с базисом $\frac{y_2}{y_1}$, $y_1^2(y_3-y_2^2)$. При этом для первоначальной системы получается интегральный базис:

$$\frac{x_3-x_4}{x_1}, \quad x_1^2\left[x_2^2-(x_3+x_4)^2\right].$$

5.14. $x_3p_1+x_4p_2-x_1p_3-x_2p_4=0, \quad x_4p_1+x_3p_2-x_2p_3-x_1p_4=0.$

Это инволюционная система. Базисом являются функции

$$x_1x_2+x_3x_4, \qquad x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2.$$

5.15. $(x_1x_4+x_2x_3)\,p_1+(x_3x_4-x_1x_2)\,p_3-(x_2^2+x_4^2)\,p_4=0,$

$$(x_1x_4+x_2x_3)\,p_2-(x_1^2+x_3^2)\,p_3+(x_3x_4-x_1x_2)\,p_4=0.$$

Если умножить первое уравнение на x_1, второе — на $-x_2$ и затем сложить оба уравнения, то, с точностью до множителя $x_1x_4+x_2x_3$, получается первое из уравнений 5.12. Аналогично из данной системы получается и второе уравнение 5.12. Следовательно, написанная выше система может быть заменена системой 5.12.

5.16. $(x_4^2-x_3^2)\,p_1+(x_1x_3-x_2x_4)\,p_3+(x_2x_3-x_1x_4)\,p_4=0,$

$$(x_4^2-x_3^2)\,p_2+(x_2x_3-x_1x_4)\,p_3+(x_1x_3-x_2x_4)\,p_4=0.$$

При $x_4^2-x_3^2\neq 0$ эта система эквивалентна системе 5.14.

5.17. $p_1+(x_2+x_4-3x_1)\,p_3+(x_1x_2+x_1x_4+x_3)\,p_4=0,$

$$p_2+(x_3x_4-x_2)\,p_3+(x_1x_3x_4+x_2-x_1x_2)\,p_4=0.$$

Образование скобок после отбрасывания лишнего множителя приводит к уравнению

$$p_3+x_1p_4=0.$$

Тем самым данные уравнения можно упростить:

$$p_2+x_2p_4=0, \qquad p_1+(3x_1^2+x_3)\,p_4=0.$$

Эти три выписанные уравнения образуют систему 5.18.

18 — 23. Четыре независимые переменные и три уравнения

5.18. $p_1+(3x_1^2+x_3)\,p_4=0, \quad p_2+x_2p_4=0, \quad p_3+x_1p_4=0.$

Это инволюционная система. Применяя преобразования Майера

$$x_1=uu_1, \qquad x_2=uu_2, \qquad x_3=uu_3,$$

приходим к линейному дифференциальному уравнению для функции $z(x_1, \ldots, x_4) = Z(u, u_1, \ldots, u_4)$:

$$Z_u + (3u^2u_1^3 + 2uu_1u_3 + uu_2^2) Z_{x_4} = 0.$$

Интегралами этого уравнения являются функции

$$\Omega\left(u^3u_1^3 + u^2u_1u_3 + \frac{1}{2}u^2u_2^2 - x_4\right),$$

поэтому исходная система имеет интегралы

$$\Omega\left(x_1^3 + x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_4\right).$$

5.19. $x_1p_1 - x_2p_2 + x_3p_3 - x_4p_4 = 0, \quad x_3p_1 - x_1p_3 = 0, \quad x_4p_2 - x_2p_4 = 0.$

Это инволюционная система. Для первого уравнения функции x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4 составляют базис. Если, следуя ч. I, п. 6.7 (б), сделать замену

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4), \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1x_2,$$
$$y_3 = x_2x_3 \quad y_4 = x_3x_4,$$

то первое уравнение переходит в $\zeta_{y_1} = 0$, а два других—соответственно в

$$y_3^2\zeta_{y_2} - y_2y_3\zeta_{y_3} - y_2y_4\zeta_{y_4} = 0, \quad y_2y_4\zeta_{y_2} + y_3y_4\zeta_{y_3} - y_3^2\zeta_{y_4} = 0.$$

Для первого из этих двух уравнений имеем базис $y_2^2 + y_3^2$, $\frac{y_3}{y_4}$. Если еще раз применить то же преобразование, то для исходной системы получается, наконец, интегральный базис:

$$(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_4^2).$$

5.20. $2x_1p_1 + 3x_2p_2 + 4x_3p_3 + 5x_4p_4 = 0, \quad p_1 + 4x_1p_3 + 5x_2p_4 = 0,$
$x_2p_3 + (2x_3 - 4x_1^2)p_4 = 0.$

Это полная система. Для второго уравнения находится интегральный базис (дальше он обозначен через y_2, y_3, y_4). Если, следуя методу ч. I, п. 6.7 (б), ввести

$$z(x_1, \ldots, x_4) = \zeta(y_1, \ldots, y_4),$$
$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3 - 2x_1^2, \quad y_4 = x_4 - 5x_1x_2,$$

то из второго уравнения системы получается $\zeta_{y_1} = 0$, а из двух других

$$3y_2\zeta_{y_2} + 4y_3\zeta_{y_3} + 5y_4\zeta_{y_4} = 0, \quad y_2\zeta_{y_3} + 2y_3\zeta_{y_2} = 0,$$

т. е. мы приходим к системе 5.5 с ζ, y_ν вместо z, $x_{\nu-1}$.

5.21. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=0,\ x_2p_2+2x_3p_3+3x_4p_4=0,$
$$3x_1^2p_2+10x_1x_2p_3+(15x_1x_3+10x_2^2)\,p_4=0.$$

Система полная. Для первого уравнения функции x_2/x_1, x_3/x_1, x_4/x_1 составляют интегральный базис. Если положить (согласно ч. I, п. 6.7 (б))

$$z(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\zeta(y_1,\ \ldots,\ y_4),$$
$$y_1=x_1,\quad y_2=\frac{x_2}{x_1},\quad y_3=\frac{x_3}{x_1},\quad y_4=\frac{x_4}{x_1},$$

то первое уравнение системы перейдет в $\zeta_{y_1}=0$, а два других — в
$$y_2\zeta_{y_2}+2y_3\zeta_{y_3}+3y_4\zeta_{y_4}=0,\ 3\zeta_{y_2}+10y_2\zeta_{y_3}+(15y_3+10y_2^2)\zeta_{y_4}=0. \quad (1)$$
Для последнего из полученных уравнений (1) функции $3y_3-5y_2^2$, $9y_4-45y_2y_3+40y_2^3$ составляют интегральный базис. Применим еще раз преобразование ч. I, п. 6.7 (б), именно, положим:
$$\zeta=u(s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4),\ s_1=y_1,\quad s_2=y_2,\quad s_3=3y_3-5y_2^2,$$
$$s_4=9y_4-45y_2y_3+40y_2^3.$$

Тогда из последнего уравнения (1) получается $u_{s_2}=0$, а из предпоследнего — уравнение
$$2s_3u_{s_3}+3s_4u_{s_4}=0$$
с интегралом s_4^2/s_3^3. При этом для исходной системы получается базис
$$\frac{(9x_1^2x_4-45x_1x_2x_3+40x_2^3)^2}{(3x_1x_3-5x_2^2)^3}.$$

5.22. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4=x_3^2,\ 2x_2p_2-x_4p_4=1,$
$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4=x_1x_3.$$ См. 5.23.

5.23. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2z,\ 2x_2p_2-x_4p_4=z,$
$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4=x_1x_3z$$

Система полная. Заменой $u(x_1,\ \ldots,\ x_4)=\ln|z|$ она переводится в систему 5.22 с неизвестной u вместо z. Для решения системы в каждом из обоих видов после того, как она разрешена относительно производных, имеется метод Майера ч. I, п. 6.4 редукции к одному дифференциальному уравнению.

Систему можно решать также методом первых интегралов Якоби.

Если данная система переведена (согласно ч. I, п. 7.2) в однородную систему, то получается система 5.30 с z, w_z

вместо x_5, p_5; решения первоначальной системы получаются из уравнения $w(x_1, \ldots, x_4, z) = 0$ разрешением относительно z:

$$z = x_2 x_4 \Omega (x_1 x_3^2 - x_2 x_4^2).$$

24—29. Пять независимых переменных и два уравнения

5.24. $x_1^2 p_1 - 2x_5 p_2 + (x_1^2 x_4 - 2x_5) p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0, \quad 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$x_1 p_2 + x_1 (1 - x_5) p_3 + 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0,$$

здесь опущен множитель $2x_1$. Это уравнение, в силу второго данного уравнения, можно заменить на $p_2 + (1 - x_5) p_3 = 0$, и, таким образом, всю систему можно заменить на

$$x_1^2 p_1 + (x_1^2 x_4 - 2x_5^2) p_3 - 2x_1 x_4 p_4 = 0,$$
$$2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0, \qquad p_2 + (1 - x_5) p_3 = 0.$$

Теперь образование скобок приводит только к одному существенно новому уравнению, а именно, к $p_3 = 0$. Следовательно, должно быть также $p_2 = 0$, и остаются уравнения

$$x_1 p_1 - 2x_4 p_4 = 0, \qquad 2x_5 p_4 + x_1^2 p_5 = 0,$$

которые образуют инволюционную систему и имеют базис $x_1^2 x_4 - x_5^2$.

5.25. $[(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_5 + x_2] p_1 - [(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_4 + x_1] p_2 +$
$+ (x_2 x_4 - x_1 x_5) p_3 = 0, \quad x_2 p_4 - x_1 p_5 = 0.$

Образованием скобок получаем:

$$(x_1 x_4 + x_2 x_5)(x_1 p_1 + x_2 p_2) - (x_1^2 + x_2^2) p_3 -$$
$$- [(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_4 + x_1] p_4 - [(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_5 + x_2] p_5 = 0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения можно обычным методом найти базис:

$$x_1 x_4 + x_2 x_5 - x_3, \quad (x_1 x_4 + x_2 x_5)^2 + x_1^2 + x_2^2.$$

Он, как легко проверить, является одновременно интегральным базисом для всей системы.

5.26. $x_1 p_1 + x_2 p_2 + (x_1 x_4 + x_2 x_5) p_3 = 0,$
$[(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_4 + x_1] p_4 + [(x_1 x_4 + x_2 x_5) x_5 + x_2] p_5 = 0.$

После образования скобок, если принять во внимание второе уравнение, получается $p_3 = 0$. Легко проверить, что $p_3 = 0$,

$x_1p_1+x_2p_2=0$, и второе из данных уравнений образует полную систему, уравнения которой можно решать порознь. Базисом для данной системы служат функции

$$\frac{x_1}{x_2},\quad \frac{(x_2x_4-x_1x_5)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

5.27. $\left[(x_1x_5-x_2x_4)\,x_5+x_3x_4+x_1\right]p_1+\left[(x_2x_4-x_1x_5)\,x_4+x_3x_5+x_2\right]p_2+$
$+\left[(x_4^2+x_5^2)\,x_3+x_1x_4+x_2x_5\right]p_3=0,\ (x_3x_4+x_1)\,p_4+(x_3x_5+x_2)\,p_5=0.$

Образование скобок и прибавление первого уравнения, умноженного на $2x_3$, ко второму, умноженному на $-(x_4^2+x_5^2+1)$, дает:

$$[(x_2x_4-x_1x_5)\,x_2+(x_3x_4+x_1)\,x_3]\,p_1+\left[(x_1x_5-x_2x_4)\,x_1+\right.$$
$$\left.+(x_3x_5+x_2)\,x_3\right]p_2-\left[(x_1x_4+x_2x_5)\,x_3+x_1^2+x_2^2\right]p_3=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная, следовательно, базис состоит из двух функций. Для второго уравнения легко находится интеграл

$$\frac{x_3x_4+x_1}{x_3x_5+x_2}.$$

Он удовлетворяет первому уравнению, а следовательно, и третьему. Если теперь применить метод редукции ч. I, п. 6.7 (а), то находится еще один интеграл:

$$\frac{x_1x_5-x_2x_4}{x_3x_5+x_2}.$$

Эти две выписанные функции составляют интегральный базис.

5.28. $(x_3x_5+x_2)\,p_1-(x_3x_4+x_1)\,p_2+(x_2x_4-x_1x_5)\,p_3=0,$
$\left[x_4(x_2x_4-x_1x_5)+x_3x_5+x_2\right]p_4-\left[x_5(x_1x_5-x_2x_4)+x_3x_4+x_1\right]p_5=0.$

Образование скобок и вычитание первого уравнения, умноженного на $(x_1x_5-x_2x_4)$, дает:

$$(x_3x_4+x_1)\,x_3p_1+(x_3p_5+x_2)\,x_3p_2+(x_2x_4-x_1x_5)(x_2p_1-x_1p_2)-$$
$$-\left[x_1^2+x_2^2+(x_1x_4+x_2x_5)\,x_3\right]p_3-(x_4^2+x_5^2+1)\times$$
$$\times[(x_3x_4+x_1)\,p_4+(x_3x_5+x_2)\,p_5]=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения легко находятся решения

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2,\quad x_1x_4+x_2x_5-x_3,$$

для второго — решение

$$\frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

Это последнее удовлетворяет также первому уравнению. Поэтому исходная система имеет базис

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2, \quad \frac{(x_1x_4+x_2x_5-x_3)^2}{x_4^2+x_5^2+1}.$$

5.29. $x_2p_1-x_1p_2+2x_4p_3+(x_5-x_3)p_4-2x_4p_5=0, \qquad x_1x_2p_1+$
$+(x_2^2+1)p_2+(2x_1x_4+x_2x_3)p_3+(2x_2x_4+x_1x_5)p_4+3x_2x_5p_5=0.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$(x_1^2+1)p_1+x_2x_1p_2+3x_1x_3p_3+(2x_1x_4+x_2x_3)p_4+$$
$$+(2x_2x_4+x_1x_5)p_5=0.$$

Система, состоящая из этих трех уравнений, полная. Для первого уравнения функции

$$x_1^2+x_2^2, \quad x_3+x_5, \quad x_3x_5-x_4^2, \quad x_1^2x_3+2x_1x_2x_4+x_5^2x_5$$

составляют интегральный базис. Если применить преобразование ч. I, п. 6.7 (б) и положить

$$z(x_1, \ldots, x_5)=\zeta(y_1, \ldots, y_5),$$
$$y_1=x_1, \quad y_2=x_1^2+x_2^2, \quad y_3=x_3+x_5, \quad y_4=x_3x_5-x_2^2,$$
$$y_5=x_1^2x_3+2x_1x_2x_4+x_2^2x_5,$$

то из трех уравнений получаются: $\zeta_{y_1}=0$,

$$2x_2(y_2+1)\zeta_{y_2}+[2(x_1x_4+x_2x_5)+x_2y_3]\zeta_{y_3}+$$
$$+4x_2y_4\zeta_{y_4}+[2(x_1x_4+x_2x_5)(y_2+1)+3x_2y_5]\zeta_{y_5}=0, \quad (1)$$
$$2x_1(y_2+1)\zeta_{y_2}+[2(x_1x_3+x_2x_4)+x_1y_3]\zeta_{y_3}+$$
$$+4x_1y_4\zeta_{y_4}+[2(x_1x_3+x_2x_4)(y_2+1)+3x_1y_5]\zeta_{y_5}=0. \quad (2)$$

Умножим сначала уравнение (1) на x_1, уравнение (2) на $-x_2$, и сложим результаты. Далее, умножим уравнение (1) на x_2, уравнение (2) на x_1 и опять сложим. Окончательно получим:

$$\zeta_{y_3}+(y_2+1)\zeta_{y_5}=0, \quad (3)$$

и если из второго уравнения мы вычтем уравнение (3), умноженное на $2y_5$, то придем к уравнению

$$2(y_2+1)\zeta_{y_2}+y_3\zeta_{y_3}+4y_4\zeta_{y_4}+3y_5\zeta_{y_5}=0. \quad (4)$$

Для него получается базис

$$\frac{y_3^2}{y_2+1}, \quad \frac{y_4}{(y_2+1)^2}, \quad \frac{y_5^2}{(y_2+1)^3},$$

а отсюда, с помощью преобразования ч. I, п. 6.7 (б) для системы уравнений (3), (4), — базис

$$\frac{y_4}{(y_2+1)^2}, \quad \frac{y_3(y_2+1)-y_5}{\sqrt{(y_2+1)^3}}.$$

Следовательно, функции

$$\frac{x_3x_5-x_4^2}{(x_1^2+x_2^2+1)^2}, \quad \frac{(x_1^2+1)x_5+(x_2^2+1)x_3-2x_1x_2x_4}{\sqrt{(x_1^2+x_2^2+1)^3}}$$

являются базисом данной системы.

