Именно, если для выбранного надлежашим образом $k > m$ справедливо неравенство

$$\frac{\partial(F^1, \ldots, F^n)}{\partial(p_1, \ldots, p_{k-1}, x_k, \ldots, x_n)} \neq 0,$$

то система (16), (17) переходит после преобразования Лежандра в инволюционную систему

$$\Phi^1(X, P) = 0, \ \ldots, \ \Phi^n(X, P) = 0,$$

для которой

$$\frac{\partial(\Phi^1, \ldots, \Phi^n)}{\partial(P_1, \ldots, P_n)} \neq 0.$$

(в) Пример.

$$y^2p^3 + xp + 3yq = 0. \qquad (*)$$

Дифференциальное уравнение может рассматриваться как система (16) с $m = 1$, $n = 2$. В силу п. 14.7, можно разыскать второе уравнение, находящееся с первым в инволюции. Из характеристической системы данного уравнения (*) получаются первые интегралы (ср. с п. 12.8)

$$yp^3 = \text{const} \quad \text{и} \quad \frac{x}{yp^2} - y = \text{const}, \qquad (**)$$

и каждое из этих двух уравнений образует вместе с данным, в силу п. 12.8, инволюционную систему.

Если выбрать первое из получившихся соотношений (**), то мы придем к системе

$$p = \frac{A}{\sqrt[3]{y}}, \quad q = -\frac{A}{3}xy^{-\frac{4}{3}} - \frac{A^3}{3}$$

и, таким образом, найдем полный интеграл данного дифференциального уравнения:

$$z = Axy^{-\frac{1}{3}} - \frac{A^3}{3}y + B.$$

Если выбрать второе из получившихся соотношений (**), то мы придем к системе

$$\frac{x}{yp^2} - y = A, \quad y^2p^3 + xp + 3yq = 0. \qquad (***)$$

Здесь разрешение относительно p, q сложнее. Если ввести посредством преобразования Лежандра p, q как новые независимые переменные, т. е. положить

$$x = P, \quad p = X, \quad y = Y, \quad q = -Q, \quad z = XP - Z,$$

то из уравнений (***) получим:

$$\frac{P}{X^2Y} - Y = A, \quad Y^2X^3 + XP - 3YQ = 0.$$

Отсюда находим:

$$P = X^2Y(Y + A), \quad Q = \frac{1}{3}X^3(2Y + A). \qquad (****)$$

Из первого уравнения (****) имеем:

$$Z = \frac{1}{3} X^3 Y (Y + A) + \Omega (Y),$$

а из второго уравнения (****) следует, что $\Omega'(Y) = 0$, следовательно,

$$Z = \frac{1}{3} X^3 Y (Y + A) + B, \qquad x = P = X^2 Y (Y + A).$$

Наконец, делая обратное преобразование, находим окончательно:

$$z = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (y^2 + Ay)^{-\frac{1}{2}} + B.$$

14.9. Метод Якоби для общей системы.

(а) Если дана общая система

$$F^{\nu}(r, z, p) = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

то ее можно преобразованием п. 12.3 перевести в систему, в которую искомая функция не входит, и затем после некоторых преобразований типа п. 14.5 (в) применить метод п. 14.7. Тот факт, что искомая функция сама в получающиеся уравнения не входит, несет с собой тот недостаток, что число независимых переменных возрастает на единицу.

(б) Предположим, что система (12) полная, и пусть $m = n + 1$. Пусть, далее, система (12) удовлетворяется функциями

$$z = \psi(r), \quad p_\nu = \psi_\nu(r), \quad \nu = 1, \ldots, n, \tag{20}$$

которые в области $\mathfrak{G}(r)$ непрерывно дифференцируемы и для которых определитель (после подстановки выражений (20))

$$\frac{\partial (F^1, \ldots, F^{n+1})}{\partial (z, p_1, \ldots, p_n)} \not\equiv 0 \tag{21}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$. Тогда функция ψ дважды непрерывно дифференцируема и $\psi_{x_\nu} = \psi_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$, следовательно, ψ — интеграл уравнения (12).

При $m \leqslant n + 1$ имеет место следующее обобщение[1]). Пусть система (12) полная и удовлетворяется функциями

$$z = \psi(r), \quad p_\mu = \psi_\mu(r, p_m, \ldots, p_n), \quad \mu = 1, \ldots, m - 1, \tag{22}$$

которые в области $\mathfrak{G}(r, p_m, \ldots, p_n)$ непрерывно дифференцируемы и для которых определитель

$$\frac{\partial (F^1, \ldots, F^m)}{\partial (z, p_1, \ldots, p_{m-1})}$$

[1]) См. C. Russyan, Communications Kharkoff (4) 8 (1934), стр. 57—60.

после подстановки выражений (22) ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$ не равен тождественно нулю. Тогда $z=\psi(\boldsymbol{r})$ — интеграл уравнения (12).

(в) Пусть система (12) полная и $m=n$. Пусть система функций

$$p_\nu = f_\nu(\boldsymbol{r},\ z), \quad \nu = 1,\ \ldots,\ n, \tag{23}$$

которые существуют в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\ z)$ и там непрерывно дифференцируемы, обращают уравнения (12) в тождества. Далее, пусть определитель (после подстановки выражений (23))

$$\frac{\partial(F^1,\ \ldots,\ F^n)}{\partial(p_1,\ \ldots,\ p_n)} \not\equiv 0 \tag{24}$$

ни в какой подобласти области $\mathfrak{G}$. Тогда система (23), в силу 14.6 (г), инволюционна, а именно имеет специальный вид п. 7.1.

(г) Пусть система (12) в области $\mathfrak{G}(\boldsymbol{r},\ z,\ \boldsymbol{p})$ инволюционна и $m \leqslant n$. Пусть возможно эту систему так дополнить уравнениями

$$F^\nu(\boldsymbol{r},\ z,\ \boldsymbol{p}) = 0, \quad \nu = m+1,\ \ldots,\ n \quad \text{или} \quad n+1, \tag{25}$$

что получающаяся инволюционная система (12), (25) имеет n или $n+1$ уравнение. В этом случае, можно использовать методы (в) и (б) (разумеется, в случае, если остальные приведенные там предположения выполняются). При этом можно еще заменить нули в правых частях (25) произвольными константами и получить полный интеграл системы (12).

Следовательно, при этом методе существенно суметь найти $n-m$ или $n-m+1$ левых частей уравнений (25). Это делается шаг за шагом, как описано в п. 14.7 (б), только встречающиеся там скобки Пуассона надо заменить скобками Якоби.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ОТДЕЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Принцип довольно строгой лексикографической упорядоченности, столь необходимый в справочнике по обыкновенным дифференциальным уравнениям, здесь не нужен. Он заменяется следующим принципом: дифференциальные уравнения в частных производных объединены в отличающиеся друг от друга группы, и эти группы упорядочены с учетом прежнего лексикографического принципа. Для линейных дифференциальных уравнений указывается интегральный базис (главный интеграл), для нелинейных — полный интеграл.

Выражение $\Omega(u_1, \ldots, u_r)$ всегда означает произвольную непрерывно дифференцируемую функцию. У линейных и квазилинейных уравнений для функций от трех независимых переменных последние обозначаются через x, y, z, а искомая функция через $w(x, y, z)$. В других случаях независимые переменные обозначаются через x, y или через $x_1, \ldots, x_n$, искомая функция — через z, а ее производные — через p, q или соответственно $p_1, \ldots, p_n$.

[Более подробные объяснения методов решения конкретных уравнений можно найти в части I и руководствах, указанных там в прим. ред., а также в следующих работах: Э. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939; Н. М. Матвеев, Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, Л., 1955; И. М. Гюнтер и Р. О. Кузьмин, Сборник задач по высшей математике, т. II, М., 1959; А. Ф. Филиппов, Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М., 1961.

При составлении настоящего справочного отдела автором были использованы работы:
A. R. Forsyth, W. Jacobsthal, Lehrbuch der Differential gleichungen, 2 Aufl. Braunschweg, 1912; A. R. Forsyth, Theorie of Differential Equations, Bd. 2—4, Cambridge, 1900—1902; E. Goursat, Leçons sur lintegration des equations aux dérivées partielles du premier ordre, 2 Aufl., Paris, 1921, G. Julia, Exerçices d'Analyse t. 3—4, Paris, 1933, 1935, M. Morris, O. E. Brown, Differential Equations, New York, 1935, а также многие другие зарубежные издания, довольно старые и малодоступные. Ссылки на эти книги и статьи, как правило, опускались. — *Прим. ред.*]

ГЛАВА I

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ ЛИШЬ ОДНУ ЧАСТНУЮ ПРОИЗВОДНУЮ

1.1. $F(x, y, z, p) = 0.$

Так как в это уравнение входит только одна частная производная z_x, то это дифференциальное уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $z(x, y)$, где y играет роль параметра.

[Для решения необходимо привлечь методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, неразрешенных относительно производной. См. Камке, ч. I, § 3; ч. III, гл. I. — *Прим. ред.*]

1.2. $p = f(x).$

$$z = \int f(x)\,dx + \Omega(y).$$

1.3. $p = f(y).$

$$z = x f(y) + \Omega(y).$$

[1.3а. $p = f(x, y, z).$

Решение сводится к исследованию обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной; y следует рассматривать как параметр. Решение удается выписать явно, если уравнение

$$\frac{dz}{dx} = f(x, y, z)$$

удается проинтегрировать в квадратурах или известных функциях.

См. Камке, ч. I, § 4; ч. III, гл. I. — *Прим. ред.*]

[1.3б. $p = f(x, y).$

$$z = \int f(x, y)\,dx + \Omega(y),$$

при интегрировании y рассматривается как параметр. — *Прим. ред.*]

1.4. $xp = y$.

$$z = y \ln x + \Omega(y).$$

1.5. $(ax + by + cz + d)\, p = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$.

[См. Камке, ч. I, п. 4.6 (в). — *Прим. ред.*]

1.6. $(ax + by + cz)^n p = 1; \quad a \neq 0, \ c \neq 0, \ n > -1$.

Ищется интеграл, который при $|x| + |y| \to 0$ также стремится к нулю. Для новой неизвестной функции $u(x, y) = ax + by + cz(x, y)$ из данного дифференциального уравнения получается уравнение

$$\frac{u^n u_x}{au^n + c} = 1,$$

из которого получаем, если принять во внимание начальные условия

$$\int_0^u \frac{u^n\, du}{au^n + c} = x + \Phi(y), \qquad (*)$$

где $\Phi(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию $\Phi(0) = 0$. Для достаточно малых $|u|$ разложение подынтегральной функции в ряд и последующее интегрирование дает:

$$\frac{u^{n+1}}{(n+1)c} + \ldots = x + \Phi(y).$$

Отсюда видно, что $(*)$ — в самом деле интегралы желаемого вида.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1 — 12. $f(x, y)p + g(x, y)q = 0$

2.1. $ap + bq = 0.$

Решение см. ч. I, п. 2.4 (а). Можно также сделать преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = ax + by, \quad \eta = bx - ay;$$

тогда получается уравнение $\zeta_\xi = 0$ и, следовательно,

$$\zeta = \Omega(\eta), \text{ т. е. } z = \Omega(bx - ay).$$

2.2. $axp + byq = 0.$

$z = |x|^b |y|^{-a}$ — главный интеграл; см. ч. I, пп. 2.4 (б), 2.5 (б).

2.3. $ayp + bxq = 0.$

$z = bx^2 - ay^2$ — главный интеграл; см. ч. I, пп. 2.4 (а), 2.5 (а).

