что решение $\varphi = \varphi(t, \eta)$ уравнения (1.1), такое, что $\varphi(0, \eta) = \eta$, есть непрерывно дифференцируемая функция η, причем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}(t, \eta) = \exp\left[\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau\right]. \tag{4.3}$$

В частности, при $t = 1$ выражение (4.3) дает, так как $(\partial\varphi/\partial\eta)(1, \eta) = \psi'(\eta)$,

$$\psi'(\eta) = \exp\left[\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau\right]. \tag{4.4}$$

Поэтому производная $\psi'(\eta)$ существует, и из (4.4) следует, что $\psi'(\eta) > 0$.

Если

$$g(\eta) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, \eta))\, d\tau,$$

то, очевидно, когда функция g имеет ограниченную вариацию на интервале $0 \leq \eta \leq 1$, производная $\psi'(\eta) = \exp g(\eta)$ обладает тем же свойством. Чтобы показать, что g имеет ограниченную вариацию, возьмем некоторое подразделение $0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n = 1$ интервала $0 \leq \eta \leq 1$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n-1} |g(\eta_{k+1}) - g(\eta_k)| \leq \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, \eta_{k+1})) - \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, \varphi(\tau, \eta_k)) \right| d\tau. \tag{4.5}$$

Для фиксированного t, $0 < t \leq 1$, преобразование ψ_t, определенное равенством

$$\psi_t(\eta) = \varphi(t, \eta) \qquad (0 \leq \eta \leq 1),$$

является, очевидно, гомеоморфизмом интервала $0 \leq \eta \leq 1$ на некоторый действительный интервал. Так как преобразование ψ сохраняет ориентацию, то и ψ_t обладает тем же свойством. Таким образом, если

$$0 = \eta_0 < \eta_1 < \ldots < \eta_n = 1$$

— подразделение интервала $0 \leq \eta \leq 1$, то подразделение

$$\psi_t(0) < \psi_t(\eta_1) < \ldots < \psi_t(\eta_n),$$

или

$$\varphi(t, 0) < \varphi(t, \eta_1) < \ldots < \varphi(t, 1),$$

является подразделением интервала $\varphi(t, 0) \leq x \leq \varphi(t, 1)$. Поскольку производная $\partial f/\partial x$ имеет ограниченную вариацию по x *равномерно по* t, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, \eta_{k+1})) - \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t, \eta_k)) \right| \leq V$$

для некоторой постоянной V, независимой от t, $0 \leq t \leq 1$. Отсюда и из (4.5) следует, что функция g имеет ограниченную вариацию на интервале $0 \leq \eta \leq 1$, а это завершает доказательство теоремы.

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИКА РЕШЕНИЙ В ЭРГОДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В эргодическом случае решения уравнения (1.1) имеют специфическую структуру. Чтобы увидеть это, рассмотрим более подробно соотношение между числом вращения ϱ преобразования T и множеством итераций $\psi^n(\eta)$ числа η.

Теорема 5.1. *Предположим, что число ϱ иррационально, и пусть η — фиксированное действительное число. Тогда числовые множества $A: \{n\varrho + m\}$ и $B: \{\eta_n + m\}$, где m, n — произвольные целые числа, находятся в одно-однозначном монотонном соответствии.*

Доказательство. Если число $n\varrho + m$ ассоциируется с числом $\eta_n + m$ $(\eta_n = \psi^n(\eta))$, то очевидно, что это соответствие одно-однозначно в силу иррациональности ϱ и вытекающего из этого отсутствия неподвижных точек у T.

Далее, порядок элементов в B не зависит от выбранного η, т. е. если $\eta_n + m < \eta_k + l$, то $\zeta_n + m < \zeta_k + l$ для каждого действительного ζ. Этому эквивалентно, что из неравенства $\eta_n - \eta_k < l - m$ следует неравенство $\zeta_n - \zeta_k < l - m$. Последнее вытекает из того, что непрерывная функция χ от η, определенная равенством

$$\chi(\eta) = \psi^n(\eta) - \psi^k(\eta) = \eta_n - \eta_k,$$

никогда не может принимать целых значений, ибо ϱ иррационально.

Следовательно, достаточно доказать результат для $\eta = 0$. Покажем, что для целых чисел p, q, r, таких, что

$$p \leq 0_q \leq r \qquad (0_q = \psi^q(0)), \tag{5.1}$$

выполняется неравенство

$$p < q\varrho < r. \tag{5.2}$$

Чтобы доказать неравенство (5.2), применим ψ^q к (5.1), в результате чего получим, что $\psi^q(p) \leq 0_{2q} \leq \psi^q(r)$, или, используя (1.4), что $0_q + p \leq 0_{2q} \leq 0_q + r$. Таким образом, $0_q + (l-1)p \leq 0_{lq} \leq 0_q + (l-1)r$ для каждого целого $l > 0$ и, следовательно,

$$\frac{0_q}{l} + \left(1 - \frac{1}{l}\right)p \leq q\frac{0_{lq}}{lq} \leq \frac{0_q}{l} + \left(1 - \frac{1}{l}\right)r. \tag{5.3}$$

Полагая в (5.3) $l \to \infty$, имеем $p \leq q\varrho \leq r$. Но так как ϱ иррационально, ни одно из равенств не может иметь места. Следовательно, неравенство (5.2) доказано.

Покажем теперь, что если $0_n + m < 0_k + l$, то $n\varrho + m < k\varrho + l$, и наоборот. Применив преобразование ψ^{-k} к первому неравенству, видим, что требуется доказать, что неравенство $0_{n-k} < l - m$ эквивалентно неравенству $(n-k)\varrho < l - m$. Из неравенств (5.1), (5.2)

и $0_{n-k} < l - m$ следует, что $(n-k)\varrho < l - m$. Если $(n-k)\varrho < l - m$ и $0_{n-k} \geq l - m$, то в силу (5.1) и (5.2) $(n-k)\varrho > l - m$, что является противоречием. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 5.1 непосредственно приводит к геометрическому обоснованию термина «число вращения». В самом деле, следующая теорема показывает, что если преобразование T эргодично, то T топологически эквивалентно вращению окружности $\mathfrak{C}$ на угол $2\pi\varrho$. Под этим подразумевается, что существует гомеоморфизм H, отображающий $\mathfrak{C}$ на себя, такой, что $HT = RH$, где R — вращение $\mathfrak{C}$ на угол $2\pi\varrho$. На языке представляющих действительных функций это означает, что существует непрерывная монотонно возрастающая действительная функция h, определенная для всех действительных y и обладающая свойствами

$$h(y+1) = h(y) + 1\,, \tag{5.4}$$

$$h(\psi(y)) = h(y) + \varrho\,. \tag{5.5}$$

Из непрерывного возрастания функции h в комбинации со свойством (5.4) следует, что h представляет гомеоморфизм H окружности $\mathfrak{C}$ на себя; (5.5) означает как раз, что $HT = RH$, где преобразование R, представленное действительной функцией

$$r(y) = y + \varrho\,,$$

есть вращение $\mathfrak{C}$ на угол $2\pi\varrho$.

