

R&C
Dynamics

THEORY OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

EARL A. CODDINGTON

*Assistant Professor of Mathematics
University of California, Los Angeles*

NORMAN LEVINSON

*Professor of Mathematics
Massachusetts Institute of Technology*

McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC.

New York Toronto London

1955

Э. А. Коддингтон и Н. Левинсон

ТЕОРИЯ
ОБЫКНОВЕННЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО

Б. М. Левитана

*

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1958

А Н Н О Т А Ц И Я

В книге американских математиков Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона «Теория обыкновенных дифференциальных уравнений» дается оригинальное, содержащее ряд новых результатов изложение современной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Представлены следующие разделы: теоремы существования и единственности, линейные уравнения, аналитическая теория дифференциальных уравнений, асимптотика, задачи на собственные значения, теория возмущений, теория Пуанкаре—Бендиксона и теория дифференциальных уравнений на торе.

Книга будет очень полезна всем математикам, физикам и инженерам, так или иначе соприкасающимся с дифференциальными уравнениями.

Редакция литературы по математическим наукам
Заведующий редакцией *Б. В. ШАБАТ*

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

Книга Э. А. Коддингтона и Н. Левинсона содержит подробное изложение разнообразных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Наряду с традиционными разделами этой теории, например таким и, как теоремы существования и единственности или теория линейных систем, авторы дают довольно подробное изложение аналитической теории дифференциальных уравнений, теории самосопряженных краевых задач как для конечного, так и для бесконечного интервала, а также введение в теорию несамосопряженных краевых задач.

Перечисленные разделы составляют содержание глав с I по XII включительно и, по существу, образуют первую часть книги, посвященную линейным уравнениям.

Вторая часть книги, именно главы с XIII по XVII, посвящена нелинейной теории. Здесь изучается устойчивость решений, периодические решения и теория возмущения систем, имеющих периодическое решение, качественная теория систем второго порядка (включая теорию Пуанкаре—Бендиксона) и, наконец, теория уравнений на торе. Более подробное представление о содержании книги читатель может получить из оглавления.

Книга содержит много новинок. Большой интерес представляет систематическое применение в аналитической теории дифференциальных уравнений понятия формального решения. Спектральная теория самосопряженных дифференциальных уравнений изложена независимо от теории операторов в пространстве Гильберта.

К каждой главе приложено большое число задач; при этом наряду с легкими имеются также задачи значительной трудности. В большинстве случаев трудные задачи сопровождаются указаниями авторов, облегчающими их решение. Следует заметить, что решения многих задач можно найти в журнальных статьях, однако авторы в таких случаях ссылок на литературу не дают.

Книга является хорошим введением в большое число важных разделов теории обыкновенных дифференциальных уравнений и может быть использована в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов физико-математических факультетов, а также может оказаться полезной для научных работников.

Б. М. Левитан.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРОВ

Эта книга возникла из лекций, читанных авторами, и содержит, вероятно, больше материала, чем обычно излагается в одногодичном курсе. Выбор материала частично обусловлен интересами авторов.

Мы надеемся, что книга окажется полезной как в области практических применений дифференциальных уравнений, так и для математиков, не занимающихся приложениями. Для чтения книги необходимо знакомство с теорией матриц и с основами теории функций комплексного переменного. Понятие интеграла Лебега используется в главах II, VII, IX и X. Однако глава II необходима лишь для некоторых параграфов главы XV, которые в части, относящейся к практическим применениям, полностью покрываются главой XIII. В главе VII можно легко обойтись без интеграла Лебега, что там и указано. Однако строгое изучение глав IX и X требует известного математического развития и, во всяком случае, предполагает понимание тех теорем теории интегрирования, которые здесь используются. Другой подход состоит в применении теории глав IX и X к ограниченному классу функций, как это указано в доказательстве теоремы 3.1 гл. IX. Этот подход предполагает лишь знание интеграла Римана—Стильтьеса.

Главы III—XII посвящены линейным уравнениям. Для линейной теории теоремы существования решений гл. I не необходимы. Теорема, необходимая для гл. III, намечена в задаче 1, помещенной в конце этой главы. Для глав IV и V достаточны результаты § 7 гл. III. Задача 7 гл. I обеспечивает необходимые дополнительные результаты существования для глав VII—XII.

Главы IV, V и VI не используются ни в одной из последующих глав. Глава VIII также не нужна ни для одной из последующих глав, не исключая глав IX и X. Глава VIII не зависит от главы VII.

Для главы XII требуется лишь глава VII, а для § 5 — также глава XI.

Для глав XIII и XIV нужны только главы I и III. Для большей части главы XV и для глав XVI и XVII достаточна гл. I.

Не делается никакой попытки показать историческое возникновение теории, и в конце книги дано только ограниченное число ссылок. В соответствии с этим авторы не делают указаний в тексте в тех случаях, когда они излагают новые результаты.

Задачи в некоторых случаях дают дополнительный материал, не рассмотренный в тексте.

Авторы выражают благодарность коллегам и студентам, прочитавшим отдельные части рукописи, в частности Ф. Г. Брауэру, проф. А. Хорну и доктору Дж. Дж. Левинсу.

*Эрл А. Коддингтон,
Норман Левинсон.*

Глава I

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

§ 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ

Пусть I — открытый интервал на действительной прямой $-\infty < t < \infty$, т. е. множество всех действительных чисел t , удовлетворяющих неравенствам $a < t < b$ для некоторых действительных постоянных a и b . Множество всех комплекснозначных функций, имеющих k непрерывных производных на I , обозначается через $C^k(I)$. Если f — элемент этого множества, то пишут $f \in C^k(I)$ или $f \in C^k$ на I . Символ \in читается так: «элемент множества» или «принадлежит к». Полезно расширить определение класса C^k на интервалы I , которые могут не быть открытыми. Действительные интервалы $a < t < b$, $a \leq t \leq b$, $a \leq t < b$ и $a < t \leq b$ обозначаются соответственно через (a, b) , $[a, b]$, $[a, b)$ и $(a, b]$. Если $f \in C^k$ на (a, b) и в дополнение к этому правая k -я производная f' существует в точке a и непрерывна справа в a , то говорят, что f принадлежит классу C^k на $[a, b]$. Аналогично, если k -я производная непрерывна слева в b , то $f \in C^k$ на $(a, b]$. Если выполняются оба эти условия, то говорят, что $f \in C^k$ на $[a, b]$.

Если D — область, т. е. открытое связное множество в (t, x) -плоскости, то множество всех комплекснозначных функций, таких, что все частные производные $\partial^k f / \partial t^p \partial x^q$ ($p + q = k$) порядка k существуют и непрерывны в D , обозначается через $C^k(D)$ и при этом пишут $f \in C^k(D)$ или $f \in C^k$ на D .

Множества $C^0(I)$ и $C^0(D)$ непрерывных функций на I и D будут обозначаться через $C(I)$ и $C(D)$ соответственно.

Пусть D — область в (t, x) -плоскости и предположим, что f — действительная функция, такая, что $f \in C(D)$. Тогда основная задача этой главы может быть сформулирована следующим образом.

Задача. Найти дифференцируемую функцию φ , определенную на действительном t -интервале I и такую, что

$$(i) \quad (t, \varphi(t)) \in D \quad (t \in I),$$

$$(ii) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \left(t \in I, \quad ' = \frac{d}{dt} \right).$$

Эта задача называется *обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка* и обозначается так:

$$x' = f(t, x) \quad \left(\dot{x} = \frac{dx}{dt} \right). \quad (\text{У})$$

Если такой интервал I и функция φ существуют, то φ называется *решением дифференциального уравнения (У) на I* . Очевидно, что если φ есть решение уравнения (У) на I , то $\varphi \in C^1$ на I , согласно (ii).

На геометрическом языке: уравнение (У) определяет наклон $f(t, x)$ в каждой точке области D . Решение φ на I есть функция, график которой [множество всех точек $(t, \varphi(t))$, $t \in I$] для каждого $t \in I$ имеет угловой коэффициент $f(t, \varphi(t))$.

Задача (У) может иметь много решений на интервале I . Например, простое уравнение

$$x' = 1$$

имеет для каждого интервала I решение

$$\varphi_c(t) = t + c,$$

где c — произвольная постоянная. Существует, однако, только одно решение, проходящее, например, через точку $(1, 1)$, а именно $\varphi_0(t)$. Поэтому, чтобы иметь возможность говорить о единственности решений уравнения (У), следует рассматривать задачу определения решения, проходящего через данную точку (t, x) -плоскости.

Пусть (τ, ξ) — данная точка области D . Тогда начальная задача для уравнения (У) и этой точки ставится следующим образом.

Начальная задача. Найти интервал I , содержащий точку τ , и решение φ уравнения (У) на I , удовлетворяющее условию

$$\varphi(\tau) = \xi.$$

Эта задача обозначается так:

$$x' = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi.$$

Пусть φ — решение этой задачи на I . Тогда, интегрируя (ii), получаем следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (t \in I).$$

Наоборот, пусть функция $\varphi \in C$ удовлетворяет на I интегральному уравнению. Тогда очевидно, что $\varphi(\tau) = \xi$, и, дифференцируя интегральное уравнение, мы убедимся, что φ есть решение уравнения (У) на I . Иными словами, имеется соответствие между решениями φ уравнения (У) на I , удовлетворяющими условию $\varphi(\tau) = \xi$, и непрерывными решениями интегрального уравнения. Таким образом, начальная задача для уравнения (У) на I полностью экви-

валентна задаче отыскания непрерывных на I функций φ , удовлетворяющих интегральному уравнению.

Если дана непрерывная в области D функция f , то первый вопрос, на который следует дать ответ, состоит в следующем: существует ли решение уравнения (У)? Ответ утвердительный при надлежащем I . Указание на необходимость ограничений в каждой общей теореме существования можно усмотреть из простого примера

$$x' = x^2.$$

Легко видеть, что решение этого уравнения, проходящее через точку $(1, -1)$, есть $\varphi(t) = -t^{-1}$. Однако это решение не существует при $t = 0$, хотя функция $f(t, x) = x^2$ в этой точке непрерывна. Этот пример показывает, что каждая общая теорема существования необходимо должна иметь локальный характер, и существование в целом может быть гарантировано лишь при дополнительных условиях, налагаемых на функцию f .

Доказательство локального существования решения осуществляется в два этапа. Вначале при помощи эффективной конструкции показывается, что существует «приближенное» решение уравнения (У) в смысле, который будет указан ниже. Затем будет показано, что существует последовательность приближенных решений, сходящаяся к решению (У).

Пусть f — непрерывная действительная функция, определенная в области $D(t, x)$ -плоскости. Функция $\varphi \in C$ называется ε -приближенным решением уравнения (У) на I , если:

$$(i) \quad (t, \varphi(t)) \in D \quad (t \in I);$$

(ii) $\varphi \in C^1$ на I , за исключением, быть может, конечного числа точек S на I , в которых φ' может иметь разрывы первого рода¹;

$$(iii) \quad |\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon \quad (t \in I - S).$$

Если функция $\varphi \in C$ удовлетворяет условию (ii) на I , то о ней говорят, что она имеет *кусочно непрерывную производную* и это обозначается так: $\varphi \in C_p^1(I)$.

Если функция $f \in C$ в прямоугольнике

$$R: |t - \tau| \leq a, \quad |x - \xi| \leq b \quad (a, b > 0)$$

с центром в точке (τ, ξ) , то она в этом прямоугольнике ограничена. Пусть

$$M = \max |f(t, x)| \quad ((t, x) \in R)$$

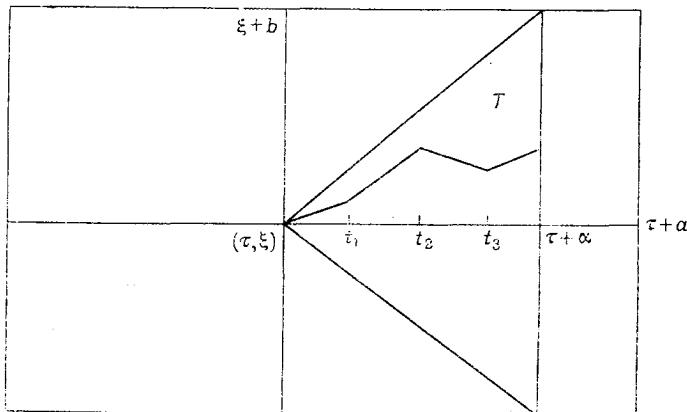
и

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

¹ Функция g имеет в точке c разрыв первого рода, если в этой точке существуют пределы функции g слева и справа и эти пределы между собой не равны. В случае $\varepsilon = 0$ предполагается, что множество S пусто.

Теорема 1.1. Пусть $f \in C$ в прямоугольнике R . Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, на интервале $|t - \tau| < a$ существует ε -приближенное решение φ уравнения (Y), такое, что $\varphi(\tau) = \xi$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ дано. Построим ε -приближенное решение в интервале $[\tau, \tau + a]$; аналогичную конструкцию можно осуществить для интервала $[\tau - a, \tau]$. Это приближенное решение представляет собой ломаную линию, выходящую из точки (τ, ξ) .



Фиг. 1.

Так как функция $f \in C$ на R , то она равномерно непрерывна, и поэтому для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что

$$|f(t, x) - f(\tilde{t}, \tilde{x})| \leq \varepsilon, \quad (1.1)$$

если

$$(t, x) \in R, \quad (\tilde{t}, \tilde{x}) \in R \quad \text{и} \quad |t - \tilde{t}| \leq \delta_\varepsilon, \quad |x - \tilde{x}| \leq \delta_\varepsilon.$$

Разделим теперь интервал $[\tau, \tau + a]$ на n частей точками

$$\tau = t_0 < t_1 < \dots < t_n = \tau + a$$

так, чтобы выполнялось неравенство

$$\max |t_k - t_{k-1}| \leq \min \left(\delta_\varepsilon, \frac{\delta_\varepsilon}{M} \right). \quad (1.2)$$

Из точки (τ, ξ) проведем направо прямую линию с угловым коэффициентом $f(\tau, \xi)$ до пересечения с прямой $t = t_1$ в некоторой точке (t_1, x_1) . Этот отрезок прямой должен лежать внутри треугольника T , ограниченного прямыми линиями, выходящими из точки (τ, ξ) с угловыми коэффициентами M и $-M$, и линией $t = \tau + a$ (см. фиг. 1, на которой a принято равным b/M). Это следует непосредственно из определения α и неравенства $|f(t, x)| \leq M$. В частности, построенный отрезок действительно встречает линию $t = t_1$ в треугольнике T .