30—32. Пять независимых переменных и три или четыре уравнения

5.30. $2x_1p_1-x_3p_3=0,\ 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$
$$2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0.$$

Система полная. Для подсистемы, состоящей из двух первых уравнений, с помощью характеристических уравнений получают базис $x_1x_3^2,\ x_2x_4^2,\ x_4x_5$. Если подставить теперь

$$z=\zeta(y_1,\ y_2,\ y_3),\quad y_1=x_1x_3^2,\quad y_2=x_2x_4^2,\quad y_3=x_4x_5$$

в третье уравнение, то получится уравнение

$$y_2(\zeta_{y_1}+\zeta_{y_2})+y_3\zeta_{y_3}=0$$

с базисом $y_1-y_2,\ y_3/y_2$. Поэтому исходная система имеет базис $x_1x_3^2-x_2x_4^2,\ \dfrac{x_5}{x_2x_4}$.

5.31. $2x_2x_4^2p_1+x_3^2x_4p_4+x_3^2x_5p_5=0,\ 2x_2p_2-x_4p_4+x_5p_5=0,$
$$x_2x_4^2p_3+x_1x_3x_4p_4+x_1x_3x_5p_5=0.$$

Система полная. Линейной комбинацией первого и третьего уравнений можно привести систему к виду 5.30.

5.32. $p_1+2x_1p_2+3x_2p_3+4x_3p_4+5x_4p_5=0,$
$$x_1p_1+2x_2p_2+3x_3p_3+4x_4p_4+5x_5p_5=0,$$
$$x_1p_2+3x_1^2p_3+(7x_1x_2-x_3)p_4+(8x_1x_3-2x_4+4x_2^2)p_5=0,$$
$$p_2+3x_1p_3+(4x_2+2x_1^2)p_4+5(x_3+x_1x_2)p_5=0.$$

Система полная. Для первого уравнения можно легко найти базис $y_2,\ \ldots,\ y_5$. Далее, можно применить метод ч. I, п. 6.7 (б). Именно, если положить

$$z(x_1,\ \ldots,\ x_5)=\zeta(y_1,\ \ldots,\ y_5),\quad y_1=x_1,\quad y_2=x_2-x_1^2,$$
$$y_3=x_3-3x_1x_2+2x_1^3,\quad y_4=x_4-4x_1x_3+6x_1^2x_2-3x_1^4,$$
$$y_5=x_5-5x_1x_4+10x_1^2x_3-10x_1^3x_2+4x_1^5,$$

то первое уравнение примет вид $\zeta_{y_1}=0$. После упрощения остальные уравнения приводятся к виду

$$2y_2\zeta_{y_2}+3y_3\zeta_{y_3}+4y_4\zeta_{y_4}+5y_5\zeta_{y_5}=0,$$
$$\zeta_{y_2}+4y_2\zeta_{y_4}+5y_3\zeta_{y_5}=0,\quad y_3\zeta_{y_4}+(2y_4-4y_2^2)\zeta_{y_5}=0.$$

Таким образом, получается система 5.20.

33—36. Прочие системы

5.33. $(x_1-x_6)p_1+(x_5-x_1)p_2+(x_6-x_5)p_5=0,\quad (x_2-x_6)p_1+$
$+(x_5-x_2)p_2+(x_6-x_5)p_6=0,\ (x_3-x_6)p_1+(x_5-x_3)p_2+$
$+(x_6-x_5)p_4=0,\ (x_4-x_6)p_1+(x_5-x_4)p_2+(x_6-x_5)p_3=0.$

Система полная; ее базис:

$$x_1+\ldots+x_6,\ x_1x_5+x_2x_6+x_3x_4.$$

5.34. $x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4+x_5p_5+x_6p_6=0,$

$$x_1p_2+2x_2p_3+3x_3p_4+4x_4p_5+5x_5p_6=0,$$
$$x_2p_2+2x_3p_3+3x_4p_4+4x_5p_5+5x_6p_6=0,$$
$$x_1x_2p_3+3x_2^2p_4+(7x_2x_3-x_1x_4)p_5+(8x_2x_4-2x_1x_5+4x_3^2)p_6=0.$$

Скобки второго и четвертого уравнений приводят к существенно новому уравнению, а именно, к уравнению

$$x_1^2p_3+3x_1x_2p_4+(4x_1x_3+2x_2^2)p_5+(5x_1x_4+5x_2x_3)p_6=0.$$

Система, состоящая из этих пяти уравнений, полная. Можно решить ее повторным применением метода ч. I, п. 6.7 (б). Для первого уравнения функции $\frac{x_\nu}{x_1}$, $\nu=2,\ldots,6$, составляют базис. Далее, если положить

$$z(x_1,\ldots,x_6)=\zeta(y_1,\ldots,y_6),$$
$$y_\nu=\frac{x_\nu}{x_1}\ (\nu=2,\ldots,6),\quad y_1=x_1,$$

то из данной системы получаем: $\zeta_{y_1}=0$ и

$$\zeta_{y_2}+2y_2\zeta_{y_3}+3y_3\zeta_{y_4}+4y_4\zeta_{y_5}+5y_5\zeta_{y_6}=0,$$
$$y_2\zeta_{y_2}+2y_3\zeta_{y_3}+3y_4\zeta_{y_4}+4y_5\zeta_{y_5}+5y_6\zeta_{y_6}=0,$$
$$y_2\zeta_{y_3}+3y_2^2\zeta_{y_4}+(7y_2y_3-y_4)\zeta_{y_5}+(8y_2y_4-2y_5+4y_3^2)\zeta_{y_6}=0,$$
$$\zeta_{y_3}+3y_2\zeta_{y_4}+(4y_3+2y_2^2)\zeta_{y_5}+(5y_4+5y_2y_3)\zeta_{y_6}=0,$$

т. е. систему 5.32.

5.35. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

Образование скобок приводит к системе 5.36.

5.36. $\sum_{\nu=1}^{n} p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^2 p_\nu = 0.$

Эта система полная. Для первого уравнения базисом служат функции $x_\nu - x_n$, $\nu = 1, \ldots, n-1$. Если, согласно ч. 1, п. 6.7 (б), положить:

$$z(x_1, \ldots, x_n) = u(y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad y_\nu = x_\nu - x_n,$$

то из второго уравнения данной системы получается уравнение

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} y_\nu u_{y_\nu} = 0;$$

его базис: y_ν / y_{n-1}, $\nu = 1, \ldots, n-2$. Базисом двух первых уравнений будут функции

$$\frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n}, \qquad \nu = 1, \ldots, n-2.$$

Если теперь положить

$$z(x_1, \ldots, x_n) = \zeta(\xi_1, \ldots, \xi_{n-2}), \quad \xi_\nu = \frac{x_\nu - x_n}{x_{n-1} - x_n},$$

то из третьего уравнения получаем:

$$\sum_{\nu=1}^{n-2} \xi_\nu (\xi_\nu - 1) \zeta_{\xi_\nu} = 0.$$

Для этого уравнения функции

$$\frac{\xi_\nu - 1}{\xi_\nu} \frac{\xi_{n-2}}{\xi_{n-2} - 1}, \quad \nu = 1, \ldots, n-3,$$

образуют базис.

Таким образом, для данной системы базис образуют ангармонические отношения

$$\frac{x_\nu - x_{n-1}}{x_\nu - x_n} : \frac{x_{n-2} - x_{n-1}}{x_{n-2} - x_n}, \quad \nu = 1, \ldots, n-3.$$

Если к данной системе присоединить еще одно уравнение $\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu^3 p_\nu = 0$, то получившаяся система четырех уравнений будет иметь только тривиальный интеграл $z = \text{const}$. См. G. Pfeiffer, *Giornale Mat.* 69 (1931), стр. 232—236.

ГЛАВА VI

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1 — 13. $ap^2 + \ldots$

6.1. $p^2 = aq + b$; уравнение типа $F(p, q) = 0$.

$$z = Ax + \frac{A^2 - b}{a} y + B.$$

Относительно получения интегралов из этого полного интеграла см. ч. I, п. 9.5.

В случае $a = 1$, $b = 0$ через параболу $z = x^2$, $y = 0$ проходит интегральная поверхность

$$z = \frac{x^2}{1 - 4y}, \quad \text{где} \quad y < \frac{1}{4}.$$

6.2. $p^2 + q + z + x = 0$; уравнение типа ч. I, п. 11.3 для функции $z + x$.

Если сделать подстановку

$$x + z(x, y) = \zeta(\xi), \quad \xi = x + 2Ay,$$

то получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\zeta' = 1 - A \pm \sqrt{A^2 - 2A - \zeta};$$

отсюда для определения полного интеграла получаем уравнение

$$R + (A - 1) \ln |1 - A + R| + \frac{x}{2} + Ay = B,$$

где $R^2 = A^2 - 2A - z - x$.

6.3. $p^2 + aq = bx + cy$; уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл

$$z = \pm \frac{2}{3b} (bx + A)^{3/2} + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A}{a} y + B, \quad \text{если} \quad b \neq 0,$$

$$z = Ax + \frac{cy^2}{2a} - \frac{A^2}{a} y + B, \quad \text{если} \quad b = 0.$$

6.4. $p^2=axq+bxy$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\pm\frac{2x}{3}\sqrt{Ax}+\frac{2Ay-by^2}{2a}+B.$$

6.5. $p^2+xp=q$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{A^2}{4}y-\frac{x^2}{4}\pm\frac{x}{4}\sqrt{x^2+A^2}\pm\frac{A^2}{4}\operatorname{Arsh}\frac{x}{A}+B$$

и для $|x|>A>0$.

$$z=-\frac{A^2}{4}y-\frac{x^2}{4}\pm\frac{x}{4}\sqrt{x^2-A^2}\mp(\operatorname{sign}x)\frac{A^2}{4}\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{A}\right|+B,$$

причем значение $\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{a}\right|$ должно быть выбрано положительное.

6.6. $p^2+xp-yq+2z=0$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $p=2Ay^3$, отсюда следует: $z=2Axy^3+\varphi(y)$. Если подставить это соотношение в данное уравнение, то определяется φ и, таким образом,

$$z=2Axy^3+A^2y^6+By^2.$$

Полным интегралом является также

$$z=Ay^2-\left(x+\frac{B}{y}\right)^2.$$

6.7. $3p^2+xp+(y+2)q=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+3A^2+2B.$$

Интегралом также является

$$z=-\frac{x^2}{12}+B(y+2).$$

Особого интеграла здесь нет.

6.8. $p^2+ayp+bq=c$; уравнение типа ч. I, п. 11.4.

$$z=Ax+\frac{c-A^2}{b}y-\frac{aA}{2b}y^2+B.$$

6.9. $p^2+ay^2q+ayz+by^4=0$.

Полагая $u(x,y)=yz(x,y)$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2=-ay^3u_y-by^6$$

и отсюда — полный интеграл

$$yz = -\frac{b}{4a}y^4 + Ax + \frac{A^2}{2ay^2} + B.$$

Полным интегралом будет также

$$yz = -\frac{b}{4a}y^4 - \frac{a}{2}y^2(x+A)^2 + B.$$

6.10. $p^2 + ay^2q = b$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ax + \frac{A^2 - b}{ay} + B.$$

6.11. $p^2 - y^3q = x^2 - y^2$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z = \pm\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\varphi(x)\right) - \frac{A}{2y^2} + \ln|y| + B,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{Arsh}\dfrac{x}{\sqrt{A}} & \text{для} \quad A > 0, \\ \operatorname{sign} x \operatorname{Arch}\dfrac{|x|}{\sqrt{-A}} & \text{для} \quad A < 0 \text{ и } |x| > |A|, \\ 0 & \text{для} \quad A = 0; \end{cases}$$

при этом под $\operatorname{Arch} u$ надо понимать положительную ветвь.

6.12. $p^2 + azq = bz^2$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$z = B\exp[(x+Ay)]R]$, где $R = -\frac{aA}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2A^2 + 4b}$.

Интегралом будет также функция

$$z = Ae^{\frac{b}{a}y}.$$

6.13. $p^2 + az(yq - z) = 0$.

Полагая

$$\ln|z(x, y)| = \zeta(x, \eta), \qquad \eta = \ln|y|,$$

из данного уравнения получаем уравнение типа ч. I, п. 11.2

$$\zeta_x^2 + a(\zeta_\eta - 1) = 0$$

с полным интегралом

$$\zeta = Ax + \left(1 - \frac{A^2}{a}\right)\eta + B.$$

14—20. $f(x, y, z)p^2 + \ldots$

6.14. $xp^2 = q$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = 2\sqrt{Ax} + Ay + B.$$

6.15. $x^2p^2-y^2q=z$; уравнение типа ч. I, п. 11.6.

Полагая $z=u(x)+v(y)$, получаем:

$$x^2u'^2-u=y^2v'+v.$$

Уравнение имеет решение, если левая и правая части равны нулю. Таким образом, находим полный интеграл

$$z=A\exp\frac{1}{y}+\frac{1}{4}(\ln x+B)^2.$$

6.16. $(xp+z)^2=q$.

Полагая $w(x, y)=xz$, получаем уравнение 6.14

$$xw_x^2=w_y;$$

следовательно,

$$z=2\sqrt{\frac{A}{x}}+\frac{Ay+B}{x}$$

— полный интеграл. Если в данное уравнение подставить

$$z=u(x)+v(y),$$

то получится уравнение

$$v'(y)=[xu'(x)+u(x)+v(y)]^2,$$

которое удовлетворяется при

$$xu'+u=0, \qquad v'=v^2.$$

Отсюда получаем полный интеграл

$$z=\frac{A}{x}-\frac{1}{y+B}.$$

6.17. $x^2p^2+ayzq=bz^2$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $\xi=\ln x$, $\eta=\ln y$, получаем уравнение 6.12

$$\zeta_\xi^2+a\zeta\zeta_\eta=b\zeta^2.$$

6.18. $x(x+1)p^2-2xzp-y^2q+z^2=0$.

Перегруппируем члены уравнения

$$(xp-z)^2+xp^2-y^2q=0;$$

следовательно, это уравнение типа ч. I, п. 11.17. С помощью преобразования Эйлера (см. ч. I, п. 11.15) из него получается квазилинейное уравнение

$$X^2Z_X+Y^2Z_Y=-Z^2,$$

решения которого получаются разрешением уравнения

$$\frac{1}{Z}=-\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right).$$

Отсюда для интеграла z первоначального уравнения получают параметрическое представление

$$z=xX-Z,\quad x=\frac{Z^2}{X^2}\left\{\Omega'\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{y}\right)-1\right\},$$
$$\frac{1}{Z}=-\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{y}\right).$$

Для $\Omega(u)=(A+1)u+B$, в частности, получают полный интеграл

$$\left(\frac{A+1}{y}-B\right)z=\left(1\pm\sqrt{|Ax|}\right)^2.$$

6.19. $y(y^2+1)(xp-z)^2+x(p^2+1)=(y^2+1)q.$

Преобразованием Эйлера ч. I, п. 11.15 из этого уравнения получаем квазилинейное уравнение

$$(X^2+1)Z_X+(Y^2+1)Z_Y=-Y(Y^2+1)Z^2.$$

Из решений

$$\frac{2}{Z}=Y^2+\Omega\left(\frac{X-Y}{1+XY}\right)$$

этого уравнения получаем решение первоначального уравнения в параметрическом представлении:

$$x=-\frac{Z^2(1+y^2)}{2(1+Xy)^2}\Omega'(u),\qquad z=xX-Z,$$

где

$$Z=\frac{2}{y^2+\Omega(u)},\qquad u=\frac{X-y}{1+Xy}.$$

6.20. $z^2p^2+azq=bx+cy.$

Полагая $u(x,y)=z^2$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2-4bx=4cy-2au_y.$$

Из него находим полный интеграл

$$z^2=\frac{1}{6b}(4bx+A)^{\frac{3}{2}}+\frac{c}{a}y^2-\frac{A}{2a}y+B.$$

21—33. $apq+\ldots$

6.21. $pq=a.$

Характеристики этого уравнения — прямые линии. Полный интеграл

$$z=aAx+\frac{y}{A}+B.$$

6.22. $pq = axy + b$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $p^2 - ay^2$, $q^2 - ax^2$. Из $q^2 - ax^2 = A$ имеем:

$$z = y\sqrt{ax^2 + A} + b\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + A}} + B.$$

В случае $b = 0$ см. ч. I, п. 9.6, пример 2.