2.4. $(a_1x + b_1y + c_1)p + (a_2x + b_2y + c_2)q = 0.$

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = a_1x + b_1y + c_1, \quad y'(t) = a_2x + b_2y + c_2.$$

Отсюда для любых чисел λ, μ следует:

$$\lambda x' + \mu y' = (a_1\lambda + a_2\mu)x + (b_1\lambda + b_2\mu)y + c_1\lambda + c_2\mu. \qquad (1)$$

Числа λ, μ могут быть определены так, что для подходящего числа s они являются нетривиальным решением системы

$$a_1\lambda + a_2\mu = s\lambda, \quad b_1\lambda + b_2\mu = s\mu. \qquad (2)$$

Тогда из (1) получается:

$$\lambda x' + \mu y' = s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu. \tag{3}$$

Число s при этом надо выбрать так, чтобы оно являлось корнем уравнения

$$\begin{vmatrix} a_1 - s & a_2 \\ b_1 & b_2 - s \end{vmatrix} = 0. \tag{4}$$

(А) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 \neq 0$. Тогда уравнение (4) имеет два различных корня s_1, s_2 и каждому из них соответствует решение λ_ν, μ_ν системы (2). Далее, если

(Аа) $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, то $s \neq 0$ и $s_2 \neq 0$, и из уравнений (3) следует:

$$\frac{\lambda_1 x' + \mu_1 y'}{s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + c_1\lambda_1 + c_2\mu_1} = \frac{\lambda_2 x' + \mu_2 y'}{s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + c_1\lambda_2 + c_2\mu_2}.$$

Это уравнение можно проинтегрировать и прийти к функции, которая постоянна вдоль каждой характеристики; получается интеграл

$$z = \frac{|s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|^{s_2}}{|s_2(\lambda_2 x + \mu_2 y) + \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2|^{s_1}}.$$

(Аб) $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, то уравнение (4) имеет корни $s_1 = a_1 + b_2$ и $s_2 = 0$, а уравнения (3) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 x' + \mu_1 y' &= s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2, \\ \lambda_2 x' + \mu_2 y' &= \lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Если $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 = 0$, то последнее уравнение дает интеграл $z = \lambda_2 x + \mu_2 y$.

Если $\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2 \neq 0$, то оба уравнения (5) можно поделить на это выражение; тогда новые левые части совпадут и образуют интегрируемое уравнение. Из него получается интеграл

$$z = s_1 \frac{\lambda_2 x + \mu_2 y}{\lambda_2 c_1 + \mu_2 c_2} - \ln|s_1(\lambda_1 x + \mu_1 y) + \lambda_1 c_1 + \mu_1 c_2|.$$

Б) $(a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$. Уравнение (4) имеет двойной корень $s = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$; для этого значения s имеем уравнения (2) и (3) с соответствующими числами λ, μ, не равными нулю одновременно.

(Ба) $s \neq 0$. Тогда можно так выбрать линейную функцию $\alpha x + \beta y + \gamma$, что для каждой характеристической кривой

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\alpha x + \beta y + \gamma}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu} = 1. \tag{6}$$

Вследствие (3) в данном случае

$$(\lambda x'+\mu y')(\alpha x'+\beta y')-s(\alpha x+\beta y+\gamma)(\lambda x'+\mu y')=$$
$$=(\lambda x'+\mu y')[s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu];$$

это соотношение справедливо, если

$$\alpha x'+\beta y'-s(\alpha x+\beta y+\gamma)=s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu.$$

После подстановки характеристических уравнений получаем:

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)-s(\alpha x+\beta y+\gamma)=$$
$$=s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu.$$

Отсюда для α, β, γ имеем уравнения

$$\left.\begin{aligned}(a_1-s)\alpha+a_2\beta&=\lambda s,\\ b_1\alpha+(b_2-s)\beta&=\mu s,\\ c_1\alpha+c_2\beta-s\gamma&=c_1\lambda+c_2\mu.\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Так как $s\neq 0$, то из последнего уравнения получаем γ, если оба предшествующих уравнения разрешимы. Определитель коэффициентов левых частей двух первых уравнений (7) равен нулю, и между коэффициентами левых частей существует та же самая зависимость, что и между правыми частями, а именно

$$(a_1-s)\mu=b_1\lambda,\qquad a_2\mu=(b_2-s)\lambda.$$

Вследствие того, что $2s=a_1+b_2$, эти оба уравнения являются просто уравнениями (2). Поэтому числа α, β, γ можно выбрать так, чтобы они не были нулями и удовлетворяли уравнениям (7); следовательно, из (3) и (6) имеем:

$$\frac{\lambda x'+\mu y'}{s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu}=\frac{d}{dt}\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu},$$

а потому

$$z=\ln|s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu|-s\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{s(\lambda x+\mu y)+c_1\lambda+c_2\mu}$$

— интеграл.

(Бб) $s=0$. В этом случае главный интеграл уравнения — легко находимый полином не выше второй степени.

2.5. $x^2p+y^2q=0.$

$$z=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}.$$

2.6. $(x^2-y^2)p+2xyq=0.$

Характеристические уравнения — окружности $x^2+y^2=cy$. Главный интеграл $z=\dfrac{x^2+y^2}{y}$.

2.7. $(A_3x - A_1)\,p + (A_3y - A_2)\,q = 0.$

$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y$; см. 4.9.

2.8. $ax^m p + by^n q = 0.$

Главный интеграл

$$z = b\,(n-1)\,x^{1-m} - a\,(m-1)\,y^{1-n} \quad \text{для} \quad m \neq 1, \quad n \neq 1;$$

$$z = b \ln|x| + \frac{a}{n-1}\,y^{1-n}$$

для $m = 1$, $n \neq 1$, и соответственно для $m \neq 1$, $n = 1$.

2.9. $p \cos y + q \sin x = 0.$

$$z = \cos x + \sin y.$$

2.10. $\sqrt{f(x)}\,p + \sqrt{f(y)}\,q = 0, \quad f(t) = \sum_{\nu=0}^{4} a_\nu t^\nu.$

Частный случай уравнений 2.11, 4.12 (см. также Камке, ч. III, 1.71).

$$z = \left(\frac{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}}{x-y}\right)^2 - a_4(x+y)^2 - a_3(x+y).$$

Замена $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \frac{1}{x}$, $\eta = \frac{1}{y}$ переводит это уравнение в такое же уравнение с ξ, η, ζ вместо x, y, z и с $f(t) = a_0 t^4 + \ldots + a_4$. Поэтому

$$z = \left(\frac{x^2\sqrt{f(y)} + y^2\sqrt{f(x)}}{xy\,(x-y)}\right)^2 - a_0\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$$

— тоже интеграл первоначального уравнения, который, естественно, зависит от предыдущего.

2.11. $f(x)\,p + g(y)\,q = 0.$

$$z = \int \frac{dx}{f(x)} - \int \frac{dy}{g(y)} \quad \text{для} \quad f \neq 0, \quad g \neq 0.$$

2.12. $f_y p - f_x q = 0, \quad f = f(x, y).$

Это уравнение означает, что ищутся те непрерывно дифференцируемые функции, для которых функциональный определитель

$$\frac{\partial(z, f)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Согласно ч. I, п. 2.7, это функции, функционально зависящие от f, т. е. все функции вида $\Omega(f(x, y))$.

13—19. $f(x, y)p+g(x, y)q=h(x, y)$

2.13. $ap+bq=c$; Дифференциальное уравнение цилиндрической поверхности (см. ч. I, п. 5.3 (а)).

2.14. $ap+bq=x^2-y^2$.

Если, согласно методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$bx-ay, \qquad 3abz-bx^3+ay^3$$

— его базис. Отсюда получаем интеграл данного неоднородного уравнения

$$z=\frac{1}{3ab}(bx^3-ay^3)+\Omega(bx-ay).$$

Если, согласно методу ч. I. п. 4.2 (б), построить соответствующее двучленное однородное уравнение, то $bx-ay$ — его главный интеграл. Если теперь применить преобразование

$$z(x, y)=\zeta(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x}=bx-ay, \quad \bar{y}=y,$$

то получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$b\zeta_{\bar{y}}=\frac{(\bar{x}+a\bar{y})^2}{b^2}-\bar{y}^2,$$

откуда

$$b\zeta=\frac{(\bar{x}+a\bar{y})^3}{3b^2a}-\frac{\bar{y}^3}{3}+\Omega(\bar{x}),$$

что приводит к найденному выше интегралу.

2.15. $ap+bq=f(x)$.

$$z=\frac{1}{a}\int f(x)\,dx+\Omega(bx-ay).$$

Интеграл, который при $x=y$ равен нулю:

$$z=\frac{1}{a}\int\limits_{\frac{bx-ay}{b-a}}^{x} f(t)\,dt.$$

2.16. $xp+yq=ax$.

$$z=ax+\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.17. $xp+yq=a\sqrt{x^2+y^2}$; частный случай уравнения 2.18.

Характеристики — прямые $y=Ax$, $z=a\sqrt{x^2+y^2}+B$.

Интегральные поверхности получаются, например, винтовым движением какой-нибудь из этих прямых вокруг оси z:

$$z = a\sqrt{x^2+y^2} + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.18. $xp + yq = \sqrt{x^2+y^2}\, f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$

Характеристики

$$y = Ax, \quad z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + B;$$

интегральные поверхности имеют уравнение

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) + \Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.19. $yp - xq = ye^{x^2+y^2}.$

Преобразованием $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = x^2+y^2$, $\eta = y$ из данного уравнения получается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta_\eta = \pm \frac{\eta}{\sqrt{\xi - \eta^2}}\, e^{\xi},$$

откуда

$$z = xe^{x^2+y^2} + \Omega(x^2+y^2).$$

20—31. $f(x, y)\, p + g(x, y)\, q = h_1(x, y)\, z + h_0(x, y)$

2.20. $p + q = az.$

Если построить, согласно методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное уравнение, то ze^{-ax}, ze^{-ay} — его базис. Поэтому решения данного неоднородного уравнения получаются путем разрешения уравнения

$$\Omega(ze^{-ax}, \quad ze^{-ay}) = 0$$

относительно z. Например, получают для конкретных случаев:

$$\text{если} \quad \Omega(u, v) = \frac{A}{u} + \frac{B}{v} - 1, \quad \text{то} \quad z = Ae^{ax} + Be^{ay};$$

$$\text{если} \quad \Omega(u, v) = Au + Bv - 1, \quad \text{то} \quad \frac{1}{z} = Ae^{-ax} + Be^{-ay}.$$

Если применить метод ч. I, п. 4.2 (б), то с помощью решения $x - y$ соответствующего однородного уравнения и преобразования

$$z(x, y) = \zeta(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = x - y, \quad \bar{y} = y$$

приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\zeta_{\bar{y}} = a\zeta, \quad \text{т. е.} \quad \zeta = \Omega(\bar{x})\, e^{a\bar{y}},$$

откуда

$$z = \Omega(x - y)\, e^{ay}.$$

2.21. $p - yq = -z$; частный случай уравнения 2.23.

Интегральная поверхность, проходящая через кривую

$$2(y+z)\operatorname{ch} x = x^2 + y^2 + 1, \quad 2(y+z)\operatorname{sh} x = x^2 + y^2 - 1,$$

или, что то же самое, через кривую

$$yz = 0, \quad y + z = e^x,$$

имеет уравнение $z = 0$.

2.22. $2p - yq = -z$; частный случай уравнения 2.23.

Если построить, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то $e^x y^2$, $e^x z^2$ — его базис. Решение данного уравнения получается разрешением уравнения

$$\Omega(e^x y^2, e^x z^2) = 0 \tag{1}$$

относительно z.

Если ищется интегральная поверхность, проходящая через кривую

$$y = xz, \quad x = \ln y, \tag{2}$$

то уравнение (1) должно, в частности, выполняться для кривой (2), т. е. должно быть

$$\Omega(y^3, y^3 \ln^{-2} y) = 0. \tag{3}$$

В частности, если

$$\Omega(u, v) = -3\sqrt{\frac{v}{u}} + \ln u,$$

то из уравнения (3) получается

$$z = \frac{3y}{x + 2\ln y},$$

2.23. $ap + yq = bz$.

$$z = |y|^b\, \Omega(|y|^a e^{-x}).$$

2.24. $x(p - q) = yz$.