Из точки (t_1, x_1) проведем направо от t_1 отрезок прямой с угловым коэффициентом $f(t_1, x_1)$ до пересечения с прямой $t = t_2$ в точке (t_2, x_2) . Продолжая таким образом, найдем, что после конечного числа шагов ломаная φ пересечет линию $t = \tau + a$. Кроме того, эта ломаная линия лежит целиком внутри T .

Функция φ есть искомое ε -приближенное решение. Аналитически она может быть выражена следующим образом :

$$\begin{aligned}\varphi(\tau) &= \xi, \\ \varphi(t) &= \varphi(t_{k-1}) + f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1}))(t - t_{k-1}), \\ t_{k-1} < t &\leq t_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Из построения φ очевидно, что $\varphi \in C_p^1$ на $[\tau, \tau + a]$ и что

$$|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq M|t - \tilde{t}| \quad (t, \tilde{t} \in [\tau, \tau + a]).\tag{1.4}$$

Если t таково, что $t_{k-1} < t < t_k$, то из (1.4) и (1.2) следует, что $|\varphi(t) - \varphi(t_{k-1})| \leq \delta_\varepsilon$. Но из (1.3) и (1.1) получаем

$$|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| = |f(t_{k-1}, \varphi(t_{k-1})) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon.$$

Это неравенство показывает, что φ действительно является ε -приближенным решением уравнения (У).

Конструкция теоремы 1.1 иногда используется в качестве практического метода получения приближенного решения уравнения. Действительно, нами найдена, в сущности, последовательность точек $(t_k, \varphi(t_k))$, соединенных прямолинейными отрезками. Эти точки в силу (1.3) удовлетворяют конечноразностному уравнению

$$x_k - x_{k-1} = (t_k - t_{k-1}) f(t_{k-1}, x_{k-1}).$$

Для решения этого уравнения можно использовать, например, цифровые вычислительные машины.

Теперь мы докажем существование решения уравнения (У). Для читателей, которые интересуются главным образом приложениями, другие доказательства существования при больших ограничениях, налагаемых на f , будут даны в теоремах 2.3 и 3.1. Эти читатели могут опустить конец настоящего параграфа.

Для того чтобы доказать существование последовательности приближенных решений, сводящейся к решению уравнения (У) при единственном предположении : $f \in C$ на R , необходимо ввести понятие равностепенной непрерывности. Множество функций $F = \{f\}$, определенных на действительном интервале I , называется *равностепенно непрерывным* на I , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_\varepsilon > 0$, не зависящее от $f \in F$ и такое, что

$$|f(t) - f(\tilde{t})| < \varepsilon, \quad \text{если } |t - \tilde{t}| < \delta_\varepsilon, \quad t, \tilde{t} \in I.$$

Фундаментальное свойство таких множеств функций, которое нам понадобится, дается в следующей лемме.

Лемма (Асколи). Пусть $F = \{f\}$ — равномерно ограниченное, равноСтепенно непрерывное множество функций, определенных на конечном интервале I . Тогда F содержит последовательность $\{f_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, которая равномерно сходится на I .

Доказательство. Пусть $\{r_k\}$, $k = 1, 2, \dots$, — множество рациональных чисел на I , занумерованное в произвольном порядке. Множество чисел $\{f(r_1)\}$, $f \in F$, ограничено, и поэтому существует последовательность различных функций $\{f_{n_1}\}$, $f_{n_1} \in F$, такая, что последовательность чисел $\{f_{n_1}(r_1)\}$ сходится. Аналогично множество чисел $\{f_{n_1}(r_2)\}$ содержит в себе сходящуюся подпоследовательность $\{f_{n_2}(r_2)\}$. Продолжая таким образом, мы получаем бесконечное множество функций $f_{n_k} \in F$, $n, k = 1, 2, \dots$, обладающее тем свойством, что последовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится в точках r_1, r_2, \dots, r_k . Положив $f_n = f_{nn}$, покажем, что последовательность $\{f_n\}$ обладает требуемым свойством.

Очевидно, $\{f_n\}$ сходится во всех рациональных точках I . Поэтому, каковы бы ни были $\varepsilon > 0$ и рациональное число $r_k \in I$, найдется такое целое число $N_\varepsilon(r_k)$, что

$$|f_n(r_k) - f_m(r_k)| < \varepsilon, \quad \text{если } n, m > N_\varepsilon(r_k).$$

Для выбранного ε существует δ_ε , не зависящее от t, \tilde{t} и $f \in F$ и такое, что

$$|f(t) - f(\tilde{t})| < \varepsilon, \quad |t - \tilde{t}| < \delta_\varepsilon.$$

Разделим интервал I на конечное число таких подинтервалов I_1, I_2, \dots, I_p , что длина наибольшего из них меньше δ_ε . На каждом интервале I_k выберем рациональное число $\tilde{r}_k \in I_k$. Если $t \in I$, то t принадлежит также некоторому I_k и поэтому

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq |f_n(t) - f_n(\tilde{r}_k)| + |f_n(\tilde{r}_k) - f_m(\tilde{r}_k)| + |f_m(\tilde{r}_k) - f_m(t)| < 3\varepsilon,$$

если только $n, m > \max\{N_\varepsilon(\tilde{r}_1), N_\varepsilon(\tilde{r}_2), \dots, N_\varepsilon(\tilde{r}_p)\}$. Это показывает равномерную сходимость последовательности $\{f_n\}$ на I .

Теорема 1.2 (Теорема существования Коши—Пeanо). Если $f \in C^1$ в прямоугольнике R , то для $|t - \tau| \leq a$ существует решение $\varphi \in C^1$ уравнения (У), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(\tau) = \xi$.

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. По теореме 1.1 для каждого ε_n и $|t - \tau| \leq a$ существует ε_n -приближенное решение φ_n уравнения (У), удовлетворяющее условию $\varphi_n(\tau) = \xi$. Выберем для каждого ε_n по одному такому решению. Из (1.4) следует, что

$$|\varphi_n(t) - \varphi_n(\tilde{t})| \leq M|t - \tilde{t}|. \quad (1.5)$$

Применяя (1.5) к $\tilde{t} = \tau$ и принимая во внимание, что $|t - \tau| \leq b/M$, легко усмотреть, что последовательность $\{\varphi_n\}$ равномерно ограни-

чена числом $|\xi| + b$. Более того, из (1.5) следует, что последовательность $\{\varphi_n\}$ равноточечно непрерывна. По лемме Асколи существует подпоследовательность $\{\varphi_{n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, последовательности $\{\varphi_n\}$, сходящаяся равномерно на $[\tau - a, \tau + a]$ к предельной функции φ , которая должна быть непрерывной в силу непрерывности каждой функции φ_n (более того, из (1.5) следует, что $|\varphi(t) - \varphi(\tilde{t})| \leq M |t - \tilde{t}|$).

Эта предельная функция φ есть решение уравнения (У) при данном начальном условии. Чтобы усмотреть это, запишем равенство, определяющее φ_n как ε_n -приближенное решение, в интегральной форме:

$$\varphi_n(t) = \xi + \int_{\tau}^t (f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)) ds, \quad (1.6)$$

причем $\Delta_n(t) = \varphi'_n(t) - f(t, \varphi_n(t))$ в тех точках, где φ'_n существует, и $\Delta_n(t) = 0$ в остальных точках. Так как φ_n есть ε_n -приближенное решение, то $|\Delta_n(t)| \leq \varepsilon_n$. Далее, так как f равномерно непрерывна на R и $\varphi_{n_k} \rightarrow \varphi$ равномерно на интервале $[\tau - a, \tau + a]$, то $f(t, \varphi_{n_k}(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t))$ равномерно на $[\tau - a, \tau + a]$ при $k \rightarrow \infty$. Заменяя в (1.6) n на n_k и полагая $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.7)$$

Из (1.7) вытекает, что $\varphi(\tau) = \xi$. Так как $f(t, \varphi(t))$ — непрерывная функция, то, дифференцируя (1.7), получаем $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (У) класса C^1 на интервале $|t - \tau| \leq a$.

В общем случае выбор подпоследовательности из последовательности $\{\varphi_n\}$ в предыдущем доказательстве необходим, так как существуют полигоны $\{\varphi_n\}$, расходящиеся на всем интервале около $t = \tau$; см. задачу 12.

Если предположить, что решение уравнения (У), проходящее через точку (τ, ξ) (если оно существует), единствено, то *каждая* последовательность полигонов $\{\varphi_n\}$, для которой $\varepsilon_n \rightarrow 0$, должна сходиться на $|t - \tau| \leq a$ и, следовательно, равномерно сходиться к решению, ибо $\{\varphi_n\}$ — равноточечно непрерывное множество на $|t - \tau| \leq a$.

Предположим противное. В таком случае существовала бы последовательность полигонов $\{\varphi_n\}$, расходящаяся в некоторой точке интервала $|t - \tau| \leq a$. Отсюда следовало бы существование по крайней мере двух подпоследовательностей $\{\varphi_n\}$, сходящихся к различным предельным функциям. Обе функции были бы решениями, а это ведет к противоречию. Поэтому, если предположить единственность, то выбор подпоследовательности в теореме 1.2 излишен.

Может случиться, что выбор подпоследовательности излишен, даже если единственность не имеет места. Пример уравнения

$$x' = x^{1/2} \quad (1.8)$$

илюстрирует это. На интервале $[0, 1]$ существует бесконечно много решений, выходящих из точки $(0, 0)$. Для каждого c , $0 \leq c \leq 1$, функция φ_c , определенная равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_c(t) &= 0 \quad (0 \leq t \leq c), \\ \varphi_c(t) &= \left(\frac{2(t-c)}{3}\right)^{3/2} \quad (c < t \leq 1), \end{aligned} \quad (1.9)$$

есть решение уравнения (1.8) на интервале $[0, 1]$. Если применить конструкцию теоремы 1.1 к уравнению (1.8), то увидим, что единственный полигон, выходящий из точки $0, 0$, есть φ_1 . Это показывает, что рассмотренный метод не может в общем случае дать *все* решения уравнения (У).

Теорема 1.3. Пусть $f \in C$ в области D (t, x)-плоскости и пусть (τ, ξ) — точка D . Тогда существует решение φ уравнения (У) на некотором t -интервале с центром в точке τ .

Доказательство. Так как множество D открыто, то существует $r > 0$, такое, что все точки, расстояние которых от точки (τ, ξ) меньше r , принадлежат D . Пусть R — замкнутый прямоугольник, содержащий точку (τ, ξ) и содержащийся в открытом круге радиуса r с центром в точке (τ, ξ) . Применяя теорему 1.2 на R к уравнению (У), получаем утверждение теоремы 1.3.

§ 2. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

Пример (1.8) с решениями (1.9) показывает, что для того, чтобы гарантировать единственность решения (У), проходящего через данную точку, следует потребовать несколько большего, чем непрерывность функции f . Простое условие, обеспечивающее единственность решения, есть условие Липшица. Пусть f определена в области D (t, x)-плоскости. Если существует постоянная $k > 0$, такая, что для любых (t, x_1) и (t, x_2) из D

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2|,$$

то говорят, что f удовлетворяет в D *условию Липшица* (относительно x) и пишут $f \in \text{Lip}$ в D ; k называется *постоянной Липшица*. Если сверх этого $f \in C(D)$, то пишут $f \in (C, \text{Lip})$ в D . Если функция $f \in \text{Lip}$ в D , то она равномерно непрерывна по x для каждого t , хотя ничего не предполагается о непрерывности f по t . Если D — выпуклая область (т. е. D содержит отрезок прямой, соединяющей любые две точки D), то применение теоремы о среднем дифференциальном исчисления показывает, что существования и ограничен-

ности производной $f_x = \partial f / \partial x$ в D достаточно для того, чтобы $f \in \text{Lip}$ в D .

Прежде чем приступить к доказательству единственности, докажем важное неравенство. В дальнейшем D — область (t, x) -плоскости.

Теорема 2.1. Пусть $f \in (C, \text{Lip})$ в D с постоянной Липшица k . Пусть φ_1, φ_2 — ε_1 - и ε_2 -приближенные решения уравнения (У) класса C_p^1 на некотором интервале (a, b) , удовлетворяющие для некоторого τ , $a < \tau < b$, неравенству

$$|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| \leq \delta, \quad (2.1)$$

где δ — неотрицательная постоянная. Если $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$, то для всех $t \in (a, b)$ выполняется неравенство

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta e^{k|t-\tau|} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{k|t-\tau|} - 1). \quad (2.2)$$

Теорема 2.1 имеет как практический, так и теоретический интерес, так как в процессе вычислений мы всегда получаем приближенные решения дифференциальных уравнений.

Доказательство теоремы 2.1. Рассмотрим случай $\tau \leq t < b$; доказательство для случая $a < t \leq \tau$ аналогично. Так как φ_1, φ_2 — ε_1 - и ε_2 -приближенные решения (У), то

$$|\varphi'_i(s) - f(s, \varphi_i(s))| \leq \varepsilon_i \quad (i = 1, 2), \quad (2.3)$$

за исключением конечного числа точек интервала $\tau \leq s < b$.

Интегрируя (2.3) в пределах от τ до t , получаем

$$|\varphi_i(t) - \varphi_i(\tau) - \int_{\tau}^t f(s, \varphi_i(s)) ds| \leq \varepsilon_i(t - \tau) \quad (i = 1, 2).$$

Пользуясь неравенством $|a - \beta| \leq |a| + |\beta|$, отсюда находим

$$\begin{aligned} |(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)) - (\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)) - \int_{\tau}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds| &\leq \\ &\leq \varepsilon(t - \tau). \end{aligned}$$

Пусть r — функция, определенная на интервале $[\tau, b]$ равенством $r(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|$. Тогда последнее неравенство дает

$$r(t) \leq r(\tau) + \int_{\tau}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds + \varepsilon(t - \tau).$$

Используя то, что $f \in \text{Lip}$ в D , получаем

$$r(t) \leq r(\tau) + k \int_{\tau}^t r(s) ds + \varepsilon(t - \tau). \quad (2.4)$$

Положим

$$R(t) = \int_{\tau}^t r(s) ds \quad (\tau \leq t < b).$$

Тогда неравенство (2.4), если учесть неравенство (2.1), принимает вид

$$R'(t) - k R(t) \leq \delta + \varepsilon (t - \tau).$$

Умножив обе части последнего неравенства на $e^{-k(t-\tau)}$ и интегрируя затем от τ до t , получаем

$$e^{-k(t-\tau)} R(t) \leq \frac{\delta}{k} (1 - e^{-k(t-\tau)}) - \frac{\varepsilon}{k^2} e^{-k(t-\tau)} (1 + k(t - \tau)) + \frac{\varepsilon}{k^2},$$

или

$$R(t) \leq \frac{\delta}{k} (e^{k(t-\tau)} - 1) - \frac{\varepsilon}{k^2} (1 + k(t - \tau)) + \frac{\varepsilon}{k^2} e^{k(t-\tau)}. \quad (2.5)$$

Комбинируя (2.5) и (2.4), получаем окончательный результат

$$r(t) \leq \delta e^{k(t-\tau)} + \frac{\varepsilon}{k} (e^{k(t-\tau)} - 1),$$

т. е. неравенство (2.2) для интервала $[\tau, b]$.