6.23. $pq = z^a$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полный интеграл

$$z = \left(\frac{2-a}{2A}(A^2x + y + B)\right)^{\frac{2}{2-a}}, \quad \text{если} \quad a \neq 2;$$

$$z = B\exp\left(Ax + \frac{y}{A}\right), \quad \text{если} \quad a = 2.$$

В случае $a = 1$ см. также ч. I, пп. 9.2 (в), 9.3, 9.5 (в).

6.24. $pq = Ax^ay^bz^c$; однородное уравнение.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$ и

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{x^{a+1}}{a+1}, & \text{если } a \neq -1; \\ \ln x, & \text{если } a = -1; \end{cases} \qquad \eta = \begin{cases} \dfrac{y^{b+1}}{b+1}, & \text{если } b \neq -1; \\ \ln y, & \text{если } b = -1, \end{cases}$$

получаем $p = x^a\zeta_\xi$, $q = y^b\zeta_\eta$ и, таким образом (см. ч. I, п. 11.3),

$$\zeta_\xi\zeta_\eta = A\zeta^c.$$

Далее, если $c \neq 2$, это уравнение заменой $\zeta = u^{\frac{2}{2-c}}$ переводится в уравнение 6.21:

$$u_\xi u_\eta = A\left(1 - \frac{c}{2}\right)^2.$$

Если $c = 2$, то после замены $u = \ln\zeta$ получаем уравнение $u_\xi u_\eta = A$.

6.25. $pq + ap = bz$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi)$, $\xi = x + Ay$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$2A\zeta' = -a \pm \sqrt{4Ab\zeta + a^2},$$

и отсюда — полный интеграл

$$b(x + Ay) + B = R + a\ln|R - a|, \quad \text{где} \quad R^2 = 4Abz + a^2.$$

6.26. $pq = ap + bq$; уравнение типа $F(p, q) = 0$.

$$z = Ax + By + C, \quad \text{где} \quad AB = aA + bB.$$

6.27. $pq = xp + yq$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$\frac{q}{p},\ p^2 - 2yp,\ q^2 - 2xq,\ (p \pm q)^2 \pm 2(x \pm y)(p \pm q),$$

а отсюда — полные интегралы в различных формах

$$z = \frac{(x + Ay)^2}{2A} + B;\quad z = xy + x\sqrt{y^2 + A} + B;$$

$$z = xy + y\sqrt{x^2 + A} + B;$$

$$z = xy + \frac{1}{2}\int \sqrt{\xi^2 + A}\, d\xi + \frac{1}{2}\int \sqrt{\eta^2 + A}\, d\eta + B,$$

где

$$\xi = x + y,\ \eta = x - y.$$

6.28. $pq + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = ax + by + ab,$$

особый интеграл $z = -xy$.

6.29. $pq + ayp + bxq = 0,\ ab \neq 0$.

(а) В данном уравнении можно разделить переменные. При этом подстановка

$$\frac{p + bx}{bx} = A, \qquad \frac{q + ay}{ay} = \frac{1}{A}$$

приводит к интегралу

$$z = \frac{A - 1}{2}\left(bx^2 - \frac{a}{A}y^2\right) + B.$$

(б) Если данное уравнение записать в виде

$$\frac{p}{x}\frac{q}{y} + a\frac{p}{x} + b\frac{q}{y} = 0,$$

то заменой

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta),\quad \xi = x^2,\quad \eta = y^2$$

мы получим из него уравнение 6.26

$$2\zeta_\xi\zeta_\eta + a\zeta_\xi + b\zeta_\eta = 0.$$

Получается полный интеграл

$$z = A\left(x^2 - \frac{a}{b + 2A}y^2\right) + C,$$

т. е. тот же самый, что и в (а).

(в) Если $ab > 0$, то можно так определить числа α, β, что $a = \pm\alpha^2$, $b = \pm\beta^2$, причем оба раза берутся верхние или оба раза нижние знаки. Если положить

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \quad \xi = \beta x + \alpha y, \quad \eta = \beta x - \alpha y,$$

то получается уравнение 6.85.

$$\zeta_\xi^2 \pm \xi\zeta_\xi = \zeta_\eta^2 \pm \eta\zeta_\eta.$$

Таким образом приходим к другому полному интегралу.

6.30. $(p + a)(q + bz) = C$; уравнение типа ч. I, п. 11.13.

Можно также воспользоваться тем, что q/p — первый интеграл, а дальше действовать согласно ч. I, п. 9.3.

6.31. $p(q - \sin y) = \sin x$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = A\cos x - \cos y - \frac{y}{A} + B.$$

6.32. $2(pq + yp + xq) + x^2 + y^2 = 0.$

Из характеристических уравнений получим первый интеграл $p + q + x + y$ и затем будем применять ч. I, п. 9.3. Если положить

$$\zeta(\xi, \eta) = z + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad \xi = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{x + y}{\sqrt{2}},$$

то получается уравнение 6.74.

$$\zeta_\xi^2 - \zeta_\eta^2 = 2\xi^2.$$

6.33. $p(kq + ax + by + cz) = 1, \quad c \neq 0.$

Полагая $u(x, y) = -\frac{bk}{c} + ax + by + cz(x, y)$, получаем уравнение 6.30

$$(u_x - a)(cu + ku_y) = c^2.$$

34—42. $f(x, y)\,pq + \ldots$

6.34. $2xpq - zq = a.$

$$z^2 = 2(y - A)(Bx - a).$$

6.35. $2xpq - zq + ap = 0.$

Из характеристических уравнений получают первый интеграл pq. Если разрешить уравнения $pq = A$ и данное относительно p, q, то получим:

$$ap = -Ax + \sqrt{aAz + A^2x^2}, \quad zq = Ax + \sqrt{aAz + A^2x^2}.$$

Эти уравнения легко решаются подстановкой $z = x^2 u(x, y)$ и затем $v^2 = aAu + A^2$. В итоге получаем соотношение для полного интеграла

$$(aAz + A^2x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} aA^2 (xz + ay) = A^3x^3 + B.$$

6.36. $ypq - zp + aq = 0$, $a \neq 0$.

(а) Напишем характеристические уравнения

$$\begin{cases} x'(t) = yq - z, \quad y'(t) = yp + a, \\ z'(t) = 2ypq - zp + aq, \quad p'(t) = p^2, \quad q'(t) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Из них получим первый интеграл q. Если положить $q = A$, определить p из данного уравнения и затем проинтегрировать, то получается полный интеграл

$$z = Ay \pm \sqrt{2aAx + B}. \tag{2}$$

(б) Применим преобразование Лежандра ч. I, п. 11.14; придем к обыкновенному линейному дифференциальному уравнению для Z:

$$Z_X - \frac{Z}{X} = \frac{aY}{X^2}$$

(Y — параметр). Найдем Z, а затем, обращая преобразование Лежандра, мы получим параметрическое представление

$$x = \Omega(Y) + \frac{aY}{2X^2}, \quad y = X\Omega'(Y) - \frac{a}{2X}, \quad z = XY\Omega'(Y) + \frac{aY}{2X}. \tag{3}$$

При этом, разумеется, предполагается, что $X \neq 0$, т. е. что $z_x \neq 0$. Если же для решения $z_x = 0$ в конечной области, то из дифференциального уравнения следует также, что $z_y = 0$, и поэтому получается лишь тривиальное решение $z = \text{const}$.

Далее, предполагается, что при преобразовании Лежандра

$$\frac{\partial(z_x, z_y)}{\partial(x, y)} \neq 0, \quad \text{т. е.} \quad z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 \neq 0.$$

Если же $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = 0$ в конечной области, то из данного уравнения после дифференцирования по x и y следует:

$$z_{xx}(yz_y - z) + z_{xy}(yz_x + a) = z_x^2,$$

$$z_{xy}(yz_y - z) + z_{yy}(yz_x + a) = 0,$$

и отсюда $z_x^2 z_{yy} = 0$, $z_x^2 z_{xy} = 0$. Если в области $z_x = 0$, то это уже рассмотренный раньше частный случай. Если, напротив, $z_x^2 \neq 0$, то, следовательно, $z_{yy} = z_{yx} = 0$, и отсюда $z_y = \text{const}$, т. е.

$z = Ay + \varphi(x)$. Если подставить это в дифференциальное уравнение, то можно определить φ и снова получить полный интеграл (2).

Если в (3) положить $\Omega(Y) = \frac{A}{2}Y + B$, то можно исключить из (3) параметры X, Y и получить полный интеграл

$$z = \frac{x-B}{A}\left(y \pm \sqrt{y^2 + aA}\right).$$

(в) Преобразование Эйлера ч. I, п. 11.15 приводит к цели в обеих формах — и

$$x = Z_X, \quad y = Y, \quad z = XZ_X - Z, \quad z_x = X, \qquad z_y = -Z_Y \quad (\text{в}_1)$$

и

$$x = X, \quad y = Z_Y, \quad z = YZ_Y - Z, \quad z_x = -Z_X, \quad z_y = Y. \qquad (\text{в}_2)$$

(в_1) С помощью этого преобразования из данного уравнения получается линейное уравнение

$$X^2 Z_X + (XY + a) Z_Y = XZ$$

с интегралами

$$Z = X\Omega\left(\frac{2XY + a}{X^2}\right).$$

С помощью обратного преобразования для первоначального уравнения получают интегралы в параметрическом представлении

$$x = \Omega(u) - \left(u + \frac{a}{X^2}\right)\Omega'(u), \quad z = xX - X\Omega(u),$$

где $u = \frac{2yX + a}{X^2}$.

Если исследовать, какие интегралы пропадают из-за предположений $X \neq 0$ (т. е. из-за $z_x \neq 0$) и $z_{xx} \neq 0$, то выясняется, что таковыми являются лишь тривиальные интегралы $z = \text{const}$.

Если, в частности, положить $\Omega(u) = A(u) + B$, то снова получают полный интеграл (2).

(в_2) В этом случае данное уравнение превращается в уравнение

$$ZZ_X = aY,$$

следовательно,

$$Z^2 = 2a\,XY + 2\Omega(Y).$$

Обратным преобразованием приходят к параметрическому представлению

$$(z - yY)^2 = 2axY + 2\Omega(Y), \qquad y^2 = \frac{[ax + \Omega'(Y)]^2}{2axY + 2\Omega(Y)}.$$

Полагая $\Omega(u) = Au - B$, получаем полный интеграл

$$z = \frac{By}{ax + A} - \frac{ax + A}{2y}.$$

(г) Чтобы получить интегральную поверхность, проходящую через данную начальную полосу, можно для характеристических уравнений (1) определить решения, которые при $t = 0$ содержат интегральный элемент x_0, y_0, z_0, $p_0 \neq 0$, q_0. Из двух последних характеристических уравнений и первоначального уравнения имеем:

$$q = q_0, \qquad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_0} - t, \quad ypq - zp + aq = 0. \tag{4}$$

Если подставить эти выражения в два первых характеристических уравнения, то получим уравнения

$$x' = \frac{aq_0}{p_0}(p_0 t - 1), \qquad y' + \frac{p_0 y}{p_0 t - 1} = a,$$

откуда

$$x = x_0 + aq_0\left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{p_0}\right) \qquad y = -\frac{2p_0 y_0 + a}{2p_0(p_0 t - 1)} + \frac{a}{2p_0}(p_0 t - 1). \tag{5}$$

Затем из третьего уравнения (4) получаем:

$$z = -\frac{q_0}{2p_0}\left(\frac{2y_0 p_0 + a}{p_0 t - 1} + a(p_0 t - 1)\right) \tag{6}$$

Таким образом, характеристические уравнения проинтегрированы.

Если требуется получить интегральную поверхность, проходящую через начальную полосу

$$x = \omega_1(s), \quad y = \omega_2(s), \quad z = \omega_3(s), \quad p = \omega_4(s), \quad q = \omega_5(s), \tag{7}$$

то функции ω_i должны удовлетворять дифференциальному уравнению в частных производных и условию полосы

$$\omega_3' = \omega_4\omega_1' + \omega_5\omega_2'.$$

Если подставить в соотношения (5), (6) выражения

$$x_0 = \omega_1, \quad y_0 = \omega_2, \quad z_0 = \omega_3, \quad p_0 = \omega_4, \quad q_0 = \omega_5,$$

то получается интегральная поверхность в параметрическом представлении с параметрами s, t.

6.37. $p(kyq + ax + by + cz) = 1, \quad k \neq 0.$

Из характеристических уравнений следует:

$$\frac{y'}{ky} + \frac{q'}{(k + c)q + b} = 0. \tag{1}$$

(а) $k+c\neq 0$. Тогда получается из уравнения (1)

$$q=-\frac{b}{k+c}+Ay^{-1-\frac{c}{k}};$$

и, следовательно,

$$z=-\frac{b}{k+c}y-\frac{k}{c}Ay^{-\frac{c}{k}}+\varphi(x).$$

Если подставить выражение для z в исходное дифференциальное уравнение, то получается соотношение

$$(c\varphi+ax)\varphi'=1, \tag{2}$$

или, если $u(x)=c\varphi+ax$,

$$\frac{uu'}{au+c}=1;$$

здесь нужно различать случаи $a\neq 0$ и $a=0$.

(б) $k+c=0$, т. е. $k=-c$. Тогда из уравнения (1) получается

$$q=\frac{b}{c}\ln y+A,$$

и, следовательно,

$$z=\frac{b}{c}y(\ln y-1)+Ay+\varphi(x),$$

причем для φ снова получается уравнение (2).

Если $k+c\neq 0$, то преобразованием

$$ax+\frac{bc}{k+c}y+cz=\zeta(\xi, \eta), \quad \xi=x, \quad \eta=\ln y$$

можно свести данное уравнение к типу 6.30

$$(\zeta_\xi-a)(k\zeta_\eta+c\zeta)=c^2.$$

6.38. $(x-y)pq+(x-z)p+(z-y)q=0.$

После преобразования Лежандра приходим к дифференциальному уравнению 2.29

$$X(2Y-X+1)\frac{\partial Z}{\partial X}-Y(2X-Y+1)\frac{\partial Z}{\partial Y}=(Y-X)Z$$

с интегралами

$$Z=(X+Y-1)\Omega(u), \qquad u=\frac{(X+Y-1)^3}{XY}. \tag{1}$$

Отсюда для первоначального уравнения получаем интегралы в параметрическом виде

$$z=xX+yY-Z, \quad x=\Omega(u)+\frac{u}{X}(2X-Y+1)\Omega'(u),$$

$$y=\Omega(u)+\frac{u}{Y}(2Y-X+1)\Omega'(u)$$

(сюда надо приписать еще уравнения (1)).

6.39. $xypq = 1$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, получаем дифференциальное уравнение 6.21 $\zeta_\xi \zeta_\eta = 1$. Таким образом находим полный интеграл

$$z = A \ln x + \frac{\ln y}{A} + B.$$

6.40. $xypq = z^2$; однородное уравнение.

Полагая

$$z = \pm e^{\zeta(\xi, \eta)}, \quad \xi = \ln x, \quad \eta = \ln y,$$

получаем уравнение 6.21 $\zeta_\xi \zeta_\eta = 1$.