Теорема 5.2. *Если преобразование T эргодично, то T топологически эквивалентно вращению окружности $\mathfrak{C}$ на угол $2\pi\varrho$.*

Доказательство. Пусть η — фиксированное действительное число и рассмотрим множества A и B, определенные в теореме 5.1. Если $y \in B$ и $y = \eta_n + m$, то положим $h_0(y) = n\varrho + m$. Это определяет на B действительную монотонно возрастающую функцию h_0, значения которой принадлежат A. Далее, множество A всюду плотно на действительной оси, ибо ϱ иррационально. Отсюда следует, что функция h_0 на B непрерывна. Так как преобразование T эргодично, то множество B всюду плотно на множестве действительных чисел. Поэтому функция h_0 может быть единственным образом продолжена до непрерывно возрастающей действительной функции $h = h(y)$, определенной для *всех действительных* y.

Пусть теперь $y \in B$ и $y = \eta_n + m$. Тогда $h(y) = n\varrho + m$ и очевидно, что равенство $h(y) + 1 = n\varrho + (m+1)$ должно соответствовать равенству

$$y + 1 = \eta_n + m + 1\,,$$

т. е. для $y \in B$ условие (5.4) должно выполняться. Но в силу непрерывности (5.4) должно выполняться для всех действительных y. Аналогично, если $y \in B$, $y = \eta_n + m$, то равенство

$$h(y) + \varrho = (n+1)\varrho + m$$

должно соответствовать равенству $\eta_{n+1} + m = \psi(\eta_n) + m = \psi(\eta_n + m) = \psi(y)$. Таким образом, для $y \in B$ соотношение (5.5) должно выполняться и, по непрерывности, (5.5) выполняется для всех действительных y. Из замечания, сделанного непосредственно перед теоремой, ясно, что функция h представляет гомеоморфизм H окружности $\mathfrak{C}$ на себя, который устанавливает требуемую топологическую эквивалентность.

С точки зрения дифференциальных уравнений значение теорем 5.1 и 5.2 состоит в том, что они подготовляют путь для простой характеристики решений уравнения (1.1).

Теорема 5.3 (Боль). *Если преобразование T эргодично, то существует функция $\omega = \omega(t, z)$, непрерывная по совокупности переменных (t, z) и периодическая:*

$$\omega(t+1, z) = \omega(t, z+1) = \omega(t, z), \tag{5.6}$$

такая, что каждое решение φ уравнения (1.1) *может быть записано в виде*

$$\varphi(t) = t\varrho + c + \omega(t, t\varrho + c), \tag{5.7}$$

где c — постоянная и ϱ — число вращения. Наоборот, для каждой постоянной c выражение (5.7) *есть решение уравнения* (1.1), *и каждому c, $0 \leq c < 1$, соответствует единственное $\varphi(0)$* (mod 1). *Именно, $c = h(\varphi(0))$.*

Доказательство. Пусть η — любое действительное число и пусть $\varphi = \varphi(t, \eta)$ — решение уравнения (1.1) с $\varphi(0, \eta) = \eta$. Так как $f(t, x+1) = f(t, x)$, то

$$\varphi(t, \eta + 1) = \varphi(t, \eta) + 1. \tag{5.8}$$

Поскольку $f(t+1, x) = f(t, x)$, то, полагая $\psi(\eta) = \varphi(1, \eta)$, получаем

$$\varphi(t+1, \eta) = \varphi(t, \psi(\eta)). \tag{5.9}$$

Пусть $h(\eta) = c$. Тогда, так как функция h монотонно возрастает и непрерывна, $\eta = g(c)$, где g — монотонно возрастающая и непрерывная функция. Кроме того, в силу соотношений (5.4) и (5.5)

$$g(c+1) = g(c) + 1, \tag{5.10}$$

$$\psi(g(c)) = g(c + \varrho). \tag{5.11}$$

Пусть $\tilde{\varphi}(t, c) = \varphi(t, g(c))$. Тогда в силу соотношений (5.8) и (5.10)

$$\tilde{\varphi}(t, c+1) = \tilde{\varphi}(t, c) + 1. \tag{5.12}$$

В силу соотношений (5.9) и (5.11)

$$\tilde{\varphi}(t+1, c) = \varphi(t+1, g(c)) = \varphi(t, \psi(g(c))) = \varphi(t, g(c+\varrho)) = \tilde{\varphi}(t, c+\varrho),$$

так что

$$\tilde{\varphi}(t+1, c) = \tilde{\varphi}(t, c+\varrho). \tag{5.13}$$

Пусть $\omega(t, z) = \tilde{\varphi}(t, z - t\varrho) - z$ для всех действительных t и z. Тогда в силу соотношений (5.12) и (5.13)

$$\omega(t + 1, z) = \omega(t, z + 1) = \omega(t, z).$$

Очевидно, при $z = t\varrho + c$

$$\tilde{\varphi}(t, c) = t\varrho + c + \omega(t, t\varrho + c),$$

что доказывает теорему.

§ 6. СИСТЕМА ДВУХ УРАВНЕНИЙ

При помощи небольшого изменения в рассуждениях можно рассмотреть систему двух уравнений

$$x_1' = f_1(x_1, x_2), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2), \tag{6.1}$$

причем предполагается, что f_1, f_2 — непрерывные функции, определенные для всех действительных x_1, x_2 и удовлетворяющие условиям

$$f_j(x_1 + 1, x_2) = f_j(x_1, x_2 + 1) = f_j(x_1, x_2) \quad (j = 1, 2),$$
$$f_1^2 + f_2^2 \neq 0.$$

Предположим также, что через каждую точку (x_1, x_2)-плоскости проходит единственное решение системы (6.1), исключая сдвиг на t, и что (6.1) не имеет периодических решений.

Координаты (x_1, x_2) можно рассматривать на торе $\mathfrak{J}$. Роль окружности $\mathfrak{C}$ предыдущих параграфов здесь играет кривая $\mathfrak{K}$, которая будет сейчас определена. Рассмотрим ортогональную систему уравнений

$$x_1' = -f_2(x_1, x_2), \qquad x_2' = f_1(x_1, x_2). \tag{6.2}$$

Пусть $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ — решение системы (6.2). Если это решение — замкнутая кривая на $\mathfrak{J}$, то ее можно взять за кривую $\mathfrak{K}$. Если ψ не является замкнутой кривой на $\mathfrak{J}$, то точки $\psi(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, имеют по крайней мере одну предельную точку P на $\mathfrak{J}$. Рассмотрим малый криволинейный прямоугольник R, содержащий P внутри себя, с краями, состоящими из двух дуг P_1P_2 и P_3P_4, являющихся решениями системы (6.1), и двух дуг P_1P_3 и P_2P_4, являющихся решениями системы (6.2). Пусть дуги P_1P_2 и P_1P_3 имеют одинаковую длину на $\mathfrak{J}$ и пусть прямоугольник R настолько мал, что изменение направления вектора с компонентами (f_1, f_2) в R меньше, чем $\pi/100$. Пусть решение ψ впервые пересекает дугу P_1P_2 (или дугу P_3P_4) при $t = t_0$ и оставляет R при возрастающих $t > t_0$. Пусть оно возвращается в R впервые для $t = t_1$, когда оно пересекает дугу P_3P_4 (или P_1P_2). Кривая $\psi(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, теперь может быть замкнута при помощи дуги, идущей из $\psi(t_1)$ в $\psi(t_0)$, которая целиком лежит в R, образует с решениями системы (6.2) угол, меньший по абсолютной величине, чем $\pi/3$, и которая имеет непрерывные первые производные в точках $\psi(t_0)$ и $\psi(t_1)$ (и также непрерывные вторые

производные, если функции f_1 и f_2 принадлежат классу C^1). Эта замкнутая кривая и есть кривая $\mathfrak{K}$.