Важный частный случай теоремы 2.1 получается, когда $\varphi_1 = \varphi$ есть решение уравнения (У). В этом случае из теоремы следует, что если $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ и $\delta \rightarrow 0$, то приближенное решение стремится к точному решению.

Неравенство (2.2) является наилучшим в том смысле, что равенство может достигаться для нетривиальных φ_1 и φ_2 . Например, пусть $k, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ — произвольные действительные постоянные и пусть $P_1 : (0, \xi_1), P_2 : (0, \xi_2)$ — две точки (t, x) -плоскости. Пусть $\varphi_1(0) = \xi_1$ и $\varphi_2(0) = \xi_2$ и пусть φ_1 и φ_2 — решения уравнений

$$x' = kx - \varepsilon_1, \quad x' = kx + \varepsilon_2$$

на интервале $[0, 1]$. Тогда очевидно, что φ_1 и φ_2 представляют собой ε_1 - и ε_2 -приближенные решения на этом интервале для уравнения

$$x' = kx.$$

Простое вычисление показывает, что если $\xi_2 \geq \xi_1$, то для φ_1 и φ_2 в неравенстве (2.2) должен быть знак равенства.

Неравенство (2.2) означает, что если δ и ε малы, то разность $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ также мала. В частности, если $\delta = \varepsilon = 0$, то $\varphi_1 = \varphi_2$, и поэтому может существовать только одно решение уравнения (У), проходящее через произвольно заданную точку (τ, ξ) области D . Это доказывает следующую теорему единственности.

Теорема 2.2. Пусть $f \in (C, \text{Lip})$ в области D и $(\tau, \xi) \in D$. Если φ_1 и φ_2 — два решения уравнения (У) на интервале (a, b) , $a < \tau < b$, такие, что $\varphi_1(\tau) = \varphi_2(\tau) = \xi$, то $\varphi_1 = \varphi_2$.

В действительности, чтобы получить единственность, нет необходимости предполагать, что функция удовлетворяет условию Липшица. Более общее изучение этой проблемы проводится в § 2 гл. II.

Из неравенства (2.2) можно также получить доказательство существования решения.

Теорема 2.3. Пусть $f \in (C, \text{Lip})$ в прямоугольнике

$$R: |t - \tau| \leq a, \quad |x - \xi| \leq b \quad (a, b > 0),$$

и пусть

$$M = \max |f(t, x)| \quad ((t, x) \in R)$$

и

$$\alpha = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Тогда существует (единственное) решение $\varphi \in C^1$ уравнения (У) на интервале $|t - \tau| \leq a$, для которого $\varphi(\tau) = \xi$.

Доказательство. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — монотонно убывающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $n \rightarrow \infty$. Выберем ε_n -приближенное решение φ_n для каждого ε_n . Эти функции удовлетворяют соотношению

$$\varphi_n(t) = \xi + \int_{\tau}^t (f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)) ds, \quad (2.6)$$

где $\Delta_n(t) = \varphi'_n(t) - f(t, \varphi_n(t))$ в тех точках, в которых φ'_n существует, и $\Delta_n(t) = 0$ в остальных точках. Далее, $\Delta_n(t) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ на $|t - \tau| \leq a$, по самому определению ε_n . Применяя (2.2) к φ_n и φ_m , получаем для $|t - \tau| \leq a$

$$|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| \leq \frac{(\varepsilon_n + \varepsilon_m)(e^{ka} - 1)}{k},$$

где k — постоянная Липшица. Поэтому последовательность $\{\varphi_n\}$ на интервале $|t - \tau| \leq a$ сходится равномерно и, следовательно, существует на этом интервале такая непрерывная функция φ , что $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ равномерно при $n \rightarrow \infty$. Из этого факта и из равномерной непрерывности f на R следует, что

$$f(t, \varphi_n(t)) \rightarrow f(t, \varphi(t)) \quad (n \rightarrow \infty)$$

равномерно на $|t - \tau| \leq a$. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\tau}^t (f(s, \varphi_n(s)) + \Delta_n(s)) ds = \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds$$

и, значит, из (2.6) получаем, полагая $n \rightarrow \infty$,

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

что доказывает существование решения $\varphi \in C^1$ на интервале $|t - \tau| \leq a$.

Это решение единствено в силу теоремы 2.2. Очевидно, что

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{e_n(e^{k|t-\tau|} - 1)}{k}. \quad (2.7)$$

§ 3. МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Доказательство существования решения, данное в теореме 1.2, неудовлетворительно в том отношении, что оно не дает эффективного метода для построения решения уравнения (У). Однако, как было указано после этого доказательства, если решение, проходящее через данную точку, единствено, то приближающие полигоны могут быть использованы для построения решения, ибо в этом случае выбирать подпоследовательность не нужно. Если, в частности, f удовлетворяет условию Липшица, то неравенство (2.7) дает оценку ошибки, которую мы совершим, заменяя решение уравнения (У) a_n -приближенным решением.

В последующем будет рассмотрен очень полезный метод, известный под названием *метода последовательных приближений*, и существование решения будет получено с его помощью. В этом случае также нетрудно оценить сверху ошибку, которую мы совершим, ограничившись конечным числом шагов.

Результат будет получен для прямоугольника

$$R: |t - \tau| \leq a, \quad |x - \xi| \leq b,$$

где (τ, ξ) — некоторая точка (t, x) -плоскости, $a > 0$, $b > 0$. Мы увидим, что аналог теоремы 1.3 также имеет место.

Если $f \in C$ в R , то f в R ограничена. Пусть $\max |f|$ на R равен M и, как прежде, $a = \min(a, b/M)$. Очевидно, что решение φ уравнения (У) на интервале $|t - \tau| \leq a$, для которого $\varphi(\tau) = \xi$, должно удовлетворять интегральному уравнению

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (|t - \tau| \leq a), \quad (3.1)$$

и, наоборот, если φ удовлетворяет уравнению (3.1), то она удовлетворяет уравнению (У) и $\varphi(\tau) = \xi$. Последовательные приближения $\varphi_0, \varphi_1, \dots$ для (У) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \xi, \\ \varphi_{k+1}(t) &= \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_k(s)) ds \quad (k = 0, 1, 2, \dots, |t - \tau| \leq a). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ниже будет показано, что эти функции для $|t - \tau| \leq a$ существуют.

Теорема 3.1 (Пикара—Линделёфа). *Если $f \in (C, \text{Lip})$ на прямом угольнике R , то последовательные приближения для $|t - \tau| \leq a$ существуют, непрерывны и сходятся равномерно на этом интервале к единственному решению уравнения (У), удовлетворяющему начальному условию $\varphi(\tau) = \xi$.*

Доказательство. Рассмотрим интервал $[\tau, \tau + a]$; для интервала $[\tau - a, \tau]$ доказательство аналогично.

Покажем, что $\varphi_k(t)$ существуют, принадлежат к классу C^1 на интервале $[\tau, \tau + a]$ и удовлетворяют неравенству

$$|\varphi_k(t) - \xi| \leq M(t - \tau) \quad (t \in [\tau, \tau + a]). \quad (3.3)$$

Очевидно, что φ_0 , будучи постоянной, удовлетворяет этим условиям. Пусть $\varphi_k(t)$ также удовлетворяет этим условиям. Тогда функция $f(t, \varphi_k(t))$ определена и непрерывна на интервале $[\tau, \tau + a]$. Из (3.2) следует, что φ_{k+1} существует на $[\tau, \tau + a]$, $\varphi_{k+1} \in C^1$ и $|\varphi_{k+1}(t) - \xi| \leq M(t - \tau)$. Поэтому применима индукция и указанные свойства справедливы для всех φ_k . Геометрически это означает, что все кривые φ_k выходят из точки (τ, ξ) и остаются в треугольной области T , ограниченной прямыми линиями $x - \xi = \pm M(t - \tau)$ и $t = \tau + a$.

Остается доказать сходимость φ_k . Положим

$$\Delta_k(t) = |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \quad (t \in [\tau, \tau + a]).$$

Учитывая, что $f \in \text{Lip}$ на R с некоторой постоянной $c > 0$, получаем из (3.2) при помощи вычитания:

$$\Delta_k(t) \leq c \int_{\tau}^t \Delta_{k-1}(s) ds. \quad (3.4)$$

Но (3.3) дает для $k = 0$

$$\Delta_0(t) = |\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq M(t - \tau).$$

Поэтому из (3.4) по индукции легко находим

$$\Delta_k(t) \leq \frac{M}{c} \frac{c^{k+1}(t - \tau)^{k+1}}{(k+1)!} \quad (t \in [\tau, \tau + a]).$$

Эта оценка показывает, что члены ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$ мажорируются членами степенного ряда для функции $(M/c)e^{ca}$, и поэтому ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k(t)$ сходится равномерно на интервале $[\tau, \tau + a]$. Итак, ряд

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t))$$

сходится абсолютно и равномерно на интервале $[\tau, \tau + a]$ и, значит, его частная сумма

$$\varphi_0(t) + \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)) = \varphi_n(t)$$

стремится равномерно на интервале $[\tau, \tau + \alpha]$ к непрерывному пределу φ .

Покажем, что φ удовлетворяет уравнению (3.1) и, следовательно, является решением уравнения (Y), удовлетворяющим условию $\varphi(\tau) = \xi$. Так как все $\varphi_k(t)$ лежат внутри T , то то же самое справедливо и для $\varphi(t)$. Поэтому функция $f(s, \varphi(s))$ существует для $s \in [\tau, \tau + \alpha]$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tau}^t [f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_k(s))] ds \right| &\leq \int_{\tau}^t |f(s, \varphi(s)) - f(s, \varphi_k(s))| ds \leq \\ &\leq c \int_{\tau}^t |\varphi(s) - \varphi_k(s)| ds ; \end{aligned}$$

последнее неравенство следует из того, что $f \in \text{Lip}$ на R . Далее, $|\varphi(s) - \varphi_k(s)| \rightarrow 0$ равномерно на $[\tau, \tau + \alpha]$ при $k \rightarrow \infty$, и поэтому предыдущее неравенство показывает, что из (3.2) при $k \rightarrow \infty$ следует (3.1).

Решение φ единственно в силу теоремы 2.2, и это завершает доказательство.

Легко указать верхнюю грань ошибки при аппроксимации решения φ n -м приближением φ_n . В самом деле,

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi_n(t)| &\leq \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)| \leq \frac{M}{c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c^k (t - \tau)^k}{k!} \leq \\ &\leq \frac{M}{c} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(c a)^k}{k!} < \frac{M}{c} \frac{(c a)^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(c a)^k}{k!} = \frac{M}{c} \frac{(c a)^{n+1}}{(n+1)!} e^{ca}. \end{aligned}$$

§ 4. ПРОДОЛЖЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Предположим, что $f \in C$ в некоторой области D (t, x)-плоскости и что уравнение (Y) имеет решение φ , которое существует в конечном интервале (a, b) и проходит через точку $(\tau, \xi) \in D$, $a < \tau < b$. Если величина $|f|$ ограничена в D некоторой постоянной $M < \infty$, то, как легко видеть, существуют оба предела

$$\varphi(a+0) = \lim_{t \rightarrow a+0} \varphi(t), \quad \varphi(b-0) = \lim_{t \rightarrow b-0} \varphi(t).$$

Это следует из уравнения

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds \quad (t \in (a, b)).$$

В самом деле, если $a < t_1 < t_2 < b$, то

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, \varphi(s))| ds \leq M |t_2 - t_1|.$$

Поэтому, если t_1 и t_2 стремятся к $a + 0$, то $\varphi(t_1) - \varphi(t_2) \rightarrow 0$, откуда следует в силу критерия Коши существования предела, что $\varphi(a + 0)$ существует; аналогичное заключение справедливо для $\varphi(b - 0)$.

Предположим, что точка $(b, \varphi(b - 0)) \in D$. Если функция φ определена равенствами

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}(t) &= \varphi(t) & (t \in (a, b)), \\ \tilde{\varphi}(t) &= \varphi(b - 0) & (t = b),\end{aligned}$$

то $\tilde{\varphi}$ есть решение уравнения (У) класса C^1 на интервале $(a, b]$. В самом деле,

$$\tilde{\varphi}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \tilde{\varphi}(s)) ds \quad (t \in (a, b]).$$

Отсюда следует существование левой производной $\tilde{\varphi}'_-$ функции $\tilde{\varphi}$ в точке b и равенство

$$\tilde{\varphi}'_-(b) = \tilde{\varphi}'(b - 0) = f(b, \tilde{\varphi}(b)).$$

Функция $\tilde{\varphi}$ называется *продолжением* решения φ в интервал $(a, b]$.

Уравнение $x' = x^2$ имеет решение $\varphi(t) = -t^{-1}$, проходящее через точку $(-1, 1)$, которое существует в интервале $(-1, 0)$, но не может быть продолжено в интервал $(-1, 0]$. В этом случае φ не остается в области D , в которой функция $f(t, x) = x^2$ ограничена.

В действительности процесс продолжения можно вести и далее, ибо в силу теоремы 1.3 уравнение (У) имеет решение $\psi \in C^1$, проходящее через точку $(b, \varphi(b - 0))$ и существующее в некотором интервале $[b, b + \beta]$, $\beta > 0$. Если теперь функцию $\hat{\varphi}$ определить равенствами

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(t) &= \tilde{\varphi}(t) & (t \in (a, b]), \\ \hat{\varphi}(t) &= \psi(t) & (t \in [b, b + \beta]),\end{aligned}$$

то $\hat{\varphi}$ есть решение уравнения (У) класса C^1 на интервале $(a, b + \beta]$ и $\hat{\varphi}(t) = \xi$. Единственно, что нуждается в доказательстве, — это существование и непрерывность производной $\hat{\varphi}'$ в точке b . Покажем, что

$$\hat{\varphi}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \hat{\varphi}(s)) ds \quad (t \in (a, b + \beta]). \quad (4.1)$$

Для $a < t \leq b$ это очевидно. Для $t > b$ из определения $\hat{\varphi}$ следует, что

$$\hat{\varphi}(t) = \varphi(b - 0) + \int_b^t f(s, \hat{\varphi}(s)) ds.$$

Но

$$\varphi(b - 0) = \xi + \int_{\tau}^b f(s, \varphi(s)) ds,$$

что и доказывает формулу (4.1) для $t > b$. Из непрерывности $\hat{\varphi}$ в (4.1) следует непрерывность $f(s, \hat{\varphi}(s))$, и, дифференцируя это равенство для $\hat{\varphi}$, мы получаем, что $\varphi'(t) = f(t, \hat{\varphi}(t))$ для $t \in (a, b + \beta)$. Естественно $\hat{\varphi}$ назвать *продолжением* решения φ на интервал $(a, b + \beta]$. Имеется столько же продолжений φ на $(a, b + \beta]$, сколько решений уравнения (Y), выходящих из точки $(b, \varphi(b - 0))$ и существующих на $(b, b + \beta)$. Если известно, что существует только одно решение, проходящее через точку $(b, \varphi(b - 0))$ (например, $f \in \text{Lip}$ в D), то можно говорить о продолжении решения φ на интервал $(a, b + \beta]$. Вообще, если существует продолжение решения φ , определенного на интервале (a, b) , на некоторый интервал, содержащий (a, b) , то говорят, что φ может быть продолжено или имеет продолжение.