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$x + y, \quad z\exp[x - (x+y)\ln x]$$

— его базис. Поэтому интегралами данного дифференциального уравнения являются функции

$$z = \Omega(x+y)\exp[(x+y)\ln x - x].$$

2.25. $xp + yq = az$; дифференциальное уравнение однородных функций порядка a от двух независимых переменных (ср. с уравнением 4.8).

Для $a=2$ интегралами являются функции $z = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, а также, например, только один раз непрерывно дифференцируемая функция

$$z = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2 + y^2} & \text{для } x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0 & \text{для } x = y = 0. \end{cases}$$

2.26. $xp+yq=z-x^2-y^2+1.$

Если построить, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{y}{x},\quad \frac{z+x^2+y^2+1}{x}\left(\text{или}\ \frac{z+x^2+y^2+1}{y}\right)$$

— его интегральный базис. Следовательно, данное уравнение имеет интеграл

$$z=-x^2-y^2-1+x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.27. $(x-a)p+(y-b)q=z-c$; дифференциальное уравнение конической поверхности с вершиной в точке (a, b, c). См. ч. I, п. 5.3 (б).

2.28. $x(y+1)p+(y^2-x)q=yz$; см. уравнение 4.9, пример 2.

2.29. $x(2y-x+1)p-y(2x-y+1)q=(y-x)z.$

Если построить, пользуясь методом ч. I, п. 4.2 (а), соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{z}{x+y-1},\qquad \frac{(x+y-1)^3}{xy}$$

— его базис. Отсюда получаем интегралы данного уравнения:

$$z=(x+y-1)\Omega\left(\frac{(x+y-1)^3}{xy}\right).$$

2.30. $xy^2p+x^2yq=(x^2+y^2)z.$

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=xy^2,\quad y'(t)=x^2y,\quad z'(t)=(x^2+y^2)z.$$

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$x^2-y^2,\quad \frac{z}{xy}$$

— его базис. Отсюда получаем уравнение интегральной поверхности, для которой характеристики — асимптоты:

$$z=Cxy(x^2-y^2).$$

2.31. $x(x^2+3y^2)p+y(y^2+3x^2)q=2z(x^2+y^2).$

Если, следуя методу ч. I, п. 4.2 (а), построить соответствующее трехчленное однородное уравнение, то

$$\frac{xy}{z^2},\quad \frac{x^2-y^2}{z}$$

— его базис. Интегралы данного дифференциального уравнения получают, разрешая уравнение

$$\Omega\left(\frac{xy}{z^2}, \quad \frac{x^2-y^2}{z}\right)=0$$

относительно z.

Для того чтобы найти интегральную поверхность, проходящую через круг $x^2+y^2=r^2$, $z=a$, функцию $\Omega(u, v)$ нужно определить так, чтобы

$$\Omega(u, v)=0$$

для

$$u=\frac{xy}{z^2}, \quad v=\frac{x^2-y^2}{z}, \quad x^2+y^2=r^2, \quad z=a.$$

Отсюда находят вид функции $\Omega(u, v)$:

$$\Omega(u, v)=4a^4u^2+a^2v^2-r^4,$$

и для получения искомого интеграла остается разрешить относительно z уравнение

$$4a^4x^2y^2+a^2(x^2-y^2)^2z^2=r^4z^4.$$

32—43. $f(x, y)p+g(x, y)q=h(x, y, z)$

2.32. $p+q=e^z\sin(x+y)$.

Если, следуя методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее однородное уравнение, то

$$x-y, \quad 2e^{-z}-\cos(x+y)$$

— его базис. Интегралы данного уравнения получаются разрешением уравнения

$$2e^{-z}=\cos(x+y)+\Omega(x-y).$$

Интегральная поверхность, проходящая через кривую $x+y=0$, $e^z\cos^2 x=1$, имеет вид

$$e^{-z}=\cos x\cos y.$$

2.33. $p+2q=1+\sqrt{y-x-z}$.

Если, следуя методу ч. I, п. 5.4, построить соответствующее однородное уравнение, то

$$\psi_1(x, y, z)=2x-y, \quad \psi_2(x, y, z)=x+2\sqrt{y-x-z}$$

— его интегральный базис.

Если для данного дифференциального уравнения надо найти интеграл $z=\chi_1(x, y)$ с начальным значением $\chi_1(x, x)=0$, то определяем функцию $\Omega(u, v)$ так, чтобы

$$\Omega(u, v)=0$$

для

$$u=\psi_1(x, x, 0)=x, \quad v=\psi_2(x, x, 0)=x.$$

Такой функцией является $\Omega=v-u$. Чтобы получить искомый интеграл, соотношение

$$\psi_2-\psi_1=y-x+2\sqrt{y-x-z}=0$$

разрешаем относительно z.

$$\chi_1(x, y)=y-x-\left(\frac{y-x}{2}\right)^2.$$

Эта функция для $x \geqslant y$ действительно есть интеграл требуемого вида, хотя вычисления, в чем легко убедиться, прежде всего требуют $x>y$.

Если для данного уравнения ищется интеграл $\chi_2(x, y)$ с начальным значением $\chi_2(0, y)=y$, то его получают, разрешая уравнение $\psi_2=0$ относительно z:

$$\chi_2(x, y)=y-x-\frac{x^2}{4} \quad \text{для} \quad x \leqslant 0.$$

Но в обоих случаях интеграл $\chi(x, y)=y-x$ также удовлетворяет требуемым условиям. Итак, в обоих случаях имеются два различных интеграла требуемого вида. Однако это не противоречит общим теоремам из ч. I, пп. 5.4—5.6, так как там требовалось, чтобы начальные значения и сама функция $z=\chi(x, y)$ принадлежали той области пространства x, y, z, в которой коэффициенты данного дифференциального уравнения имеют непрерывные частные производные первого порядка. Эти условия здесь не выполнены.

2.34. $p+kq=(ax+by+cz)^n$.

Подстановка $u(x, y)=ax+by+cz(x, y)$ приводит к дифференциальному уравнению 2.35

$$u_x+ku_y=cu^n+a+b.$$

2.35. $ap+bq=z^n+c$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение,то

$$bx-ay, \quad a\int\frac{dz}{z^n+c}-x$$

— его базис. Если $z=\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируемое решение уравнения

$$a\int_0^z \frac{dz}{z^n+c}=x, \tag{1}$$

то

$$z=\varphi(x+\Omega(bx-ay)) \tag{2}$$

— решение данного дифференциального уравнения. Если $m=-n$ — четное положительное число и $c>0$, то из (1) следует, что x есть функция от z, производная которой отлична от 0 и которая при $z=0$ принимает нулевое значение. Следовательно, $\varphi(0)=0$.

Поэтому подходящим выбором функции Ω можно из формулы (2) получить произвольно много интегралов, которые при $|x|+|y|\to 0$ стремятся к нулю.

2.36. $xp+yq=z-a\sqrt{z^2-x^2-y^2}$, $x^2+y^2<z^2$.

Из характеристических уравнений

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,\quad z'(t)=z-a\sqrt{z^2-x^2-y^2}$$

следует: $\frac{y}{x}=C_1$. Подставим это соотношение в третье уравнение; тогда при $x>0$ имеем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}-a\sqrt{\left(\frac{z}{x}\right)^2-1-C_1^2},$$

и отсюда для функции $u(x)=z/x$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$xu'+a\sqrt{u^2-C_1^2-1}=0,$$

интегрируя которое, находим:

$$x^a\left(u+\sqrt{u^2-C_1^2-1}\right)=C_2.$$

Подставив сюда выражения для C_1 и u, находим для соответствующего по ч. I, п. 5.4 однородного уравнения интегральный базис

$$\psi_1=\frac{y}{x},\qquad \psi_2=x^{a-1}\left(z+\sqrt{z^2-x^2-y^2}\right).$$

Кривые $\psi_1=C_1$, $\psi_2=C_2$ — характеристики данного дифференциального уравнения. При $a=1$ это параболы, которые касаются конуса $z^2=x^2+y^2$; сам этот конус также является интегральной поверхностью данного дифференциального уравнения, но не принадлежит области $z^2>x^2+y^2$, в которой коэффициенты имеют непрерывные частные производные.

2.37. $x^2(p-q)=(z-x-y)^2$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то

$$x+y, \qquad \frac{x(z-x-y)}{z-2x-y}$$

— его интегральный базис. Следовательно, интегралы данного дифференциального уравнения — функции

$$z=\frac{(2x+y)\,\Omega(x+y)-x(x+y)}{\Omega(x+y)-x};$$

кроме того, также $z=2x+y$.

2.38. $(x^2+1)p+(y^2+1)q=-y(y^2+1)z^2$.

Если построить, согласно методу ч. I п. 5.4, соответствующее однородное уравнение, то

$$\frac{x-y}{1+xy}, \quad \frac{2}{z}-y^2$$

— его интегральный базис. Интегралы данного дифференциального уравнения получаются из соотношения

$$\frac{2}{z}=y^2+\Omega\left(\frac{x-y}{1+xy}\right).$$

2.39. $ax^2p+by^2q=cz^2$, $abc\neq 0$.

Если построить, согласно методу ч. I, п. 5.4, соответствующее однородное дифференциальное уравнение, то

$$\frac{1}{ax}-\frac{1}{by}, \quad \frac{1}{ax}-\frac{1}{cz}$$

— его интегральный базис. Следовательно, интегралами данного дифференциального уравнения являются функции

$$z=\frac{1}{c}\left(\frac{1}{ax}+\Omega\left(\frac{1}{by}-\frac{1}{ax}\right)\right)^{-1}.$$

2.40. $(A_1-A_0x)p+(A_2-A_0y)q=f(z)$, $A_\nu=a_\nu+b_\nu x+c_\nu y$.

Однородное дифференциальное уравнение, соответствующее данному уравнению в смысле ч. I, п. 5.4, есть уравнение 4.11.

2.41. $xy^2p+2y^3q=2(yz-x^2)^2$.

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное уравнение 3.47 имеет интегральный базис

$$\frac{x^2}{\ }, \quad y\exp\frac{y}{yz-x^2}.$$

Разрешая уравнение

$$\Omega\left(\frac{x^2}{y},\ y\exp\frac{y}{yz-x^2}\right)=0$$

относительно z, получают решения данного дифференциального уравнения. Кроме того, решением является также функция $z=\frac{x^2}{y}$.

2.42. $(xy+a^2)(xp-yq)=a(x^2+y^2)z^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного дифференциального уравнения интегральным базисом являются функции

$$xy,\ \frac{1}{z}+\frac{a}{2}\frac{x^2-y^2}{xy+a^2};$$

интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$\frac{1}{z}=\frac{a}{2}\frac{y^2-x^2}{xy+a^2}+\Omega(xy).$$

Интегральная поверхность, проходящая через круг $x^2+y^2=r^2$, $z=c$, имеет уравнение

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{c}+\frac{a}{2}\frac{y^2-x^2}{xy+a^2}\pm\frac{a}{2(xy+a^2)}\sqrt{r^4-4x^2y^2}.$$

2.43. $fp+gq=Az^2+Bz+C$, где f, g, A, B, C — данные функции от x, y.

Если z_1, z_2, z_3, z_4 — четыре различных интеграла, то их двойное отношение

$$w=\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2}:\frac{z_1-z_4}{z_3-z_4}$$

есть решение уравнения

$$fw_x+gw_y=0.$$

44—59. $f(x, y, z)p+g(x, y, z)q=h(x, y, z)$; функции f, g линейны относительно z

2.44. $p+zq=0$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $xz-y$, z составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получают из соотношения

$$\Omega(xz-y,\ z)=0.$$

Например, если $\Omega(u, v)=av-u-b$ или $\Omega(u, v)=v^2+u$, то интегралы соответственно таковы:

$$z=\frac{y-b}{x-a},\qquad z=-\frac{x}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{x^2+4y}.$$

2.45. $zp+q=a$.

Характеристики этого уравнения — параболы

$$z-ay=A, \quad z^2-2ax=B.$$

Интегралы получают, разрешая относительно z соотношение

$$\Omega(z^2-2ax,\ z-ay)=0.$$

Например, для линейной функции $\Omega(u, v)$ отсюда получают в качестве полного интеграла параболический цилиндр

$$(z+A)^2=2a(x+Ay)+B.$$

2.46. $zp+aq=x$.