Кривая $\mathfrak{K}$ не может быть непрерывно деформирована в точку, так как отсюда в силу того, что индекс $\mathfrak{K}$ относительно векторного поля (f_1, f_2) равен единице, следовало бы наличие на $\mathfrak{J}$ особой точки. Каждое решение системы (6.1) должно пересекать $\mathfrak{K}$, когда t возрастает (или убывает). Действительно, предположим, что это не имеет места для полутраектории C^+ системы (6.1).

Тор, разрезанный вдоль кривой $\mathfrak{K}$, превращается в кольцо. Следовательно, так как полутраектория C^+ не пересекается с $\mathfrak{K}$, она не может достигнуть $\mathfrak{K}$, и поэтому C^+ и $L(C^+)$ лежат в кольце. Применяя рассуждения Пуанкаре—Бендиксона, можно показать, что $L(C^+)$ есть замкнутая траектория. Но, по предположению, система (6.1) не имеет периодических траекторий. Таким образом, все полутраектории системы (6.1) пересекают $\mathfrak{K}$. В частности, все решения, начинающиеся на $\mathfrak{K}$, возвращаются в $\mathfrak{K}$. Это определяет гомеоморфизм $\mathfrak{K}$ на себя, и предыдущие результаты, доказанные для окружности $\mathfrak{C}$, теперь применимы также к кривой $\mathfrak{K}$.

ЛИТЕРАТУРА[1]

Общая

Андронов А. А. и Хайкин С. Э., Теория колебаний, ч. I, М.-Л., 1937.

Беллман Р. (Bellman R.), Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, М., 1954.

Bieberbach L., Theorie der Differentialgleichungen, 3 Aufl., Berlin, 1930.
Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen auf funktiontheoretischer Grundlage dargestellt, Berlin, 1953.

Forsyth A. R., A treatise on differential equations, 6th ed., London, 1929.

Гурса Э. (Goursat É.), Курс математического анализа, т. 2, 3, М.-Л., 1937.

Horn J., Gewöhnliche Differentialgleichungen, 2 Aufl., Berlin und Leipzig, 1927.

Hurewicz W., Ordinary differential equations in the real domain with emphasis on geometric methods, Brown University, Providence, 1943 (мимеография).

Айнс Э. Л. (Ince E. L.), Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Камке Э. (Kamke E.), Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1950.
Differentialgleichungen reeller Funktionen, Leipzig, 1930.

Крылов А. Н. и Боголюбов Н. Н., Введение в нелинейную механику, Киев, 1937.

Lefschetz S. (ed.), Contributions to the theory of non-linear oscillations, Princeton, vol. 1, 1950; vol. 2, 1952.
Lectures on differential equations, Princeton, 1946.

Левитан Б. М., Разложение по собственным функциям*), М.-Л., 1950.

Minorsky N., Introduction to non-linear mechanics, Ann Arbor, 1947.

Moulton F. R., Differential equations, New York, 1930.

Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы*), М.-Л., 1954.

Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2 изд., М.-Л., 1949.

Picard É., Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles, Paris, 1930.

Poole E. G. C., Introduction to the theory of linear differential equations, Oxford, 1936.

Сансоне Дж. (Sansone G.), Обыкновенные дифференциальные уравнения, т. 1, М., 1953; т. 2, М., 1954.

Schlesinger L., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig, 1908.

Стокер Дж. (Stoker J. J.), Нелинейные колебания в механических и электрических системах, 2 изд., М., 1953.

Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford, 1946.

Valiron G., Equations fonctionnelles; applications (Cours d'analyse II), Paris, 1945.

---

[1] Названия, отмеченные *), добавлены переводчиком.

К гл. I

Gronwall T. H., Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, *Ann. of Math.*, ser. 2, **20**, 292—296 (1919).

Müller M., Über die Eindeutigkeit der Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen und die Konvergenz einer Gattung von Verfahren zur Approximation dieser Integrale, Sitzungsber. Heidelberg, 9 Abh., 1927.

Валле-Пуссен Ш. (de la Vallée Poussin Ch. J.), Курс анализа бесконечно малых, т. 2, М.-Л., 1933.

Peano G., Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires, *Math. Ann.*, **37**, 182—228 (1890).

Picard É., Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, *J. de Math.*, ser. 4, **6**, 145—210 (1890).

Lindelöf E., Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles, *J. de Math.*, ser. 5, **6**, 423—441 (1900).

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réeles des équations différentielles ordinaires, *J. de Math.*, ser. 4, **10**, 117—128 (1894).

Wintner A., On the exact value of the bound of regularity of solutions of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **57**, 539—540 (1935).

К гл. II

Carathéodory C., Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig, 1927.

Coddington E. A., Levinson N., Uniqueness and convergence of successive approximations, *J. Indian Math. Soc.*, **16**, 75—81 (1952).

van Kampen E. R., Remarks on systems of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **59**, 144—152 (1937).

Müller M., Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Math. Z.*, **26**, 619—645 (1927).

Peano G., Sull'integrabilita delle equazioni differenziali di primo ordine, *Atti Accad. Sci. Torino*, **21**, 677—685 (1885—1886).

Perron O., Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **78**, 378—384 (1917).

Viswanatham B., The general uniqueness theorem and successive approximations, *J. Indian Math. Soc.*, **16**, 69—74 (1952).

Wintner A., On the convergence of successive approximations, *Amer. J. Math.*, **68**, 13—19 (1946).

The infinities in the non-local existence problem of ordinary differential equations, *Amer. J. Math.*, **68**, 173—178 (1946).

К гл. III

Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2d ed., Paris, 1915; vol. 2, pp. 112—149.

Dunkel O., Regular singular points of a system of homogeneous linear differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Sci.*, **38**, 341—370 (1912—1913).

Floquet G., Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, *Ann. École Norm.*, ser. 2, **12**, 47—89 (1883).

Forsyth A. R., Theory of differential equations, vol. 4, Cambridge, 1902.

Fuchs L., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, *J. für Math.*, **66**, 121—160 (1866); **68**, 354—385 (1868).

Levinson N., The asymptotic nature of the solutions of linear systems of differential equations, *Duke Math. J.*, **15**, 111—126 (1948).