Изложенные выше замечания подытоживаются в следующей теореме.

Теорема 4.1. Пусть функция f , принадлежащая классу C в области $D(t, x)$ -плоскости, ограничена в D . Если φ — решение уравнения (Y), то существуют пределы $\varphi(a + 0)$ и $\varphi(b - 0)$. Если $(a, \varphi(a + 0))$ [или $(b, \varphi(b - 0))$] $\in D$, то решение φ может быть продолжено налево от a [или направо от b].

Более общий анализ проблемы продолжения дан в § 1 гл. II.

§ 5. СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть n — целое положительное число и f_1, \dots, f_n — n действительных непрерывных функций, определенных в некоторой области D действительного (t, x_1, \dots, x_n) -пространства. Аналогично случаю $n = 1$ это записывается сокращенно так: $f_i \in C$ в D , $i = 1, \dots, n$. Можно поставить следующую задачу.

Задача. Найти n дифференцируемых функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, определенных на действительном t -интервале I и таких, что

- (i) $(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in D \quad (t \in I),$
- (ii) $\varphi'_i(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \quad \left(t \in I; i = 1, \dots, n \right).$

Эта задача называется *системой n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка* и обозначается так:

$$x'_i = f_i(t, x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\mathbf{C})$$

Если такой интервал I и функции $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ существуют, то функции $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ называются *решением системы* (C) на I .

Пусть $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) \in D$. Начальная задача заключается в отыскании решения системы (C) на интервале I , содержащем τ , удовлетворяющего условиям $\varphi_i(\tau) = \xi_i$.

Оказывается, что полученные выше результаты для случая $n = 1$ могут быть успешно перенесены на систему (C). Пусть X —

n -мерное евклидово пространство с точками x , имеющими координаты (x_1, \dots, x_n) . В таком случае функции f_i , заданные на (t, x_1, \dots, x_n) -пространстве, порождают функции \tilde{f}_i на (t, x) -пространстве, которые определяются равенствами

$$\tilde{f}_i(t, x) = f_i(t, x_1, \dots, x_n).$$

Далее, каждой точке x x -пространства сопоставляется матрица

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

состоящая из одного столбца, которая называется *вектором*, сопоставляемым x ; x_i называется i -й компонентой \hat{x} . Очевидно, равенства

$$\tilde{f}_i(t, \hat{x}) = \tilde{f}_i(t, x)$$

определяют функцию $\tilde{f}_i(t, \hat{x})$ переменного t и вектора \hat{x} . Точке (t, y) в (t, x) -пространстве соответствует вектор

$$\tilde{f}(t, x) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1(t, x) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(t, x) \end{pmatrix},$$

который в свою очередь порождает вектор $\hat{f}(t, \hat{x})$, определяемый равенством

$$\hat{f}(t, \hat{x}) = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(t, \hat{x}) \\ \vdots \\ \hat{f}_n(t, \hat{x}) \end{pmatrix}.$$

Если x_i — дифференцируемые функции t , то \hat{x}' — производная вектора \hat{x} — определяется следующим образом:

$$\hat{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях уравнение (C) может быть записано так:

$$\hat{x}' = \hat{f}(t, \hat{x}).$$

В действительности редко возникает опасность смешения точки x с вектором \hat{x} , и поэтому мы будем для них употреблять одно и то же

обозначение. Это соответствует тому, что мы отождествляем пространство X с пространством \dot{X} всех одноколонных n -строчных матриц, рассматриваемым как векторное пространство. Аналогично никаких недоразумений не возникает при отождествлении функций f_i , \tilde{f}_i и \hat{f}_i , и это будет делаться во всем дальнейшем. Приняв это, можно уравнение (C) написать в виде

$$x' = f(t, x), \quad (C)$$

где f можно рассматривать как вектор-функцию действительного t и точки $x \in X$, или как функцию t и одноколонной матрицы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x) \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения (C) на интервале I есть вектор-функция φ с компонентами $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, определенными на I и удовлетворяющими условиям :

- (i) $(t, \varphi(t)) = (t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \in D \quad (t \in I),$
- (ii) $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad (t \in I).$

Норма (или величина) $|x|$ вектора $x \in X$ с компонентами x_1, \dots, x_n определяется посредством равенства¹

$$|x| = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Эвклидова длина $\|x\|$ вектора $x \in X$ определяется посредством равенства

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}.$$

¹ В качестве других определений нормы вектора можно использовать .

$$|x| = \max(|x_i|) \quad (i = 1, \dots, n)$$

или эвклидову длину $\|x\|$. Легко видеть, что между различными нормами имеют место следующие неравенства :

$$\begin{aligned} |x| &\leq |x| \leq n|x|, \quad |x| \leq \|x\| \leq n^{1/2}|x| \\ \text{и} \quad \|x\| &\leq |x| \leq n^{1/2}\|x\|, \quad n^{-1/2}|x| \leq \|x\| \leq |x|. \end{aligned}$$

Расстояние между векторами $x, y \in X$, по определению, равно $|y - x|$. Очевидно, что это расстояние удовлетворяет обычным условиям:

$$(a) \quad |y - x| = |x - y|;$$

(b) $|y - x| \geq 0$ и $|y - x| = 0$ в том и только в том случае, когда $y = x$;

$$(c) \quad |y - x| \leq |y - z| + |z - x|.$$

Так определенное расстояние позволяет рассматривать X как метрическое пространство; последовательность векторов $\{x_k\}$ называется сходящейся, если она сходится относительно этого расстояния. Заметим, что здесь x_k — векторы, а не компоненты вектора. Очевидно, что $\{x_k\}$ сходится в том и только в том случае, когда сходится каждая из последовательностей компонент $\{x_{ki}\}$ ($x_{ki}, i = 1, 2, \dots, n$ — компоненты x_k).

Пусть $g(t)$ — дифференцируемая вектор-функция на некотором t -интервале (a, b) , т. е. производная g' существует на (a, b) , и пусть $r = |g|$ — функция, определенная равенством

$$r(t) = |g(t)| \quad (t \in (a, b)).$$

Тогда

$$r(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t) \operatorname{sgn} g_i(t),$$

где $\operatorname{sgn} a = a/|a|$ для $a \neq 0$. Если ни одна из компонент $g_i(t)$ вектор-функции $g(t)$ не обращается в нуль, то производная

$$r'(t) = \sum_{i=1}^n g'_i(t) \operatorname{sgn} g_i(t)$$

существует и

$$|r'(t)| \leq |g'(t)|. \quad (5.1)$$

В любом случае (обращается ли некоторая компонента $g(t)$ в нуль или нет) всегда справедливо, что если $g'(t)$ существует, то правая и левая производные $r'_+(t)$ и $r'_-(t)$ существуют¹ и удовлетворяют неравенству

$$|r'_\pm(t)| \leq |g'(t)|. \quad (5.2)$$

В самом деле, если t — изолированный нуль некоторой компоненты g_i вектор-функции g , то непосредственное вычисление показывает, что правая и левая производные функции $|g_i|$ существуют в точке t и не превосходят $|g'_i|$; если же t — неизолированный нуль g_i (это значит, что t есть предельная точка нулей g_i), то приближение к t по этой последовательности нулей показывает, что $g'_i(t) = 0$ и, значит, $|g_i'(t)| = 0$. В любом случае неравенство (5.2) справедливо.

¹ Заметим, что функция $r(t)$ абсолютно непрерывна вместе с g и

$$|r(t_2) - r(t_1)| \leq |g(t_2) - g(t_1)|.$$

Если $\|g(t)\| \neq 0$ и $\|g\|$ — функция, определенная равенством $\|g\|(t) = \|g(t)\|$, то производная $\|g\|'(t)$ существует и легко проверить, что

$$\|\|g\|\|'(t) \leq \|g'(t)\|. \quad (5.3)$$

Для целей интегрирования норма $\|\cdot\|$ более удобна, чем длина $\|\cdot\|$. Если функции g и $r = \|g\|$ интегрируемы на интервале (a, b) , то

$$\left| \int_a^b g(t) dt \right| \leq \int_a^b r(t) dt, \quad (5.4)$$

где $\int_a^b g(t) dt$ — вектор, i -я компонента которого есть $\int_a^b g_i(t) dt$.

Предположим, что вектор f (который может иметь любое конечное число компонент, не обязательно n) определен в области D (t, x) -пространства. Если существует постоянная $k > 0$, такая, что для любых (t, x) и $(t, \tilde{x}) \in D$

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq k |x - \tilde{x}|, \quad (5.5)$$

то говорят, что вектор f удовлетворяет *условию Липшица* (относительно x) в области D , и пишут $f \in \text{Lip}$ в D .

Пусть $f \in C$ в области D (t, x) -пространства. Вектор-функция $\varphi \in C$, определенная на интервале I , называется ε -приближенным решением системы (C) на I , если

- (α) $(t, \varphi(t)) \in D \quad (t \in I);$
- (β) $\varphi \in C^1$ на I , за исключением конечного множества точек $S \in I$;
- (γ) $|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))| \leq \varepsilon \quad (t \in I - S).$

Предыдущие определения позволяют перенести все теоремы § 1—4 на векторное уравнение (C) , причем в формулировках и доказательствах теорем x, f следует заменить на векторы x, f и норму следует понимать в том смысле, в каком мы ее определили выше для векторов. (Лемма Асколи для векторов также справедлива.) Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что эти теоремы доказаны для более общего векторного уравнения (C) .

Особенно интересной системой является линейная система

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, \dots, n), \quad (I)$$

где a_{ij} — непрерывные функции на некотором ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Если f — вектор с компонентами f_i , определенными равенствами

$$f_i(t, x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j \quad (i = 1, \dots, n),$$

то f , очевидно, удовлетворяет условию Липшица на $(n+1)$ -мерном множестве

$$D: \quad a \leq t \leq b, \quad |x| < \infty$$

(D не область, так как это множество не открыто). В самом деле, если (t, x) и (t, \tilde{x}) принадлежат D , то

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq k|x - \tilde{x}|,$$

где

$$k = \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}(t)| \quad (t \in [a, b]; j = 1, \dots, n).$$

Теорема 5.1. Для линейной системы (Л), в которой функции $a_{ij} \in C$ на $[a, b]$, и любого начального условия $\varphi(\tau) = \xi$, $(\tau, \xi) \in D$, существует единственное решение φ системы (Л) на $[a, b]$.

Доказательство. Так как вектор f удовлетворяет на D условию Липшица, то существование и единственность решения ψ , проходящего через точку (τ, ξ) , на некотором интервале $[c, d] \subseteq [a, b]$ обеспечено. Остается показать, что ψ может быть продолжено до единственного решения φ на весь интервал $[a, b]$.

Если $\tilde{\psi}$ есть решение (Л), проходящее через точку (τ, ξ) и существующее на каждом подинтервале интервала $[a, b]$, то, применяя неравенство теоремы 2.1 к решениям $\varphi_1 = \tilde{\psi}$ и $\varphi_2 = 0$, получим

$$|\tilde{\psi}(t)| \leq |\xi| e^{k(b-a)} \quad (5.6)$$

для t из области определения $\tilde{\psi}$. Предположим теперь, что ψ не может быть продолжено на интервал $[a, b]$; пусть для определенности ψ имеет продолжение $\tilde{\psi}$ до точки $\tilde{t} < b$ и не может быть продолжено для t , больших \tilde{t} . Из (5.6) следует, что траектория $(t, \tilde{\psi}(t))$ остается внутри ограниченного замкнутого подмножества множества D , где $f \in C$, и удовлетворяет условию Липшица. Поэтому из теоремы 4.1 (применительно к системам) следует, что $\tilde{\psi}$ может быть продолжено за точку \tilde{t} . Это противоречие показывает, что ψ имеет продолжение φ на $[a, b]$. Оно единственно, так как f удовлетворяет условию Липшица в D .

Теорема 5.2. Пусть функции a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) непрерывны на открытом интервале I , который может быть неограниченным. Тогда на I существует единственное решение φ системы (Л), удовлетворяющее условию

$$\varphi(\tau) = \xi \quad (\tau \in I, \quad |\xi| < \infty). \quad (5.7)$$

Доказательство. В силу теоремы 5.1 существует решение системы (Л), удовлетворяющее условиям (5.7) на каждом замкнутом подинтервале интервала I , содержащем точку τ ; используя те же соображения, что и при доказательстве теоремы 5.1, можно показать, что каждое такое решение может быть единственным образом продолжено на весь интервал I . Более детальное изучение линейных систем будет предпринято в гл. III.

§ 6. УРАВНЕНИЕ ПОРЯДКА n

Пусть f — действительная непрерывная функция, определенная в области D действительного (t, x_1, \dots, x_n) -пространства. Тогда уравнение порядка n , соответствующее f ,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}) \quad \left(\varphi^{(k)} = \frac{d^k}{dt^k} \right), \quad (\mathbf{U}_n)$$

определяется как следующая

Задача. Найти функцию φ , определенную на действительном t -интервале I , имеющую на этом интервале n производных и удовлетворяющую условиям:

- i) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in D \quad (t \in I);$
- ii) $\varphi^{(m)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad (t \in I).$

Если такой интервал I и такая функция φ существуют, то φ называется решением уравнения (\mathbf{U}_n) на I . Если φ есть решение, то очевидно, что $\varphi \in C^n$ на I . Заметим, что в этой задаче x, f и φ не векторы.

Пусть $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) \in D$. В таком случае начальная задача состоит в отыскании такого решения φ уравнения (\mathbf{U}_n) на интервале I , содержащем τ , что $\varphi(\tau) = \xi_1, \varphi'(\tau) = \xi_2, \dots, \varphi^{(n-1)}(\tau) = \xi_n$.