Для соответствующего (в смысле п. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$(x+z)e^{-\frac{y}{a}}, \quad (x-z)e^{\frac{y}{a}}$$

составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$\Omega\left((x+z)e^{-\frac{y}{a}},\ (x-z)e^{\frac{y}{a}}\right)=0.$$

2.47. $(1-z)p+(1+z)q=0$.

Характеристики — прямые

$$(A+1)z+(A-1)y=B, \qquad z=A.$$

Интегралы получают методом ч. I, п. 5.4, разрешая соотношение

$$\Omega(z,\ x(z+1)+y(z-1))=0$$

относительно z. Интегралами будут, например, функции

$$z=\frac{y-x+C}{y+x}.$$

2.48. $(z+e^x)p+(z+e^y)q=z^2-e^{x+y}$.

Подстановка $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $\xi=e^x$, $\eta=e^y$ приводит к дифференциальному уравнению 2.56.

$$\xi(\zeta+\xi)\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}+\eta(\zeta+\eta)\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}=\zeta^2-\xi\eta.$$

2.49. $(bz-cy+A)p+(cx-az+B)q=ay-bx+C$; дифференциальное уравнение винтовой поверхности и поверхности вращения см. ч. I, п. 5.3 (в), (г).

2.50. $[b(x+y)-c(x+z)]\,p+[c(y+z)-a(y+x)]\,q=$
$=a(z+x)-b(z+y).$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного дифференциального уравнения функции $ax+by+cz$, $xy+yz+zx$ составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(ax+by+cz,\ xy+yz+zx)=0.$$

2.51. $p-4xzq=2x.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $y+z^2$, x^2-z составляют интегральный базис. Решения данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(y+z^2,\ x^2-z)=0.$$

Найдем интегральную поверхность, проходящую через гиперболу $y+z=5$, $x^2-z^2=9$. Так как гипербола должна удовлетворять этому уравнению, то получаем соотношение

$$\Omega(z^2-z+5,\ z^2-z+9)=0,$$

которое выполняется для $\Omega(u, v)=v-u-4$. Искомое решение z определяется из уравнения

$$x^2-z^2-y-z=4.$$

2.52. $xzp+yzq=xy.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, z^2-xy составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают из соотношения

$$z^2=xy+\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.53. $xzp+yzq=-x^2-y^2.$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, $x^2+y^2+z^2$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z соотношение

$$x^2+y^2+z^2=\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.54. $xzp + yzq = x^2 + y^2 + z^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$\psi_1(x, y, z) = \frac{y}{x}, \quad \psi_2(x, y, z) = \frac{1}{x^2}(z^2 - 2(x^2 + y^2)\ln x)$$

составляют интегральный базис.

Чтобы получить интеграл данного уравнения с начальным значением $z = y^2$ при $x = 1$, так определяют функцию $\Omega(u, v)$, чтобы

$$\Omega(u, v) = 0$$

для

$$u = \psi_1(1, y, y^2) = y, \qquad v = \psi_2(1, y, y^2) = y^4.$$

Таким образом, $\Omega(u, v) = u^4 - v$, и поэтому

$$z^2x^2 = y^4 + 2x^2(x^2 + y^2)\ln x$$

— искомый интеграл.

2.55. $2xzp + 2yzq = z^2 - x^2 - y^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{y}{x}$, $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$ составляют интегральный базис. Решения данного дифференциального уравнения получаются из соотношения

$$x^2 + y^2 + z^2 = x\Omega\left(\frac{y}{x}\right).$$

2.56. $x(z + x)p + y(z + y)q = z^2 - xy$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{z}{x} + \ln|y|$, $\frac{z}{y} + \ln|x|$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z соотношение

$$\Omega\left(\frac{z}{x} + \ln|y|, \frac{z}{y} + \ln|x|\right) = 0.$$

2.57. $(A_0x - A_1)p + (A_0y - A_2)q = A_0z - A_3$,

$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z$; см. 4.10.

2.58. $x^2zp + ye^xq = 0$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$z, \quad z\ln y - \int \frac{e^x}{x^2}\,dx$$

составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(z,\ z\ln y-\int\frac{e^x}{x^2}dx\right)=0.$$

2.59. $x^2(y-z)p+y^2(z-x)q=z^2(x-y)$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции xyz, $xy+yz+zx$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(xyz,\ xy+yz+zx)=0.$$

60—65. $f(x, y, z)p+g(x, y, z)q=h(x, y, z)$; функции f, g по z не выше второй степени

2.60. $(2y^2+z^2)xp-(z+3x^3)yq=(3x^3z-2y^2)z$.

Из характеристических уравнений легко получается, что вдоль каждой характеристики выражение x^3+y^2-z постоянно. Поэтому

$$z=x^3+y^2-C$$

— интеграл данного уравнения.

Интеграл, проходящий через параболу $x=a$, $z=y^2$, получается из общей формулы при $C=a^3$.

2.61. $(x^2-y^2-z^2)p+2xyq=2xz$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции $\frac{x^2+y^2+z^2}{y}$, $\frac{z}{y}$ составляют интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(\frac{z}{y},\ \frac{x^2+y^2+z^2}{y}\right)=0.$$

2.62. $(3x^2+y^2+z^2)yp-2x(x^2+z^2)q=2xyz$.

Интегральный базис u, v соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения приведен при рассмотрении уравнения 3.44. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение $\Omega(u, v)=0$.

2.63. $(xy-yz-z^2)p+(xz-xy-y^2)q=xy+xz+yz+y^2-x^2$.

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции x^2+y^2+2yz, x^2+z^2+2xy составляют

интегральный базис. Интегралы данного уравнения получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(x^2+y^2+2yz,\ x^2+z^2+2xy)=0.$$

2.64. $x^2z^2p+y^2z^2q=x^2y^2.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$z^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^3-3\left(\frac{y}{x}-\frac{x}{y}\right)+6\ln\left|\frac{y}{x}\right|=\Omega\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right).$$

Левая часть этого уравнения и аргумент функции Ω справа образуют интегральный базис для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения.

2.65. $xy(xy+2z^2)p+yz(yz-x^2)q=z^2(yz-x^2).$

Интегралы получают разрешением относительно z уравнения

$$\Omega\left(\frac{z}{y},\ \frac{z^2}{x}+\frac{xz}{y}+y\right)=0.$$

Оба аргумента функции Ω образуют интегральный базис для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения.

66—71. Прочие квазилинейные уравнения

2.66. $\left(1+\sqrt{z-x-y}\right)p+q=2.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(2y-z,\ y+2\sqrt{z-x-y}\right)=0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω. Решением будет также функция $z=x+y$.

2.67. $(x^2+z^2-1)p+\left(xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}\right)q=0.$

Коэффициенты определены и непрерывно дифференцируемы в области

$$x^2+y^2+z^2>1,\quad z^2<1. \tag{1}$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения функции

$$\psi_1(x,\ y,\ z)=z;\quad \psi_2(x,\ y,\ z)=\frac{xy+\sqrt{1-z^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}{x^2+z^2-1}$$

образуют интегральный базис.

Если надо найти интегральную поверхность, проходящую через окружность $x=0$, $y^2+z^2=1$, то применение метода, изложенного в примере ч. I, п. 5.4, невозможно, так как эта

окружность принадлежит границе области (1). Если все-таки действовать по этому методу, то (поскольку поверхность $\psi_2 = 0$ удовлетворяет начальным значениям) для искомого интеграла из уравнения $\psi_2 = 0$ получается уравнение

$$z^2 = 1 - y^2 \quad \text{при} \quad xy < 0.$$

Решением задачи является также $z^2 = 1 - x^2 - y^2$.

2.68. $p + (az^n + b)\,q = c.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega\left(z - cx,\ a\frac{z^{n+1}}{n+1} + bz - cy\right) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

Исследование случая $c = b$ см.: S. Finsterwalder, Zeitschrift für Gletscherkunde 2 (1908), стр. 81—103.

2.69. $(p + kq)(ax + by + cz)^n = 1$; см. уравнение 2.34.

2.70. $[yf(z) - x]\,p + yq = 0.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(z,\ 2xy - y^2 f(z)) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

2.71. $f_y(x, y, z)\,p - f_x(x, y, z)\,q = 0,\ |f_x| + |f_y| > 0.$

Интегралы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(z,\ f(x, y, z)) = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения интегральный базис образуют оба аргумента функции Ω.

Можно предложить иной путь решения. Согласно ч. I, п. 2.7, данное уравнение означает, что функции $z(x, y)$ и $f(x, y, z(x, y))$ для искомого интеграла $z(x, y)$ должны быть функционально зависимыми, так как

$$\frac{\partial(z, f)}{\partial(x, y)} = z_x(f_y + f_z z_y) - z_y(f_x + f_z z_x) = f_y z_x - f_x z_y.$$

При этом снова получается уже найденное выражение для интегралов.

ГЛАВА III

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—19. $f(x, y, z)\,w_x + g(x, y, z)\,w_y + h(x, y, z)\,w_z = 0$; функции f, g, h степени не выше первой

1—6. Одночленные коэффициенты

3.1. $aw_x + bw_y + cw_z = 0.$

$bx - ay$, $cx - az$ — интегральный базис.

3.2. $aw_x + byw_y + czw_z = 0.$

$y^a e^{-bx}$, $z^a e^{-cx}$ — интегральный базис.

3.3. $w_x + bzw_y + cyw_z = 0.$

Интегральный базис: $cy^2 - bz^2$ и, кроме того, $(cy + Az)\,e^{-Ax}$, $A = \sqrt{bc}$, если $bc > 0$; $cy\cos Ax + Az\sin Ax$, $A = \sqrt{-bc}$, если $bc < 0$.

3.4. $xw_x + byw_y + czw_z = 0.$

Интегральный базис $\frac{x^b}{y}$, $\frac{x^c}{z}$. Если, в частности, $b = c = 1$, то это уравнение для однородных функций нулевого порядка; интегральный базис в этом случае: $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$.

3.5. $xw_x + bzw_y + cyw_z = 0.$

Интегральный базис: $cy^2 - bz^2$ и, кроме того, $\frac{cy - \alpha z}{x^\alpha}$, $\alpha = \sqrt{bc}$, если $bc > 0$;

$$x^\alpha \exp\left(-\operatorname{arctg}\frac{\alpha z}{cy}\right), \quad \alpha = \sqrt{-bc}, \quad \text{если} \quad bc < 0.$$

3.6. $zw_x - xw_y + yw_z = 0.$

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = z, \quad y'(t) = -x, \quad z'(t) = y.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} -s & 0 & 1 \\ -1 & -s & 0 \\ 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = -s^3 - 1$$

имеет различные корни: -1, $\frac{1}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{3}$; поэтому это уравнение может быть решено тем же методом, что и уравнение 3.19.

7—11. Двучленные коэффициенты

3.7. $yw_x + xw_y - (x+y)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $x + y + z$, $x^2 - y^2$.

3.8. $xw_x + (y+z)(w_y - w_z) = 0.$

Интегральный базис: $y + z$, $x \exp\left(-\frac{y}{y+z}\right)$.

3.9. $xw_x + (y+z)\, w_y + (y-z)\, w_z = 0$, частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = x, \quad y'(t) = y + z, \quad z'(t) = y - z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ 0 & 1-s & 1 \\ 0 & 1 & -1-s \end{vmatrix} = (1-s)(s^2-2)$$

имеет три различных корня. Методом, которым решается уравнение 3.19, может быть получен интегральный базис:

$$\left[y + (\sqrt{2}-1)\, z\right] x^{-\sqrt{2}}, \quad \left[y - (\sqrt{2}+1)\, z\right] x^{\sqrt{2}}.$$

Интегралом будет, в частности, функция $w = y^2 - 2yz - z^2$.

3.10. $(y - 2z)\, w_x + (3z - x)\, w_y + (2x - 3y)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $3x + 2y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$.