Schlesinger L., Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, Leipzig, 1908.

К гл. IV

Birkhoff G. D., A simplified treatment of the regular singular point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **11**, 199—202 (1910).
Forsyth A. R., Theory of differential equations, vol. 4, Cambridge, 1902.
Frobenius G., Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen, *J. für Math.*, **76**, 214—235 (1873).
Fuchs L., Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, *J. für Math.*, **66**, 121—160 (1866); **68**, 354—385 (1868).
Riemann B., Gesammelte Werke, 2 Aufl., Leipzig, 1892.
Schmidt A., Neuer Beweis eines Hauptsatzes über Bestimmtheitsstellen linearer Differentialgleichungssysteme, *J. für Math.*, **179**, 1—4 (1938).

К гл. V

Birkhoff G. D., Singular points of ordinary linear differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10**, 436—470 (1909).
Borel É., Mémoire sur les séries divergentes, *Ann. École Norm.*, ser. 3, **16**, 9—136 (1899).
Cope F. T., Formal solutions of irregular linear differential equations I, *Amer. J. Math.*, **56**, 411—437 (1934); II, **58**, 130—140 (1936).
Horn J., Laplacesche Integrale, Binomialkoeffizientenreihen und Gammaquotientenreihen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen, *Math. Z.*, **21**, 85—95 (1924).
Лаппо-Данилевский И. А., Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires, Труды мат. ин-та им. Стеклова, АН СССР, ч. I, 1934; ч. II, 1935; ч. III, 1936. (См. также «Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений»*, М., 1957.)
Poincaré H., Sur les intégrales irregulières des équations linéaires, *Acta Math.*, **8**, 295—344 (1886).
Sternberg W., Über die asymptotische Integration von Differentialgleichungen, *Math. Ann.*, **81**, 119—186 (1920).
Trjitzinsky W. J., Analytic theory of linear differential equations, *Acta Math.*, **62**, 167—226 (1933).
Singular point problems in the theory of linear differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**, 209—223 (1938).

К гл. VI

Birkhoff G. D., On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, 219—231 (1908).
Langer R. E., The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **67**, 461—490 (1949).
Noaillon P., Développements asymptotiques dans les équations différentielles linéaires à paramètre variable, *Mém. Soc. Sci. Liége*, ser. 3, **11**, 197 (1912).
Schlesinger L., Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linearer Differentialsysteme als Funktionen eines Parameters, *Math. Ann.*, **63**, 277—300 (1907).
Trjitzinsky W. J., Theory of linear differential equations containing a parameter, *Acta Math.*, **44**, 1—50 (1936).
Singular point problems in the theory of linear differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **44**, 209—223 (1938).
Turrittin H. L., Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter, в книге Contributions to the theory of non-linear oscillations, vol. 2, Princeton, 1952, pp. 81—116.
Wasow W., Asymptotic solution of the differential equation of hydrodynamic stability in a domain containing a transition point, *Ann. of Math.*, **58**, 222—252 (1953).

К гл. VII

Bliss G. A., A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **28**, 561—589 (1926).

Kneser A., Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **58**, 81—147 (1904).
Die Theorie der Integralgleichungen und die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, *Math. Ann.*, **63**, 477—524 (1907).

Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen II, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 213—259 (1904).

Reid W. T., A new class of self-adjoint boundary value problems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **52**, 381—425 (1942).

К гл. VIII

Birkhoff G. D., Existence and oscillation theorem for a certain boundary value problem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **10**, 259—270 (1909).

Bôcher M., Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris, 1917.

Hamel G., Über die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **73**, 371—412 (1913).

Haupt O., Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit periodischen Koeffizienten, *Math. Ann.*, **79**, 278—285 (1918).

Kamke E., Neue Herleitung der Oszillationsätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung, *Math. Z.*, **44**, 635—658 (1938).

Стретт М. Дж. О. (Strutt M. J. O.), Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков—Киев, 1935.
Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung, *Math. Z.*, **49**, 593—643 (1943—1944).

Sturm C., Sur les équations différentielles linéares du second ordre, *J. de Math.*, **1**, 106—186 (1836).

К гл. IX

Hartman P., Wintner A., различные статьи в *Amer. J. Math.* (1945—1951).

Kodaira K., The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of *S*-matrices, *Amer. J. Math.*, **71**, 921—945 (1949).

Levinson N., A simplified proof of the expansion theorem for singular second order linear differential equations, *Duke Math. J.*, **18**, 57—71; 719—722 (1951).

Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., vol. 15, 1932.

Titchmarsh E. C., Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Oxford, 1946.

Weyl H., Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 37—64 (1909).
Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68**, 220—269 (1910).
Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunctionen, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 442—467 (1910).

Yosida K., On Titchmarsh—Kodaira's formula concerning Weyl—Stone's eigenfunction expansion, *Nagoya Math. J.*, **1**, 49—58 (1950).

К гл. X

Coddington E. A., The spectral representation of ordinary self-adjoint differential operators, *Ann. of Math.*, **60**, 192—211 (1945).
The spectral matrix and Green's function for singular self-adjoint boundary value problems, *Canadian J. Math.*, **6**, 169—185 (1954).

Halperin I., Closures and adjoints of linear differential operators, *Ann. of Math.*, **38**, 880—919 (1937).
Kodaira K., On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, *Amer. J. Math.*, **72**, 502—544 (1950).
Levinson N., The expansion theorem for singular self-adjoint linear differential operators, *Ann. of Math.*, **59**, 300—315 (1954).
Левитан Б. М., Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений, *ДАН СССР*, **73**, 651—654 (1950).

К гл. XI

Bôcher M., Applications and generalizations of the conception of adjoint systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14**, 403—420 (1913).
Lecons sur les méthodes de Sturm, Paris, 1917.

К гл. XII

Birkhoff G. D., Boundary value and expansion problems of ordinary differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **9**, 373—395 (1908).
Birkhoff G. D., Langer R. E., The boundary problems and developments associated with a system of ordinary differential equations of the first order, *Proc. Amer. Acad. Sci.*, **58**, 51—128 (1923).
Tamarkin J. D., Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansions of an arbitrary function in a series of fundamental functions, *Math. Z.*, **27**, 1—54 (1927).

К гл. XIII

Bellman R., On the boundedness of solutions of non-linear differential and difference equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **46**, 354—388 (1948).
Levinson N., On stability of non-linear systems of differential equations, Colloq. Math. II, 1949, pp. 40—45.
Ляпунов А. М., Общая задача об устойчивости движения, М.-Л., 1950.
Perron O., Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Integrale von Differentialgleichungssystemen, *Math, Z.*, **29**, 129—160 (1929).
Петровский И. Г., О поведении интегральных кривых системы обыкновенных дифференциальных уравнений вблизи особой точки, *Мат. сборник*, **41** : 1, 107—156 (1934).
Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, vol. 1, Paris, 1892, chap. 3, 4.