Теория уравнения (\mathbf{U}_n) может быть сведена к теории системы n уравнений первого порядка. В самом деле, сопоставим уравнению (\mathbf{U}_n) систему уравнений

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2, \\ x'_2 &= x_3, \\ &\vdots \\ x'_{n-1} &= x_n, \\ x'_n &= f(t, x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (\tilde{\mathbf{Y}}_n)$$

которая определена для $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n) \in D$. Если вектор $\tilde{\varphi}$ с компонентами $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ есть решение $(\tilde{\mathbf{Y}}_n)$ на I , то, так как $\varphi_2 = \varphi'_1, \varphi_3 = \varphi'_2 = \varphi''_1, \dots, \varphi_n = \varphi_1^{(n-1)}$,

$$f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = f(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_1^{(n-1)}(t)) = \varphi_1^{(n)}(t),$$

и, значит, первая компонента φ_1 вектора $\tilde{\varphi}$ есть решение уравнения (\mathbf{U}_n) на I . Наоборот, если φ_1 — решение уравнения (\mathbf{U}_n) на I , то вектор $\tilde{\varphi}$ с компонентами $\varphi_1, \varphi'_1, \dots, \varphi_1^{(n-1)}$ есть решение системы $(\tilde{\mathbf{Y}}_n)$ на I . Система $(\tilde{\mathbf{Y}}_n)$ называется *системой* (или *векторным уравнением*), *соответствующей* уравнению (\mathbf{U}_n) порядка n . Если $\varphi_1(\tau) = \xi_1, \dots, \varphi_1^{(n-1)}(\tau) = \xi_n$, то вектор $\tilde{\varphi}$ удовлетворяет условию $\tilde{\varphi}(\tau) = \xi$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, и наоборот.

Таким образом, очевидно, что все доказанное ранее для системы $(\tilde{\mathbf{Y}}_n)$ переносится непосредственно на уравнение (\mathbf{U}_n) порядка n .

В частности, если $f \in C$ в области D (t, x_1, \dots, x_n)-пространства и P — точка D , то существует решение $\varphi \in C^n$ уравнения (Y_n) на некотором t -интервале, проходящее через точку P . Если, сверх того, $f \in \text{Lip}$ в D , т. е. если

$$|f(t, x_1, \dots, x_n) - f(t, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)| \leq k \sum_{i=1}^n |x_i - \tilde{x}_i|$$

с некоторой постоянной $k > 0$, то решение, проходящее через точку P , единственное.

§ 7. ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ОТ НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ И ПАРАМЕТРОВ

Решение дифференциального уравнения на интервале I можно рассматривать не только как функцию $t \in I$, но так же как функцию координат точки, через которую решение проходит. Например, одномерное уравнение первого порядка $x' = x$ имеет решение $\varphi(t) = \xi e^{t-\tau}$, проходящее через точку (τ, ξ) . Это условие определяет функцию переменных (t, τ, ξ) , которая также обозначается через¹ φ , а именно $\varphi(t, \tau, \xi) = \xi e^{t-\tau}$. В общем случае важно знать, каким образом φ зависит от совокупности переменных (t, τ, ξ) и, в частности, при каких условиях φ непрерывна по (t, τ, ξ) . В последующем будет исследована зависимость решений от начальных данных для общего случая системы.

Пусть D — область в $(n+1)$ -мерном действительном (t, x) -пространстве и пусть $f \in (C, \text{Lip})$ в D . Пусть ψ — решение уравнения

$$x' = f(t, x) \quad (\mathbf{C})$$

на некотором интервале I . Таким образом, $(t, \psi(t)) \in D$ для $t \in I$. Из теоремы существования следует, что (\mathbf{C}) имеет единственное решение, проходящее через каждую точку (τ, ξ) , достаточно близкую к данному решению. Однако теорема существования гарантирует существование решения только для некоторого малого t -интервала, содержащего τ .

На самом деле можно показать, что решение существует на всем интервале I и является непрерывной функцией от (t, τ, ξ) . Докажем следующую теорему.

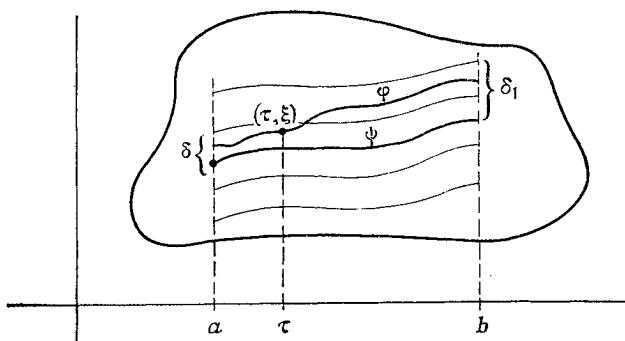
Теорема 7.1. *Пусть $f \in (C, \text{Lip})$ в области D $(n+1)$ -мерного (t, x) -пространства и пусть ψ есть решение системы (\mathbf{C}) на интервале I : $a \leq t \leq b$. Найдется число $\delta > 0$, такое, что для $(\tau, \xi) \in U$, где*

$$U: \quad a < \tau < b, \quad |\xi - \psi(\tau)| < \delta,$$

¹ Опасность смешения этих функций невелика. Если под φ подразумевается функция от (t, τ, ξ) , то производная $\partial \varphi / \partial t$ всегда обозначается как φ' .

существует единственное решение φ системы (C) на I , для которого $\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi$. Кроме того, $\varphi \in C$ на $(n+2)$ -мерном множестве V : $a < t < b$, $(\tau, \xi) \in U$.

З а м е ч а н и я. Во многих приложениях τ бывает фиксировано, и в этих случаях U можно рассматривать как множество точек ξ , удовлетворяющих неравенству $|\xi - \psi(\tau)| < \delta$, а V — как область



Ф и г. 2.

$a < t < b$, $\xi \in U$. Доказательство для этого случая содержитя в доказательстве теоремы 7.1. Важным следствием доказательства в этом случае является то, что отображение T_t , которое сопоставляет каждой точке (τ, ξ) , $\xi \in U$ точку $(t, \varphi(t, \tau, \xi))$ для некоторого t , $a < t < b$, является топологическим¹. Единственность решения гарантирует одно-однозначность отображения T_t , а из непрерывности φ по ξ следует непрерывность T_t . Так как ξ можно рассматривать как точку $\xi = \varphi(\tau, t, \tilde{\xi})$, где $\tilde{\xi} = \varphi(t, t, \xi) = \varphi(t, \tau, \xi)$, то из непрерывности φ следует также непрерывность T_t^{-1} . На самом деле единственность решения, проходящего через точку (τ, ξ) , $\xi \in U$, достаточна для того, чтобы φ была непрерывна по ξ ; см. теорему 4.3 гл. II.

Часто ψ может быть продолжена вне интервала I ; в этих случаях U , V могут включать конечные точки a , b интервала I .

Д о к а з а т е л с т в о т е о р е м ы 7.1. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы множество

$$U_1: t \in I, |x - \psi(t)| \leq \delta_1$$

принадлежало D . Пусть теперь δ выбрано так, что $\delta < e^{-k(b-a)}\delta_1$, где k — постоянная Липшица. Для этого δ определим U так, как об этом сказано в формулировке теоремы; см. фиг. 2, выполненную для случая $n = 1$. Если $(\tau, \xi) \in U$, то в окрестности этой точки суще-

¹ Отображение T множества S на множество $T(S)$ называется топологическим, если оно одно-однозначно и если оба отображения T и T^{-1} непрерывны.

ствует решение φ , проходящее через нее и удовлетворяющее уравнению

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s, \tau, \xi)) ds \quad (7.1)$$

для тех (t, τ, ξ) , для которых решение существует. Точно так же

$$\psi(t) = \psi(\tau) + \int_{\tau}^t f(s, \psi(s)) ds. \quad (7.2)$$

Поэтому из фундаментального неравенства (2.2) при $\varepsilon = 0$ следует, что

$$|\varphi(t, \tau, \xi) - \psi(t)| \leq |\xi - \psi(\tau)| e^{k|t-\tau|} < \delta_1.$$

Это неравенство доказывает, что решение φ не покидает U_1 и поэтому в силу теоремы 4.1 может быть продолжено на весь интервал I .

Непрерывность φ на V мы установим, доказав, что φ есть равномерный предел непрерывных функций на V . Заметим, что φ удовлетворяет уравнению (7.1) на I . Определим последовательные приближения $\{\varphi_j\}$ для (7.1):

$$\begin{aligned} \varphi_0(t, \tau, \xi) &= \psi(t) + \xi - \psi(\tau), \\ \varphi_{j+1}(t, \tau, \xi) &= \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_j(s, \tau, \xi)) ds \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (7.3)$$

Тогда для $(\tau, \xi) \in U$

$$|\varphi_0(t, \tau, \xi) - \psi(t)| = |\xi - \psi(\tau)| < \delta_1,$$

откуда и вытекает, что $(t, \varphi_0(t, \tau, \xi)) \in U_1$ для $t \in I$. Очевидно, что $\varphi_0 \in C$ на V . Из (7.3) для $j = 0$ и (7.2) следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t, \tau, \xi) - \varphi_0(t, \tau, \xi)| &= \left| \int_{\tau}^t \{f(s, \varphi_0(s, \tau, \xi)) - f(s, \psi(s))\} ds \right| \leq \\ &\leq k \left| \int_{\tau}^t |\varphi_0(s, \tau, \xi) - \psi(s)| ds \right| = k |\xi - \psi(\tau)| |t - \tau|, \end{aligned}$$

и, значит,

$$|\varphi_1(t, \tau, \xi) - \psi(t)| \leq (1 + k|t - \tau|) |\xi - \psi(\tau)| < e^{k|t-\tau|} |\xi - \psi(\tau)| < \delta_1,$$

если только $t \in I$, $(\tau, \xi) \in U$. Таким образом, $(t, \varphi_1(t, \tau, \xi)) \in U_1$ и $\varphi_1 \in C$ на V . Рассуждая по индукции, получаем, что если $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_j$ все принадлежат U_1 и непрерывны на V , то

$$|\varphi_{j+1}(t, \tau, \xi) - \varphi_j(t, \tau, \xi)| \leq \frac{k^{j+1} |t - \tau|^{j+1}}{(j+1)!} |\xi - \psi(\tau)|, \quad (7.4)$$

если $t \in I$ и $(\tau, \xi) \in U$. Отсюда следует, что

$$|\varphi_{j+1}(t, \tau, \xi) - \psi(t)| < e^k |t - \tau| |\xi - \psi(\tau)| < \delta_1,$$

а это означает, что $(t, \varphi_{j+1}(t, \tau, \xi)) \in U_1$. Из (7.3) следует также, что $\varphi_{j+1} \in C$ на V . Поэтому в силу индукции $(t, \varphi_j(t, \tau, \xi)) \in U_1$ и $\varphi_j \in C$ на V для всех j .

Из (7.4) следует, что функции φ_j сходятся равномерно на V к φ , что доказывает непрерывность φ на V . (Заметим, что равномерная сходимость φ_j доказывает также существование φ на I .)

Установив существование и непрерывность φ как функции от (t, τ, ξ) , естественно, а также важно для приложений, указать достаточные условия для существования и непрерывности частных производных $\partial\varphi/\partial t$, $\partial\varphi/\partial\xi_j$ ($j = 1, \dots, n$), где ξ_j — компоненты ξ . Таким достаточным условием является непрерывность на D частных производных $\partial f/\partial x_j$.

Обозначим через f_x матрицу (в случае, если она существует) с элементом $\partial f_i/\partial x_j$ на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i, j = 1, \dots, n$). Точно так же, пусть φ_ξ — матрица (в случае, если она существует) с элементом $\partial\varphi_i/\partial\xi_j$ на пересечении i -й строки и j -го столбца ($i, j = 1, \dots, n$). Матрица называется непрерывной, если этим свойством обладают все ее элементы. Если $A = (a_{ij})$ — квадратная матрица порядка n , то ее определитель мы будем обозначать через $\det A$, а ее след $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ — через $\text{sp } A$. Символ $\exp u$ обозначает e^u .

Теорема 7.2. Предположим, что выполняются условия теоремы 7.1, и пусть производная f_x существует и $f_x \in C$ на D . Тогда $\varphi \in C^1$ на V и, сверх того,

$$\det \varphi_\xi(t, \tau, \xi) = \exp \int_{\tau}^t \text{sp } f_x(s, \varphi(s, \tau, \xi)) ds. \quad (7.5)$$

Замечания. Из того, что $f_x \in C$ на D , следует, что $f \in \text{Lip}$. Поэтому это последнее условие в теореме было бы лишним.

Заметим, что $\det \varphi_\xi(t, \tau, \xi)$ есть якобиан преобразования, переводящего ξ в $\varphi(t, \tau, \xi)$, которое было рассмотрено в замечании, следовавшем за теоремой 7.1.

Для случая аналитической функции f теорема 7.2 легко следует из теоремы 7.1, что показывается в § 8. Читатель, который интересуется в основном только этим важным случаем, может поэтому опустить теорему 7.2.

Доказательство теоремы 7.2. Для доказательства существования производной φ_ξ достаточно рассмотреть $\partial\varphi/\partial\xi_1$, где $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$. Пусть $h = (h_1, 0, \dots, 0)$, $\tilde{\xi} = \xi + h$ и пусть точки (τ, ξ) и $(\tau, \tilde{\xi})$ принадлежат U . Если обозначить через χ функцию

$$\chi(t, \tau, \xi, h) = \frac{\varphi(t, \tau, \tilde{\xi}) - \varphi(t, \tau, \xi)}{h_1}$$

для $(t, \tau, \xi) \in V$, то нужно доказать, что существует предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \chi(t, \tau, \xi, h). \quad (7.6)$$

Мы покажем, что предел (7.6) существует равномерно на V и что предельная функция на V непрерывна. Это и будет доказывать существование и непрерывность $\partial\varphi/\partial\xi_1$ на V . Идея доказательства очень проста: так как φ удовлетворяет системе (C), то

$$\varphi'(t, \tau, \xi) = f(t, \varphi(t, \tau, \xi)).$$

Поэтому, если φ и f достаточно дифференцируемы, то

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} \right)'(t, \tau, \xi) = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi)) \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1}(t, \tau, \xi),$$

причем последнее произведение есть обычное матричное произведение. Следовательно, $\partial\varphi/\partial\xi_1$ есть решение линейной дифференциальной системы. Дальнейший ход доказательства состоит в обосновании этой идеи.

