f^v(r, y, z, q)$ являются регулярными аналитическими в точке (r^0, y^0, z^0, q^0) , и в окрестности этой точки удовлетворяются условия интегрируемости (2). Далее, пусть дана функция $\omega(y)$, регулярная аналитическая в точке y^0 , причем справедливы соотношения:

$$\omega(y^0) = z^0, \quad \omega_{y_\mu}(y^0) = q_\mu^0, \quad \mu = 1, \dots, s.$$

Тогда система (1) в достаточно малой окрестности точки (r^0, y^0) имеет ровно один регулярный аналитический интеграл $z = \psi(r, y)$ с начальными значениями $\psi(r^0, y) = \omega(y)$.

14.3. Теорема существования и единственности для якобиевой системы в области действительных функций. Метод Майера для решения якобиевой системы.

(а) Пусть при фиксированных ξ_v функции $f^v(r, y, z, q)$ дважды непрерывно дифференцируемы в области

$$|x_v - \xi_v| \leq a; \quad y, z, q \text{ — любые}, \quad (3)$$

и пусть справедливы неравенства

$$\left\{ \begin{array}{l} |f_{x_v}^0|, |f_{y_v}^0|, |f_z^0|, |f_{q_v}^0|, \\ |f_{y_\mu y_v}^0|, |f_{y_\mu z}^0|, |f_{y_\mu q_v}^0|, |f_{z z}^0|, |f_{z q_v}^0|, |f_{q_\mu q_v}^0| \end{array} \right\} \leq A. \quad (4)$$

Предположим, что выполнены условия интегрируемости (2). Пусть, далее, функция $\omega(y)$ непрерывно дифференцируема по любому y_μ и удовлетворяет неравенству

$$|\omega_{y_\mu}| + \sum_{v=1}^s |\omega_{y_\mu y_v}| \leq B, \quad \mu = 1, \dots, s. \quad (5)$$

Наконец, пусть выбраны числа β, α , удовлетворяющие условиям

$$0 < \beta < \frac{1}{mA} \ln \left(1 + \frac{\ln 3}{2s(B+1)} \right) \quad \text{и} \quad \alpha = \min(\alpha, \beta). \quad (6)$$

Тогда система (1) имеет в области

$$|x_v - \xi_v| \leq a; \quad y \text{ — любое} \quad (7)$$

ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(r, y)$ с начальным значением $\psi(\xi_1, \dots, \xi_m, y) = \omega(y)$ ¹⁾.

¹⁾ См. E. Kamke, Math. Zeitschrift 49 (1943), стр. 267—275.

(б) Для фактического решения данной системы (1) часто с успехом может использоваться *метод Майера*. *Преобразование Майера* (см. п. 6.4) состоит в следующем: m независимых переменных x_1, \dots, x_m посредством соотношений

$$x_\rho - \xi_\rho = uu_\rho, \quad \rho = 1, \dots, m, \quad (8)$$

представляются как функции от $m+1$ независимого переменного u, u_1, \dots, u_m , причем $|u| \leq 1, |u_\rho| \leq a$; очевидно, что x_ρ принимаются все значения в области $|x_\rho - \xi_\rho| \leq a$. Вместо системы (1) теперь рассматривается одно уравнение

$$\frac{\partial Z}{\partial u} = \sum_{\rho=1}^m u_\rho f^\rho(u_1 + \xi_1, \dots, u_m + \xi_m; y, Z \frac{\partial Z}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial Z}{\partial y_s}), \quad (9)$$

в котором u, y_1, \dots, y_s являются независимыми переменными, а u_1, \dots, u_m — параметрами. Если $Z = \Psi(u, y; u_1, \dots, u_m)$ — интеграл дифференциального уравнения (9) с начальным значением

$$\Psi(0, y; u_1, \dots, u_m) = \omega(y),$$

не зависящим (это важно!) от u_v , то

$$z(r, y) = \Psi(1, y; x_1 - \xi_1, \dots, x_m - \xi_m)$$

— искомый интеграл системы (1).

(в) Пример. $p_1 = q^2 + y; p_2 = q^2 + y$.