К гл. XIV

Coddington E. A., Levinson N., Perturbations of linear systems with constant coefficients possessing periodic solutions, в книге Contributions to the theory of non-linear oscillations, vol. 2, Princeton, 1952, pp. 19—35.
Friedrichs K. O. (и другие), Non-linear mechanics, Brown University, Providence, 1942—1943 (мимеография).
Picard É., Traité d'analyse, 3 éd., t. 3, Paris, 1928.
Poincaré H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, t. 1, Paris, 1892, chap. 3, 4.

К гл. XV

Bendixson I., Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, **24**, 1—88 (1901).
Dulac H., Points singuliers des équations différentielles, Mém. Sci. Math., Fasc. 61, Paris., 1934.

Perron O., Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes, *Math. Z.*, **15**, 121—146 (1922).
Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation différentielle, Oeuvres, t. 1, Paris, 1892.
Wintner A., Asymptotic integration constant in the singularity of Briot—Bouquet, *Amer. J. Math.*, **68**, 293—300 (1946).
Vortices and nodes, *Amer. J. Math.*, **69**, 815—824 (1945).

К гл. XVI

Bendixson I., Sur les courbes définies par des équations différentielles, *Acta Math.*, **24**, 1—88 (1901).
Poincaré H., Sur les courbes définies par une équation différentielle, Oeuvres, t. 1, Paris, 1892.

К гл. XVII

Bohl P., Über die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen Variabeln periodische Differentialgleichung erster Ordnung, *Acta Math.*, **40**, 321—336 (1916).
Denjoy A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, *J. de Math.*, ser. 9, **11**, 333—375 (1932).
van Kampen E. R., The topological transformations of a simple closed curve into itself, *Amer. J. Math.*, **57**, 142—152 (1935).
Kneser H., Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen, *Math. Ann.*, **91**, 135—154 (1923).
Siegel C. L., Note on differential equations on the torus, *Ann. of Math.*, **46**, 423—428 (1945).

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

(Л) 28, 409
(ЛН) 86
(ЛО) 79
(НЛ) 409
(С) 24
(C_1) 42
(C_i) 43
(C_μ) 39
($C_{2\mu}$) 46
(У) 10
($У_n$) 30
($У_n$) 30
(a, b), $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ 9
A, $\bar{A}$, A^*, $\acute{A}$, $\grave{A}$, A^{-1}, $|A|$ 74
adj P 168
C^+, C^- 423
C_∞ 246
$C^k(D)$, $C^k(I)$ 9
$C_p^1(I)$ 11
(c, Lip), Lip 16
D 9, 24
det A 34, 74
e^A 76
E_n 74
f, g, (f, g), $\|f\|$ 203
$G(t, \tau, l)$ 209
$G(\ ,\tau, l)$, $G(t,\ \ , l)$ 297, 298
I 9
$I_f(J)$ 435
Lip 16
L, L^+ 205
m_∞ 246
sp$A$ 34, 75
$|x|$, $\|x\|$, $|x|$ 26
$\mathfrak{D}$ 297
$\hat{\mathfrak{D}}$ 265
$\mathfrak{G}$ 209
$\|\mathfrak{G}\|$ 211
$\mathfrak{L}^2(a, b)$ 205
$\mathfrak{L}(0, \infty)$ 243
$\mathfrak{L}(\varrho)$ 251, 273
$\mathfrak{S}(f, g)$ 311
0_n 74
$\sim$ 162

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

(з. — задачи)

Автономная система 373, 383
Айнс (Ince E. L.) 185
Аналитический вектор 42
Асимптотика грубая 104
Асимптотическая устойчивость траекторий 352, 385
— фаза 352, 439 (з. 2)
Асимптотически устойчивое решение 343, 351
Асимптотические ряды 162, 187, 188 (з. 1—5)
— — для линейных систем с большим параметром 193
— — — уравнения порядка n с параметром 198
— — и интеграл Лапласа 185
— — как формальные решения 175, 176, 183
Асимптотическое поведение решений линейных систем 103, 112 (з. 3—6), 118 (з. 29), 119 (з. 33), 120 (з. 35, 37)
— — — нелинейных систем 357, 359, 372, 376—378 (з: 1—14)
— — — уравнений второго порядка 117 (з. 28), 119 (з. 30, 31)
— — — — порядка n 119 (з. 32, 34), 120 (з. 36, 38)
Асколи лемма 14

Базис, см. Фундаментальное множество
Бесселя неравенство 214
— уравнение 150 (з. 8, 9)
— функции 283 (з. 16)
Билинейная форма 311
Боля теорема 454
Брауэра теорема о неподвижной точке 51 (з. 10), 441 (з. 6)

Вариации постоянных формула 87
Вектор 25
Вектор аналитический 42
— компонента 25
— норма (или величина) 26, 42
— производная 25
— эвклидова длина 26
Ветвления точка 190
Возмущения, двумерный случай 376 (з. 5), 377 (з. 6—10), 409
— линейных систем 343, 357, 376 (з. 1,2)
— — — с периодическим решением, автономный случай 396
— — — — — — неавтономный случай 387
— — — — периодическими коэффициентами 403 (з. 4)
— уравнений второго порядка 387, 402 (з. 1)
Вращения число 446
Вронскиан 94
Выпуклая область 16
Вырожденное гипергеометрическое уравнение 146

Гильбертово пространство 253
Гипергеометрическое уравнение 146
— — вырожденное 146
Гомеоморфизм 443, 452
Грина формула 96
— функция 209, 321
— — в случае предельного круга 266
— — для задач второго порядка 247
— — — несамосопряженных задач 338, 341 (з. 3)
— — — оператора $Lx=-x''$ 327
— — — — $Lx=-x''+q(t)x$ 332
— — — сингулярного случая порядка n 303
— — — системы первого порядка 222 (з. 16)
— — — сопряженной задачи 322
— — полюсы 220 (з. 7)
— — разложение 219 (з. 4)

Грина функция связь со спектральной матрицей 305
— — симметрия в самосопряженном случае 220 (з. 6)
Грубая асимптотика 104

Данжуа (Denjoy A.) 448
Дифференциальное уравнение 10
— — на торе 442, 455

Единственности теоремы для начальных задач 18, 60, 73 (з. 1, 2)
Единственность спектральной матрицы, см. Спектральная матрица
— — функции 251

Жордана теорема 428
Жорданова кривая 428, 434

Зависимость верхнего решения от начальных данных 59
— решений от начальных данных 31, 34, 50 (з. 7), 51 (з. 9), 70
— — — — — аналитический случай 34
— — — — — случай разрывной правой части 49 (з. 6)
— — — параметра 31, 34, 50 (з. 7), 71, 72
— — — — аналитический случай 34
Задачи на собственные значения, см. Краевые задачи
Замкнутое множество функций 217

Индекс изолированный особой (критической) точки 434
— исключительный 392
— кривой Жордана 435
— периодической траектории 437
— простой особой (критической) точки 437
— сингулярный 392
Интервал 9
Иррегулярная особая точка 125, 139
— — — обобщение для нелинейных систем 349
Исключительные индексы 392
— компоненты 392