Положим

$$\theta(t, \tau, \xi, h) = \varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, \xi).$$

Используя неравенство (2.2), получаем

$$|\theta(t, \tau, \xi, h)| \leq |\theta(\tau, \tau, \xi, h)| e^{k|t-\tau|} \leq |h_1| e^{k(b-a)}. \quad (7.7)$$

Поэтому, если $h_1 \rightarrow 0$, то $\theta \rightarrow 0$ равномерно для $(t, \tau, \xi) \in V$.

Так как φ есть решение (C), то

$$\theta'(t, \tau, \xi, h) = f(t, \varphi(t, \tau, \xi)) - f(t, \varphi(t, \tau, \xi)). \quad (7.8)$$

Используя теорему о среднем и вспоминая, что $f_x \in C$ в D , получаем

$$\theta'(t, \tau, \xi, h) = (f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi)) + \Gamma) \theta(t, \tau, \xi, h). \quad (7.9)$$

Здесь $\Gamma = (\Gamma_{ij})$ — матрица, обладающая тем свойством, что при любом $\varepsilon_1 > 0$ существует δ_1 , зависящее от ε_1 и такое, что $|\Gamma| = \sum_{i,j=1}^n |\Gamma_{ij}| < \varepsilon_1$, если $|\theta| < \delta_1$ и $(t, \tau, \xi) \in V^1$. Поэтому в силу (7.7) $|\Gamma| \rightarrow 0$ при $h_1 \rightarrow 0$ равномерно для $(t, \tau, \xi) \in V$.

Так как $\chi = \theta/h_1$, то из (7.9) следует

$$\chi'(t, \tau, \xi, h) = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi)) \chi(t, \tau, \xi, h) + \gamma, \quad (7.10)$$

где $\gamma = \Gamma \theta/h_1$ и, следовательно,

$$|\gamma| \leq |\Gamma| e^{(b-a)}.$$

¹ Здесь используется тот факт, что для $(t, \tau, \xi) \in V$ точки $(t, \varphi(t, \tau, \xi))$ образуют замкнутое ограниченное множество U_1 . Поэтому производная f_x равномерно непрерывна на U_1 .

Поэтому $\gamma \rightarrow 0$ при $h_1 \rightarrow 0$ равномерно на V . В частности, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что $|\gamma| < \varepsilon$, если $|h_1| < \delta_\varepsilon$. Из (7.10) получаем, что χ как функция t есть ε -приближенное решение линейного уравнения

$$y' = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi)) y, \quad (7.11)$$

если только $|h_1| < \delta_\varepsilon$. Начальное значение $\chi(\tau, \tau, \xi, h)$ равно e_1 , где e_1 — вектор с компонентами $(1, 0, \dots, 0)$.

Рассмотрим теперь для фиксированной точки $(\tau, \xi) \in U$ решение β системы (7.11), которое принимает для $t = \tau$ начальное значение e_1 . Существование этого решения на $I : a \leq t \leq b$ следует из теоремы 5.1. То обстоятельство, что χ для $|h_1| < \delta_\varepsilon$ есть ε -приближенное решение системы (7.11), влечет за собой в силу теоремы 2.1 неравенство

$$|\chi(t, \tau, \xi, h) - \beta(t, \tau, \xi)| \leq \frac{\varepsilon}{k} (e^{k(b-a)} - 1)$$

для $(t, \tau, \xi) \in V$. Очевидно, отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow 0} \chi(t, \tau, \xi, h) = \beta(t, \tau, \xi)$$

равномерно на V . Это доказывает, что производная $\partial \varphi / \partial \xi_1$ существует, а также, что этот вектор есть такое решение системы (7.11), которое при $t = \tau$ принимает значение e_1 . Равномерная сходимость χ при $h \rightarrow 0$, а также непрерывность χ на V влечут за собой непрерывность $\partial \varphi / \partial \xi_1$ на V .

Совершенно аналогично доказывается существование и непрерывность $\partial \varphi / \partial \xi_j$, $j = 2, \dots, n$, на V . Точно так же, если e_j — вектор со всеми компонентами, равными нулю, кроме j -й, которая равна 1, то

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j}(\tau, \tau, \xi) = e_j \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (7.12)$$

и $\partial \varphi / \partial \xi_j$ есть решение системы (7.11). Столбцы матрицы φ_ξ суть векторы $\partial \varphi / \partial \xi_j$. Поэтому справедливо следующее матричное уравнение:

$$\varphi'_\xi(t, \tau, \xi) = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi)) \varphi_\xi(t, \tau, \xi), \quad (7.13)$$

где $\varphi'_\xi = \partial \varphi_\xi / \partial t$. Соотношение (7.12) можно записать в виде

$$\varphi_\xi(\tau, \tau, \xi) = E, \quad (7.14)$$

где E — единичная квадратная матрица порядка n ,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соотношение (7.5) является следствием общего факта, имеющего место для матричных решений линейных систем. Так как это соотношение важно само по себе, то мы его доказываем в следующей теореме. Мы получим (7.5) из (7.18), используя (7.13) и (7.14) и то обстоятельство, что $\det E = 1$.

Повторяя предыдущие рассуждения, можно показать, что $\partial\varphi/\partial\tau$ является также решением системы (7.11); одновременно заметим, что начальные условия имеют вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau, \tau, \xi) = -f(\tau, \xi). \quad (7.15)$$

Последнее получается из следующих вычислений:

$$\begin{aligned} \varphi(\tau, \tilde{\tau}, \xi) - \varphi(\tau, \tau, \xi) &= \varphi(\tau, \tilde{\tau}, \xi) - \xi = \\ &= \varphi(\tau, \tilde{\tau}, \xi) - \varphi(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}, \xi) = \int_{\tilde{\tau}}^{\tau} f(s, \varphi(s, \tilde{\tau}, \xi)) ds. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{\varphi(\tau, \tilde{\tau}, \xi) - \varphi(\tau, \tau, \xi)}{\tilde{\tau} - \tau} = -\frac{1}{\tilde{\tau} - \tau} \int_{\tau}^{\tilde{\tau}} f(s, \varphi(s, \tilde{\tau}, \xi)) ds.$$

Так как подинтегральное выражение для $(s, \tilde{\tau}, \xi) \in V$ непрерывно, то предел при $\tilde{\tau} \rightarrow \tau$ существует для $(\tau, \xi) \in U$, и мы получаем (7.15).

Теорема 7.3. Пусть A — квадратная матрица порядка n с непрерывными элементами на интервале I : $a \leq t \leq b$, и пусть Φ — матрица-функция на I , удовлетворяющая уравнению

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (t \in I). \quad (7.16)$$

Тогда определитель $\det \Phi$ удовлетворяет на I уравнению первого порядка

$$(\det \Phi)' = (\operatorname{sp} A)(\det \Phi) \quad (7.17)$$

и, следовательно, для $\tau, t \in I$

$$\det \Phi(t) = \det \Phi(\tau) \exp \int_{\tau}^t \operatorname{sp} A(s) ds. \quad (7.18)$$

Доказательство. Пусть φ_{ij} , a_{ij} — элементы, стоящие на пересечении i -го столбца и j -й строки соответственно матриц Φ и A . Тогда из (7.16) следует, что

$$\varphi'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) \varphi_{kj}(t) \quad (i, j = 1, \dots, n). \quad (7.19)$$

Производная определителя $\det \Phi$ есть сумма n определителей:

$$(\det \Phi)' = \begin{vmatrix} \varphi'_{11} & \varphi'_{12} & \dots & \varphi'_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi'_{21} & \varphi'_{22} & \dots & \varphi'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \dots + \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \dots & \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{n1} & \varphi'_{n2} & \dots & \varphi'_{nn} \end{vmatrix}.$$

Подставляя (7.19) в первый определитель правой части, получаем

$$\begin{vmatrix} \sum_k a_{1k} \varphi_{k1} & \sum_k a_{1k} \varphi_{k2} & \dots & \sum_k a_{1k} \varphi_{kn} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель не изменится, если из элементов первой строки вычесть элементы второй строки, умноженные на a_{12} , затем вычесть элементы третьей строки, умноженные на a_{13} , и, наконец, вычесть элементы n -й строки, умноженные на a_{1n} . В результате мы получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} \varphi_{11} & a_{11} \varphi_{12} & \dots & a_{11} \varphi_{1n} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \dots & \varphi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \dots & \varphi_{nn} \end{vmatrix},$$

что равно $a_{11} \det \Phi$. Поступая аналогично с остальными определителями, мы получаем в конце концов (7.17). Уравнение (7.17) есть уравнение вида $u' - a(t)u = 0$, и поэтому

$$u \exp \left[- \int_t^t a(s) ds \right] = \text{const},$$

что дает (7.18).

Аналогично предыдущему изучается случай, когда правая часть f системы (C) содержит вектор-параметр μ . Пусть μ -пространство имеет действительную размерность k и I_μ — область μ -пространства: $|\mu - \mu_0| < c$, где μ_0 и $c > 0$ фиксированы. Как и прежде, D — область (t, x) -пространства. Обозначим через D_μ область (t, x, μ) -пространства:

$$D_\mu: (t, x) \in D, \quad \mu \in I_\mu,$$

и пусть функция $f \in C$ на D_μ удовлетворяет по x условию Липшица равномерно на D_μ . Мы будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x' = f(t, x, \mu). \quad (\mathbf{C}_\mu)$$

Пусть ψ есть решение (\mathbf{C}_μ) на интервале $a \leq t \leq b$ при фиксированном $\mu = \mu_0$. Докажем следующую теорему, которая содержит теорему 7.1 как частный случай.

Теорема 7.4. *Пусть ψ — определенное выше решение уравнения (\mathbf{C}_μ) . Можно найти число $\delta > 0$, такое, что для всех точек $(\tau, \xi, \mu) \in U_\mu$, где*

$$U_\mu: a < \tau < b, \quad |\xi - \psi(\tau)| + |\mu - \mu_0| < \delta,$$

существует единственное решение φ уравнения (\mathbf{C}_μ) на интервале $a \leq t \leq b$, удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(\tau, \tau, \xi, \mu) = \xi.$$

Кроме того, $\varphi \in C$ в $(n+k+2)$ -мерной области

$$V_\mu: a < t < b, \quad (\tau, \xi, \mu) \in U_\mu.$$

З а м е ч а н и е. Иное доказательство этой теоремы при несколько более жестких ограничениях дается ниже в процессе доказательства теоремы 7.5.

Доказательство теоремы 7.4. похоже на доказательство теоремы 7.1. Как было там отмечено, метод последовательных приближений можно использовать для доказательства всей теоремы. Выберем $\delta_1 > 0$ так, чтобы множество $U_{1\mu}$ точек (t, x, μ) :

$$U_{1\mu}: a \leq t \leq b, \quad |x - \psi(t)| + |\mu - \mu_0| \leq \delta_1,$$

содержалось в D_μ . Определим приближения $\{\varphi_j\}$:

$$\varphi_0(t, \tau, \xi, \mu) = \psi(t) + \xi - \psi(\tau),$$

$$\varphi_{j+1}(t, \tau, \xi, \mu) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_j(s, \tau, \xi, \mu), \mu) ds.$$

Очевидно, что

$$|\varphi_0(t, \tau, \xi, \mu) - \psi(t)| = |\xi - \psi(\tau)|$$

$$|\varphi_1(t, \tau, \xi, \mu) - \varphi_0(t, \tau, \xi, \mu)| = \left| \int_{\tau}^t \{f(s, \varphi_0(s, \tau, \xi, \mu), \mu) - f(s, \psi(s), \mu_0)\} ds \right|. \quad (7.20)$$

Из равномерной непрерывности f на $U_{1\mu}$ следует, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что

$$|f(s, \varphi_0(s, \tau, \xi, \mu), \mu) - f(s, \psi(s), \mu_0)| < \varepsilon,$$

если только $a \leq s \leq b$, $(\tau, \xi, \mu) \in U_{1\mu}$ и

$$|\xi - \psi(\tau)| + |\mu - \mu_0| < \delta_\varepsilon. \quad (7.21)$$

Поэтому из (7.20) имеем

$$|\varphi_1(t, \tau, \xi, \mu) - \varphi_0(t, \tau, \xi, \mu)| < \varepsilon |t - \tau|,$$

если справедливо (7.21). Рассуждая аналогично, получаем

$$|\varphi_{j+1}(t, \tau, \xi, \mu) - \varphi_j(t, \tau, \xi, \mu)| \leq \frac{\varepsilon |t - \tau|^{j+1} k^j}{(j+1)!},$$

где k — постоянная Липшица. Выберем ε так, чтобы

$$\frac{\varepsilon}{k} (e^{k(b-a)} - 1) < \frac{\delta_1}{2},$$

и пусть $\delta = \delta_\varepsilon < \delta_1/2$ выбирается, как прежде, по этому ε . В таком случае легко заключить по индукции, что для всех j точка $(t, \varphi_j(t, \tau, \xi, \mu))$ принадлежит множеству $a \leq t \leq b$, $|x - \psi(t)| \leq \delta_1$ для всех $(\tau, \xi, \mu) \in U_\mu$. Из непрерывности и равномерной сходимости φ_j на V_μ следует теорема.

На уравнение (C_μ) обобщается теорема 7.2. Это следует непосредственно из доказательства самой теоремы 7.2.

Теорема 7.5. Пусть выполняются условия теоремы 7.4 и пусть $f_x \in C$, $f_\mu \in C$ на D_μ . Тогда решение φ , определенное в теореме 7.4, принадлежит классу C^1 в области V_μ .

Доказательство. Рассмотрим $(n+k)$ -мерное n -пространство, состоящее из точек с координатами

$$\begin{aligned} u_i &= x_i & (i = 1, \dots, n), \\ u_{i+n} &= \mu_i & (i = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

и определим вектор-функцию $F = (F_1, \dots, F_{n+k})$ на D_μ , полагая

$$\begin{aligned} F_i(t, u) &= f_i(t, x, \mu) & (i = 1, \dots, n), \\ F_{i+n}(t, u) &= 0 & (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Тогда, по теореме 7.1, система уравнений

$$u' = F(t, u) \quad (7.22)$$

имеет своим решением вектор $\chi = (\chi_1, \dots, \chi_{n+k})$, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} \chi_i(t) &= \varphi_i(t, \tau, \xi, \mu) & (i = 1, \dots, n), \\ \chi_{i+n}(t) &= \mu_i & (i = 1, \dots, k), \end{aligned}$$

так как χ удовлетворяет начальным условиям

$$\begin{aligned} \chi_i(\tau) &= \xi_i & (i = 1, \dots, n), \\ \chi_{i+n}(\tau) &= \mu_i & (i = 1, \dots, k). \end{aligned}$$

Таким образом, μ_1, \dots, μ_k можно рассматривать как часть компонент начального вектора для системы (7.22), причем F в (7.22) удовлетворяет условиям теоремы 7.2. Поэтому частные производные первого порядка вектора x относительно τ, ξ_i и μ_i существуют и непрерывны на V_μ , что, принимая во внимание определение χ , доказывает теорему.