Система инволюционная. Если выбрать $\xi_1 = \xi_2 = 0$ и положить $x_v = uu_v$, то уравнение (9) принимает вид

$$Z_u = (u_1 + u_2)(Z_y^2 + y).$$

Для этого дифференциального уравнения из соответствующих характеристических уравнений находится интеграл

$$Z = A(u_1 + u_2)u - \frac{2}{3}(A - y)^{\frac{3}{2}} + B.$$

Если A, B не зависит от u_1, u_2 , то Z , как это и требуется, не зависит от u_1, u_2 при $u = 0$. Если подставить $uu_v = x_v$, то для исходной системы получается интеграл

$$z = A(x_1 + x_2) - \frac{2}{3}(A - y)^{\frac{3}{2}} + B.$$

(г) Пусть функции $f^v(z, y, z, q, \lambda)$ (здесь $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)$) в области

$$|x_v - \xi_v| \leq a; \quad y, z, q — любые; \quad \Lambda_\mu \leq \lambda_\mu \leq \Lambda_\mu^*$$

k раз непрерывно дифференцируема ($k \geq 1$) по всем $m + 2s + k + 1$ аргументам $x_v, y_v, z, q_v, \lambda_v$; этим же свойством по предположению

обладают функции $f_{y_\mu}^v$, f_z^v , $f_{q_\mu}^v$. Далее, пусть выполняются неравенства (4) и условия интегрируемости (2). Предположим, что функция $\omega(y, \lambda)$ в области

$$y — \text{любое}; \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \quad (10)$$

k раз непрерывно дифференцируема по y_v , λ_v , так же как и ее производные ω_{y_μ} . Далее, пусть выполнено (5). Наконец, пусть β , α снова выбираются в соответствии с (6).

Тогда система

$$p_v = f^v(r, y, z, q, \lambda), \quad v = 1, \dots, m$$

при фиксированных λ_v имеет в области (7) ровно один дважды непрерывно дифференцируемый интеграл $z = \psi(r, y, \lambda)$ с начальным значением

$$\psi(\xi_1, \dots, \xi_m, y, \lambda) = \omega(y, \lambda).$$

Функция $\psi(r, y, \lambda)$ вместе с ее производными ψ_{x_v} , ψ_{y_v} в области

$$|x_v - \xi_v| \leqslant a; \quad y — \text{любое}; \quad \Lambda_\mu \leqslant \lambda_\mu \leqslant \Lambda_\mu^* \quad (11)$$

k раз непрерывно дифференцируема по всем $m + s + k$ аргументам x_v , y_v , λ_v .

(д) Если

$$\omega(y, \lambda) = \lambda_0 + \sum_{\sigma=1}^s \lambda_\sigma y_\sigma,$$

то, применяя (г) к системе (1), правые части которой не зависят от λ , мы получим для этой системы полный интеграл $z = \psi(r, y, \lambda)$ в достаточно малой окрестности значений $x_\rho = \xi_\rho$, т. е. интеграл, для которого

$$\frac{\partial (\psi, \psi_{y_1}, \dots, \psi_{y_s})}{\partial (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_s)} \neq 0.$$

(е) Если система (1) задана не в области (3), то пытаются так расширить область существования функций f^v и ω , чтобы теорема (а) была применима.

14.4. Скобки Якоби и Пуассона. В более общих системах нелинейных уравнений (12) роль условий интегрируемости (2) играют уравнения (13). Некоторые свойства этих уравнений будут сейчас приведены.

Пусть функции $F(r, z, y)$, $G(r, z, y)$, $H(r, z, y)$ — непрерывно дифференцируемые функции своих $2n+1$ переменных r, z, y ¹⁾ в области $\mathfrak{G}(r, z, y)$.

¹⁾ Здесь снова $r = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$.