6.41. $(x^2 + 1) p (q - 1) + xy^2 q = 0.$

Можно разделить переменные

$$\frac{x^2 + 1}{x} p = \frac{y^2 q}{1 - q};$$

получается полный интеграл

$$z = \pm \frac{A^2}{2} \ln (x^2 + 1) + B + \begin{cases} A \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{A} \text{ при верхнем знаке;} \\ A \cdot \operatorname{Arth} \frac{y}{A} \text{ или } A \cdot \operatorname{Arcth} \frac{y}{A} \\ \text{при нижнем знаке.} \end{cases}$$

6.42. $[(1 - x)^2 - y] [(1 - x)(1 - p) - z] q = a (1 - x)^2.$

После замены $z = (1 - x) Z(u)$, $u = \frac{y}{(1 - x)^2}$ получается обыкновенное дифференциальное уравнение для $Z(u)$. Поэтому интегралом, регулярным в точке $x = 0$, $y = 0$ и равным нулю при $y = 0$, будет

$$z = (1 - x) \int_0^u \frac{1}{4u} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8au}{1 - u}}\right) du.$$

43—48. $f(z) pq + \ldots$

6.43. $zpq = ap + bz$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$$-a \ln \left| a \pm \sqrt{4Abz^2 + a^2} \right| \pm \sqrt{4Abz^2 + a^2} = 2b (x + Ay + B).$$

6.44. $zpq = xp + yq.$

Из характеристических уравнений получается первый интеграл $\frac{p}{q}$ и (см. ч. I, п. 9.3) полный интеграл

$$z^2 = \frac{1}{AB} (Ax + By)^2 + C.$$

6.45. $zpq+x^2yp+xy^2q=xyz.$

Полагая $z^2=\zeta(\xi,\ \eta)$, $\xi=x^2$, $\eta=y^2$, получаем дифференциальное уравнение Клеро

$$\zeta=\xi\zeta_\xi+\eta\zeta_\eta+\zeta_\xi\zeta_\eta,$$

а отсюда — полный интеграл

$$z^2=Ax^2+By^2+AB.$$

Функция $z=0$ является особым интегралом.

6.46. $(z+a)pq=bz^2$; уравнение типа ч.I, п. 11.3.

Полагая $z(x,\ y)=\zeta(\xi)$, $\xi=x+Ay$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$A(\zeta+a)\zeta'^2=b\zeta^2;$$

из него находим:

$$\xi+B=\pm\sqrt{\frac{A}{b}}\int\frac{\sqrt{\zeta+a}}{\zeta}\,d\zeta.$$

Интеграл легко берется, если сделать замену переменных $\zeta+a=u^2$. Решением также является $z=0$.

6.47. $(a+b)zpq+axq+byp=0$; однородное уравнение.

Полагая

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi,\ \eta),\ \xi=\frac{x^2}{2},\ \eta=\frac{y^2}{2},$$

получаем уравнение типа ч. I, п. 11. 3.

$$(a+b)\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta+a\zeta_\eta+b\zeta_\xi=0;$$

из него находим полный интеграл

$$z^2=C-\frac{aB+bA}{(a+b)AB}(Ax^2+By^2).$$

6.48. $z^2pq=xy+a.$

Полагая $2u(x,\ y)=z^2$, получаем уравнение 6.22

$$u_xu_y=xy+a.$$

Для решения данного уравнения можно также воспользоваться тем, что оно имеет первые интегралы $z^2p^2-y^2$, $z^2q^2-x^2$, $(xp-yq)z$.

49—54. $(..)p^2+(..)pq+\ldots$

6.49. $ap^2+bpq=cz^2$; уравнения типа ч. I, п. 11.3.

$$z=C\exp[(Ax+By)R],\quad\text{где}\quad R^2=\frac{c}{A(aA+bB)}.$$

6.50. $xp^2 - pq + ay^2 = 0.$

Из характеристических уравнений получаем первый интеграл pe^{-y}. Далее, рассматриваем систему

$$p = Ae^y, \quad q = \frac{a}{A} y^2 e^{-y} + Axe^y$$

и отсюда находим полный интеграл

$$z = Axe^y - \frac{a}{A}(y^2 + 2y + 2)e^{-y} + B.$$

6.51. $xp^2 + ypq = 1$; уравнение с разделяющимися переменными.

Из системы уравнений

$$xp - \frac{1}{p} = A, \quad yq = -A$$

получают полный интеграл

$$z = \sqrt{4x + A^2} + A \ln \left| \frac{\sqrt{4x + A^2} - A}{y} \right| + B.$$

6.52. $axp^2 - (ay + b)pq + cy(ay + b)^2 = 0.$

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\frac{p}{ay + b}$. Из него и из данного уравнения составляют систему

$$p = A(ay + b), \quad q = aAx + \frac{c}{A} y,$$

которая определяет полный интеграл

$$z = Ax(ay + b) + \frac{cy^2}{2A} + B.$$

6.53. $(z^2 + 1)yp^2 + xzpq = 4x^2y$; обобщенное уравнение.

Подстановка $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = x^2$, $\eta = y^2$ сводит данное уравнение к уравнению типа ч. I, п. 11.3

$$(\zeta^2 + 1)\zeta_\xi^2 + \zeta\zeta_\xi\xi_\eta = 1.$$

6.54. $p^2 + z^2pq = z^2$; тип ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi)$, $\xi = Ax + By$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(A^2 + AB\zeta^2)\zeta'^2 = \zeta^2,$$

и отсюда — полный интеграл

$$\pm(Ax + By + C) = R + A \ln \frac{R - A}{z}, \quad \text{где} \quad R^2 = ABz^2 + A^2.$$

55—68. $ap^2+bq^2=f(x, y, z)$

6.55. $p^2+q^2=a^2$; частный случай уравнения 6.56.

Интегралами будут, например, плоскости

$$z=Ax+By+C, \quad \text{где} \quad A^2+B^2=a^2.$$

Характеристики, проходящие через каждую точку (ξ, η, ζ), образуют прямой круговой конус, ось которого параллельна оси z и который сам является интегральной поверхностью.

Если имеется интегральная поверхность, $z(x, y)$, которая для фиксированного $x=\xi$ содержит кривую

$$x=\xi, \ y=\eta, \ z=\omega(\eta) \quad \text{для} \quad -\infty<\eta<+\infty,$$

то $z(\xi, \eta)=\omega(\eta)$, т. е. $z_\eta(\xi, \eta)=\omega'(\eta)$, а потому, следовательно, должно быть $|\omega'(\eta)|\leqslant a$; тогда, в силу уравнения, $z_x(\xi, \eta)=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}$. Из характеристических уравнений

$$x'(t)=2p, \ y'(t)=2q, \ z'(t)=2p^2+2q^2, \ p'(t)=0, \ q'(t)=0$$

находим:

$$p=\pm\sqrt{a^2-\omega'^2}, \quad q=\omega',$$

$$x=\xi\pm 2t\sqrt{a^2-\omega'^2}, \quad y=\eta+2t\omega', \quad z=\omega(\eta)+2a^2t.$$

Три последних уравнения можно рассматривать как параметрическое представление искомого интеграла. Исключая параметры t и η, получаем:

если $\omega(\eta)=c$, то $z=c\pm a(x-\xi)$;

если $\omega(\eta)=\alpha+\beta\eta$, то $z=\alpha+\beta y\pm(x-\xi)\sqrt{a^2-\beta^2}$;

если $\omega(\eta)=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{1+(\alpha+\beta\eta)^2}$,

то

$$z=\gamma+\frac{a}{\beta}\sqrt{[1+\beta(x-\xi)]^2+(\alpha+\beta y)^2}.$$

6.56. $ap^2+bq^2=c$; тип ч. I, п. 11.1.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+C, \quad \text{где} \quad aA^2+bB^2=c,$$

или

$$\frac{z^2}{c}=\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}.$$

6.57. $p^2+q^2=ay+b$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ax+\frac{2}{3a}(ay+b-A^2)^{\frac{3}{2}}+B.$$

6.58. $p^2+q^2=x+y$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=\frac{2}{3}(x+A)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}(y-A)^{\frac{3}{2}}+B.$$

6.59. $p^2+q^2=x^2+y^2$; частный случай уравнения 6.74.

$$2z=x\sqrt{x^2\pm A^2}\pm A^2\left\{\begin{matrix}\operatorname{Arsh}\\ \operatorname{Arch}\end{matrix}\right\}\frac{x}{A}+y\sqrt{y^2\mp A^2}\mp$$
$$\mp A^2\left\{\begin{matrix}\operatorname{Arch}\\ \operatorname{Arsh}\end{matrix}\right\}\frac{y}{a}+B,$$

причем аргумент функции $\operatorname{Arch} u$ больше 1.

6.60. $p^2+q^2=x^2+xy+y^2$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $2\xi=x+y$, $2\eta=x-y$, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\xi^2-6\xi^2=2\eta^2-\zeta_\eta^2.$$

Отсюда находим полный интеграл

$$z=\int\sqrt{6\xi^2+A}\,d\xi+\int\sqrt{2\eta^2-A}\,d\eta+B.$$

Эти интегралы можно еще преобразовать при помощи гиперболических функций.

6.61. $p^2+q^2=ax^m+by^n+c$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=\pm\int\sqrt{ax^m+A}\,dx\pm\int\sqrt{by^n+c-A}\,dy.$$

6.62. $p^2+q^2=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2}}+b$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\rho, \vartheta)$, $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$\rho^2\zeta_\rho^2-b\rho^2-a\rho=-\zeta_\vartheta^2,$$

а из него — полный интеграл

$$z=\pm\int\sqrt{b+\frac{a}{\rho}-\frac{A^2}{\rho^2}}\,d\rho+A\vartheta+B.$$

6.63. $p^2+q^2=f(x)$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{f(x)-A^2}\,dx.$$

6.64. $p^2+q^2=f(x^2+y^2)$; уравнение Гамильтона для плоского движения точки под действием центральной силы.

Из характеристических уравнений следует:

$$(xq)'-(yp)'=0 \quad \text{или} \quad xq-yp=A.$$

Обозначим $r^2=x^2+y^2$; из этого уравнения и из первоначального следует, что

$$p=-\frac{Ay}{r^2}\pm\frac{x}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2},$$

$$q=\frac{Ax}{r^2}\pm\frac{y}{r^2}\sqrt{r^2f(r^2)-A^2},$$

или при $e^\rho=r^2$

$$z=-A\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\pm\frac{1}{2}\int\sqrt{e^\rho f(e^\rho)-A^2}\,d\rho+B.$$

6.65. $p^2+q^2=f(x, y)$; тип ч. I, п. 11, 13.

Если представить уравнение в виде

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x, y)=C, \tag{1}$$

то это уравнение Гамильтона для плоского движения точки.

Характеристическая система уравнения (1) без среднего уравнения, т. е. без условия полосы, имеет вид

$$x'(t)=p,\ y'(t)=q, \qquad p'(t)=-U_x, \qquad q'(t)=-U_y.$$

Отсюда

$$x''(t)=-U_x(x, y), \qquad y''(t)=-U_y(x, y).$$

Следовательно, уравнения $x=x(t)$, $y=y(t)$ можно рассматривать как уравнения движения точки с массой, равной 1, происходящего под действием потенциальной функции $U(x, y)$. Из характеристических уравнений следует:

$$\frac{p^2+q^2}{2}+U(x, y)=C.$$

Значит, выражение $\frac{p^2+q^2}{2}$ — кинетическая энергия, а написанное выше уравнение есть выражение для закона энергии.

Если найдено однопараметрическое семейство интегралов $z=\psi(x, y, A)$ уравнения (1), причем $|\psi_{Ax}|+|\psi_{Ay}|>0$, то траекториями этого движения будут кривые, удовлетворяющие уравнению

$$\psi_A=\text{const}.$$

Уравнение (1) имеет большое значение для геометрической оптики. Если имеется неоднородная (но изотропная) среда с коэффициентом преломления $f(x, y)$ в точке (x, y), то

характеристики уравнения — пути световых лучей, и уравнение $z = \text{const}$ задает фронт волны.

6.66. $ap^2 + bq^2 = cz$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z = \frac{c}{4(aA^2 + bB^2)}(Ax + By + C)^2; \qquad z = 0.$$

6.67. $p^2 + q^2 = (x^2 + y^2)z$; однородное уравнение.

Полагая $u(x, y) = 2\sqrt{z}$, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$u_x^2 - x^2 = y^2 - u_y^2;$$

следовательно,

$$u = \int \sqrt{x^2 + A}\, dx + \int \sqrt{y^2 - A}\, dy + B.$$

6.68. $p^2 + q^2 = az^2 + b$; тип. ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi)$, $\xi = Ax + By$, получаем

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2} \int \frac{d\zeta}{\sqrt{a\zeta^2 + b}} = \xi.$$

В частности, если $a = 1$, $b = 0$, то

$$z = C \exp \frac{Ax + By}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

69—74. $f(x, y)p^2 + g(x, y)q^2 = h(x, y, z)$

6.69. $xp^2 - yq^2 = x + y$; частный случай уравнения 6.74.

$$z = \pm\left(\sqrt{x(x + A)} + \frac{A}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{|x + A|} + \sqrt{|x|}}{\sqrt{|x + A|} - \sqrt{|x|}}\right|\right) \pm$$
$$\pm\left(\sqrt{y(A - y)} - A \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{A - y}{y}}\right) + B,$$

если $x(x + A) > 0$, $y(A - y) > 0$; знаки перед скобками могут быть выбраны независимо друг от друга.

6.70. $ax^2p^2 + by^2q^2 = z^c$; однородное уравнение.

Полагая $z(x, y) = \zeta(\xi, \eta)$, $\xi = \ln x$, $\eta = \ln y$, получаем из данного уравнения

$$a\zeta_\xi^2 + b\zeta_\eta^2 = \zeta^c,$$

а отсюда замена переменных

$$\zeta = \begin{cases} u^{\frac{2}{2-c}}, & \text{если } c \neq 2; \\ e^u, & \text{если } c = 2 \end{cases}$$

приводит нас к уравнению 6.56

$$au_\xi^2+bu_\eta^2=\begin{cases}\left(\frac{2-c}{2}\right)^2, & \text{если } c\neq 2;\\ 1, & \text{если } c=2.\end{cases}$$

6.71. $(x+a_1)(x+a_2)p^2-(y+a_1)(y+a_2)q^2=a\sqrt{x+a_1}+$ $+b\sqrt{y+a_2}+c(x-y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z=\int\sqrt{\frac{A+cx+a\sqrt{x+a_1}}{(x+a_1)(x+a_2)}}\,dx+$$
$$+\int\sqrt{\frac{A+cy-b\sqrt{y+a_2}}{(y+a_1)(y+a_2)}}\,dy+B.$$

Если уравнение Гамильтона 6.65

$$\frac{p^2+q^2}{4}+U(x, y)=c,\qquad U=-\frac{m_1}{r_1}-\frac{m_2}{r_2}$$

(уравнение движения точки с массой, равной 1, в плоскости x, y под действием гравитационных сил, создаваемых массами m_1, m_2, находящимися в точках $x=\pm 1$, $y=0$) преобразовать к эллиптическим координатам, то получится данное уравнение с $2a=m_1+m_2$, $2b=m_1-m_2$ и с λ_1, λ_2 вместо x, y. При этом точке (x, y) соответствуют как эллиптические координаты параметры λ_1, λ_2 $(\lambda_1<\lambda_2)$, определяющие два конических сечения $\frac{x^2}{a_1+\lambda}+$ $+\frac{y^2}{a_2+\lambda}=1$ (рис. 22), которые проходят через точку (x, y) при фиксированном $a_1>a_2>0$, $a_1-a_2=1$.

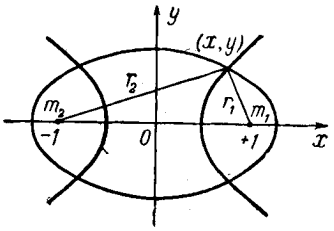

Рис. 22.

6.72. $4y(a-x)(b-x)(c-x)p^2-4x(a-y)(b-y)(c-y)q^2=$ $=(x-y)xy.$

Если поделить уравнение на xy, то можно разделить переменные. Тогда получается полный интеграл

$$z=\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{x(x+A)}{N(x)}}\,dx+\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{y(y+A)}{N(y)}}\,dy+B,$$

где

$$N(x)=(a-x)(b-x)(c-x).$$

Это уравнение встречается при отыскании геодезических линий на эллипсоиде с полуосями a, b, c.