Из уравнения

$$\varphi(t, \tau, \xi, \mu) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s, \tau, \xi, \mu), \mu) ds$$

следует, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_j}(t, \tau, \xi, \mu) &= \int_{\tau}^t \left[f_x(s, \varphi(s, \tau, \xi, \mu), \mu) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu_j}(s, \tau, \xi, \mu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(s, \varphi(s, \tau, \xi, \mu), \mu) \right] ds. \end{aligned}$$

Это показывает, что $\partial \varphi / \partial \mu_j$ есть решение начальной задачи

$$y' = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi, \mu), \mu) y + \frac{\partial f}{\partial \mu_j}(t, \varphi(t, \tau, \xi, \mu), \mu), \quad y(\tau) = 0.$$

Условия, при выполнении которых существуют старшие производные φ по τ, ξ_i или μ_i , легко получить из того факта, что первые производные являются решениями линейного уравнения. Например, $\partial \varphi / \partial \xi_i$ есть решение β_i уравнения

$$y' = f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi, \mu), \mu) y \tag{7.23}$$

с начальным значением e_i . Очевидно, что $\partial^2 \varphi / \partial \xi_j \partial \xi_i$ есть $\partial \beta_i / \partial \xi_j$, если последняя производная существует. Но (7.23) содержит ξ как параметр. Если τ и μ в (7.23) фиксированы, то ξ в (7.23) играет роль μ в теореме 7.5. Поэтому, если $f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi, \mu), \mu)$ имеет непрерывную производную по ξ_j , то $\partial \beta_i / \partial \xi_j$ существуют. Если f имеет непрерывные частные производные второго порядка относительно компонент вектора x , то $f_x(t, \varphi(t, \tau, \xi, \mu), \mu)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка относительно ξ_j .

Почти так же, если f имеет непрерывные частные производные второго порядка относительно компонент точки (x, μ) , то производные $\partial^2 \varphi / \partial \mu_i \partial \mu_j$ и смешанные производные $\partial^2 \varphi / \partial \mu_i \partial \xi_j$ существуют.

Случай, когда частные производные берутся относительно компонент точки (τ, ξ, μ) , оставляется читателю в качестве упражнения.

§ 8. КОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ

До сих пор мы предполагали, что в уравнении (C) величины t, x, f действительны. Если f — непрерывная комплекснозначная функция, определенная на открытом связном множестве $D(t, w)$,

пространства, где t действительно и w — комплексный n -мерный вектор (действительной размерности $2n$), то уравнение

$$w' = f(t, w) \quad (\mathbf{C}_1)$$

обозначает задачу отыскания интервала I действительной t -прямой и (комплексной) дифференцируемой функции φ , определенной на I , таких, что

$$(i) \quad (t, \varphi(t)) \in D \quad (t \in I),$$

$$(ii) \quad \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \left(t \in I, \varphi' = \frac{d}{dt} \right).$$

Легко видеть, что все теоремы существования, единственности, продолжения и зависимости, доказанные в § 1—7, справедливы для (\mathbf{C}_1) , если только мы определим норму $|w|$ комплексного вектора $w = (w_1, \dots, w_n)$ формально так же, как раньше, а именно :

$$|w| = \sum_{i=1}^n |w_i|.$$

Здесь $|w_i|^2 = (\operatorname{Re} w_i)^2 + (\operatorname{Im} w_i)^2$, где $\operatorname{Re} w_i$ и $\operatorname{Im} w_i$ — действительная и мнимая части w_i . Кроме того, теоремы 7.4 и 7.5, в которых речь идет об уравнении

$$x' = f(t, x, \mu), \quad (\mathbf{C}_\mu)$$

очевидным образом обобщаются на случай комплексного параметра μ , если f определена для комплексных x и μ . Линейные системы представляют собой важный частный случай, к которому применимы предыдущие замечания.

Обычно функции, встречающиеся в дифференциальных уравнениях и определенные на множестве комплексных чисел, бывают аналитическими. Пусть F — вектор-функция, определенная в области (открытое связное множество) D комплексного n -мерного w -пространства. Тогда F называется *аналитической* в точке $\omega \in D$, если в некоторой окрестности $|w - \omega| < \varrho$, $\varrho > 0$ каждая компонента F_j вектора F непрерывна по совокупности переменных

$$w = (w_1, \dots, w_n)$$

и аналитична по каждой из переменных w_k при фиксированных w_l , $l \neq k$. Эквивалентное определение заключается в том, что F_j в некоторой окрестности $|w - \omega| < \varrho$, $\varrho > 0$ может быть представлена в виде сходящегося степенного ряда

$$F_j(w_1, \dots, w_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} A_{m_1 \dots m_n} (w_1 - \omega_1)^{m_1} \dots (w_n - \omega_n)^{m_n}.$$

Здесь $A_{m_1 \dots m_n}$ — комплексные постоянные. Функция называется *аналитической* в области D , если она аналитична в каждой точке D .

Напомним, что аналитическая функция в области D обладает в D производными всех порядков. Фундаментальное свойство аналитических функций заключается в том, что если последовательность аналитических функций сходится равномерно в области D , то предельная функция аналитична в D .

Так как аналитическая функция F в D локально представляется в виде степенного ряда, то она, очевидно, локально однозначна, т. е. для каждой точки $\omega \in D$ существует такое $\varrho > 0$, что F однозначна в окрестности $|w - \omega| < \varrho$. Однако в целом она не обязана быть однозначной. Например, функция $F(w) = w^{1/2}$, где комплексная размерность w равна единице, аналитична в кольце $1 < |w| < 2$, но двузначна в нем. Если выбрать значение $w^{1/2}$ на интервале $1 < \operatorname{Re} w < 2$ действительным и положительным и сделать обход по замкнутому пути (например, по окружности $|w| = 3/2$), то $w^{1/2}$ примет отрицательные действительные значения, когда w пересечет действительную положительную ось с другой стороны. Функция $F(w) = w^\alpha$, где α — действительное иррациональное число, принимает бесконечное множество значений внутри кольца.

Важно распространить задачу (C) на случай комплексных t . Предположим, что f — аналитическая комплекснозначная вектор-функция, определенная в области D комплексного (z, w) -пространства, где z - и w -пространства имеют соответственно комплексные размерности 1 и n . Тогда уравнение

$$w' = f(z, w) \quad (\text{C}_2)$$

обозначает задачу отыскания области H в комплексной z -плоскости и (комплексной) дифференцируемой локально однозначной функции φ [решения уравнения (C)₂] на H , такой, что

$$(i) \quad (z, \varphi(z)) \in D \quad (z \in H),$$

$$(ii) \quad \varphi'(z) = f(z, \varphi(z)) \quad \left(z \in H, \quad ' = \frac{d}{dz} \right).$$

Существование и единственность решения уравнения (C)₂ можно вывести, применяя метод последовательных приближений. В самом деле, пусть f имеет компоненты f_1, \dots, f_n , $w = (w_1, \dots, w_n)$, и пусть f аналитична в области

$$R_2: |z - z_0| < a, \quad |w - w_0| < b \quad (a, b > 0),$$

которую мы будем называть прямоугольником, хотя она имеет $n + 1$ комплексных измерений. Заметим, что w_0 здесь вектор, а не компонента.

Теорема 8.1. Пусть функция f аналитична и ограничена на открытом прямоугольнике R_2 и пусть

$$M = \sup_{(z, w) \in R_2} |f(z, w)|, \quad a = \min \left(a, \frac{b}{M} \right).$$

Тогда для $|z - z_0| < a$ существует единственная функция φ , которая является решением уравнения (C_2) и удовлетворяет начальному условию $\varphi(z_0) = w_0$.

Доказательство. Так как матрица $f_w = (\partial f_i / \partial w_j)$ ограничена на каждом замкнутом прямоугольнике $\tilde{R}_2 \subset R_2$, то f на \tilde{R}_2 удовлетворяет условию Липшица. Поэтому можно определить последовательные приближения

$$\begin{aligned} \varphi_0(z) &= w_0, \\ \varphi_{k+1}(z) &= w_0 + \int_{z_0}^z f(\zeta, \varphi_k(\zeta)) d\zeta \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (8.1)$$

где интеграл можно брать по прямой, соединяющей точки z_0 и z . Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3.1, получаем существование единственного решения φ в круге $|z - z_0| < a$, удовлетворяющего условию $\varphi(z_0) = w_0$.

Легко видеть, что φ_0 аналитична по z в круге $|z - z_0| < a$, и поэтому функция $f_0(z) = f(z, \varphi_0(z))$, будучи аналитической функцией от аналитической функции, также аналитична в круге $|z - z_0| < a$. Из (8.1) следует, что φ_1 аналитична в круге $|z - z_0| < a$, и, рассуждая по индукции, легко показать, что все приближения φ_k аналитичны в круге $|z - z_0| < a$. Так как решение φ есть равномерный предел последовательности $\{\varphi_k\}$ аналитических функций, то оно также аналитично в круге $|z - z_0| < a$. Это завершает доказательство.

Замечание. Если не накладывать на f других ограничений, то круг аналитичности $|z - z_0| < a$ не может быть расширен. Для $a \leq b/M$ это иллюстрируется следующим, в котором f не зависит от w и имеет особенность на окружности $|z - z_0| = a$. Для $a > b/M$ это иллюстрируется примером

$$w' = f(w) = M \left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{w}{b} \right) \right]^{1/m},$$

где w одномерно. Решение φ этого уравнения, для которого $\varphi(0) = 0$ (здесь $z_0 = w_0 = 0$), равно

$$\varphi(z) = b \left[\left(1 + \frac{z}{c_m} \right)^{m/(m-1)} - 1 \right],$$

где

$$c_m = \left(\frac{m 2^{1/m}}{m-1} \right) \frac{b}{M}.$$

Очевидно, что f аналитична и ограничена в круге $|w| < b$ и $\sup_{|w| < b} |f(w)| = M$. Решение φ имеет особую точку $z = -c_m < -b/M$,

которая стремится к $z = -b/M$, если $t \rightarrow \infty$. Следовательно, для каждого $r > b/M$ решение φ имеет особенность в кольце

$$\frac{b}{M} < |z| < r,$$

если только t достаточно велико.

Следующий результат является аналогом теоремы 7.1 для уравнения (C_2) .

Теорема 8.2. Пусть функция f аналитична в области $D(z, w)$ -пространства и пусть φ есть решение уравнения (C_2) на H , где H — выпуклая область z -плоскости. Найдется число $\delta > 0$, такое, что для каждой точки $(\zeta, \omega) \in U$, где

$$U: \zeta \in H, |\omega - \varphi(\zeta)| < \delta,$$

существует единственное решение $\varphi = \varphi(z, \zeta, \omega)$ уравнения (C_2) на H , для которого $\varphi(\zeta, \zeta, \omega) = \omega$. Кроме того, φ аналитична в $(n+2)$ -комплексномерной области

$$V: z \in H, (\zeta, \omega) \in U.$$

З а м е ч а н и е. На самом деле не обязательно, чтобы область H была выпукла. Достаточно потребовать, чтобы H была односвязна и чтобы существовала постоянная $c > 0$, такая, что любые две точки области H можно было бы соединить ломаной, все звенья которой принадлежат H и длина которой меньше, чем c .

Д о к а з а т е ль с т в о т е о р е м ы 8.2 аналогично доказательству той части теоремы 7.1, в которой речь идет о последовательных приближениях. Путь интегрирования от точки ζ до точки z' в последовательных приближениях в случае выпуклой H может быть взят в виде отрезка прямой. В любом случае путь интегрирования можно выбрать в виде ломаной, длина которой меньше c . Рассуждения, относящиеся к теореме 7.1, переносятся, если только произвести очевидные видоизменения, вызванные тем, что переменные комплексны. Все приближения φ_j на V аналитичны. Поэтому предельная функция, к которой приближения сходятся равномерно на V , должна быть аналитической на V .

Так как φ имеет на V все производные по переменным z, ζ, ω , то уравнение

$$\varphi'(z, \zeta, \omega) = f(z, \varphi(z, \zeta, \omega))$$

можно дифференцировать по ω_j , что дает

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial \omega_j}(z, \zeta, \omega) = f_w(z, \varphi(z, \zeta, \omega)) \frac{\partial \varphi}{\partial \omega_j}.$$

Следовательно, $\partial \varphi / \partial \omega_j$ есть решение линейного уравнения

$$y' = f_w(z, \varphi(z, \zeta, \omega)) y \quad (8.2)$$

с начальным условием $(\partial \varphi / \partial \omega_j)(\zeta, \zeta, \omega) = e_j$. Таким образом, доказан

аналог главного результата теоремы 7.2. Аналог формулы (7.5) может быть получен почти так же, как была получена формула (7.5). Результат здесь таков :

$$\det \varphi_\omega(z, \zeta, \omega) = \exp \int_{\zeta}^z \operatorname{sp} f_w(s, \varphi(s, \zeta, \omega)) ds,$$

причем путь интегрирования представляет собой дугу в области H .

Из того, что производная $\partial\varphi/\partial\zeta$ существует, легко следует, что она является решением уравнения (8.2) с начальным значением $-f(\zeta, \omega)$ при $z = \zeta$.

Случай уравнения

$$w' = f(z, w, \mu), \quad (\mathbf{C}_{2\mu})$$

где f аналитична по (z, w, μ) и μ k -комплексномерно, может быть разобран аналогично. Пусть I_μ — область μ -пространства, определенная неравенством $|\mu - \mu_0| < c$, где μ_0 фиксировано и $c > 0$, и пусть D — область в $(n + 1)$ -мерном комплексном (z, w) -пространстве. Пусть D_μ — множество таких точек (z, w, μ) , что $(z, w) \in D$ и $\mu \in I_\mu$. Следующий результат есть аналог для $(\mathbf{C}_{2\mu})$ теорем 7.4 и 7.5.

Теорема 8.3. Пусть f — аналитическая функция в области D_μ , и пусть ψ есть решение уравнения $(\mathbf{C}_{2\mu})$ для $\mu = \mu_0$, существующее для $z \in H$, где H — выпуклая область z -плоскости. Найдется такое число $\delta > 0$, что для каждой точки $(\zeta, \omega, \mu) \in U_\mu$, где

$$U_\mu: |\zeta - \psi(\zeta)| + |\mu - \mu_0| < \delta,$$

существует на H единственное решение $\varphi = \varphi(z, \zeta, \omega, \mu)$ уравнения $(\mathbf{C}_{2\mu})$ с начальным условием .

$$\varphi(\zeta, \zeta, \omega, \mu) = \omega.$$

Кроме того, φ аналитична в $(n + k + 2)$ -комплексномерной области

$$V_\mu: z \in H, (\zeta, \omega, \mu) \in U_\mu.$$

Доказательство может быть получено либо используя метод теоремы 7.4 либо — теоремы 7.5. Замечание, следующее за теоремой 8.2, здесь также применимо.