(а) Скобка Якоби $[F, G]$ определяется так¹⁾:

$$[F, G] = \sum_{v=1}^n \{(F_{x_v} + y_v F_z) G_{y_v} - (G_{x_v} + y_v G_z) F_{y_v}\},$$

или если использовать сокращенное обозначение

$$\frac{dF}{dx_v} = F_{x_v} + y_v F_z,$$

то

$$[F, G] = \sum_{v=1}^n \left(\frac{dF}{dx_v} G_{y_v} - \frac{dG}{dx_v} F_{y_v} \right).$$

(б) Очевидно, что $[F, C] = 0$ для любой постоянной C ;

$$[F, F] = 0, \quad [F, G] = -[G, F].$$

(в) Для дважды непрерывно дифференцируемых функций справедливо соотношение

$$\begin{aligned} [[F, G], H] + [[G, H], F] + [[H, F], G] &= \\ &= F_z [G, H] + G_z [H, F] + H_z [F, G]. \end{aligned}$$

(г) Соотношение $[F, Z] = 0$ при данной функции F есть линейное однородное дифференциальное уравнение для неизвестной функции $Z = Z(r, z, y)$.

(д) Если функции F, G, H не зависят от переменной z , т. е. речь идет о функциях $F(r, y), G(r, y), H(r, y)$, то скобка Якоби $[F, G]$ переходит в скобку Пуассона (F, G) , которая определяется так:

$$(F, G) = \sum_{v=1}^n (F_{x_v} G_{y_v} - F_{y_v} G_{x_v}) = \sum_{v=1}^n \frac{\partial (F, G)}{\partial (x_v, y_v)}.$$

(е) Из (в) получается соотношение

$$((F, G), H) + ((G, H), F) + ((H, F), G) = 0.$$

(ж) Если F — дважды непрерывно дифференцируемая функция и если $\psi_1(r, y), \psi_2(r, y)$ — дважды непрерывно дифференцируемые интегралы дифференциального уравнения $(F, Z) = 0$, то скобка Пуассона (ψ_1, ψ_2) — также интеграл этого дифференциального уравнения.

14.5. Общая нелинейная система. Пусть дана нелинейная система дифференциальных уравнений

$$F^v(r, z, p) = 0, \quad v = 1, \dots, m \quad (12)$$

¹⁾ [Иногда это выражение носит название скобок Майера; см. Степанов, стр. 385—387. — Прим. ред.]

(как всегда, здесь $r = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $z = z(r)$ — искомый общий интеграл m уравнений (12)). Относительно функций F^μ предполагается, что они в рассматриваемой области $\mathfrak{G}(r, z, p)$ непрерывно дифференцируемы по своим $2n+1$ переменным.

Каждый дважды непрерывно дифференцируемый интеграл системы (12) удовлетворяет также уравнениям скобок

$$[F^\mu, F^\nu] = 0, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m; \quad (13)$$

при этом $[F^{\mu, \nu}(r, z, p)] = [F^\mu, F^\nu]$ — скобки Якоби, определенные в п. 14.4 (а). Следовательно, данной системе (12) можно всегда поставить в соответствие уравнения (13), которые необходимо должны удовлетворяться, если система вообще разрешима.

14.6. Инволюционные системы и полные системы.

(а) Система (12) называется *инволюционной системой*, если

$$[F^\mu, F^\nu] = 0, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m, \quad (14)$$

для всех значений r, z, p . Уравнения (14) называются *условиями интегрируемости* системы (12). Для случая системы (1) это определение только тогда совпадает с определением данным в п. 14.1 (б), когда все правые части системы не зависят от переменной z .

(б) Система (12) называется *полной системой*, если

$$[F^\mu, F^\nu] = 0, \quad 1 \leq \mu, \nu \leq m,$$

для всех систем чисел (r, z, p) , которые удовлетворяют m уравнениям (12).

(в) Для того чтобы получить интегралы системы (12), эту систему дополняют до полной системы (ср. с п. 6.3 (в)) уравнениями (13) (точнее, лишь теми из уравнений (13), которые не являются «алгебраическими следствиями» уравнений (12) в смысле (б)). К дополненной так системе потом снова применяют метод образования скобок, и так далее. Необходимое условие для разрешимости данной системы состоит, очевидно, в том, что каждая расширенная система «алгебраически разрешима», если r, z, p рассматриваются как числа.