6.73. $(p^2-1)\sin^2 x+q^2=0$; частный случай уравнения 6.74.

$$z=Ay+B\pm\int\sqrt{1-\frac{A^2}{\sin^2 x}}\,dx.$$

Это уравнение возникает при введении ортогональных геодезических параметрических линий на единичном шаре.

6.74. $f(x)\,p^2+g(y)\,q^2=\varphi(x)+\psi(y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\int\sqrt{\frac{\varphi+A}{f}}\,dx+\int\sqrt{\frac{\psi-A}{g}}\,dy+B.$$

Уравнение встречается в дифференциальной геометрии при изучении поверхностей Лиувилля.

75—80. $f(x, y, z)\,p^2+g(x, y, z)\,q^2=h(x, y, z)$

6.75. $ap^2+bzq^2=c^2$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

$$bB^2z=-aA^2+\left(\frac{3bcB^2}{2}(Ax+By+C)\right)^{\frac{2}{3}}.$$

6.76. $z(p^2-q^2)=x-y$.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi, \eta)$, $\xi=x-y$, $\eta=x+y$, получают уравнение

$$4\zeta\zeta_\xi\zeta_\eta=\xi,$$

а из него подстановкой $\zeta=u(\xi)\,v(\eta)$ находят интеграл первоначального уравнения

$$8z^3=[3(x-y)^2+A]\,[3(x+y)+B].$$

6.77. $xzp^2-yzq^2=x+y$; однородное уравнение.

Замена неизвестной функции

$$u(x, y)=\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$$

приводит к уравнению 6.69 с разделяющимися переменными

$$x(u_x^2-1)=y(u_y^2+1).$$

6.78. $z^2(p^2+q^2)=x^2+y^2$; однородное уравнение.

Замена неизвестной функции $2u(x, y)=z^2$ приводит к уравнению 6.59

$$u_x^2+u_y^2=x^2+y^2.$$

6.79. $z^2(ap^2+bq^2)=z^2+c$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Применение метода ч. I, п. 11.3 приводит к полному интегралу

$$(aA^2+bB^2)(z^2+c)=(Ax+By+C)^2. \qquad (1)$$

Если подставить $z^2=u(x)+v(y)$, то можно разделить переменные и получить полный интеграл в виде

$$z^2=-c+\frac{(x-A)^2}{a}+\frac{(y-B)^2}{b}. \qquad (2)$$

Если $a=-1$, $b=-1$, $c=-r^2<0$, то соотношение (1) описывает цилиндрические поверхности, соотношение (2) — сферы

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=r^2.$$

Интегралами являются в этом случае также огибающие поверхности, если они есть, к тем из этих сфер, центры которых движутся в плоскости x, y вдоль одной кривой (при этом могут появляться ребра возврата), т. е. трубчатые и каналовые поверхности.

6.80. $z^2(y^2p^2+x^2q^2)=a^2x^2y^2$; однородное уравнение.

Замена переменных

$$2\zeta(\xi,\eta)=z^2, \qquad 2\xi=x^2, \qquad 2\eta=y^2$$

приводит к уравнению 6.55

$$\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2=a^2.$$

81—88. $(..)p^2+(..)q^2+(..)p+(..)q+\ldots$

6.81. $p^2+q^2+xp+yq=z-1$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+A^2+B^2+1;$$

особый интеграл $4z+x^2+y^2=4$.

6.82. $p^2+q^2-2xp-2yq+2xy=0$.

Из характеристических уравнений получается первый интеграл $p+q-x-y$ и затем полный интеграл

$$2z=x^2+y^2+A(x+y)\pm(x-y)\sqrt{\frac{(x-y)^2}{2}-\frac{A^2}{4}}\mp$$
$$\mp\frac{A^2}{2\sqrt{2}}\operatorname{Arch}\frac{|x-y|\sqrt{2}}{A}+B,$$

причем $|x-y|>\frac{A}{\sqrt{2}}$ и функция Arch имеет здесь знак $x-y$.

Если применить преобразование

$$\zeta(\xi, \eta) = z - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \qquad \xi = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \qquad \eta = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

то получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\xi^2 + \zeta_\eta^2 = 2\xi^2,$$

которое снова приводит к написанному выше полному интегралу.

6.83. $p^2 + q^2 - 2yp - 2xq = 1 - x^2 - y^2$ или $(p-y)^2 + (q-x)^2 = 1$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $p - y$ и $q - x$ и, таким образом, находят полный интеграл

$$z = xy + Ax + By + C, \qquad \text{где} \qquad A^2 + B^2 = 1.$$

6.84. $p^2 + q^2 = 4(xp + yq - z)$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z = Ax + By - \frac{A^2+B^2}{4}$; особый интеграл $z = x^2 + y^2$. Частные интегралы:

$$x^2 + By - \frac{B^2}{4}, \quad y^2 + Ax - \frac{A^2}{4}, \quad \frac{(Ax+By)^2}{A^2+B^2}.$$

6.85. $ap^2 + bq^2 + 2cxp + 2dyq = k$, $ab > 0$; уравнение с разделяющимися переменными.

Полный интеграл

$$z = u(x) + v(y) + B,$$

где u, v удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$au'^2 + 2cxu' = A, \qquad bv'^2 + 2dyv = k - A.$$

Если $A = 0$, то либо $u = 0$, либо $u = \frac{c}{a}x^2$, либо функция $u(x)$ описывает комбинацию этих двух кривых.

Если $c = 0$, то нужно так выбрать знак числа A, чтобы $aA > 0$; тогда $u = x\sqrt{\frac{A}{a}}$.

Если $A \neq 0$, $c \neq 0$, то имеем:

$$u = -\frac{c}{2a}x^2 \pm \frac{c}{a}\int\sqrt{x^2 + \frac{aA}{c^2}}\,dx.$$

Преобразование интеграла приводит при $\alpha > 0$ [1]) к выражениям:

$$\int \sqrt{x^2+\alpha^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{2}\operatorname{Arsh}\frac{x}{\alpha},$$

$$\int \sqrt{x^2-\alpha^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-\alpha^2}-\frac{\alpha^2}{2}\frac{|x|}{x}\operatorname{Arch}\frac{|x|}{\alpha} \quad \text{для } |x|>\alpha;$$

при этом под $\operatorname{Arch} u$ для $u > 0$ понимается положительная ветвь этой функции.

Таким же образом исследуется уравнение для v.

6.86. $p^2-q^2-2zp+z^2=1$; уравнение типа ч. I, п. 11.3.

Полагая $z(x, y)=\zeta(\xi)$, $\xi=Ax+By$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(A^2-B^2)\zeta' = A\zeta \pm \sqrt{B^2\zeta^2+A^2-B^2};$$

для нахождения полного интеграла надо разрешить уравнение

$$Ax+By+C=\int \frac{A^2-B^2}{Az\pm\sqrt{B^2z^2+A^2-B^2}}\,dz.$$

6.87. $(x^2-1)[x^2(xp-z)^2-x^2p^2-q^2]+x^2z^2=0.$

Полагая $z=u(x, y)\sqrt{|x^2-1|}$, получаем уравнение

$$x^2(x^2-1)u_x^2-u_y^2=0.$$

При $x^2<1$ должно быть $u_x=u_y=0$, и, следовательно, интеграл $z=C\sqrt{1-x^2}$. При $x^2>1$ дифференциальное уравнение можно записать как распадающееся уравнение

$$\left(x\sqrt{x^2-1}\,u_x+u_y\right)\left(x\sqrt{x^2-1}\,u_x-u_y\right)=0;$$

каждый из множителей дает линейное уравнение. Для этих уравнений в качестве интегрального базиса находим функции

$$\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\mp y;$$

следовательно, интегралы данного уравнения

$$z=\sqrt{x^2-1}\,\Omega\left(\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}\pm y\right).$$

6.88. $(zp+x)^2+(zq+y)^2-a^2z^2(p^2+q^2+1)=0.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $zp+x$ и $zq+y$. Они дают два уравнения, которые состоят в инволюции не только с данным уравнением, но и друг

---

[1]) [Где через α^2 обозначено либо $\frac{aA}{c^2}$, либо $-\frac{aA}{c^2}$. — *Прим. ред.*]

с другом. Поэтому можно применить метод ч. I, п. 9.2 и получить в качестве полного интеграла семейство полусфер

$$(x-A)^2+(y-B)^2+z^2=\frac{A^2+B^2}{a^2} \quad (z \gtrless 0).$$

При $a^2>1$ имеется особый интеграл

$$(a^2-1)\,z^2=x^2+y^2.$$

89—111. $(\ldots)\,p^2+(\ldots)\,q^2+(\ldots)\,pq+\ldots$

6.89. $p^2+q^2=apq$; уравнение типа ч. I, п. 11.2.

$$z=Ax+By+C, \text{ где } A^2+B^2=aAb.$$

6.90. $xp^2+yq^2=2pq$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$. Если положить его равным $\frac{1}{A}$ и использовать данное уравнение, то находят:

$$\frac{p}{A}=\frac{1-x}{x}\pm\frac{1}{x}\sqrt{1-xy}, \quad \frac{q}{A}=\frac{y-1}{y}\pm\frac{1}{y}\sqrt{1-xy},$$

и при этом полный интеграл

$$z=A(y-x)+$$
$$+A\ln\left|\frac{x}{y}\right|\pm A\left(2\sqrt{1-xy}+\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-xy}}{1+\sqrt{1-xy}}\right|\right)+B.$$

6.91. $z(p-q)^2+a(p+q)^2=b$; уравнение типа ч. I, п. 11.13.

$$z=-a\left(\frac{A+B}{A-B}\right)^2+\sqrt[3]{b}\left(\frac{3(Ax+By+C)}{2(A-B)}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{если} \quad A\neq B.$$

6.92. $(p^2+4q^2)\operatorname{ch}^2 y-4pq\operatorname{ch} y\cdot\operatorname{sh} y=1$.

Разрешая уравнение относительно p, получают уравнение с разделяющимися переменными

$$p=2q\operatorname{th} y\pm\frac{\sqrt{1-4q^2}}{\operatorname{ch} y},$$

а отсюда — полный интеграл

$$z=Ax+\frac{A}{2}\ln\operatorname{ch} y\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-A^2}\operatorname{arctg}\operatorname{sh} y+B.$$

6.93. $(yp-xq)^2+a(xp+yq)=b$.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $xp+yq$, $yp-xq$. Если теперь положить $yp-xq=A$,

то из этого и исходного уравнений можно найти p, q и затем — полный интеграл

$$z=\frac{b-A^2}{2a}\ln(x^2+y^2)-A\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+B.$$

Если применить преобразование

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta,$$

то получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\vartheta^2=-a\rho\zeta_\rho+b,$$

т. е.

$$\zeta=A\vartheta+\frac{b-A^2}{a}\ln\rho+B,$$

что приводит в старых переменных к уже найденному выше выражению.

6.94. $(yp-xq)^2+az(xp+yq-z)=0.$

Замена переменных $z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta)$, $x=\rho\cos\vartheta$, $y=\rho\sin\vartheta$ приводит к уравнению 6.13

$$\zeta_\vartheta^2+a\zeta(\rho\zeta_\rho-\zeta)=0.$$

6.95. $(yp-xq)^2=p^2+q^2+1.$

Из характеристических уравнений находят первый интеграл p^2+q^2. Полагают:

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta$$

и получают уравнение с разделяющимися переменными

$$\zeta_\vartheta^2=\frac{\rho^2}{\rho^2-1}(\zeta_\rho^2+1),$$

а из него — полный интеграл

$$\zeta=\sigma-A\operatorname{arctg}\frac{\sigma}{A}+A\vartheta+B,\quad\text{где}\quad\sigma^2=\rho^2(A^2-1)-A^2.$$

6.96. $(yp-xq)^2=a(x^2+y^2)(p^2+q^2+1).$

Замена переменных

$$z(x,\ y)=\zeta(\rho,\ \vartheta),\quad x=\rho\cos\vartheta,\quad y=\rho\sin\vartheta$$

приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{1-a}{a}\zeta_\vartheta^2=\rho^2(\zeta_\rho^2+1),$$

разрешимому только для $0\leqslant a<1$. Если отбросить тривиальный случай $a=0$ и приравнять левую и правую части послед-

него уравнения к A^2, то получается полный интеграл

$$\zeta = A\sqrt{\frac{a}{1-a}}\,\vartheta + \sigma + \frac{A}{2}\ln\left|\frac{\sigma - A}{\sigma + A}\right| + B, \quad \text{где} \quad \sigma^2 = A^2 - \rho^2$$

(следовательно, необходимо требование $\rho^2 < A^2$).

6.97. $(xp + yq)^2 = (1 - z^2)(p^2 + q^2)$.

Особые интегралы: $z = \text{const}$ и обе полусферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \qquad (z \lessgtr 0).$$

Это уравнение интересно тем, что первый интеграл p/q находится легко, но метод ч. I, п. 9.3, несмотря на это, не приводит к полному интегралу. Дело в том, что указанные в ч. I, п. 9.3 условия для функционального определителя не выполняются, так как уравнение однородно относительно p, q, то при подстановке $p = Aq$ обе производные пропадают. Однако таким методом получают еще семейство интегралов

$$z^2 = 1 - \frac{(Ax + By)^2}{A^2 + B^2}.$$

Чтобы получить полный интеграл, можно сделать преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \quad x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta.$$

Тогда получается уравнение

$$(1 - \zeta^2)\zeta_\vartheta^2 = \rho^2(\zeta^2 + \rho^2 - 1)\zeta_\rho^2.$$

Из исходного уравнения вытекает, что $z^2 \leqslant 1$; следовательно, $\zeta^2 \leqslant 1$; а отсюда, в силу написанного выше уравнения, $\zeta^2 + \rho^2 - 1 \geqslant 0$. Поэтому написанное выше уравнение распадается на два квазилинейных уравнения

$$\sqrt{1 - \zeta^2}\,\zeta_\vartheta \pm \rho\sqrt{\zeta^2 + \rho^2 - 1}\,\zeta_\rho = 0.$$

Для соответствующего (в смысле ч. I, п. 5.4) однородного уравнения получают интеграл

$$\Omega\left(\zeta, \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\rho^2}{1 - \zeta^2} - 1} - \vartheta\right)\right).$$

Следовательно, интегралы первоначального уравнения находятся разрешением относительно z уравнения

$$\Omega\left(z, \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}}\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{1 - z^2} - 1} - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\right) = 0.$$

6.98. $(xp+yq)^2=z^2(pq+1)$.

Из характеристических уравнений находится первый интеграл q/p; теперь можно действовать по методу ч. I, п. 9.3. Если положить

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi),\qquad \xi=Ax+By,$$

то данное уравнение перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\xi^2\zeta'^2=\zeta^2\left(AB\zeta'^2+1\right),$$

являющееся однородным. Из него следует:

$$\ln\left|\zeta\left(\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2}\right)\right|=C-\frac{\xi}{\xi\pm\sqrt{\xi^2-AB\zeta^2}};$$

отсюда, после возвращения к старым переменным и разрешения относительно z, получается полный интеграл.

6.99. $(xp+yq)^2-z(xp+yq)=pq$.