Если предполагать, что t действительно, а w, μ, f комплексны, то получается теорема, которая является смесью результатов § 7 и 8. Пусть D — область (t, w) -пространства, где t действительно, а w комплексно n -мерно. Пусть I_μ — множество всех μ , удовлетворяющих неравенству $|\mu - \mu_0| < c$ для $c > 0$, где μ — комплексно k -мерно. Наконец, пусть D_μ — множество всех точек (t, w, μ) , для которых $(t, w) \in D$ и $\mu \in I_\mu$.

Теорема 8.4. Пусть $f \in C$ в области D_μ и предположим, что для каждого t функция f аналитична по переменным (w, μ) . Пусть ψ —

решение уравнения $w' = f(t, w, \mu_0)$ на некотором интервале I : $a \leq t \leq b$ [так что $(t, \psi(t)) \in D$ для $t \in I$], удовлетворяющее условию $\psi(\tau) = \omega_0$, где $\tau \in I$. Найдется такое число $\delta > 0$, что для каждой точки $(\omega, \mu) \in U_\mu$, где

$$U_\mu: |\omega - \omega_0| + |\mu - \mu_0| < \delta,$$

существует единственное решение $\varphi = \varphi(t, \omega, \mu)$ уравнения $w' = f(t, w, \mu)$ на I , удовлетворяющее условию

$$\varphi(\tau, \omega, \mu) = \omega.$$

Кроме того, φ непрерывна по совокупности переменных (t, ω, μ) для $a \leq t \leq b$, $(\omega, \mu) \in U_\mu$ и для каждого фиксированного $t \in I$ является аналитической функцией переменных (ω, μ) для $(\omega, \mu) \in U_\mu$.

Доказательство очень похоже на доказательство теоремы 7.4 и предоставляет читателю. Равномерная сходимость последовательных приближений, каждое из которых аналитично по (ω, μ) на U_μ , приводит к аналитичности φ как функции (ω, μ) .

Важным применением этих результатов является случай линейных систем, содержащих линейно одномерный параметр μ . Например, пусть A, B — непрерывные комплексные квадратные матрицы порядка n , определенные на некотором открытом t -интервале J . Рассмотрим систему

$$w' = (A(t) + \mu B(t))w.$$

Тогда вектор f , определяемый равенством $f(t, w, \mu) = (A(t) + \mu B(t))w$, непрерывен в области

$$D_\mu: t \in J, |w| + |\mu| < \infty$$

и для каждого фиксированного $t \in J$ аналитичен по переменным (w, μ) для $|w| + |\mu| < \infty$. Применяя теоремы 5.2 и 8.4, получаем, что решение φ , проходящее через точку (τ, ω) ($\tau \in J, |\omega| < \infty$), существует для всех $t \in J$, непрерывно по совокупности переменных (t, ω, μ) для $t \in J, |\omega| + |\mu| < \infty$ и для каждого фиксированного $t \in J$ аналитично по переменным (ω, μ) для $|\omega| + |\mu| < \infty$. В частности, при фиксированных переменных (τ, ω) φ есть целая функция μ (см. также задачу 7).

Очень важный случай, к которому применимо предыдущее рассуждение, встречается при изучении краевых задач, содержащих параметр; см. гл. VII—XII.

Задачи

1. Пусть φ, ψ, χ — действительные непрерывные (или кусочно непрерывные) функции, определенные на действительном интервале I : $a \leq t \leq b$. Пусть $\chi(t) > 0$ на I и предположим, что для $t \in I$ выполняется неравенство

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s)\varphi(s)ds.$$

Доказать, что на I

$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \chi(s) \psi(s) \exp\left(\int_s^t \chi(u) du\right) ds.$$

Указание. Положить $R(t) = \int_a^t \chi(s) \varphi(s) ds$ и показать, что $R' - \chi R \leq \chi \psi$.

2. Говорят, что функция f , определенная в области D действительной (t, x) -плоскости, принадлежит к классу $\text{Lip}(I)$ на D , если существует интегрируемая функция k переменной t , такая, что для всех $(t, x) \in D$ и $(t, \tilde{x}) \in D$

$$|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq k(t) |x - \tilde{x}|.$$

Пусть $f \in \text{Lip}(I)$ на D . Пусть φ_1 и φ_2 — две непрерывные функции на $I : a \leq t \leq b$, такие, что $(t, \varphi_i(t)) \in D$ для $t \in I$ и функция $f(t, \varphi_i(t))$ интегрируема на I для $i = 1, 2$. Положим

$$\varphi_i(t) = \varphi_i(\tau) + \int_\tau^t f(s, \varphi_i(s)) ds + E_i(t),$$

где $t \in I$, и допустим, что $|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| \leq \delta$. Доказать, что для $\tau \leq t \leq b$

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta \exp\left[\int_\tau^t k(s) ds\right] + E(t) + \int_\tau^t E(s) k(s) \exp\left[\int_s^t k(u) du\right] ds,$$

где $E(t) = |E_1(t)| + |E_2(t)|$; аналогично — для $a \leq t \leq \tau$.

Указание. Использовать задачу 1.

3. Пусть функции φ_1, φ_2 , фигурирующие в задаче 2, принадлежат на I к классу C_p^1 и, сверх этого, пусть

$$|\varphi'_i(t) - f(t, \varphi_i(t))| \leq \varepsilon_i(t), \quad \varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t).$$

Доказать, что

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \delta \exp\left[\int_\tau^t k(s) ds\right] + \int_\tau^t \varepsilon(s) \exp\left[\int_s^t k(u) du\right] ds.$$

Указание. $E(t) \leq \int_\tau^t \varepsilon(s) ds$.

Если $K = \int_a^b k(s) ds$, то предыдущее неравенство дает

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq \left(\delta + \int_a^b \varepsilon(s) ds\right) e^K.$$

Очевидно, что эти неравенства могут быть использованы для доказательства единственности решения уравнения

$$x' = f(t, x),$$

если $f \in \text{Lip}(I)$ на D .

4. В предположениях теоремы 3.1 пусть условие (C, Lip) на R заменено условиями

$$|f(t, \xi)| \leq k(t) (1 + |\xi|)$$

и

$$\text{Lip}(t): |f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq k(t) |x - \tilde{x}|$$

для точек (t, x) и (t, \tilde{x}) в R . Предполагая, что функция f такова, что интеграл от $f(t, \psi(t))$ имеет смысл для каждой непрерывной функции ψ , показать, что существует интервал $\tau \leq t \leq \tau + \alpha_1$ ($\alpha_1 > 0$), на котором последовательные приближения сходятся равномерно к решению.

Указание. Пусть $K(t) = \int_{\tau}^t k(s) ds$. Если $(1 + |\xi|)(e^{K(t_0)} - 1) = b$

для некоторого t_0 из интервала $(\tau, \tau + a)$, то положим $t_0 - \tau = \alpha_1$. В противном случае положим $\alpha_1 = a$. Показать, что все последовательные приближения φ_j остаются в интервале $|x - \xi| \leq K(t)$ для $t \in [\tau, \tau + \alpha_1]$. Показать, что для $t \in [\tau, \tau + \alpha_1]$

$$|\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)| \leq \frac{(1 + |\xi|)(K(t))^j}{j!}.$$

Замечание. Если предыдущие предположения о f справедливы для всех x, \tilde{x} и всех $t \in [a, b]$ и если $\tau \in [a, b]$, то последовательные приближения сходятся равномерно в интервале $[a, b]$. Это имеет место, если функция f по x линейна.

5. Пусть $f \in C^1$ на множестве точек (t, x, y) , где $0 \leq t \leq 1$ и x, y — любые. Пусть φ — решение уравнения второго порядка $x'' = f(t, x, x')$ на интервале $[0, 1]$ и пусть $\varphi(0) = a$, $\varphi(1) = b$. Предположим, что $\partial f / \partial x > 0$ для $t \in [0, 1]$ и всех x, y . Доказать, что если β достаточно близко к b , то существует решение ψ уравнения $x'' = f(t, x, x')$, такое, что $\psi(0) = a$, $\psi(1) = \beta$.

Указание. Рассмотрим решение θ [как функцию (t, α)], удовлетворяющее начальным условиям $\theta(0, \alpha) = a$, $\theta'(0, \alpha) = \alpha$. Пусть $\theta'(0) = \alpha_0$. Тогда для малых $|\alpha - \alpha_0|$ решение θ существует для $t \in [0, 1]$. Положим

$$u(t) = \frac{\partial \theta}{\partial \alpha}(t, \alpha_0).$$

Тогда

$$u'' - \frac{\partial f}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) u' - \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) u = 0,$$

где $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. Так как $\partial f / \partial x > 0$, то u — неубывающая функция, и поэтому $u(1) = (\partial \theta / \partial \alpha)(1, \alpha_0) > 0$. Таким образом, из уравнения $\theta(1, \alpha) = \beta = 0$ можно определить α как функцию β для всех (α, β) из окрестности точки (α_0, β) .

6. Следующая задача показывает, что аналитичность по отношению к начальным данным может иметь место даже в том случае, когда правая, часть дифференциального уравнения разрывна. (Эта ситуация возникает на практике тогда, когда кривая заменяется ломаной с целью получить линеаризацию в каждой частичной области.)

Пусть F — действительная аналитическая функция, определенная на $(n+1)$ -мерном действительном пространстве

$$R: |t| \leq a, \quad |x| \leq b.$$

Здесь t имеет одно действительное измерение, x имеет n действительных измерений и под аналитичностью F подразумевается, что в каждой точке R функция F может быть представлена степенным рядом, сходящимся в некоторой окрестности, содержащей эту точку. Пусть поверхность S , определяемая уравнением $F(t, x) = 0$, $(t, x) \in R$, делит R на R_1 и R_2 , так что

$$F(t, x) < 0 \quad (t, x) \in R_1,$$

$$F(t, x) > 0 \quad (t, x) \in R_2,$$

$$F(t, x) = 0 \quad (t, x) \in S.$$

Пусть f — действительная вектор-функция, аналитическая для $(t, x) \in R_1 \cup S$, и g — действительная вектор-функция, аналитическая для $(t, x) \in R_2 \cup S$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(1) \quad x' = f(t, x) \quad (t, x) \in R_1,$$

$$(2) \quad x' = g(t, x) \quad (t, x) \in R_2.$$

Непрерывная функция φ , определенная на некотором интервале I , содержащемся в интервале $|t| \leq a$, есть решение этого дифференциального уравнения, если $(t, \varphi(t)) \in R$ для $t \in I$, а φ удовлетворяет уравнению (1) для $(t, \varphi(t)) \in R_1$ и уравнению (2) для $(t, \varphi(t)) \in R_2$ и если φ имеет только конечное число точек на S для $t \in I$. (Можно значительно обобщить это определение, допустив, что $(t, \varphi(t)) \in S$ на одном или нескольких t -интервалах, содержащихся в I , однако это вызывает необходимость дополнительных предположений относительно определяемых ниже функций J_1 и J_2 .)

Пусть $(t_1, x_1) \in R_1$, $(t_2, x_2) \in R_2$ и пусть φ есть решение на интервале $[t_1, t_2]$, удовлетворяющее условиям

$$\varphi(t_1) = x_1, \quad \varphi(t_2) = x_2.$$

Предположим, что $(t, \varphi(t))$ принадлежит S для $t = \tau_1, \dots, \tau_m$, где $\tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_m < t_2$, и более ни для каких других $t \in [t_1, t_2]$. Пусть J_1 и J_2 — функции, определенные на S равенствами

$$J_1 = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} f_i,$$

$$J_2 = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i} g_i,$$

и предположим, что $(-1)^j J_k(\tau_j, \varphi(\tau_j)) < 0$ для $k = 1, 2$ и $j = 1, \dots, m$. Доказать, что для $(\sigma, \eta) \in R_1$ вблизи (t_1, x_1) существует решение $\psi = \psi(t, \sigma, \eta)$ на интервале $\sigma \leq t \leq t_2$, удовлетворяющее условию $\psi(\sigma, \sigma, \eta) = \eta$, и доказать, что функция ψ_2 , определенная равенством $\psi_2(\sigma, \eta) = \psi(t_2, \sigma, \eta)$, аналитична по (σ, η) вблизи (t_1, x_1) .

Указание. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$, так как для других t_j рассуждения аналогичны. Таким образом, можно предполагать, что существует только одна точка $(\tau_1, \varphi(\tau_1))$ данного решения, лежащая на S . Вначале следует показать, что функция ψ аналитична относительно t -переменных (t, σ, η) для $(t, \psi(t, \sigma, \eta)) \in R_1 \cup S$. Значение t , для которого кривая $(t, \psi(t, \sigma, \eta))$ пересекает поверхность S , получается в результате решения уравнения $F(t, \psi(t, \sigma, \eta)) = 0$ относительно t . Так как $J_1(\tau_1, \varphi(\tau_1)) > 0$, то существует единственное аналитическое решение $t = \gamma(\sigma, \eta)$, причем $\gamma(t_1, x_1) = \tau_1$.

Затем следует рассмотреть решение уравнения (2) с начальным значением $x = \psi(\gamma(\sigma, \eta), \sigma, \eta)$ при $t = \gamma(\sigma, \eta)$. Эти функции аналитичны по (σ, η) . Так как $J_2(\tau_1, \varphi(\tau_1)) > 0$, то это решение не будет вновь пересекать S вблизи $(\tau_1, \varphi(\tau_1))$. Так как оно остается вблизи $(t, \varphi(t))$, то его можно продолжить до t_2 . Решение аналитично относительно t и своих начальных значений. Начальные значения аналитичны относительно (σ, η) . Таким образом, функция ψ аналитична относительно t -переменных (t, σ, η) для тех (t, σ, η) , которые достаточно близки к (t_2, t_1, x_1) .

7. Пусть f — непрерывная функция, определенная на действительном t -интервале $a \leq t \leq b$ и для всех комплексных w и μ , где w комплексно n -мерно и μ комплексно k -мерно. Пусть для каждого фиксированного t функция f аналитична по переменным (w, μ) для $|w| + |\mu| < \infty$. Пусть, наконец, для всех w, \tilde{w} и $t \in [a, b]$

$$|f(t, w, \mu) - f(t, \tilde{w}, \mu)| \leq M(|\mu|)|w - \tilde{w}|,$$

$$|f(t, 0, \mu)| \leq M(|\mu|) < \infty,$$