П р и м е р. $p_1 p_2 = x_3 x_4$, $p_3 p_4 = x_1 x_2$.

Сюда искомая функция z не входит. Путем образования скобок Пуассона получают уравнение

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0.$$

Система трех уравнений теперь полная. Если все же продолжить процесс дальше и образовать, например, скобки Пуассона первого и третьего уравнений

$$2(x_3 x_4 - p_1 p_2) = 0,$$

то, как легко видеть, это уравнение является следствием первого уравнения.

(г) Пусть система (12) с $m \leq n$ полная. Пусть уравнения (12) удается разрешить относительно p_1, \dots, p_m , т. е. система функций p_μ :

$$p_\mu = f_\mu(\mathbf{r}, z, p_{m+1}, \dots, p_n), \quad \mu = 1, \dots, m, \quad (15)$$

которые существуют в области $\mathfrak{G}(\mathbf{r}, z, p_{m+1}, \dots, p_n)$ и там непрерывно дифференцируемы, обращает уравнения (12) в тождества. Далее, пусть определитель

$$\frac{\partial(F^1, \dots, F^m)}{\partial(p_1, \dots, p_m)}$$

(после подстановки в него выражений (15)) ни в какой подобласти области \mathfrak{G} не равен тождественно нулю. Тогда (15) — инволюционная система в смысле п. 14.1 (б).

(д) Если система (12) в области $\mathfrak{G}(\mathbf{r}, z, \mathbf{p})$ инволюционна в смысле (а) и если функции F^v в области \mathfrak{G} дважды непрерывно дифференцируемы, то линейные однородные дифференциальные уравнения

$$[F^\mu, Z] = 0, \quad \mu = 1, \dots, m,$$

образуют полную систему в смысле п. 6.3 (б).

14.7. Метод Якоби для инволюционной системы, не зависящей от z . Речь идет о системе

$$F^v(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \quad v = 1, \dots, m, \quad (16)$$

$m \leq n$, в которую искомая функция z явно не входит и которая в области $\mathfrak{G}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ инволюционна. Предположим, что нам удалось дополнить эту систему $n - m$ уравнениями

$$F^{m+1}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \dots, F^n(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0 \quad (17)$$

так, что полученная система n уравнений является инволюционной системой. Пусть эта новая система (16), (17) может быть разрешена относительно переменных p_1, \dots, p_n :

$$p_v = f^v(\mathbf{r}), \quad v = 1, \dots, n, \quad (18)$$

причем определитель (в который подставлены выражения (18))

$$\frac{\partial(F^1, \dots, F^n)}{\partial(p_1, \dots, p_n)} \neq 0 \quad (19)$$

ни в какой подобласти рассматриваемой области \mathbf{r} -пространства.

В силу п. 14.6 (г), система (18) является инволюционной, следовательно, $f_{x_v}^\mu = f_{x_p}^v$ и, таким образом, применим метод п. 6.1. Тогда

каждое решение системы (18) есть, в частности, решение системы (16). Так как уравнения

$$F^{m+1} = A_{m+1}, \dots, F^n = A_n,$$

где A_v — произвольные постоянные, вместе с уравнениями (16) образуют инволюционную систему, то вместо (18) получаем зависящую от A_v систему

$$p_v = f^v(r; A_{m+1}, \dots, A_n), \quad v = 1, \dots, n, \quad (18a)$$

интегралы которой зависят от A_v , из этих интегралов можно получить полный интеграл системы (16).

Следовательно, по существу надо лишь найти уравнения (17), т. е. подобрать дважды непрерывно дифференцируемые функции F^{m+1}, \dots, F^n . Это делается постепенно. (При этом предполагается, что F^μ дважды непрерывно дифференцируемы.) Прежде всего надо разыскать такое $Z = F^{m+1}$, чтобы условия интегрируемости

$$(F^1, Z) = 0, \dots, (F^m, Z) = 0$$

были тождественно выполнены по r, p . В силу п. 14.4 (г), эти уравнения образуют линейную однородную систему дифференциальных уравнений, а именно (см. п. 14.6 (д)) полную систему. Чтобы получить нетривиальное решение этой системы, можно использовать методы из § 6. Найдя такое решение $Z = F^{m+1}$, решают линейные уравнения

$$(F^\mu, Z) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m+1,$$

и т. д. При этом надо следить за тем, чтобы условие (19) было выполнено.