Посредством преобразования Лежандра ч. I, п. 11.14 получают квазилинейное дифференциальное уравнение 2.52.

$$XZZ_X+YZZ_Y=XY.$$

Интегралы этого уравнения получают из соотношения

$$Z^2=XY+\Omega\left(\frac{Y}{X}\right),$$

а интегралы первоначального уравнения задаются параметрически:

$$z=-\frac{1}{Z}\Omega\left(\frac{Y}{X}\right),\qquad 2xZ=Y-\frac{Y}{X^2}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right),$$

$$2yZ=X+\frac{1}{X}\Omega'\left(\frac{Y}{X}\right),\qquad Z^2=XY+\Omega\left(\frac{Y}{X}\right).$$

6.100. $(xp+yq)^2-a^2(p^2+q^2+1)=0$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл q/p. Если положить $q=p\operatorname{tg}A$, то из данного уравнения получается:

$$\frac{p}{\cos A}=\frac{q}{\sin A}=\pm\frac{a}{\sqrt{(x\cos A+y\sin A)^2-a^2}}$$

следовательно,

$$z=a\operatorname{Arch}\frac{x\cos A+y\sin B}{a}+B.$$

Можно также положить $z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta)$, $x = \rho\cos\vartheta$, $y = \rho\sin\vartheta$ и прийти к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{\rho^2}{a^2}\left[(\rho^2 - a^2)\zeta_\rho^2 - a^2\right] = \zeta_\vartheta^2.$$

Если в этом равенстве положить левые и правые части равными A^2, то получается:

$$\zeta = a\ln\sqrt{\frac{\sigma+1}{\sigma-1}} - A\operatorname{arctg}\frac{a\sigma}{A} + A\vartheta + B, \quad \text{где} \quad \sigma^2 = \frac{\rho^2 + A^2}{\rho^2 - a^2}.$$

6.101. $(xp + yq)^2 + p^2 + q^2 - z(xp + yq) = 0.$

С помощью преобразования Лежандра ч. I, п. 11.14 получают квазилинейное дифференциальное уравнение 2.53

$$XZZ_X + YZZ_Y = -X^2 - Y^2.$$

Из решений

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \Omega(u), \qquad u = \frac{Y}{X} \tag{1}$$

этого уравнения (где $\Omega(u)$ — такая произвольная непрерывно дифференцируемая функция, что $\Omega\left(\frac{Y}{X}\right) > X^2 + Y^2$ в конечной области X, Y) получается решение первоначального уравнения в параметрическом представлении:

$$z = xX + yY - Z, \qquad x = -\frac{X}{Z} - \frac{Y}{2X^2Z}\Omega'(u),$$

$$y = -\frac{Y}{Z} + \frac{1}{2XZ}\Omega'(u).$$

Кроме того, интегралами являются функции $z = \text{const}$.

6.102. $(xp + yq - z)^2 = pq.$

Дифференциальное уравнение распадается на два уравнения Клеро

$$z = xp + yq \pm \sqrt{pq}$$

с полными интегралами

$$z = Ax + By \pm \sqrt{AB}, \quad AB \geqslant 0.$$

6.103. $(xp + yq - z)^2 = ap^2 + bq^2 + c.$

Уравнение распадается на два уравнения Клеро

$$z = xp + yq \pm \sqrt{ap^2 + bq^2 + c}$$

с полными интегралами

$$z = Ax + By \pm \sqrt{aA^2 + bB^2 + c}.$$

Особые интегралы получаются из соотношения

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1.$$

6.104. $(xp+yq-z)^2=xp^2+yq^2.$

С помощью преобразования Лежандра получают квазилинейное уравнение 2.39

$$X^2Z_X+Y^2Z_Y=Z^2, \tag{1}$$

его решения—функции

$$Z=\left[\frac{1}{X}+\Omega\left(\frac{X-Y}{XY}\right)\right]^{-1}.$$

При этом решения первоначального уравнения получают в параметрическом представлении с параметрами X, Y:

$$z=[u\Omega'(u)-\Omega(u)]Z^2,\quad x=\frac{Z^2}{X^2}[1-\Omega'(u)],\quad y=\frac{Z^2}{Y^2}\Omega'(u),$$

где

$$u=\frac{X-Y}{XY},\qquad Z=\left[\frac{1}{X}+\Omega(u)\right]^{-1}.$$

Если рассматривать уравнение (1) как однородное (ч. I, п. 11.10), т. е. положить

$$Z(X,\ Y)=\zeta(\xi,\ \eta),\quad \xi=\frac{1}{X},\quad \eta=\frac{1}{Y},$$

то получается уравнение типа ч. I, п. 11.3

$$\zeta_\xi+\zeta_\eta+\zeta^2=0.$$

Для уравнения (1) получают полный интеграл

$$\frac{1}{Z}=\frac{A}{X}+\frac{B}{Y}+C,\quad \text{где}\quad A+B=1,$$

и отсюда — полный интеграл первоначального уравнения

$$\sqrt{-Cz}=\sqrt{Ax}+\sqrt{By}-1.$$

6.105. $(xp+yq-z)^2=[a^2(x^2+y^2+z^2+1)-1](p^2+q^2+1).$

Если перейти методом ч. I, п. 12.3 (а) к дифференциальному уравнению, которое не содержит искомой функции, т. е. определить функцию $z(x,\ y)$ из уравнения $w(x,\ y,\ z)=0$, то для w получается уравнение 7.20

$$(xw_x+yw_y+zw_z)^2=$$
$$=[a^2(x^2+y^2+z^2+1)-1](w_x^2+w_y^2+w_z^2).$$

6.106. $(xp+yq-z)^2=a^2(x^2+y^2+z^2)^2(p^2+q^2+1)$.

Полный интеграл получают из соотношения

$$(x-A)^2+(y-B)^2+(z-C)^2=\frac{1}{4a^2}$$

при условии, что

$$A^2+B^2+C^2=\frac{1}{4a^2};$$

особый интеграл

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a^2}.$$

6.107. $(xp+yq-z)^2=f(x^2+y^2)(p^2+q^2)$.

Из характеристических уравнений получаем, что $(yp-xq)/z$ — специальный интеграл. Если положить его равным A и использовать первоначальное уравнение, то можно определить p, q и затем, проинтегрировав, найти z. Ср. с 9.3, пример 2.

Если положить

$$\ln|z(x,\ y)|=\zeta(\rho,\ \vartheta),\qquad x=\rho\cos\vartheta,\qquad y=\rho\sin\vartheta,$$

то уравнение переходит в уравнение

$$(\rho\zeta_\rho-1)^2=f(\rho^2)\left(\zeta_\rho^2+\frac{1}{\rho^2}\zeta_\vartheta^2\right),$$

в котором можно разделить переменные.

6.108. $x^2(xp+yq-z)^2=y^2q$; тип ч. I, п. 11.7.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл $\left(\frac{y}{x}\right)^2 q$. Если положить его равным A^2 (так как из уравнения следует, что $q\geqslant 0$), то, используя начальное уравнение, можно получить уравнения

$$q=\left(\frac{Ax}{y}\right)^2,\quad xp+\frac{Ax^2}{y}-z=A,$$

откуда, проинтегрировав, имеем:

$$z=-\frac{A^2x^2}{y}+A+Bx;$$

это — конусы, вершины которых лежат на оси z.

6.109. $(x^2+y^2-1)[(xp+yq-z)^2-(p^2+q^2)]+z^2=0$.

Подстановка

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi,\ \eta),\qquad x=\rho\cos\vartheta,\qquad y=\rho\sin\vartheta$$

приводит к уравнению 6.87

$$(\rho^2-1)\left[\rho^2(\rho\zeta_\rho-\zeta)^2-\rho^2\zeta_\rho^2-\zeta_\vartheta^2\right]+\rho^2\zeta^2=0.$$

6.110. $f(x, y)\,p^2+g(x, y)\,pq+h(x, y)\,q^2=k(x, y)$.

В дифференциальной геометрии уравнение встречается в следующем виде:

$$E\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\frac{\partial\vartheta}{\partial v}+G\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)^2=EG-F^2;$$

при этом задаются основные величины E, F, G.

6.111. $(f_xp+f_yq-f_z)^2=(f_x^2+f_y^2+f_z^2-1)(p^2+q^2+1)$,
$f=f(x, y, z)$.

Геометрическую интерпретацию задачи см. S. Lie, Math. Annalen 5 (1872), стр. 198.

112—127. Уравнения третьей и четвертой степени относительно p, q

6.112. $p^3=aq+bx$; уравнение с разделяющимися переменными

$$z=\frac{3}{4b}(bx+A)^{\frac{4}{3}}+\frac{A}{a}y+B.$$

6.113. $5p^3+(x-2)\,p+(y-1)\,q=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+5A^3-2A-B.$$

Интегралами также являются:

$$z=-10\left(\frac{2-x}{15}\right)^{\frac{3}{2}}+C(y-1).$$

Особого интеграла нет.

6.114. $p^3-y^3q=x^2-y^2$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\ln|y|-\frac{A}{2y^2}+\int\sqrt[3]{x^2+A}\,dx+B.$$

6.115. $p^3=zq$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=\frac{A}{4}(x+Ay+B)^2.$$

6.116. $p^3=az^2q$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=B\exp\left[\pm\sqrt{aA}(x+Ay)\right].$$

6.117. $p^3=q^2$; тип ч. I, п. 11.2.

$$z=A^2x+A^3y+B.$$

6.118. $y^2p^3+xp+3yq=0$ см. ч. I, 14.8 (в).

6.119. $p^2q=x^2y$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{Ax^2}{2}+\frac{y^2}{2A^2}+B.$$

6.120. $(p^2+a)q=(bz+c)p$; тип ч. I, п. 11.3.

$$z=\frac{b}{4AB}(Ax+By+C)^2+\frac{aB-Ac}{Ab}.$$

6.121. $p^2(q+a)=(bz+c)q$; тип ч. I, п. 11.3.

$$bB(Ax+By+C)=AR+aA^2\ln|R-aA|,$$

где

$$R^2=4bB^2z+a^2A^2+4cB^2.$$

6.122. $(xp+yq+z)q^2+p^2=0.$

Из характеристических уравнений находят первый интеграл $\frac{p}{q}$. Если положить его равным A, то получаются уравнения

$$p=-A\frac{z+A^2}{Ax+y},\quad q=-\frac{z+A^2}{Ax+y};$$

отсюда и из исходного уравнения получается полный интеграл

$$z=-A^2+\frac{B}{Ax+y}.$$

6.123. $(xp+yq-z)^3+27pq=0$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z=Ax+By+3\sqrt[3]{AB}$; особый итеграл $yzx=1$.

6.124. $(xp+yq)pq-xp^2-yq^2-(x+y+z-1)pq+z(p+q)=0.$

Уравнение можно записать как уравнение Клеро

$$z=xp+yq+\frac{pq}{pq-p-q},$$

если знаменатель $\neq 0$, т. е. если исключены тривиальные интегралы $z=C$. Полный интеграл

$$z=Ax+By+\frac{AB}{AB-A-B},$$

или, при другом обозначении констант,

$$z=(A+B-1)\left(\frac{x}{A}+\frac{y}{B}-1\right);$$

особый интеграл

$$z=(\sqrt{x}+\sqrt{y}+1)^2.$$

6.125. $9(p^2-2z)^2=4q^3$; тип ч. I, п. 11.3.

Уравнение можно решать и с помощью замены $z=u(x)+v(y)$.

Полный интеграл

$$z=\frac{(x+A)^2}{2}+\frac{(y+B)^3}{3},$$

особые интегралы:

$$z=0 \quad \text{и} \quad z=\frac{(x+A)^2}{2}.$$

6.126. $z^2p^2q^2=y^2p^2+x^2q^2$; однородное уравнение.

Полагая

$$z(x,\ y)=\zeta(\xi,\ \eta), \qquad \xi=x^2, \qquad \eta=y^2,$$

получаем уравнение

$$4\zeta^2\zeta_\xi^2\zeta_\eta^2=\zeta_\xi^2+\zeta_\eta^2.$$

Отсюда находим тривиальный интеграл $z=C$ и полный интеграл

$$z^2=\frac{\sqrt{A^2+1}}{A}(x^2+Ay^2)+B.$$

6.127. $(xp+yq-z)^2(xp^2+yq^2)=p^2q^2$.

После применения преобразования Лежандра ч. I, п. 11.13 получается квазилинейное дифференциальное уравнение 2.64

$$X^2Z^2Z_X+Y^2Z^2Z_Y=X^2Y^2.$$

Интегралы этого уравнения получают из равенства

$$Z^3\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right)^3-3\left(\frac{Y}{X}-\frac{X}{Y}\right)+6\log\left|\frac{Y}{X}\right|=\Omega\left(\frac{1}{X}-\frac{1}{Y}\right).$$

Эти уравнения вместе с соотношениями

$$x=Z_X, \qquad y=Z_Y, \qquad z=xX+yY-Z$$

дают параметрическое представление искомых интегралов $z(x,\ y)$.

128—139. Прочие нелинейные уравнения

6.128. $\sqrt{p}+\sqrt{q}=ax$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\frac{(ax-A)^3}{3a}+A^2y+B \quad \text{для} \quad ax>A.$$

6.129. $\sqrt{p^2+q^2+1}+xp+yq=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=Ax+By+\sqrt{A^2+B^2+1};$$

особый интеграл — верхняя половина ($z > 0$) сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Интегралы — те гладкие поверхности, все касательные плоскости к которым отстоят от начала координат на расстояние, равное единице.

6.130. $\sqrt{\sqrt{q} - p} + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax + By + \sqrt{\sqrt{B} - A}$$

или, при других значениях констант,

$$z = (A - B^2)\,x + A^2 y + B;$$

особый интеграл

$$z = \frac{1}{4x} - \frac{x^2}{4y} \quad \text{для} \quad x > 0, \quad y > 0.$$

6.131. $(pq)^a = xp - yq$.

Из характеристических уравнений получают первый интеграл pq. Если положить $pq = A$, то, используя исходное уравнение, можно получить уравнения

$$p = \frac{A^a}{2x} \pm \frac{1}{2x}\sqrt{4xyA + A^{2a}}, \qquad q = \frac{A}{p},$$

и отсюда найти полный интеграл

$$A^{-a} z = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{y}\right| \pm R \pm \frac{1}{2}\ln\left|\frac{R-1}{R+1}\right| + B,$$

где

$$R = \sqrt{4xyA^{1-2a} + 1}.$$

6.132. $(p^2 + q^2)^a = xq - yp$.

Из двух последних характеристических уравнений получают первый интеграл $p^2 + q^2$. Если положить его равным A, то для определения полного интеграла получаются два уравнения

$$z_x = \frac{-A^a y + xR}{x^2 + y^2}, \quad z_y = \frac{A^a x + yR}{x^2 + y^2}, \quad \text{где} \quad R^2 = A(x^2 + y^2) - A^{2a}.$$

Можно также применить преобразование

$$z(x, y) = \zeta(\rho, \vartheta), \qquad x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho\sin\vartheta,$$

тогда получается уравнение

$$\zeta_\rho^2 = \zeta_\vartheta^{\frac{1}{a}} - \frac{\zeta_\vartheta^2}{\rho^2}.$$

Полный интеграл

$$\zeta = A\vartheta + B + \int \sqrt{A^{\frac{1}{a}} - \frac{A^2}{\rho^2}}\, d\rho.$$

6.133. $(p^2 - q^2)^a = yp - xq.$

После замены переменных

$$z(x, y) = \zeta(\xi, \eta), \qquad 2\xi = x + y, \qquad 2\eta = x - y$$

уравнение переходит в уравнение 6.131

$$(\zeta_\xi \zeta_\eta)^a = \xi\zeta_\xi - \eta\zeta_\eta.$$

6.134. $(xp - yq)^a = pq$; см. 6.131.

6.135. $\left(\frac{p}{\cos^2 x}\right)^a + \left(\frac{q}{\sin^2 y}\right)^b z^c = z^{\frac{ac}{a-b}}$; см. ч. I, п. 11.10.

6.136. $e^p = x(q + y)$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ay - \frac{y^2}{2} + x \ln(Ax) - x + B.$$

6.137. $\ln p + ay^2(p + q) - 2ayz - 2\ln y = b.$

Из характеристических уравнений получают первый интеграл p/y^2. Теперь можно действовать по методу ч. I, п. 9.3. Можно также применить преобразование $z = y^2 u(x, y)$; для u получится дифференциальное уравнение

$$u_y = \frac{b - \ln u_x}{ay^4} - u_x.$$

С помощью обоих методов получаем полный интеграл

$$z = Axy^2 - Ay^3 + \frac{\ln A - b}{3ay} + By^2.$$

6.138. $\ln(pq) + xp + yq = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax + By + \ln(AB), \qquad \text{если} \qquad AB > 0;$$

особый интеграл

$$z = -2 - \ln(xy), \qquad \text{если} \qquad xy > 0.$$

6.139 $p = \sin xq$; тип. ч. I, п. 11.4.

$$z = \frac{1}{A}\cos Ax - Ay + B.$$

ГЛАВА VII

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

1—7. Уравнения с одним или двумя квадратами производных

7.1. $p_1^2+2x_2x_3p_1+2x_1x_3p_2+2p_3=0.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$(p_1+p_2)\exp\frac{x_3^2}{2} \quad \text{и} \quad (p_1-p_2)\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right).$$

Если положить их равными $2A$, $2B$, то получаются уравнения

$$p_1=A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right)+B\exp\frac{x_3^2}{2},$$

$$p_2=A\exp\left(-\frac{x_3^2}{2}\right)-B\exp\frac{x_3^2}{2},$$

которые вместе с исходным уравнением образуют полную систему. Из этих трех уравнений можно определить также p_3 и получить, таким образом, полный интеграл

$$z=A(x_1+x_2)e^{-X}+B(x_1-x_2)e^{X}-ABx_3-$$
$$-\frac{1}{2}\int(A^2e^{-2X}+B^2e^{2X})\,dx_3+C, \quad \text{где} \quad 2X=x_3^2.$$

7.2. $ap_1^2+bp_2^2=x_3^2p_3$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=Ax_1+Bx_2-\frac{A^2a+B^2b}{x_3}+C.$$

7.3. $p_1^2+p_2^2=zp_3+z^2$; тип ч. I, п. 13.2.