3.11. $bc(y-z)\, w_x + ca(z-x)\, w_y + ab(x-y)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $ax + by + cz$, $ax^2 + by^2 + cz^2$.

12—19. Трехчленные коэффициенты

3.12. $xw_x + (ax + by)\, w_y + (cx + dy + fz)\, w_z = 0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=ax+by,\quad z'(t)=cx+dy+fz.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 1-s & 0 & 0 \\ a & b-s & 0 \\ c & d & f-s \end{vmatrix}=(1-s)(b-s)(f-s)$$

имеет корни 1, b, f. Далее см. 3.19.

3.13. $czw_x+(ax+by)w_y+(ax+by+cz)w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения

$$x'(t)=cz,\quad y'(t)=ax+by,\quad z'(t)=ax+by+cz.$$

Из них следует, что $x'+y'-z'=0$, т. е. $\psi_1=x+y-z$ — интеграл данного уравнения. Для того чтобы применить изложенное в ч. I, п. 3.5 (в), положим $z-x-y=C$. Тогда из написанных выше характеристических уравнений получаются следующие уравнения:

$$x'=c(x+y+C),\quad y'=ax+by,$$

являющиеся характеристическими для дифференциального уравнения

$$c(x+y+C)\frac{\partial w}{\partial x}+(ax+by)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Если их решить, согласно ч. I, п. 2.4, и подставить в решение еще $C=z-x-y$, то мы получим еще один, не зависящий от ψ_1 интеграл.

Если $\rho^2=4ac+(b-c)^2\neq 0$, то находим, например, что

$$\psi_2=\frac{2acz+(b-c-\rho)(ax+by)}{2acz+(b-c+\rho)(ax+by)}\{acz^2+$$
$$+(b-c)(ax+by)z-(ax+by)^2\}^{\frac{\rho}{b+c}},$$

если $a\neq b$, и

$$\psi_2=\{a(x+y)+cz\}\exp\left\{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\frac{cy-ax}{z-x-y}\right\},\quad \text{если}\quad a=b.$$

3.14. $2(x-y)w_x-(x-y-z)w_y-(x-y-3z)w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=2x-2y,\quad y'(t)=-x+y+z,\quad z'(t)=-x+y+3z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 2-s & -2 & 0 \\ -1 & 1-s & 1 \\ -1 & 1 & 3-s \end{vmatrix} = -s(s-2)(s-4)$$

имеет три различных корня. Далее см. 3.19.

3.15. $\mathbf{2(y-z)\, w_x - (4x-3y-z)\, w_y + (12x-3y-9z)\, w_z = 0;}$ частный случай уравнения 3.19.

Интегральный базис:

$$3x-3y-z, \quad \frac{(8x-5y-3z)^2}{2x-y-z}.$$

3.16. $\mathbf{(6x-4y+2z)\, w_x - (4x-10y+6z)\, w_y + (2x-6y+11z)\, w_z = 0;}$ частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = 6x-4y+2z, \quad y'(t) = -4x+10y-6z,$$
$$z'(t) = 2x-6y+11z.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} 6-s & -4 & 2 \\ -4 & 10-s & -6 \\ 2 & -6 & 11-s \end{vmatrix} = -(s-3)(s-6)(s-18)$$

имеет различные корни. Для каждого из этих корней s можно так определить числа α, β, γ, что из написанных выше характеристических уравнений будет следовать равенство

$$\frac{d}{dt}(\alpha x+\beta y+\gamma z) = s(\alpha x+\beta y+\gamma z).$$

Таким образом, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{2x'+2y'+z'}{3(2x+2y+z)} = \frac{-2x'+y'+2z'}{6(-2x+y+2z)} = \frac{x'-2y'+2z'}{18(x-2y+2z)}.$$

Интегрированием этих уравнений получают интегральный базис

$$\frac{(2x+2y+z)^2}{2x-y-2z}, \quad \frac{(2x-y-2z)^3}{x-2y+2z}.$$

3.17. $\mathbf{(ax+y-z)\, w_x - (x+ay-z)\, w_y + (a-1)(y-x)\, w_z = 0;}$ частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t) = ax+y-z, \quad y'(t) = -x-ay+z,$$
$$z'(t) = (1-a)x+(a-1)y.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} a-s & 1 & -1 \\ -1 & -a-s & 1 \\ 1-a & a-1 & -s \end{vmatrix} = -s\,[s^2-(a+3)(a-1)].$$

Далее см. 3.19.

Можно также использовать то, что выражение $z+y+x$ — интеграл, и применить редукцию, согласно ч. I, п. 3.5.

3.18. $(Ax+cy+bz)\,w_x+(cx+By+az)\,w_y+(bx+ay+Cz)\,w_z=0$; частный случай уравнения 3.19.

Характеристические уравнения:

$$x'(t)=Ax+cy+bz,\quad y'(t)=cx+By+az,$$
$$z'(t)=bx+ay+Cz.$$

Характеристический определитель

$$\begin{vmatrix} A-s & c & b \\ c & B-s & a \\ b & a & C-s \end{vmatrix} = (A-s)(B-s)(C-s)-$$
$$-[a^2(A-s)+b^2(B-s)+c^2(C-s)]+2abc.$$

Далее см. 3.19.

3.19. $(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)\,w_x+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)\,w_y+$
$+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)\,w_z=0.$

Ср. с 2.4. Характеристическая система:

$$\begin{cases} x'(t)=a_1x+b_1y+c_1z+d_1, \\ y'(t)=a_2x+b_2y+c_2z+d_2, \\ z'(t)=a_3x+b_3y+c_3z+d_3. \end{cases}$$

Решения этой системы зависят от корней характеристического определителя [1])

$$\begin{vmatrix} a_1-s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2-s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3-s \end{vmatrix}.$$

---

[1]) [См. Петровский, стр. 170—174; Степанов, стр. 283—297; Камке, стр. 90. — *Прим. ред.*]

Если s — его корень, то можно найти числа α, β, γ, не равные одновременно нулю, для которых

$$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \alpha s,$$
$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \beta s,$$
$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = \gamma s.$$

Тогда из характеристических уравнений следует, что

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = s(\alpha x + \beta y + cz) + D, \qquad (1)$$

где

$$D = \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3.$$

Если $s = D = 0$, то отсюда получают интеграл $\alpha x + \beta y + \gamma z$ уравнения в частных производных.

Если характеристический определитель имеет два отличных друг от друга и от нуля корня s_1, s_2, то получают два уравнения типа (1), а из них — соотношение

$$\frac{\alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z'}{s_1(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) + D_1} = \frac{\alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z'}{s_2(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) + D_2},$$

которое дает

$$\frac{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + D_1/s_1)^{s_2}}{(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + D_2/s_2)^{s_1}} = \text{const};$$

левая часть в этом равенстве — интеграл уравнения в частных производных.

Если характеристический определитель имеет три различных корня, то можно таким образом получить интегральный базис. Если имеются кратные корни, то в этом случае можно применить метод ч. I, п. 2.4. Впрочем, в этом случае можно решать систему характеристических уравнений и исключением t из решений находить интегралы уравнения в частных производных.

20—41. $f(x, y, z)\, w_x + g(x, y, z)\, w_y + h(x, y, z)\, w_z = 0$; функции f, g, h степени не выше второй

20—27. Одночленные коэффициенты

3.20. $aw_x + xzw_y - xyw_z = 0.$

С помощью метода, приведенного в ч. I, п. 3.5 (б), получают интегральный базис:

$$y^2 + z^2, \quad y \sin\frac{x^2}{2a} + z\cos\frac{x^2}{2a}.$$

Второй интеграл также можно заменить на $x^2 + 2a \operatorname{arctg}\frac{z}{y}$.

3.21. $x^2w_x - xyw_y - y^2w_z = 0.$

Интегральный базис: xy, $3xyz - y^3$.

3.22. $ax^2w_x + by^2w_y + cz^2w_z = 0.$

Любые две из функций

$$\frac{1}{by} - \frac{1}{ax}, \quad \frac{1}{cz} - \frac{1}{by}, \quad \frac{1}{ax} - \frac{1}{cz}$$

образуют интегральный базис.

3.23. $x^2w_x + z^2w_y + 2xzw_z = 0.$

Интегральный базис: $\frac{x^2}{z}$, $y - \frac{z^2}{3x}$.

3.24. $xyw_x + yzw_y + y^2w_z = 0.$

Интегральный базис: $y^2 - z^2$, $\frac{y+z}{x}$.

3.25. $xzw_x + yzw_y + xyw_z = 0.$

Интегральный базис: $\frac{y}{x}$, $z^2 - xy$.

3.26. $y^2w_x - xyw_y + 3xzw_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 + y^2$, y^3z.

3.27. $yzw_x - 2xzw_y - 2xyw_z = 0.$

Интегральный базис: $2x^2 + y^2$, $2x^2 + z^2$.

28—38. Двучленные коэффициенты

3.28. $xw_x + yw_y + (x^2 + y^2)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 + y^2 - 2z$, $\frac{y}{x}$.

3.29. $3zw_x - (2x - 1)\,yw_y + (2x - 1)\,zw_z = 0.$

Интегральный базис: yz, $x^2 - x - 3z$.

3.30. $xyw_x + x^2w_y - (2x + z)\,yw_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 - y^2$, $z^2 + xz$.

3.31. $xyw_x + y(y - a)\,w_y + z(y - a)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $\frac{y}{z}$, $\frac{y-a}{x}$.

3.32. $xzw_x + 2xyw_y - (2x + z)\,zw_z = 0.$

Интегральный базис: $x(x + z)$, xyz.

3.33. $xzw_x - yzw_y + (y^2 - x)\,w_z = 0$; см. ч. I, п. 3.3 (б).

3.34. $2xzw_x - 2yzw_y + (3y^2 - x)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: xy, $2x + 3y^2 + 2z^2$.

3.35. $x(y - z)\, w_x + y(z - x)\, w_y + z(x - y)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $x + y + z$, xyz.

3.36. $(xz + y^2)\, w_x + (yz - 2x^2)\, w_y - (2xy + z^2)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $2xz - y^2$, $x^2 + yz$.

3.37. $bc(x^2 - a^2)\, w_x + c(bxy + acz)\, w_y + b(cxz + aby)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{by + cz}{x - a}$, $\dfrac{by - cz}{x + a}$.

Характеристики задают двухпараметрическое семейство прямых

$$by + cz = C_1(x - a), \quad by - cz = C_2(x + a)$$

в пространстве x, y, z.

3.38. $a(y^2 + z^2)\, w_x + x(bz - ay)\, w_y - x(by + az)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 + y^2 + z^2$, $2a \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + b \ln(y^2 + z^2)$.

39—41. Трехчленные коэффициенты

3.39. $xzw_x + yzw_y + (ax^2 + ay^2 + bz^2)\, w_z = 0.$

Из характеристических уравнений следуют соотношения

$$xy' - x'y = 0 \quad \text{и} \quad \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{zz'}{ax^2 + ay^2 + bz^2}.$$

Второе из этих уравнений можно легко проинтегрировать, если сделать подстановку $x^2 + y^2 = u$, $z^2 = v$. Для исходного уравнения в частных производных получается интегральный базис

$$\frac{y}{x}, \quad \frac{a(x^2 + y^2) + (b - 1)z^2}{(x^2 + y^2)^b}.$$

Во второй функции знаменатель может быть также заменен на x^{2b}.

3.40. $2xzw_x + 2yzw_y + (z^2 - x^2 - y^2)\, w_z = 0$; частный случай уравнения 3.39.

Интегральный базис: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{x}$, $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{y}$.

3.41. $(A_0x - A_1)\, w_x + (A_0y - A_2)\, w_y + (A_0z - A_3)\, w_z = 0;$
$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z$; см. 4.9.

42—59. $f(x, y, z)\,w_x + g(x, y, z)\,w_y + h(x, y, z)\,w_z = 0$; прочие случаи

3.42. $y^2zw_x + xz^2w_y - xy^2w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^2 + z^2$, $y^3 + z^3$.