Пример. В п. 14.6 (в) было установлено, что система

$$p_1 p_2 - x_3 x_4 = 0, \quad p_3 p_4 - x_1 x_2 = 0,$$

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 - x_3 p_3 - x_4 p_4 = 0$$

полнна. Разрешая ее относительно p_1, p_2, p_3, p_4 , получаем (см. п. 14.6 (г) и (а)) инволюционную систему, а именно:

$$p_1 = \frac{x_2 x_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{x_4 p_4}{x_2}, \quad p_3 = \frac{x_1 x_2}{p_4}, \quad (*)$$

а также и вторую систему, которая следует из (*) заменой $x_1 p_1$ на $x_2 p_2$ и наоборот. Следовательно, достаточно рассматривать указанную выше систему (*).

Итак, решим линейные дифференциальные уравнения

$$\left(p_1 - \frac{x_2 x_3}{p_4}, Z \right) = 0, \quad \left(p_2 - \frac{x_4 p_4}{x_2}, Z \right) = 0, \quad \left(p_3 - \frac{x_1 x_2}{p_4}, Z \right) = 0;$$

они имеют вид

$$Z_{x_1} + \frac{x_2 x_3}{p_4^2} Z_{x_4} + \frac{x_3}{p_4} Z_{p_2} + \frac{x_2}{p_4} Z_{p_3} = 0,$$

$$Z_{x_2} - \frac{x_4}{x_2} Z_{x_4} - \frac{x_4 p_4}{x_2^2} Z_{p_2} + \frac{p_4}{x_2} Z_{p_4} = 0,$$

$$Z_{x_3} + \frac{x_1 x_2}{p_4^2} Z_{x_4} + \frac{x_2}{p_4} Z_{p_1} + \frac{x_1}{p_4} Z_{p_2} = 0.$$

Интеграл этой линейной системы, очевидно, $Z = \frac{p_4}{x_2} - A$. Присоединяя вытекающее отсюда уравнение $Z = 0$ к трем уравнениям (*), получаем:

$$p_1 = \frac{x_3}{A}, \quad p_2 = Ax_4, \quad p_3 = \frac{x_1}{A}, \quad p_4 = Ax_2,$$

а отсюда, наконец, находим полный интеграл

$$z = Ax_1 x_3 + \frac{1}{A} x_2 x_4 + B,$$

а также интеграл, получающийся после замены x_1 на x_2 и x_2 на x_1 .

14.8. Применение преобразования Лежандра.

(а) Иногда независимые переменные и производные могут быть при надлежащей перенумерации так подразделены на два класса

$$x_1, \dots, x_{k-1}, p_1, \dots, p_{k-1} \text{ и } x_k, \dots, x_n, p_k, \dots, p_n,$$

что зависимость левых частей F^v системы (16) от p_1, \dots, p_{k-1} проще, чем зависимость от x_1, \dots, x_{k-1} , и, напротив, зависимость от x_k, \dots, x_n проще, чем от p_k, \dots, p_n . В таком случае рекомендуется применять преобразование Лежандра. После применения его система (16) переходит в систему

$$F^u(X_1, \dots, X_{k-1}, P_k, \dots, P_n, -P_1, \dots, -P_{k-1}, X_k, \dots, X_n) = 0,$$

и эти уравнения теперь зависят от производных P_v более простым образом, чем от X_v .

(б) При решении методом Якоби (см. п. 14.7) мы предполагали, что определитель (19) не обращается в нуль. В ряде случаев бывает, что при редукциях к инволюционной системе n уравнений с помощью уравнения (17) это предположение нарушается. Однако если хотя бы

$$\frac{\partial (F^1, \dots, F^m)}{\partial (p_1, \dots, p_m)} \neq 0,$$

то систему (16), (17) можно иногда перевести с помощью преобразования Лежандра (см. п. 13.5) в такую, для которой предположение (19) выполнено.