Подстановка

$$z=\zeta(\xi), \quad \xi=Ax_1+Bx_2+2Cx_3$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(A^2+B^2)\zeta'^2=2C\zeta\zeta'+\zeta^2$$

с решением

$$\ln|\zeta| = \frac{\xi}{A^2+B^2}\left(C \pm \sqrt{A^2+B^2+C^2}\right) + D.$$

7.4. $p_1^2 - p_2p_3 = z(p_2+p_3)$; тип ч. I, п. 13.4.

Полагая $\zeta = \ln|z|$, получаем уравнение ч. I, п. 13.1

$$\zeta_{x_1}^2 = \zeta_{x_2}\zeta_{x_3} + \zeta_{x_2} + \zeta_{x_3};$$

полный интеграл

$$\ln|z| = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad \text{где} \quad A^2 = BC + B + C.$$

7.5. $a(p_1-p_2)p_3 + bx_3(x_2p_1 + x_1p_2) = c.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$2a(p_1-p_2) - bx_3^2, \quad p_1^2 - p_2^2, \quad (x_1+x_2)(p_1+p_2).$$

Уравнения, образованные из первых двух интегралов

$$2a(p_1-p_2) - bx_3^2 = A, \quad p_1^2 - p_2^2 = B,$$

находятся в инволюции как с данным уравнением, так и друг с другом. Поэтому, если эти три уравнения разрешить относительно p_1, p_2, p_3 и затем проинтегрировать, то мы получим интегралы исходного уравнения

$$z = \frac{x_1-x_2}{4a}X + aB\frac{x_1+x_2}{X} + 2c\int\frac{dx_3}{X} + C, \text{ где } X = bx_3^2 + A.$$

7.6. $2p_1(x_3p_2 + x_2p_3) + 2x_1 + x_2^2 = 0.$

С помощью преобразования Лежандра

$$x_\nu = Z_{X_\nu} = P_\nu, \quad p_\nu = X_\nu$$

получают уравнение 7.1.

$$P_2^2 + 2X_1(X_3P_2 + X_2P_3) + 2P_1 = 0.$$

7.7. $x_1zp_1(x_3p_2 + x_2p_3) = a(x_1p_1 + 2z).$

В уравнении можно разделить переменные. Если положить $z = u(x_1)v(x_2, x_3)$, то получается

$$\frac{a}{x_1}\frac{x_1u' + 2u}{u^2u'} = A = v(x_3v_{x_2} + x_2v_{x_3}).$$

Первое равенство дает

$$u'\left(Au - \frac{a}{u}\right) = \frac{2a}{x_1},$$

следовательно,

$$\exp\frac{Au^2}{2a}=Bx_1^2u.$$

Второе равенство приводит при $w=v^2$ к линейному дифференциальному уравнению

$$x_3w_{x_2}+x_2w_{x_3}=2A$$

с интегралами

$$v^2=2A\ln|x_2+x_3|+\Omega(x_2^2-x_3^2).$$

8—14. Более двух квадратов производных с постоянными коэффициентами

7.8. $(p_1+p_2)^2=2p_3+z$; тип. ч. I, п. 13.2.

Подстановка

$$z=\zeta(\xi),\qquad \xi=Ax_1+Bx_2+Cx_3$$

приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$(A+B)^2\zeta'^2=2C\zeta'+\zeta;$$

его решение

$$2u-2C\ln|u+C|=\xi+D,\qquad \text{где}\qquad u^2=(A+B)^2\zeta+C^2.$$

7.9. $ap_1^2+bp_2^2+cp_3^2=1$; тип ч. I, п. 13.1.

Полный интеграл

$$z=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D,\qquad \text{где}\qquad aA^2+bB^2+cC^2=1.$$

7.10. $ap_2p_3+bp_3p_1+cp_1p_2=d$; тип ч. I, п. 13.1.

Полный интеграл

$$z=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D,\quad \text{где}\quad aBC+bCA+cAB=d.$$

7.11. $a_1p_1^2+a_2p_2^2+a_3p_3^2=z$; тип ч. I, п. 13.4.

$$z=\frac{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{3}A_\nu x_\nu+A\right)^2}{4\sum\limits_{\nu=1}^{3}a_\nu A_\nu^2}\qquad\text{или}\qquad z=\sum_{\nu=1}^{3}\frac{(x_\nu-A_\nu)^2}{4a_\nu}.$$

7.12. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z=\sum_{\nu=1}^{3}\int\sqrt{x_\nu^2+A_\nu}\,dx_\nu+A_0,\qquad \text{где}\qquad A_1+A_2+A_3=0.$$

7.13. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1.$

Из характеристических уравнений легко получаются первые интегралы и с их помощью образуются находящиеся в инволюции уравнения

$$2(p_1-p_2)^2-(x_1-x_2)^2=A,$$
$$(p_1+p_2+p_3)^2-2(x_1+x_2+x_3)^2=B.$$

Из всех трех уравнений находят p_1, p_2, p_3 и затем определяют z.

7.14. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=2(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3).$

Из характеристических уравнений получают, например, первые интегралы p_2/p_1, p_3/p_1. Если при этом положить:

$$Ap_2=Bp_1, \qquad Ap_3=Cp_1,$$

то получается полная система трех уравнений. Из этой системы находим:

$$p_1=\frac{2A(Ax_1+Bx_2+Cx_3)}{A^2+B^2+C^2},$$

следовательно,

$$z=\frac{(Ax_1+Bx_2+Cx_3)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Уравнение можно решить и другим способом. Например, данное уравнение имеет интеграл

$$\frac{x_1^2}{z+A}+\frac{x_2^2}{z+B}+\frac{x_3^2}{z+C}=1.$$

15—21. Остальные уравнения с квадратами производных

7.15. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=ax_1.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы p_2, $p_3+x_3p_2$. Если их положить соответственно равными A, B, то вместе с данным уравнением получаются три находящиеся в инволюции уравнения

$$p_2=A, \quad p_3=-Ax_3+B, \quad p_1=-\frac{A}{2}\pm\sqrt{(a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}},$$

которые дают:

$$z=-\frac{A}{2}x_1\pm\frac{2}{3(a-AB)}\left((a-AB)x_1+\frac{A^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}+$$
$$+Ax_2-\frac{A}{2}x_3^2+Bx_3+C.$$

7.16. $p_1(p_1+p_2)+x_1p_2(x_3p_2+p_3)=x_1z$; тип ч. I, п. 13.4.

Подстановка $z=\pm w^2$ приводит к уравнению 7.15

$$w_{x_1}(w_{x_1}+w_{x_2})+x_1w_{x_2}(x_3w_{x_2}+w_{x_3})=\pm\frac{x_1}{4}.$$

7.17. $p_1^2+x_2p_1p_2+x_1x_2p_2p_3+x_1x_2^2x_3p_2^2=x_1z$; тип ч. I, п. 13.4.

Подстановка $z=\pm u^2$ приводит к уравнению

$$q_1^2+x_2q_1q_2+x_1x_2q_2q_3+x_1x_2^2x_3q_2^2=\pm\frac{x_1}{4};$$

здесь

$$q_\nu=u_{x_\nu}.$$

В этом уравнении можно разделить переменные. Если положить

$$x_2q_2=A,\qquad q_3+Ax_3=B,$$

то получается еще соотношение

$$q_1^2+Aq_1+ABx_1=\pm\frac{x_1}{4}.$$

Из всех этих уравнений получаем:

$$u=-\frac{A}{2}x_1-\frac{v^3}{3(4AB\pm1)}+A\ln|x_2|+Bx_3-\frac{A}{2}x_3^2+C,$$

где

$$v^2=A^2-(4AB\pm1)x_1.$$

7.18. $a_1(x_2p_3-x_3p_2)^2+a_2(x_3p_1-x_1p_3)^2+a_3(x_1p_2-x_2p_1)^2=1.$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы

$$\sum x_\nu^2,\quad \sum x_\nu p_\nu,\quad \sum p_\nu^2.$$

7.19. $z^2p_1p_2+zp_2p_3+p_3p_1=1$; тип ч. I, п. 13.2.

$$\int\sqrt{ABz^2+BCz+AC}\,dz=Ax_1+Bx_2+Cx_3+D.$$

7.20. $(x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3)^2=$
$$=[a^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+1)-1](p_1^2+p_2^2+p_3^2).$$

Замена переменных

$$z(x_1,x_2,x_3)=\zeta(\rho,\varphi,\psi),$$
$$x_1=\rho\sin\varphi\cos\psi,\quad x_2=\rho\sin\varphi\sin\psi,\quad x_3=\rho\cos\psi$$

приводит к уравнению

$$\zeta_\varphi^2+\frac{\zeta_\psi^2}{\sin^2\varphi}=(1-a^2)\frac{\rho^2(\rho^2+1)}{a^2\rho^2+a^2-1}\zeta_\rho^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Если положить левую и правую части равными A^2, то получаются уравнения

$$\zeta_\rho = \frac{A}{\sqrt{1-a^2}} \frac{1}{\rho} \sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2+1}}, \tag{1}$$

$$\zeta_\psi^2 = (A^2 - \zeta_\varphi^2) \sin^2 \varphi. \tag{2}$$

В последнем уравнении переменные разделены. Если положить левую и правую части равными B^2, то получаются еще два уравнения

$$\zeta_\psi = B, \tag{3}$$

$$\zeta_\varphi = \pm \sqrt{A^2 - \frac{B^2}{\sin^2 \varphi}}. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\zeta = \frac{A}{\sqrt{1-a^2}} I_1 + B\psi + I_2 + C,$$

где

$$I_1 = \int \frac{1}{\rho} \sqrt{a^2 - \frac{1}{\rho^2+1}}\, d\rho =$$

$$= \frac{a}{2} \ln \frac{\sigma + a}{\sigma - a} - \sqrt{1-a^2} \operatorname{arctg} \frac{\sigma}{\sqrt{1-a^2}},$$

причем

$$\sigma^2 = a^2 - \frac{1}{\rho^2+1},$$

а

$$I_2 = A \arcsin \frac{u}{\sqrt{A^2-B^2}} - B \operatorname{arctg} \frac{u}{B \cos \varphi},$$

причем

$$u^2 = A^2 \sin^2 \varphi - B^2.$$

7.21. $2ze^{x_3}(e^{-x_1}p_1 + e^{-x_2}p_2)^2 = p_3$; тип ч. I, п. 13.4.

Замена $w = z^2$, $q_\nu = w_{x_\nu}$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$(e^{-x_1}q_1 + e^{-x_2}q_2)^2 = e^{-x_3}q_3.$$

Отсюда полный интеграл

$$z^2 = Ae^{x_1} + Be^{x_2} + (A+B)^2 e^{x_3} + C.$$

22—31. Уравнения с производными в более высоких степенях

7.22. $p_1p_2p_3 = x_1x_2x_3$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$z = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D, \quad \text{где} \quad 8ABC = 1.$$

7.23. $p_1p_2p_3 = x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3$.

Из характеристических уравнений находим первые интегралы p_2/p_1, p_3/p_1. Если положить

$$Ap_2 = Bp_1, \qquad Ap_3 = Cp_1,$$

то получаем три уравнения, образующие полную систему. Отсюда находим:

$$p_1 = \sqrt{\frac{A}{BC}}\sqrt{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3}$$

и затем

$$z = \frac{2}{3\sqrt{ABC}}(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3)^{\frac{3}{2}} + D.$$

7.24. $p_1p_2p_3 + x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + ABC.$$

Особый интеграл $z^2 = -4x_1x_2x_3$.

7.25. $p_1p_2p_3 = x_1p_1^2 + x_2p_2^2 + x_3p_3^2$.

Из характеристических уравнений легко получаются первые интегралы. Если с их помощью образовать уравнения

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2} = A, \qquad \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_3} = B,$$

то получаются три уравнения, составляющие инволюционную систему, а из них можно определить p_1, p_2, p_3 и z. С помощью преобразования Лежандра $x_\nu = P_\nu$, $p_\nu = X_\nu$ уравнение переходит в линейное дифференциальное уравнение 3.61

$$X_1^2P_1 + X_2^2P_2 + X_3^2P_3 = X_1X_2X_3.$$

7.26. $p_1p_2p_3 - (x_2x_3p_2p_3 + x_3x_1p_3p_1 + x_1x_2p_1p_2) +$
$$+ x_1x_2x_3(x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3) = 0.$$

Из характеристических уравнений получают первые интегралы $x_1p_1 - x_2p_2$, $x_1p_1 - x_3p_3$. Если при этом уравнения

$$x_2p_2 = x_1p_1 + A, \qquad x_3p_3 = x_1p_1 + B$$

присоединить к данному, то образуется инволюционная система. Исключение приводит к кубическому уравнению для p_1.

7.27. $(a_1p_1 - z)(a_2p_2 - z)(a_3p_3 - z) = p_1p_2p_3$.

Для $\zeta(x_1, x_2, x_3) = \ln|z|$ из дифференциального уравнения получается уравнение типа ч. I, п. 13.1

$$(a_1\zeta_{x_1} - 1)(a_2\zeta_{x_2} - 1)(a_3\zeta_{x_3} - 1) = \zeta_{x_1}\zeta_{x_2}\zeta_{x_3}$$

с полным интегралом

$$\zeta = A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_0,$$

где

$$(a_1A_1 - 1)(a_2A_2 - 1)(a_3A_3 - 1) = A_1A_2A_3.$$

7.28. $zp_1p_2p_3 = x_1x_2x_3$; тип ч. I, п. 13.4.

Пусть $z = u^\lambda$. Тогда

$$\lambda^3 u^{4\lambda-3} u_{x_1}u_{x_2}u_{x_3} = x_1x_2x_3,$$

следовательно, для $\lambda = \frac{3}{4}$ получается уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{u_{x_1}}{x_1}\frac{u_{x_2}}{x_2}\frac{u_{x_3}}{x_3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3.$$

Отсюда полный интеграл

$$\frac{3}{2}z^{\frac{4}{3}} = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2 + D \quad \text{для} \quad ABC = 1.$$

7.29. $azp_1 + bz^2p_2^2 + cz^3p_3^3 = 1$.

Для $w = z^2$ получают уравнение типа ч. I, п. 13.1

$$\frac{a}{2}q_1 + \frac{b}{4}q_2^2 + \frac{c}{8}q_3^3 = 1$$

(при этом $q_\nu = w_{x_\nu}$). Поэтому полный интеграл данного уравнения имеет вид

$$z^2 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D,$$

где

$$\frac{a}{2}A + \frac{b}{4}B^2 + \frac{c}{3}C^3 = 1.$$

7.30. $p_1^2 + zp_2^2 + z^2p_3^2 = z^3p_1p_2p_3$; это уравнение типа ч. I, п. 13.2

$$ABC\int \frac{z^3}{A^2 + B^2z + C^2z^2}\,dz = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D.$$

7.31. $p_1^n + p_2^n + p_3^n = 1$; тип ч. I, п. 13.1.

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D, \quad \text{где} \quad A^n + B^n + C^n = 1.$$

ГЛАВА VIII

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С БОЛЕЕ ЧЕМ ТРЕМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

8.1. $p_1p_2+p_3p_4+x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4=z$; уравнение Клеро.