3.43. $x(by^2 - cz^2)\,w_x + y(cz^2 - ax^2)\,w_y + z(ax^2 - by^2)\,w_z = 0.$

Интегральный базис: $ax^2 + by^2 + cz^2$, xyz.

3.44. $(3x^2 + y^2 + z^2)\,yw_x - 2(x^2 + z^2)\,xw_y + 2xyzw_z = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{z}$, $\dfrac{2x^2 + y^2}{z^2}$.

3.45. $[(x^2 + y^2 - 1)\,x + y]\,w_x + [(x^2 + y^2 - 1)\,y - x]\,w_y + 2zw_z = 0.$

Этот пример имеет принципиальное значение. Получается небольшое формальное упрощение, если уравнение умножить на -1. Характеристические уравнения после этого примут вид

$$x'(t) = (1 - x^2 - y^2)\,x - y, \quad y'(t) = (1 - x^2 - y^2)\,y + x, \quad z'(t) = -2z. \tag{1}$$

Точка покоя этой системы: $x = y = z = 0$. Кроме этого тривиального решения, система (1) имеет, например, решения

$$x = y = 0, \quad z = Ce^{-2t},$$

т. е. обе половины оси z. Если отбросить все три эти случая, то для каждого решения будет справедливо неравенство $x^2 + y^2 \neq 0$.

Введем полярные координаты, т. е. выберем для каждого решения $x(t)$, $y(t)$ двух первых уравнений системы (1) непрерывно дифференцируемые функции $r(t) > 0$, $\vartheta(t)$ такие, чтобы

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta.$$

Тогда из системы (1) получаем новую систему

$$r' = (1 - r^2)\,r, \quad \vartheta' = 1, \quad z' = -2z. \tag{2}$$

Очевидно, что можно выбрать $\vartheta = t$. Все решения системы (2) тогда имеют вид

$$1 - \frac{1}{r^2} = C_1e^{-2t}, \quad z = C_2e^{-2t}.$$

Для $C_1 = C_2 = 0$ это окружность $r = 1$, $z = 0$. Для $C_1 \neq 0$ каждая из кривых асимптотически стремится к этой окружности при $t \to \infty$ как винтовая линия или спираль. Кривые, у которых $C_1 < 0$, $C_2 > 0$, неограниченно приближаются к положительной полуоси z при $t \to -\infty$.

Если из всего пространства x, y, z вынута отрицательная полуось z вместе с нулевой точкой, то исходное дифференциальное уравнение с частными производными не имеет особых точек, т. е. все три его коэффициента нигде не обращаются в нуль одновременно. Тем не менее это дифференциальное уравнение, кроме тривиальных интегралов $z = \text{const}$, не имеет ни одного интеграла, который существовал бы во всей только что указанной односвязной области.

В самом деле, каждый интеграл постоянен вдоль каждой характеристики. Если интеграл имеет на окружности $r = 1$ значение C, то, так как винтовые и спиралевидные кривые произвольно близко подходят к этому кругу, он должен иметь то же значение C также и на всех этих кривых, и таким образом — также на положительной полуоси z. Следовательно, он имеет значение C на всех характеристиках в рассматриваемой области и, таким образом, во всей этой области.

Этот пример, автором которого является E. Digel, был опубликован E. Kamke, Math. Zeitschrift 42 (1937), стр. 288. Аналогичный пример построил T. Ważewski, Mathematica 9 (1935), стр. 179.

3.46. $2xzw_x + y(z+1)\, w_y + xy(z+1)^2 w_z = 0.$

Положим $w(x, y, z) = \zeta(x, s, z)$, где $s = xy$. Тогда дифференциальное уравнение для ζ имеет решение $z - s$. Метод редукции ч. I, п. 3.5 теперь дает для исходного уравнения интегральный базис:

$$z - xy, \quad \frac{z - xy}{(z - xy + 1)^2} \ln \frac{xy}{z+1} - \frac{1}{(z+1)(z - xy + 1)} - \frac{1}{2} \ln x.$$

3.47. $xy^2 w_x + 2y^3 w_y + 2(yz - x^2)^2 w_z = 0.$

Частное решение: $\frac{x^2}{y}$. Если к уравнению применить метод редукции ч. I, п. 3.5, подставив $w(x, y, z) = v(x, \eta, z)$, $\eta = \frac{x^2}{y}$, то оно перейдет в уравнение

$$x v_x + 2(z - \eta)^2 v_z = 0$$

с решением $x^2 \exp \frac{1}{z - \eta}$. Поэтому данное уравнение имеет интегральный базис

$$\frac{x^2}{y}, \quad y \exp \frac{y}{zy - x^2}.$$

3.48. $x(y^3 - 2x^3)\, w_x + y(2y^3 - x^3)\, w_y + 9z(x^3 - y^3)\, w_z = 0.$

Интегральный базис: $x^3 y^3 z$, $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2}$.

3.49. $x^2(xy-z^2)w_x+xy(xy-z^2)w_y+yz(yz+2x^2)w_z=0.$

Интегральный базис: $\frac{y}{x}$, $\frac{x^2y+y^2z+z^2x}{yz}$.

3.50. $x(z^4-y^4)w_x+y(x^4-2z^4)w_y+z(2y^4-x^4)w_z=0.$

Интегральный базис: $x^4+y^4+z^4$, x^2yz.

3.51. $x(y^n-z^n)w_x+y(z^n-x^n)w_y+z(x^n-y^n)w_z=0.$

Интегральный базис: xyz, $x^n+y^n+z^n$.

3.52. $xw_x+yw_y+a\sqrt{x^2+y^2}\,w_z=0.$

Интегральный базис: $\frac{y}{x}$, $a\sqrt{x^2+y^2}-z$.

3.53. $xw_x+yw_y+\left(z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)w_z=0.$

Первые два из характеристических уравнений

$$x'(t)=x,\quad y'(t)=y,\quad z'(t)=z-a\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

дают $\frac{y}{x}=C_1$, т. е. $\psi_1=\frac{y}{x}$—интеграл. Если подставить в третье характеристическое уравнение $y=C_1x$, то для $x>0$ получаем:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z'(t)}{x'(t)}=\frac{z}{x}-a\sqrt{C_1^2+1+\left(\frac{z}{x}\right)^2},$$

и отсюда, полагая $z=xu(x)$, находим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$xu'+a\sqrt{u^2+C_1^2+1}=0.$$

Из этого уравнения имеем:

$$x^a\left(u+\sqrt{u^2+C_1^2+1}\right)=C_2.$$

Подстановка выражений для C_1 и u приводит к интегралу

$$\psi_2=x^{a-1}\left(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right);$$

ψ_1 и ψ_2 образуют интегральный базис.

3.54. $z\sqrt{y^2+z^2}\,w_x+az\sqrt{x^2+z^2}\,w_y-$

$$-\left(x\sqrt{y^2+z^2}+ay\sqrt{x^2+z^2}\right)w_z=0.$$

Из характеристических уравнений находим, что

$$xx'+yy'+zz'=0,$$

следовательно,

$$\psi_1(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2$$

— интеграл. Если теперь заменить $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (см. ч. I, п. 3.5 (в)) и исключить z из характеристических уравнений, то получим уравнение

$$\frac{ax'}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{y'}{\sqrt{r^2 - y^2}},$$

а отсюда — интеграл

$$\psi_2 = a \arcsin \frac{x}{r} - \arcsin \frac{y}{r}, \quad \text{где} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Оба найденных интеграла ψ_1 и ψ_2 образуют базис.

3.55. $w_x - y w_y \operatorname{ctg} x + z w_z \operatorname{ctg} x = 0.$

Интегральный базис: yz, $y \sin x$.

3.56. $w_x \operatorname{tg} x + w_y \operatorname{tg} y + w_z \operatorname{tg} z = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{\sin x}{\sin y}$, $\dfrac{\sin y}{\sin z}$.

3.57. $w_x \operatorname{ctg} x + w_y \operatorname{ctg} y + w_z \operatorname{ctg} z = 0.$

Интегральный базис: $\dfrac{\cos x}{\cos y}$, $\dfrac{\cos y}{\cos z}$.

3.58. $x w_x + y w_y + [z + f(x, y)]\, w_z = 0.$

Из характеристических уравнений

$$x'(t) = x, \quad y'(t) = y, \quad z'(t) = z + f(x, y)$$

прежде всего получаем $\dfrac{y}{x} = C_1$. Следовательно, $\psi_1(x, y, z) = \dfrac{y}{x}$ — интеграл. Тогда из третьего характеристического уравнения имеем:

$$z'(t) = z + f(x, C_1 x),$$

а после присоединения к этому уравнению первого характеристического уравнения получаем линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z'(t)}{x'(t)} = \frac{z}{x} + \frac{f(x, C_1 x)}{x}.$$

Отсюда

$$z = C_2 x + x \int_a^x \frac{f(t, C_1 t)}{t^2}\, dt.$$

Следовательно, если подставить выражение для C_1, то

$$z = C_2 x + x \int_a^x f\left(t, \frac{y}{x} t\right) t^{-2}\, dt. \tag{1}$$

Функция $\psi_2(x, y, z)$, получающаяся после разрешения этого уравнения относительно C_2, является вторым интегралом исходного уравнения.

Если, например,

$$f(x, y) = \frac{cxy}{\sqrt{(c^2+x^2)(c^2+y^2)}},$$

то при $a=0$ уравнение (1) имеет вид

$$z = C_2 x + cy \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(c^2+t^2)\left(c^2+\frac{y^2t^2}{x^2}\right)}}$$

или после замены переменных $t = x\xi$

$$z = C_2 x + cxy \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(c^2+x^2\xi^2)(c^2+y^2\xi^2)}};$$

это эллиптический интеграл с постоянными пределами интегрирования.

3.59. $(y-z)\sqrt{f(x)}\,w_x + (z-x)\sqrt{f(y)}\,w_y + (x-y)\sqrt{f(z)}\,w_z = 0,$
$f(t) = \sum_{\nu=0}^{6} a_\nu t^\nu.$

Функция

$$w = \left(\frac{(y-z)\sqrt{f(x)} + (z-x)\sqrt{f(y)} + (x-y)\sqrt{f(x)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right)^2 - \\ - a_6(x+y+z)^2 - a_5(x+y+z)$$

является интегралом. Замена

$$w(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \eta = \frac{1}{y}, \quad \zeta = \frac{1}{z}$$

исходное уравнение переводит в такое же уравнение относительно ξ, η, ζ, W вместо x, y, z, w и с $f^*(t) = a_0t^6 + \ldots + a_6$. Поэтому функция

$$w = \left(\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{f(x)} + z^2x^2(z-x)\sqrt{f(y)} + x^2y^2(x-y)\sqrt{f(z)}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right)^2 - \\ - a_0\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

является также (вообще говоря, не зависящим от прежнего) интегралом дифференциального уравнения; в этой формуле $f(t)$ снова имеет первоначальное значение. См. также 4.12.

60—64. Общие линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения

3.60. $2xw_x + 3yw_y + 6zw_z = 6.$

Частное решение: $\ln|z|$. Присоединяя к нему все решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, получают все решения; интегральным базисом однородного уравнения являются функции

$$\frac{x^3}{z}, \quad \frac{y^2}{z}.$$

3.61. $x^2w_x + y^2w_y + z^2w_z = xyz.$

Интегральный базис соответствующего однородного уравнения:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{z}.$$

Согласно ч. I, п. 4.2, частное решение данного уравнения имеет вид

$$w = xyz\left(\frac{x\ln x}{(x-y)(x-z)} + \frac{y\ln y}{(y-x)(y-z)} + \frac{z\ln z}{(z-x)(z-y)}\right). \quad (1)$$

Все решения данного уравнения получают, присоединяя к решению (1) все решения однородного уравнения.