Кажущаяся особенность 128
Кампен ван (van Kampen E.) 448
Каноническая форма матрицы 75, 120 (з. 39, 40)
Каратеодори теорема существования 54
Комплексные системы 41
Компонента вектора 25
— исключительная 392
— сингулярная 392
Копсон (Copson E. T.) 146
Коши—Буняковского неравенство 210
— интегральная формула 326
— интегральный метод 325
Коши—Пеано теорема 14
Краевая задача 205
— — для нелинейного уравнения второго порядка 49 (з. 5)
— — — сингулярной пары уравнений первого порядка 283 (з. 20)
— — — сингулярных систем первого порядка 307, 308 (з. 3—6)
— — — — — порядка n 307 (з. 1)
— — — систем первого порядка 341 (з. 2)
— — — — порядка n 223 (з. 18)
— — — уравнений второго порядка 228
— — неоднородная 320
— — несамосопряженная второго порядка 332
— — — для систем первого порядка 341 (з. 2)
— — — порядка n 336
— — однородная 317
— — периодические краевые условия 231
— — самосопряженная 317
— — сингулярная самосопряженная второго порядка 240
— — — — порядка n 285
— — сопряженная 317
Краевой оператор 312
Краевые формы 312
— — векторные 312
— — дополнительные 313
Краевых форм формула 314
Кусочно непрерывная производная 11

Лагранжа тождество 98
Лапласа интеграл 185
Лежандра уравнение 150 (з. 11)
Линейные системы, аналитические коэффициенты 102
— — асимтотическое поведение решений 103
— — возмущения; см. Возмущения линейных систем
— — двумерные 404
— — неоднородные 86
— — однородные; см. Однородные линейные системы
— — особые точки; см. Особые точки линейных систем

Линейные системы, периодические коэффициенты 90, 308 (з. 6)
— — порядка n 70, 86, 117 (з. 27)
— — постоянные коэффициенты 87, 113 (з. 13)
— — содержащие большой параметр 189
— уравнения вронскиан 94
— — метод вариации постоянных 87
— — неоднородные 86, 99
— — однородные 79, 94
— — периодические коэффициенты 114 (з. 14)
— — понижение порядка 96
— — порядка n 93
— — постоянные коэффициенты 100
— — сопряженные 97
— — фундаментальное множество 95
Липшица постоянная 16
— условие 16
— — абстрактная форма 52 (з. 11)
— — для векторов 28
— — обобщенная форма 48 (з. 2)
Логарифм матрицы 77
Логарифмическая матрица, формальная 130
— сумма, формальная 130
Логарифмически-экспоненциальная матрица 156
— — сумма 155
Лорана формальные ряды 129, 190

Матрица единичная 36, 74
— каноническая форма 75, 120 (з. 39, 40)
— комплексно сопряженная 74
— логарифм 77
— логарифмически-экспоненциальная 156
— норма 74
— нулевая 74
— обратная 74
— определитель 34, 75
— особая 74
— производная 78
— след 34, 75
— сопряженная 74
— спектральная, см. Спектральная матрица
— транспонированная 74
— формальная логарифмическая 130
— формальное решение 156
— фундаментальная, см. Фундаментальная матрица
— характеристические корни 74
Матрица, характеристический многочлен 74
— характеристическое уравнение 77
— экспонента 75
Матрицы подобные 75
— ряды 76
— сходимость 75
Матье уравнение 238
Маятник, затухающие колебания 439 (з. 3)
Мейсснера уравнение 238
Мультипликативный интеграл 111 (з. 2)
Мультипликаторы 92

Начальная задача 10
— — для систем 24
— — теоремы единственности 18, 60, 73 (з. 1, 2)
— — — существования 18, 19
Неавтономные системы 379
Неоднородные линейные системы, формула вариации постоянных 87
— — — фундаментальная матрица 86
Норма (или величина) вектора 26, 42
— интегрального оператора 211
— матрицы 74
— последовательности чисел 218
— функции в $\mathfrak{L}^2$ 205, 286
Нормированные собственные функции 214
Нули решений уравнений второго порядка 225, 276 (з. 1), 277 (з. 2—4)

Области устойчивости 235, 239 (з. 6, 9)
Область 9
Обратного преобразования теорема для сингулярных систем порядка n 307 (з. 1)
— — — сингулярный случай второго порядка 253
— — — — — порядка n 290, 291
Обращение дифференциального оператора 266, 280 (з. 12), 289, 303
Однородные линейные системы 79
— — — понижение порядка 83
— — — соответствующее матричное уравнение 80
— — — сопряженные 82
— — — фундаментальная матрица 80
— — — фундаментальное множество (или базис) 80
Оператор дифференциальный 93
— сопряженный 96, 205
Определяющее уравнение 137, 141

Ортогональные функции 205
Ортонормированная последовательность 203, 213, 214
Особая точка линейной системы 125
— — — — второго рода 125
— — — — — — в бесконечности 152
— — — — изолированная 125
— — — — иррегулярная 125, 139, 183
— — — — кажущаяся 128
— — — — первого рода 125
— — — — — — в бесконечности 142, 152
— — — — регулярная 125, 142
— — ранг 125
— — системы порядка n первого рода 149 (з. 1, 2)
— — уравнения порядка n 136
— — — — — иррегулярная 139, 183
— — — — — первого рода 136
— — — — — регулярная 138
Особые (критические) точки действительной системы 404, 409, 410, 423, 437
— — — — — индекс 437
— — — — — простые 410, 437

Парсеваля равенство 204, 215
— — для сингулярных систем порядка n 307 (з. 1)
— — сингулярный случай второго порядка 252, 273
— — — — порядка n 288, 309 (з. 9)
Первая вариация 351
Перемежаемость нулей решений 226
Периодические коэффициенты в возмущениях линейных систем 376 (з. 4), 403 (з. 4)
— — — линейных системах 90, 308 (з. 6)
— — — сингулярных задачах 280 (з. 10, 11)
— — — уравнении второго порядка 112, 113 (з. 7—11), 231
— — — — первой вариации 351
— — — — порядка n 114 (з. 14)
— — устойчивость систем 350
Периодические краевые условия для уравнений второго порядка 231
— нелинейные системы 351, 378 (з. 12, 13), 379
— — уравнения 442
— решения, аналитический случай 382, 385, 394, 396, 399, 400
— — асимптотическая устойчивость 381
— — — — траекторий 385
Периодические решения, существование в автономном случае 383, 399
— — — — неавтономном случае 379, 394, 403 (з. 2, 3)
— — — для нелинейных уравнений 425, 430, 439 (з. 1), 440 (з. 4, 5) 441 (з. 6—7)
— — на торе 446
Перрон (Perron O.) 343
Пикара—Линделёфа теорема существования 21
Планшереля равенство 241
— теорема 285
Полутраектория 423
Полярные уравнения 409
— функции 405
Последовательные приближения 20
— — в банаховом пространстве 51 (з. 10)
— — расходимость 65
— — сходимость 66, 73 (з. 3)
Постоянные коэффициенты 87, 100, 113 (з. 13)
Предельная точка 247
— — полутраектории 423
— траектория 426
Предельного круга в бесконечности случай 243, 247, 263
Предельной точки в бесконечности случай 243, 247
— — — — — достаточные условия 248
— — случай, примеры 276 (з. 1), 277 (з. 2, 4), 280 (з. 10, 11)
Предельные множества траекторий 423
Предельный круг 246, 247
— цикл 426
Приближенные решения 11, 28
— — расходимость 52 (з. 12)
Притяжения точка 410
Продолжение решений 23, 24, 73 (з. 4, 5)
— верхних и нижних решений 58, 59
Производная вектора 25
Производное множество 446
Пространство $\mathfrak{L}^2$ 203
— $\mathfrak{L}^2(\varrho)$ 251, 273, 288
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 152, 448
Пуанкаре—Бендиксона теорема 426