Полный интеграл

$$z=\sum A_\nu x_\nu+(A_1A_2+A_3A_4).$$

Особый интеграл

$$z=-x_1x_2-x_3x_4.$$

8.2. $p_1p_2p_3p_4=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+x_4p_4$; частный случай 8.13.

Из характеристических уравнений получают первые интегралы p_ν/p_1 и из них — уравнения

$$A_1p_\nu=A_\nu p_1 \qquad (\nu=2,\ 3,\ 4),$$

которые вместе с данным уравнением образуют полную систему. Четыре уравнения можно разрешить относительно p_ν, при этом получается

$$z=\frac{3}{4}\,\frac{(A_1x_1+\ldots+A_4x_4)^{\frac{4}{3}}}{(A_1\ \ldots\ A_4)^{\frac{1}{3}}}+A_0.$$

8.3. $(p_1-p_2)(p_3+x_4)(p_4+x_3)+x_2p_1+x_1p_2=1.$

Переменные разделяются, после чего уравнения

$$(p_3+x_4)(p_4+x_3)=A, \qquad x_2p_1+x_1p_2+A(p_1-p_2)=1$$

можно решить с произвольной константой A. Для первого уравнения легко находится полный интеграл

$$z_1=-x_3x_4+Bx_3+\frac{A}{B}x_4.$$

Второе уравнение линейно, его интегралами являются

$$z_2=\ln|x_1+x_2|+\Omega\,[(x_1+x_2),\ (x_1-x_2-2A)],$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами данного уравнения будут функции $z = z_1 + z_2$.

8.4. $p_1^2 p_2^2 p_3^2 p_4^2 = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + x_4 p_4$; частный случай 8.13. Процесс решения см. в 8.2

$$z = \frac{7}{8} \frac{(A_1 x_1 + \ldots + A_4 x_4)^{8/7}}{(A_1 \ldots A_4)^{1/7}} + A_0.$$

8.5. $(p_1 + x_4 p_3) p_4 + (p_2 + x_5 p_3) p_5 = 0.$

Так как x_1, x_2, x_3 не входят в уравнение, то можно произвести замену

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + u(x_4, x_5).$$

Тогда для u получается линейное однородное уравнение с главным интегралом

$$u = \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}.$$

В более общем виде интегралы данного уравнения — функции

$$z = \Omega\left(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \frac{Cx_4 + A}{Cx_5 + B}\right),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами являются также функции

$$z = Ax_1 + Bx_2 + (AD - BC)x_3 + \\ + (Cx_1 + Dx_2 + E)(Bx_4 - Ax_5) + F.$$

8.6. $p_1[p_5 + x_5(x_4 p_4 + x_5 p_5)] - p_2[p_4 + x_4(x_4 p_4 + x_5 p_5)] + \\ + p_3(x_4 p_5 - x_5 p_4) = 0.$

Так как x_1, x_2, x_3 не входят в уравнение, то можно произвести замену

$$z = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + u(x_4, x_5).$$

Тогда для u получается линейное однородное уравнение с главным интегралом

$$u = \frac{(Ax_4 + Bx_5 - C)^2}{x_4^2 + x_5^2 + 1}.$$

В более общем виде интегралы данного уравнения — функции

$$z = \Omega\left(Ax_1 + Bx_2 + Cx_3, \frac{(Ax_4 + Bx_5 - C)^2}{x_4^2 + x_5^2 + 1}\right),$$

где Ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Интегралами являются также функции

$$z = \Omega(x_1x_4 + x_2x_5 - x_3,\ x_4,\ x_5).$$

8.7. $$p_1p_4 + (3x_2 + 2x_3)\,p_2p_4 + (4x_2 + 5x_3)\,p_3p_4 + [x_4 + x_5(p_2 - p_3)]\,p_4p_5 + x_5p_5^2 = 0.$$

При делении на p_4 получается:

$$p_1 + (3x_2 + 2x_3)\,p_2 + (4x_2 + 5x_3)\,p_3 + [x_4 + x_5(p_2 - p_3)]\,p_5 + x_5\frac{p_5^2}{p_4} = 0. \qquad (1)$$

Из характеристических уравнений следует:

$$x_1 + \ln|p_2 - p_3| = \text{const}, \qquad 7x_1 + \ln|p_2 + 2p_3| = \text{const},$$

т. е.

$$p_2 = 2Ae^{-x_1} + Be^{-7x_1}, \qquad p_3 = -Ae^{-x_1} + Be^{-7x_1}. \qquad (2)$$

Далее, из характеристических уравнений следует:

$$\ln\left|\frac{p_5}{p_4}\right| = 3Ae^{-x_1} + \text{const},$$

т. е.

$$p_5 = -Cp_4\exp(3Ae^{-x_1}),$$

и, таким образом, если еще раз обратиться к характеристическим уравнениям,

$$p_4 = D\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right),$$

$$p_5 = -CDe^{3Ae^{-x_1}}\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right). \qquad (3)$$

Так как уравнения (2) и (3) получены из первых интегралов уравнения (1), то они с (1) в инволюции. Кроме того, очевидно, что они в инволюции и друг с другом. Поэтому уравнения (1), (2), (3) имеют общие решения. Подставляя (2) и (3) в (1) и интегрируя, получаем $z = A(2x_2 - x_3)\,e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)\,e^{-7x_1} + D\left(x_4 - Cx_5e^{3Ae^{-x_1}}\right)\exp\left(C\int e^{3Ae^{-x_1}}dx_1\right) + E$.

Можно поступить и так: из характеристических уравнений следует также

$$x_4p_4 + x_5p_5 = \text{const}, \qquad \frac{p_4}{p_5}e^{p_2 - p_3} = \text{const},$$

т. е. вместе с (2)

$$p_4 = \frac{C}{x_4 + Dx_5\exp 3Ae^{-x_1}}, \qquad p_5 = \frac{CD\exp 3Ae^{-x_1}}{x_4 + Dx_5\exp 3Ae^{-x_1}}.$$

Оба эти уравнения, вместе с уравнением (2) и данным, находятся в инволюции друг с другом. Из данного уравнения можно определить p_1 и получить наконец

$$z = A(2x_2 - x_3)e^{-x_1} + B(x_2 + x_3)e^{-7x_1} + \\ + C\ln|x_4 + Dx_5 \exp 3Ae^{-x_1}| - CD\int \exp 3Ae^{-x_1}dx_1 + E.$$

С помощью преобразования Лежандра уравнение переводится в линейное дифференциальное уравнение.

8.8. $(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + (p_1 - p_2)p_3[p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)x_6] = a$, $a \neq 0$.

Решая уравнения

$$p_4^2 + (x_4 + p_5)(x_6 + p_5)p_6 = A, \tag{1}$$

$$(x_2p_1 + x_1p_2)x_3 + A(p_1 - p_2)p_3 = a, \tag{2}$$

получают интегралы для произвольной константы A. Если $u(x_4, x_5, x_6)$ и $v(x_1, x_2, x_3)$ — интегралы этих двух уравнений, то $u + v$ — интеграл данного уравнения. Так как (1) не зависит от x_5, то решения получаются, если $p_5 = B$ считать константой. Тогда (1) — уравнение с разделяющимися переменными, и

$$u = \frac{2}{3C}[A + C(x_4 + B)]^{\frac{3}{2}} + Bx_5 - C\ln(x_6 + B).$$

Решения (2) получаются из 7.5.

8.9. $p_1p_2 \ldots p_n = x_1x_2 \ldots x_n$; уравнение с разделяющимися переменными.

$$2z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu^2 + A_0, \quad \text{где} \quad A_1 \ldots A_n = 1,$$

или

$$(z - \zeta)^n = \left(\frac{n}{2}\right)^n \prod_{\nu=1}^{n} (x_\nu^2 - \xi_\nu) \text{ для любых } \zeta, \xi_\nu.$$

8.10. $p_1p_2 \ldots p_n = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$; это частный случай 8.13.

Из характеристических уравнений получаются первые интегралы p_ν/p_1. Если при этом положить $A_1p_\nu = A_\nu p_1$ ($\nu = 2, \ldots, n$), то получается полная система n уравнений, а из нее — полный интеграл

$$z = A_0 + \frac{n-1}{n}(A_1 \ldots A_n)^{\frac{1}{1-n}}(A_1x_1 + \ldots + A_nx_n)^{\frac{n}{n-1}}.$$

8.11. $p_1p_2 \ldots p_n = (a_1p_1 - z)(a_2p_2 - z) \ldots (a_np_n - z)$.

Для $\zeta(x_1, \ldots, x_n) = \ln|z|$ получается уравнение 13.1 из ч. I: $(a_1\zeta_{x_1} - 1) \ldots (a_n\zeta_{x_n} - 1) = \zeta_{x_1} \ldots \zeta_{x_n}$ с полным интегралом $\zeta = A_0 + A_1x_1 + \ldots + A_nx_n$ для $(a_1A_1 - 1) \ldots (a_nA_n - 1) = A_1 \ldots A_n$.

8.12. $z = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu p_\nu + (n+1)(p_1p_2 \ldots p_n)^{\frac{1}{n+1}}$; уравнение Клеро.

Полный интеграл $z = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu x_\nu + (n+1)(A_1 \ldots A_n)^{\frac{1}{n+1}}$; особый интеграл $z = \frac{(-1)^n}{x_1 \ldots x_n}$.

8.13. $f(p_1, \ldots, p_n) = x_1p_1 + \ldots + x_np_n$; f — однородная степени m функция.

Из первых интегралов $\frac{p_\nu}{p_1}$ $(\nu = 2, \ldots, n)$ получаются уравнения $p_\nu = \frac{A_\nu}{A_1} p_1$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, образующие вместе с данным уравнением полную систему. Из этой системы

$$p_\nu = A_\nu \left(\frac{\sum A_\nu x_\nu}{f(A_1, \ldots, A_n)}\right)^{\frac{1}{m}}, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \qquad \text{следовательно,}$$

$$z = \frac{m-1}{m} \left(\frac{\left(\sum A_\nu x_\nu\right)^m}{f(A_1, \ldots, A_n)}\right)^{\frac{1}{m-1}} + C.$$

8.14. $f(p_1, \ldots, p_n) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu f_\nu(p_\nu)$.

Первые интегралы — функции $F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1)$, где $F_\nu(p) = \int \frac{dp}{f_\nu(p)}$. Система, состоящая из данного уравнения и уравнений $F_\nu(p_\nu) - F_1(p_1) = A$ $(\nu = 2, \ldots, n)$, разрешается относительно p_ν. Если $p_\nu = P_\nu(x_1, \ldots, x_n)$ — решения, то

$$z = \int_{\xi_1, \ldots, \xi_n}^{x_1, \ldots, x_n} \sum_{\nu=1}^{n} P_\nu \, dx_\nu \text{ — интеграл данного уравнения.}$$

ГЛАВА IX

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

9.1. $F(p, q, z-xp-yq)=0, \quad G(p, q, z-xp-yq)=0.$

Если $F(a, b, c)=G(a, b, c)=0$, то $z=ax+by+c$ — общее решение.

9.2. $p_1^2+p_2^2+p_3^2=f(x_1^2+x_2^2+x_3^2), \; x_2p_1-x_1p_2=0.$

Система инволюционная. Второе уравнение линейное, и решения его вполне очевидны. Затем из них выбираются такие, которые удовлетворяют также первому уравнению.

Интегральным базисом второго уравнения будет, очевидно, $x_1^2+x_2^2$, x_3. Поэтому интегралами этого уравнения являются также все непрерывно дифференцируемые функции $\zeta(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $\xi_2=x_3$. Если эти функции удовлетворяют и первому уравнению, то должно быть $\zeta_{\xi_1}^2+\zeta_{\xi_2}^2=f(\xi_1^2+\xi_2^2)$.

Об этом дифференциальном уравнении см. 6.64.

9.3. $p_1p_2=x_3x_4, \; p_3p_4=x_1x_2.$

Образование скобок приводит к уравнению

$$x_1p_1+x_2p_2-x_3p_3-x_4p_4=0.$$

Три уравнения образуют полную систему. Разрешая ее относительно p_1, p_2, p_3, получают:

$$p_1=\frac{x_2x_3}{p_4}, \qquad p_2=\frac{x_4p_4}{x_2}, \qquad p_3=\frac{x_1x_2}{p_4};$$

или

$$p_1=\frac{x_4p_4}{x_1}, \qquad p_2=\frac{x_1x_3}{p_4}, \qquad p_3=\frac{x_1x_2}{p_4}.$$

Теперь каждая из обеих систем инволюционная. Вторая получается из первой подстановкой x_1 вместо x_2 (а также p_1 вместо p_2).

Преобразование А. Майера

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4) = Z(u, u_1, u_2, u_3, x_4),$$
$$x_1 = uu_1, \quad x_2 - \xi_2 = uu_2, \quad x_3 = uu_3$$

дает для первой системы

$$Z_u = \frac{2uu_1u_3(uu_2 + \xi_2)}{Z_{x_4}} + \frac{u_2}{uu_2 + \xi_2} x_4 Z_{x_4}.$$

(Так как u должно пробегать интервал $[0, 1]$, то теперь ясно, что введение условия $\xi_2 \neq 0$ было необходимо.) Так как u_1, u_2, u_3, ξ_2 — параметры, то это — дифференциальное уравнение 6.52. Поэтому здесь получается $Z = A(uu_2 + \xi_2)x_4 + \frac{u_3u_1u^2}{A} + B$, следовательно, $z = Ax_2x_4 + \frac{x_1x_3}{A} + B$. Подстановка x_1 вместо x_2 дает интегралы $z = Ax_1x_4 + \frac{x_2x_3}{A} + B$. Полными интегралами являются также

$$z = 2\sqrt{x_1x_3(x_2x_4 - A)} + B, \quad 2\sqrt{x_2x_3(x_1x_4 - A)} + B.$$

Применение преобразования Якоби см. в ч. I, п. 14.7.

9.4. $p_1p_2p_3 = p_4$, $x_1p_1 = x_2p_2 + x_4p_3 + p_4x_3$.

Образование скобок дает уравнение $p_1p_2p_4 = p_3$. Если $p_1p_2 \equiv 0$, то отсюда следует, что все $p_\nu \equiv 0$; тогда получается интеграл $z = C$. Если $p_3 \equiv 0$ или $p_4 \equiv 0$, то соответственно $p_4 \equiv 0$ или $p_3 \equiv 0$. Тогда остается уравнение $x_1p_1 = x_2p_2$ с главным интегралом x_1x_2.

Пусть все $p_\nu \neq 0$. Тогда из трех уравнений следует:

$$p_1p_2 = \pm 1, \quad p_3 = \pm p_4, \quad x_1p_1 = x_2p_2 + (x_3 \pm x_4)p_4.$$

Это инволюционная система. Для последнего уравнения, в зависимости от выбора верхних или нижних знаков x_1x_2, $x_1(x_3 + x_4)$ или x_1x_2, $x_2(x_3 - x_4)$ — интегральный базис, и он удовлетворяет также второму уравнению. Остается так определить $\zeta(\xi_1, \xi_2)$, где $\xi_1 = x_1x_2$ и $\xi_2 = x_1(x_3 + x_4)$ (соответственно $x_2(x_3 - x_4)$), чтобы ζ удовлетворяла и первому уравнению. Получается уравнение (ср. с 6.51) $(\xi_1\zeta_{\xi_1} + \xi_2\zeta_{\xi_2})\zeta_{\xi_1} = \pm 1$ с первым интегралом $\zeta_{\xi_2}/\zeta_{\xi_1}$. Из $\zeta_{\xi_2} = A\zeta_{\xi_1}$ и предыдущего уравнения получается $\zeta_{\xi_1} = [\pm(\xi_1 + A\xi_2)]^{-\frac{1}{2}}$; следовательно, $\zeta = 2\sqrt{\pm(\xi_1 + A\xi_2)} + B$ и

$$z = 2\sqrt{x_1x_2 + Ax_1(x_3 + x_4)} + B,$$
$$z = 2\sqrt{Ax_2(x_4 - x_3) - x_1x_2} + B.$$