3.62. $xw_x + yw_y + zw_z = aw + f(x, y, z).$

Для соответствующего однородного уравнения функции $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}$ образуют интегральный базис. Если (ср. ч. I, п. 4.2) произвести замену

$$w(x, y, z) = W(\xi, \eta, \zeta), \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{x}, \quad \zeta = \frac{z}{x},$$

то из данного уравнения получится обыкновенное дифференциальное уравнение

$$W_\xi - \frac{a}{\xi}W = \frac{1}{\xi}f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta),$$

и, следовательно,

$$W = \xi^a\left\{\Omega(\eta, \zeta) + \int \xi^{-a-1}f(\xi, \xi\eta, \xi\zeta)\,d\xi\right\}.$$

3.63. $(y+z+w)w_x + (z+x+w)w_y + (x+y+w)w_z = 0.$

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное дифференциальное уравнение для $W = W(x, y, z, w)$ имеет вид

$$(y+z+w)W_x + (z+x+w)W_y + (x+y+w)W_z = 0. \quad (1)$$

Его характеристические уравнения

$$x'(t) = y + z + w, \quad y'(t) = z + x + w,$$
$$z'(t) = x + y + w, \quad w'(t) = 0$$

дают интегрируемую систему

$$-\frac{x' + y' + z' + \frac{3}{2}w'}{x + y + z + \frac{3}{2}w} = 2\frac{x' - y'}{x - y} = 2\frac{y' - z'}{y - z}.$$

Так как очевидно, что $W = w$ — интеграл, то интегралами однородного уравнения (1) являются функции

$$W = \Omega\left(\frac{x - y}{y - z}, w, (x - y)^2\left(x + y + z + \frac{3}{2}w\right)\right).$$

Разрешая уравнение $W = 0$ относительно w, получают решения исходного уравнения.

3.64. $(zw - xy^2)w_x + yzw_y + z^2w_z = zw.$

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 5.4) однородное уравнение есть уравнение 4.5. Поэтому интеграл данного уравнения получится, если разрешить уравнение

$$\Omega\left(\frac{w}{y}, \frac{z}{y}, \left(x - \frac{zw}{y^2}\right)\exp\frac{y^2}{z}\right) = 0$$

относительно w. Интегралом является также функция $w = \frac{xy^2}{z}$; она обращает в нуль первый коэффициент уравнения.

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧЕТЫРЬМЯ И БОЛЕЕ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

4.1. $p_1+(x_3-x_4)p_2+(x_1+x_2+x_3)p_3+(x_1+x_2+x_4)p_4=0.$

Интегральный базис:

$$x_2-x_3+x_4,\quad (x_3-x_4)e^{-x_1},$$
$$(x_1x_3-x_1x_4-x_1-x_2-x_4-1)e^{-x_1}.$$

4.2. $x_1p_1+(x_3+x_4)p_2+(x_2+x_4)p_3+(x_2+x_3)p_4=0.$

Интегральный базис: $x_1(x_2-x_3)$, $x_1(x_2-x_4)$, $\dfrac{x_2+x_3+x_4}{x_1^2}$.

4.3. $(x_2+x_3+x_4)p_1+(x_1+x_3+x_4)p_2+(x_1+x_2+x_4)p_3+$
$$+(x_1+x_2+x_3)p_4=0.$$

Интегральный базис: $\dfrac{x_4-x_2}{x_4-x_1}$, $\dfrac{x_4-x_3}{x_4-x_1}$, $(x_4-x_1)^3\times$ $\times(x_1+x_2+x_3+x_4)$.

4.4. $x_1x_3p_1+x_2x_3p_2+x_3^2p_3+(x_1x_2+ax_3x_4)p_4=0.$

Интегральный базис: $\dfrac{x_2}{x_1}$, $\dfrac{x_3}{x_1}$, $x_1^{1-a}\dfrac{x_2}{x_3}+(a-1)x_4x_1^{-a}$.

4.5. $(x_3x_4-x_1x_2^2)p_1+x_2x_3p_2+x_3^2p_3+x_3x_4p_4=0.$

Очевидные интегралы: $\dfrac{x_3}{x_2}$, $\dfrac{x_4}{x_2}$. Далее, методом редукции ч. I, п. 3.5 находим интеграл

$$\left(x_1-\frac{x_3x_4}{x_2^2}\right)\exp\frac{x_2^2}{x_3}.$$

Три найденных интеграла образуют базис.

4.6. $x_2x_3x_4p_1+x_3x_4x_1p_2+x_4x_1x_2p_3+x_1x_2x_3p_4=0.$

Интегральный базис: $x_1^2-x_2^2$, $x_2^2-x_3^2$, $x_3^2-x_4^2$.

4.7. $$(x_2+x_3+x_4+x_5)p_1+(x_3+x_4+x_5+x_1)p_2+$$
$$+(x_4+x_5+x_1+x_2)p_3+(x_5+x_1+x_2+x_3)p_4+$$
$$+(x_1+x_2+x_3+x_4)p_5=0.$$

Интегральный базис:

$$\frac{s-5x_\nu}{s-5x_{\nu+1}},\quad \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где $s=x_1+\ldots+x_5$. См. также 4.3.

4.8. $\sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu = az$; уравнение однородных функций.

Интегралы в области $\mathfrak{G}(x_1,\ldots,x_n)$ — однородные порядка a функции $z=\psi(x_1,\ldots,x_n)$ с непрерывными частными производными первого порядка.

Как известно, функция $\psi(x_1,\ldots,x_n)$ в области $\mathfrak{G}$ называется *однородной порядка* a, если для каждых двух точек $(x_1,\ldots,x_n)$ и $(tx_1,\ldots,tx_n)$, принадлежащих области $\mathfrak{G}$ вместе с соединяющим их отрезком, можно написать равенство

$$\psi(tx_1,\ldots,tx_n)=t^a\psi(x_1,\ldots,x_n).$$

Пример однородной функции первого порядка, которая не является полиномом: $\psi(x,y)=x\sin\frac{y}{x}$.

4.9. $\sum\limits_{\nu=1}^{m}(A_0x_\nu-A_\nu)p_\nu=0,\ A_\nu=a_{\nu0}+\sum\limits_{\varkappa=1}^{m}a_{\nu\varkappa}x_\varkappa$; уравнение Хессе.

Это уравнение можно свести к уравнению с $m+1$ независимой переменной, но с линейными коэффициентами. Именно, сделаем замену (введем *однородные координаты*)

$$z(x_1,\ldots,x_m)=\zeta(\xi_0,\xi_1,\ldots,\xi_m),$$

где

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_0},\ldots,x_m=\frac{\xi_m}{\xi_0};\tag{1}$$

тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=\xi_0\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu},\quad \nu=1,\ldots,m,\quad \sum_{\nu=1}^{m}x_\nu\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=-\xi_0\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0},$$

и, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$\sum_{\nu=0}^{m}A_\nu^*\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu}=0,\quad \text{где}\quad A_\nu^*=\sum_{\varkappa=0}^{m}a_{\nu\varkappa}\xi_\varkappa.\tag{2}$$

Каждое решение исходного уравнения дает такое решение $\zeta(\xi_0, \ldots, \xi_m)$ уравнения (2), что из функции ζ подстановкой (1) получается функция от $x_1, \ldots, x_m$, т. е. ζ — однородная функция нулевого порядка. Наоборот, каждое решение ζ уравнения (2), которое обладает этим свойством, дает в результате подстановки (1) интеграл первоначального уравнения. О решении уравнения (2) см. 3.19.

Пример 1.

$$(x+1)\,yp+(y^2-x)\,q=0. \tag{3}$$

Здесь $x_1=x$, $x_2=y$, $A_0=x_2$, $A_1=-x_2$, $A_2=x_1$, и уравнение (2) имеет вид

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}=0.$$

Его интегральный базис: $\xi_0+\xi_1$, $\xi_1^2+\xi_2^2$; интегралами являются все функции $\zeta=\Omega(\xi_0+\xi_1, \xi_1^2+\xi_2^2)$.

Теперь нужно так выбрать функцию Ω, чтобы из ζ подстановкой (1) получилась функция только от x_1, x_2; это выполнено для $\Omega(u, v)=\frac{u^2}{v}$. Окончательно получаем;

$$\zeta=\frac{(\xi_0+\xi_1)^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}, \qquad \text{т. е.} \qquad z=\frac{(x+1)^2}{x^2+y^2}.$$

Пример 2.

$$x\,(y+1)\,p+(y^2-x)\,q=yz.$$

Соответствующее (в смысле ч. I, п. 4.2 (а)) однородное уравнение, если вместо x, y, z писать x_1, x_2, x_3, имеет вид

$$x_1(x_2+1)\,p+(x_2^2-x_1)\,p_2+x_2x_3p_3=0; \tag{4}$$

это уравнение типа 4.9 с $A_0=x_2$, $A_1=-x_1$, $A_2=x_1$, $A_3=0$. Уравнение (2) здесь имеет вид

$$\xi_2\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_0}-\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_1}+\xi_1\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_2}+0\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_3}=0.$$

Из его характеристических уравнений получаем интегральный базис

$$\zeta_1=\xi_3, \quad \zeta_2=\xi_1+\xi_2, \quad \zeta_3=\xi_0-\xi_1+(\xi_1+\xi_2)\ln|\xi_1|.$$

Каждая непрерывно дифференцируемая функция $\zeta=\Omega(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ есть снова интеграл.

Теперь надо найти такую функцию Ω, чтобы при подстановке (1) получилась функция только от x_1, x_2, x_3; это выполнено, например, в случае, если

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2}=\frac{\xi_3}{\xi_1+\xi_2}=\frac{x_3}{x_1+x_2}.$$

В случае

$$-\frac{\zeta_3}{\zeta_2}=\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi_1+\xi_2}-\ln|\xi_1|$$

это не достигается из-за логарифмического члена. Но если добавить сюда еще $\ln|\zeta_2|$, то получится интеграл

$$\frac{\xi_1-\xi_0}{\xi_1+\xi_2}+\ln\left|\frac{\xi_1+\xi_2}{\xi_1}\right|=\frac{x_1-1}{x_1+x_2}+\ln\left|\frac{x_1+x_2}{x_1}\right|.$$

Окончательно, для уравнения (4) имеем базис

$$\frac{z}{x+y},\quad \frac{x-1}{x+y}+\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|,$$

а для исходного неоднородного уравнения — интегралы

$$z=(x+y)\,\Omega\left(\frac{x-1}{x+y}+\ln\left|\frac{x+y}{x}\right|\right).$$

4.10. $$\sum_{\nu=1}^{m-1}(A_0x_\nu-A_\nu)\,p_\nu=A_0z-A_m,\qquad A_\nu=a_{\nu0}+\sum_{\varkappa=1}^{m-1}a_{\nu\varkappa}x_\varkappa+a_{\nu n}z.$$

Согласно ч. I, п. 4.2, это неоднородное линейное уравнение можно преобразовать в однородное уравнение 4.9.

4.11. $$\sum_{\nu=1}^{m}(A_\nu-A_0x_\nu)\frac{\partial z}{\partial x_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(y_1,\ldots,y_n)\frac{\partial z}{\partial y_\nu}=0,$$

$$A_\nu=a_{\nu0}+\sum_{k=1}^{m}a_{\nu k}x_k.$$

Методом Хессе (см. 4.9) здесь также можно добиться, чтобы первые коэффициенты стали линейными. Если положить

$$z(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)=\zeta(\xi_0,\ldots,\xi_m,y_1,\ldots,y_n),$$

где

$$x_1=\frac{\xi_1}{\xi_0},\ \ldots,\ x_m=\frac{\xi_m}{\xi_0},$$

то из данного уравнения получится

$$\sum_{\nu=0}^{m}A_\nu^*\frac{\partial\zeta}{\partial\xi_\nu}+\sum_{\nu=1}^{n}f_\nu(y_1,\ldots,y_n)\frac{\partial\zeta}{\partial y_\nu}=0,$$

где

$$A_\nu^*=\sum_{\varkappa=0}^{m}a_{\nu\varkappa}\xi_\varkappa.$$

Если, в частности, $n=1$, $f_1=1$, то в характеристических уравнениях может быть выбрано в качестве независимого переменного $y=y_1$; тогда характеристические уравнения образуют линейную систему

$$\xi_\nu'(y)=A_\nu^*,\quad \nu=1,\ldots,m.$$

R. H. J. Germay, *Annales Bruxelles* 59 (1939), стр. 139—144, распространил изложенный метод на случай, когда $a_{\nu\varkappa}$ является функциями x_ρ.