Равенство Парсеваля, см. Парсеваля равенство
Равностепенная непрерывность 13
Равносходимость 330, 335
Разложения теорема для сингулярных систем порядка n 307 (з. 1)
— — — систем первого порядка 222 (з. 17)

Разложения теорема для систем порядка n 223 (з. 18)
— — несамосопряженный случай второго порядка 330, 335, 339, 441 (з. 3)
— — — — порядка n 339
— — самосопряженный случай 214
— — сингулярный случай второго порядка 252, 273
— — — — порядка n 288, 289, 309 (з. 9)
— — формулировка в гильбертовом пространстве 308 (з. 7), 309 (з. 8, 9)
Ранг особой точки 125
Регулярная особая точка 125, 142
— точка 423
Реллих (Rellich F.) 309 (з. 8)
Решение 10
— верхнее 56
— в расширенном смысле 53
— зависимость от начальных данных; см. Зависимость от начальных данных
— нижнее 56
— периодическое; см. Периодические решения
— продолжение; см. Продолжение решений
— субгармоническое 351
— тривиальное 79
— устойчивое 343, 347, 351
— формальное 131
— ε-приближенное 11
Рисс Ф. (Riesz F.) 309
Рисса—Фишера теорема 218

Самосопряженности условие 204
Самосопряженные задачи (см. также Краевая задача) 204, 205
— — для систем первого порядка 307 (з. 3, 4), 308, (з. 5, 6)
— — — — порядка n 307 (з. 1)
— — краевые условия для них 222 (з. 15)
— — примеры 218 (з. 1), 219 (з. 2, 3)
— — случай предельного круга 267
— — — предельной точки 281 (з. 13), 283 (з. 17)
Самосопряженный дифференциальный оператор 221 (з. 13), 222 (з. 14)
— оператор 309 (з. 8)
Седло 377 (з. 7), 407, 421, 438
Секефальви-Надь Б. (Sz.-Nagy B.) 309 (з. 8)
Симметричный оператор 308 (з. 7)
Сингулярные индексы 392
— компоненты 392
— краевые задачи, см. Краевая задача
Системы дифференциальных уравнений 24
— — — комплексные 41
— — — начальная задача 24
Системы типа Фукса 143
Скалярное произведение 205
Смежные траектории 434
Собственные значения 202, 205
— — в случае предельного круга 282 (з. 15)
— — для интегрального оператора 210
— — — уравнений второго порядка 238 (з. 3, 4), 239 (з. 5)
— — существование 212
— — — для уравнений второго порядка 229
— функции 202, 205
— — в сингулярных задачах 274, 279 (з. 6, 7)
— — для систем первого порядка 222 (з. 17)
— — — — порядка n 223 (з. 18)
— — замкнутость множества в самосопряженном случае 220 (з. 8)
— — интегрального оператора 210
— — нормированные 213
— — ортогональность 205
— — ортонормированные 214
— — полнота множества в самосопряженном случае 215—218
— — счетность множества 206
Соотношение полноты, см. Парсеваля равенство
Сопряженное уравнение 96
Сопряженные системы 82
Сопряженный оператор 96
Спектр 274, 293
— непрерывный 274, 293
— производное множество 279 (з. 8)
— собственные значения 274
— точечный 274, 293
Спектральная матрица в несингулярном случае порядка n 287
— — — сингулярном случае порядка n 287
— — — случае предельного круга 272
— — выражение при помощи функции Грина 305
— — единственность 293
— — — в сингулярном случае второго порядка 272, 273
— — — — — — порядка n 293, 296, 305, 306
— функция в несингулярном случае 251, 252
— — — — — второго порядка 251
— — — случае предельного круга 263

Спектральная функция в случае предельной точки 252
— — единственность 251, 252, 281 (з. 14)
— — примеры 276 (з. 1), 277 (з. 2, 4), 280 (з. 10,11)
Спектральное разложение 302 (з. 8)
Сравнения теоремы 225
Степенные ряды, формальные 130
Субгармонические решения 351
Существования теорема для аналитических систем 43, 44
— — — верхних и нижних решений 56
— — — линейных систем 29, 50 (з. 7), 111 (з. 1, 2)
— — — начальной задачи 14
— — — последовательных приближений 21, 48 (з. 4)
— — — уравнения, неразрешенного относительно производной 51 (з. 8)
— — Каратеодори 54
— — Коши—Пеано 14
— — Пикара—Линделёфа 21
— — формулировка в банаховом пространстве 51 (з. 10), 52 (з. 11)
Сходимость по норме 203

Теорема обратного преобразования, см. Обратного преобразования теорема
— существования, см. Существования теорема
Топологическое отображение 32, 72, 443, 453
Тор, дифференциальное уравнение на нем 442, 453, 454
Траектория 352, 424
— двумерной линейной системы 404—408
— периодическая 427—430
— предельная 426
— смежная 434
Трансверсаль 426
Тривиальное решение 79
Туритин (Turritin H. U.) 198

Узел 405
— неправильный 406
— правильный 405, 410
Уравнения порядка n (см. также Краевая задача) 30
— — — начальная задача 30
— — — решение 30
— — — соответствующая система 30
— — — теорема существования 31
Условие Липшица, см. Липшица условие
Условная устойчивость 360, 364
Устойчивое многообразие 360, 374, 375
— решение 343, 347, 351
Устойчивости области 235, 239 (з. 6, 9)
Устойчивость асимптотическая 343, 351
— решений двумерных линейных систем 409
— траекторий (орбитальная устойчивость) 433, 439 (з. 2)
— — асимптотическая 352, 385
— условная 360, 364

Фокус 408
— правильный 412
Формальная логарифмическая сумма 130
Формальные логарифмически-экспоненциальные матрицы 156
— — — суммы 155
Формальные решения 131
— — асимптотическая природа 175, 176, 177, 183, 187 (з. 1—4), 188 (з. 5), 193, 194
— — для линейных систем с большим параметром 190, 191
— — — неоднородных линейных систем с параметром 200 (з. 1), 201 (з. 2)
— — — систем с особенностью второго рода 156, 157
— — — — — — первого рода 133—136
— ряды Лорана 129, 190
— степенные ряды 130
Формула Грина, см. Грина формула
Фрагмена—Линделёфа теорема 176
Фробениуса метод 146
— — для систем 150 (з. 13)
Фундаментальная матрица 80
— — для случая особенности первого рода 133, 135
— — соответствующая уравнению порядка n 317
Фундаментальное множество решений (или базис) 80, 95
Функция Грина, см. Грина функция
Фурье интегральная формула 275
— коэффициенты 203, 214