4.12. $\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)} p_\nu = 0, \; f(t) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu t^\nu, \; F(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - x_k).$

При преобразовании

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_n), \quad \xi_\nu = \frac{1}{x_\nu}$$

данное уравнение переходит в такое же уравнение с ξ_ν, ζ вместо x_ν, z и с $f^*(t) = a_0 t^{2n} + \ldots + a_{2n}$. Если для первоначального уравнения найден какой-нибудь интеграл, то второй интеграл получают, заменяя x_ν на $\frac{1}{x_\nu}$ и $a_0, \ldots, a_{2n}$ на $a_{2n}, \ldots, a_0$.

Интегралами служат функции

$$z = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)} \right)^2 - a_{2n} \left(\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \right)^2 - a_{2n-1} \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu;$$

$$z = \sqrt{F(\alpha) F(\beta)} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(x_\nu - \alpha)(x_\nu - \beta) F'(x_\nu)},$$

если α, β — два корня $f(x)$;

$$z = F(c) \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(c - x_\nu) F'(x_\nu)} \right)^2 - \frac{f(c)}{F(c)} - a_{2n} F(c)$$

для любого c.

ГЛАВА V

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ И КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1—2. Две независимые переменные

5.1. $yp = xq, \quad xp + yq = z.$

Разрешая эти уравнения относительно p, q, получим

$$\frac{p}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{q}{z} = \frac{y}{x^2+y^2};$$

следовательно,

$$z = c\sqrt{x^2+y^2}.$$

5.2. $[x(x-a)-z-c]\,p + y(x-a)\,q = (x-2a)\,z - cx,$

$$x(y-b)\,p + [y(y-b)-z-c]\,q = (y-2b)\,z - cy.$$

Эту систему можно записать еще и в другом виде:

$$\left.\begin{aligned}(x-a)(xp+yq-2z) &= (z+c)(p-x),\\ (y-b)(xp+yq-2z) &= (z+c)(q-y).\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Отсюда следует, что

$$(z+c)\,[(y-b)(p-x)-(x-a)(q-y)] = 0.$$

Поскольку $z = -c$ при $c \neq 0$ не является решением системы, то должно быть равно нулю выражение в квадратных скобках, т. е.

$$(y-b)\,p - (x-a)\,q = ay - bx.$$

Исходная система может быть заменена этим и первым уравнением (1).

Теперь переходим к соответствующим (в смысле ч. I, п. 7.2) однородным уравнениям:

$$(y-b)\,w_x - (x-a)\,w_y + (ay-bx)\,w_z = 0, \qquad (2)$$

$$[x(x-a)-z-c]\,w_x + y(x-a)\,w_y + \\ + [(x-2a)\,z - cx]\,w_z = 0. \qquad (3)$$

Для уравнения (2) из характеристических уравнений получается интегральный базис:

$$(x-a)^2+(y-b)^2, \quad z-ax-ay.$$

Если мы, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), сделаем замену

$$w(x, y, z)=\zeta(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad \xi_1=(x-a)^2+(y-b)^2,$$
$$\xi_2=z-ax-by, \quad \xi_3=z,$$

то уравнение (2) перейдет в уравнение $\zeta_{\xi_3}=0$. Эта же замена превращает уравнение (3) в уравнение 2.4:

$$2(\xi_1-\xi_2-a^2-b^2-c)\zeta_{\xi_1}+(\xi_2-c)\zeta_{\xi_2}=0,$$

для которого легко находится интегральный базис:

$$\frac{\xi_1-2\xi_2-a^2-b^2}{(\xi_2-c)^2}.$$

Таким образом, решение исходной системы получим, разрешая относительно z соотношение

$$C_1(z-ax-by-c)^2=C_2(2z-x^2-y^2).$$

3—9. Три независимые переменные

5.3. $p_1-p_2=z, \ p_1-p_3=z$; см. ч. I, п. 6.4.

5.4. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3=0, \ x_2p_1-x_1p_2-x_3p_3=0.$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции $\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}$ составляют интегральный базис. Если, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), мы сделаем замену

$$z(x_1, x_2, x_3)=\zeta(y_1, y_2, y_3), \quad y_1=\frac{x_1}{x_3}, \quad y_2=\frac{x_2}{x_3}, \quad y_3=x_3,$$

то получим уравнение

$$(y_2+y_1)\zeta_{y_1}+(y_2-y_1)\zeta_{y_2}=0$$

с интегралом

$$\zeta=\operatorname{arctg}\frac{y_2}{y_1}+\ln\sqrt{y_1^2+y_2^2}.$$

Поэтому интегральным базисом данной системы будет:

$$z=\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}\ln\frac{x_1^2+x_2^2}{x_3^2}.$$

5.5. $3x_1p_1+4x_2p_2+5x_3p_3=0,\quad x_1p_2+2x_2p_3=0.$

Это полная система. Для первого уравнения функции

$$x_2x_1^{-\frac{4}{3}},\qquad x_3x_1^{-\frac{5}{3}}$$

составляют интегральный базис. Отсюда для самой системы методом ч. I, п. 6.7 (б) получаем интегральный базис:

$$(x_1x_3-x_2^2)\,x_1^{-\frac{8}{3}}.$$

5.6. $(x_2-x_3)\,p_1+(x_3-x_1)\,p_2+(x_1-x_2)\,p_3=0,$

$$x_2x_3p_1+x_3x_1p_2+x_1x_2p_3=0.$$

При образовании скобок возникает еще одно уравнение:

$$(x_2-x_3)(x_2+x_3-2x_1)\,p_1+(x_3-x_1)(x_3+x_1-2x_3)\,p_2+$$
$$+(x_1-x_2)(x_1+x_2-2x_3)\,p_3=0.$$

Детерминант всех трех уравнений равен

$$3(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$$

и ни в какой области не равен нулю тождественно; поэтому $p_1\equiv p_2\equiv p_3\equiv 0$, и, следовательно, данные уравнения имеют лишь тривиальное решение $z=\text{const}$.

5.7. $(x_1-x_2)\,p_1-2(x_1-x_2)\,p_2+3(x_1+x_2+2x_3)\,p_3=0,$

$$(x_2+x_3)\,p_1+2(2x_1-3x_2-x_3)\,p_2-3(2x_1+x_2+3x_3)\,p_3=0.$$

Это полная система. Для первого уравнения функции

$$2x_1+x_2,\qquad \frac{x_1+2x_2+3x_3}{(x_1-x_2)^2}$$

составляют интегральный базис. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), т. е. подставить во второе уравнение

$$z(x_1,\ x_2,\ x_3)=\zeta(y_1,\ y_2),\quad y_1=2x_1+x_2,\quad y_2=\frac{x_1+2x_2+3x_3}{(x_1-x_2)^2},$$

то получается уравнение

$$2\zeta_{y_1}-y_2^2\zeta_{y_2}=0,$$

откуда

$$\zeta=y_1-\frac{2}{y_2}.$$

Следовательно, для данной системы интегральный базис получаем в виде

$$z=\frac{3x_1x_2+2x_1x_3+x_2x_3}{x_1+2x_2+3x_3}.$$

5.8. $x_1(x_1+x_2)p_1+(x_2x_3+x_2^2-x_1^2)p_3+2(x_1+x_2)=0,$
$x_2(x_1+x_2)p_2+(x_1x_3+x_1^2-x_2^2)p_3+2(x_1+x_2)=0.$

Это полная система. Каждое из соответствующих (в смысле ч. I, п. 6.8) однородных уравнений можно легко решить. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), то для однородной системы получается базис

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)}{x_1x_2}.$$

Если исходную систему редуцировать с помощью преобразования ч. I, п. 6.8:

$$z(x_1, x_2, x_3)=\zeta(y_1, y_2, y_3),$$

$$y_1=x_1, \quad y_2=x_2, \quad y_3=\frac{(x_1+x_2+x_3)(x_1+x_2)}{x_1x_2},$$

то получается система

$$y_1\zeta_{y_1}+2=0, \quad y_2\zeta_{y_2}+2=0,$$

откуда $\zeta=-\ln(y_1^2y_2^2)$. Таким образом, решения заданной системы представляются в виде

$$z=-\ln(x_1^2x_2^2)+\text{решения однородной системы.}$$

5.9. $x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3+z=0, \quad x_2p_1-x_1p_2+zp_3+x_3=0.$

Соответствующая (в смысле ч. I, п. 7.2) однородная система для функции $w(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $x_4=z$, является полной: $x_1w_{x_1}+x_2w_{x_2}-x_3w_{x_3}-x_4w_{x_4}=0$, $x_2w_{x_1}-x_1w_{x_2}+$ $+x_4w_{x_3}-x_3w_{x_4}=0$. Это с точностью до обозначений — система 5.12. Для нее интегральным базисом служат функции

$$x_1x_3+x_2x_4, \quad -x_2x_3+x_1x_4.$$

Решения исходной системы получают, разрешая относительно z уравнение

$$\Omega(x_1z-x_2x_3, \ x_2z+x_1x_3)=0.$$

10—17. Четыре независимые переменные и два уравнения

5.10. $p_1+p_2-2p_3=0, \quad x_1p_1+x_2p_2-(x_1+x_2)p_3+x_4p_4=0;$ см. ч. I, п. 6.7 (а).

5.11. $x_1p_1+x_2p_2=0, \quad p_1+p_2+x_1(p_3+p_4)=0.$

При образовании скобок возникает уравнение

$$p_1+p_2-x_1(p_3+p_4)=0.$$

Комбинированием всех трех уравнений получаем:

$$p_1+p_2=0, \quad x_1p_1+x_2p_2=0,$$

и кроме, для $x_1 \neq 0$

$$p_3+p_4=0.$$

Из двух первых полученных уравнений следует $p_1=p_2=0$ для $x_1 \neq x_2$, т. е. искомое решение не зависит от x_1, x_2. Третье полученное уравнение можно легко решить. Окончательно, в качестве решения исходной системы получаем:

$$z=\Omega(x_3-x_4).$$

5.12. $x_1p_1-x_2p_2+x_3p_3-x_4p_4=0, \quad x_3p_1+x_4p_2-x_1p_3-x_2p_4=0.$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 составляют интегральный базис. Если, следуя методу ч. I, 6.7 (б), сделать замену

$$z(x_1, \ldots, x_4)=\zeta(y_1, \ldots, y_4), \quad y_1=x_1x_2, \quad y_2=x_2x_3,$$

$$y_3=x_3x_4, \quad y_4=x_4,$$

то первое уравнение примет вид $\zeta_{y_4}=0$, а второе —

$$(y_2^2+y_1y_3)(\zeta_{y_1}-\zeta_{y_3})+y_2(y_3-y_1)\zeta_{y_2}=0.$$

Это последнее имеет интегральный базис

$$y_1+y_3, \quad \frac{y_1y_3}{y_2}-y_2.$$

Следовательно, исходная система имеет в качестве интегрального базиса следующие функции:

$$x_1x_2+x_4x_3, \quad x_1x_4-x_2x_3.$$

5.13. $-x_1p_1+x_2p_2+x_4p_3+x_3p_4=0, \quad 2(x_3+x_4)p_2+x_2(p_3+p_4)=0.$

Это инволюционная система. Для второго уравнения легко находится интегральный базис: x_1, x_3-x_4, $x_2^2-4x_3x_4$. Если применить метод ч. I, п. 6.7 (б), т. е. подставить в первое уравнение

$$z(x_1, \ldots, x_4)=\zeta(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad y_1=x_1, \quad y_2=x_3-x_4,$$
$$y_3=x_2^2-4x_3x_4, \quad y_4=x_4,$$

то получается уравнение

$$y_1\zeta_{y_1}+y_2\zeta_{y_2}+(4y_2^2-2y_3)\zeta_{y_3}=0$$