Характеристические корни матрицы 74

Характеристические показатели 92
Характеристический многочлен матрицы 74
Характеристическое уравнение матрицы 77
Хелли теорема 253
Хилла уравнение 238

Центр 408, 410, 415, 416

Число вращения 443

Эвклидова длина вектора 26
Эйлера уравнение 136, 145
Эргодический случай 448
— — достаточное условие 450
— — характеристика решений 453, 454
Эрмита многочлен 275
— оператор 275

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие переводчика 5

Из предисловия авторов 7

Глава I. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ

§ 1. Существование решений 9
§ 2. Единственность решений 16
§ 3. Метод последовательных приближений 20
§ 4. Продолжение решений 22
§ 5. Системы дифференциальных уравнений 24
§ 6. Уравнение порядка n 30
§ 7. Зависимость решений от начальных данных и параметров 31
§ 8. Комплексные системы 41
Задачи 47

Глава II. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

§ 1. Расширение понятия решения. Верхние и нижние решения ... 53
§ 2. Уточнения теорем единственности 60
§ 3. Единственность и последовательные приближения 65
§ 4. Зависимость решений от начальных данных и параметров 70
Задачи 73

Глава III. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Предварительные определения и обозначения 74
§ 2. Линейные однородные системы 79
§ 3. Неоднородные линейные системы 86
§ 4. Линейные системы с постоянными коэффициентами 87
§ 5. Линейные системы с периодическими коэффициентами 90
§ 6. Линейные дифференциальные уравнения порядка n 93
§ 7. Линейные уравнения с аналитическими коэффициентами 102
§ 8. Асимптотическое поведение решений некоторых линейных систем 103
Задачи 111

Глава IV. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ. ОСОБЕННОСТИ ПЕРВОГО РОДА

§ 1. Введение 122
§ 2. Классификация особенностей 125
§ 3. Формальные решения 128
§ 4. Строение фундаментальных матриц 132
§ 5. Уравнение порядка n 136
§ 6. Особенности в бесконечности 141
§ 7. Пример. Уравнение второго порядка 145
§ 8. Метод Фробениуса 146
Задачи 149

Глава V. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ. ОСОБЕННОСТИ ВТОРОГО РОДА

§ 1. Введение 152
§ 2. Формальные решения 155
§ 3. Асимптотические ряды 162
§ 4. Существование решений, которые имеют своими асимптотическими разложениями формальные решения. Действительный случай 165
§ 5. Асимптотическая природа формального решения в комплексном случае 176
§ 6. Случай, когда матрица A_0 имеет кратные характеристические корни 182
§ 7. Иррегулярные особые точки уравнения порядка n 183
§ 8. Интеграл Лапласа и асимптотические ряды 185
Задачи 187

Глава VI. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР

§ 1. Введение 189
§ 2. Формальные решения 190
§ 3. Асимптотическое поведение решений 193
§ 4. Случай равных характеристических корней 197
§ 5. Уравнение порядка n 198
Задачи 200

Глава VII. САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СЛУЧАЕ КОНЕЧНОГО ИНТЕРВАЛА

§ 1. Введение 202
§ 2. Самосопряженные задачи на собственные значения 205
§ 3. Существование собственных значений 210
§ 4. Теоремы разложения и полноты 214
Задачи 218

Глава VIII. ТЕОРЕМЫ ОСЦИЛЛЯЦИИ И СРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 1. Теоремы сравнения 225
§ 2. Существование собственных значений 228
§ 3. Периодические краевые условия 231

§ 4. Области устойчивости для уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами 235
Задачи 238

Глава IX. СИНГУЛЯРНЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Введение 240
§ 2. Случаи предельной точки и предельного круга 243
§ 3. Теоремы полноты и разложения в случае предельной точки в бесконечности 250
§ 4. Случай предельного круга в бесконечности 263
§ 5. Сингулярное поведение на обоих концах интервала 267
Задачи 276

Глава X. СИНГУЛЯРНЫЕ САМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА n

§ 1. Введение 285
§ 2. Теорема разложения и равенство Парсеваля 286
§ 3. Теорема обратного преобразования и единственность спектральной матрицы 289
§ 4. Функция Грина 297
§ 5. Представление спектральной матрицы при помощи функции Грина 304
Задачи 307

Глава XI. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

§ 1. Введение 310
§ 2. Формула краевых форм 312
§ 3. Однородные краевые задачи и сопряженные задачи 314
§ 4. Неоднородные краевые задачи и функция Грина 320
Задачи 323

Глава XII. НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. Введение 325
§ 2. Функция Грина и теорема разложения для случая $Lx = -x''$ 327
§ 3. Функция Грина и теорема разложения для случая $Lx = -x'' + q(t)x$ 332
§ 4. Случай уравнения порядка n 336
§ 5. Характер разложения 338
Задачи 341

Глава XIII. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. Асимптотическая устойчивость 343
§ 2. Первая вариация. Устойчивость траекторий (орбитальная устойчивость) 351
§ 3. Асимптотическое поведение одной системы 357
§ 4. Условная устойчивость 359

§ 5. Поведение решений вне устойчивого многообразия 372
Задачи 376

Глава XIV. ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМ, ИМЕЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

§ 1. Неавтономные системы 379
§ 2. Автономные системы 383
§ 3. Возмущение линейной системы с периодическим решением в неавтономном случае 387
§ 4. Возмущение автономной системы с обращающимся в нуль якобианом 396
Задачи 402

Глава XV. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Двумерные линейные системы 404
§ 2. Возмущения двумерной линейной системы 409
§ 3. Правильные узлы и правильные фокусы 411
§ 4. Центры 415
§ 5. Неправильные узлы 418
§ 6. Седла 421
Задачи 422

Глава XVI. ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ—БЕНДИКСОНА ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Предельные множества траектории 423
§ 2. Теорема Пуанкаре—Бендиксона 426
§3. Предельные множества с особыми точками 430
§ 4. Индекс изолированной особой точки 434
§ 5. Индекс простой особой точки 437
Задачи 439

Глава XVII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ НА ТОРЕ

§ 1. Введение 442
§ 2. Числа вращения 443
§ 3. Производное множество 446
§ 4. Эргодический случай 448
§ 5. Характеристика решений в эргодическом случае 452
§ 6. Система двух уравнений 455

Литература 457
Указатель обозначений 463
Предметный указатель 464

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
149	6 сн.	формула не обозначена	(*)
172	15 св.	*неравенству*	*равенству*
281	2 сн.	$\sim$	$\tilde{\varrho}$
378	6 св.	$= (\varphi_1, \varphi_2)$	$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$
428	6 сн.	*Жердана*	*Жордана*