Лемма. *Характеристический многочлен для матрицы A в* (6.18) *имеет вид*

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n. \tag{6.19}$$

Заметим, что $f(\lambda)$ может быть получено из $L_n(x)$ формальной заменой $x^{(k)}$ на λ^k.

Доказательство проводится по индукции. Для $n = 1$ $A = -a_1$; значит $\det(\lambda E_1 - A) = \lambda + a_1$ и, следовательно, (6.19) верно для $n = 1$. Предположим, что результат справедлив для $n - 1$. Разложим определитель

$$\det(\lambda E_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & \lambda + a_1 \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца и заметим, что коэффициент при λ есть определитель $(n-1)$-го порядка, именно $\det(\lambda E_{n-1} - A_1)$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \ldots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому $\lambda \det(\lambda E_{n-1} - A_1) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda$. Единственный другой ненулевой элемент в первом столбце есть a_n и его алгебраическое дополнение равно 1. Поэтому $\det(\lambda E_n - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n$, что и требовалось доказать.

Теорема 6.5. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные корни характеристического уравнения*

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

и пусть кратность корня λ_i равна m_i $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда фундаментальное множество для (6.16) *дается n функциями*

$$t^k e^{t\lambda_i} \quad (k = 0, 1, \ldots, m_i - 1;\ i = 1, 2, \ldots, s). \tag{6.20}$$

Доказательство может быть основано на соответствующем результате для линейных систем с постоянными коэффициентами. Однако мы дадим здесь прямое доказательство, которое основано на том факте, что если число λ_i есть корень уравнения $f(\lambda) = 0$ кратности m_i, то оно является также корнем для уравнений $f'(\lambda) = 0, \ldots, f^{(m_i-1)}(\lambda) = 0$. Легко видеть, что

$$L_n(e^{t\lambda}) = f(\lambda)\, e^{t\lambda}$$

и вообще

$$L_n(t^k e^{t\lambda}) = L_n\left(\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} e^{t\lambda}\right) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k} L_n(e^{t\lambda}) = \frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(f(\lambda)\, e^{t\lambda}) =$$
$$= \left[f^{(k)}(\lambda) + kf^{(k-1)}(\lambda)\, t + \frac{k(k-1)}{2!} f^{(k-2)}(\lambda)\, t^2 + \ldots + f(\lambda)\, t^k\right] e^{t\lambda}.$$

Отсюда следует, что для каждого фиксированного i

$$L_n(t^k e^{t\lambda_i}) = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, m_i - 1).$$

Тем самым доказано, что функции (6.20) являются решениями уравнения $L_n x = 0$.

Предположим, что функции (6.20) не являются линейно независимыми. Тогда существуют постоянные c_{ik}, не равные все нулю, такие, что

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{k=0}^{m_i-1} c_{ik} t^k e^{t\lambda_i} = 0,$$

или

$$\sum_{i=1}^{\sigma} P_i(t)\, e^{t\lambda_i} = 0,$$

где $P_i(t)$ — многочлены и $\sigma \leq s$ выбрано так, что $P_\sigma \not\equiv 0$, в то время как $P_{\sigma+i}(t) \equiv 0$, $i \geq 1$. Разделим предыдущее уравнение на $e^{t\lambda_1}$ и продифференцируем достаточно много раз, так чтобы многочлен $P_1(t)$ обратился в нуль. Заметим, что степень и свойство быть неравными тождественно нулю у многочленов, стоящих множителями при $e^{(\lambda_i-\lambda_1)t}$, $i > 1$, сохраняются при этой операции. Поэтому мы получаем

$$\sum_{i=2}^{\sigma} Q_i(t)\, e^{t\lambda_i} = 0,$$

где $Q_i(t)$ имеет ту же степень, что и $P_i(t)$, для $i \geq 2$. Продолжая этот процесс, мы получаем многочлен $F(t)$ степени, равной степени $P_\sigma(t)$, и такой, что $F(t) = 0$ для всех t. Это невозможно, ибо многочлен может обращаться в нуль лишь в изолированных точках. Поэтому решения линейно независимы.

§ 7. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С АНАЛИТИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Предположим, что A — квадратная матрица порядка n и b — n-мерный вектор, определенные и аналитические в односвязной области D z-плоскости, и пусть $z_0 \in D$. Используя метод последовательных приближений, нетрудно показать, что линейная система

$$\hat{w}' = A(z)\, \hat{w} + \hat{b}(z) \tag{7.1}$$

при условии

$$\hat{\varphi}(z_0) = \hat{\omega} \quad (|\hat{\omega}| < \infty)$$

имеет в D единственное аналитическое решение $\hat{\varphi}$.

В самом деле, пусть $z_1 \in D$ и пусть C — дуга длины L, лежащая в D, соединяющая точки z_0 и z_1 и имеющая непрерывно вращающуюся касательную. Обозначим через s длину дуги вдоль C, начиная от точки z_0. Выберем постоянную K настолько большой, чтобы было $|A(z)| < K$ и $|\hat{b}(z)| < K$ для $z \in C$. Пусть $\hat{\varphi}_0(z) = \hat{\omega}$ и

$$\hat{\varphi}_n(z) = \hat{\omega} + \int_{z_0}^{z} A(\zeta)\,\hat{\varphi}_{n-1}(\zeta)\,d\zeta + \int_{z_0}^{z} \hat{b}(\zeta)\,d\zeta,$$

причем интеграл берется вдоль C, так что приближения $\hat{\varphi}_n$ определены на C. Нетрудно получить оценки

$$|\hat{\varphi}_1 - \hat{\varphi}_0| \leq K(|\hat{\omega}| + 1)\,s \leq KL(|\hat{\omega}| + 1), \ldots,$$

$$|\hat{\varphi}_n - \hat{\varphi}_{n-1}| \leq K^n(|\hat{\omega}| + 1)\frac{s^n}{n!} \leq \frac{K^n L^n}{n!}(|\hat{\omega}| + 1).$$

Очевидно, эти оценки справедливы для всех точек z в D, достижимых из z_0 дугой длины L, на которой $|A(z)|$ и $|\hat{b}(z)|$ ограничены постоянной K. Отсюда следует, что эти оценки справедливы в каждом фиксированном замкнутом множестве R, содержащемся в D. Так как каждая функция $\hat{\varphi}_n$ аналитична в R, то из равномерной сходимости $\hat{\varphi}_n$ следует, что предельная функция $\hat{\varphi}$ также аналитична в R. Далее,

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{\omega} + \int_{z_0}^{z} A(\zeta)\,\hat{\varphi}(\zeta)\,d\zeta + \int_{z_0}^{z} \hat{b}(\zeta)\,d\zeta.$$

Это доказывает утверждение для R и, следовательно, для D.

Кроме того, все теоремы, доказанные в §§ 2 и 3, будучи существенно алгебраической природы, справедливы для системы (7.1).

Соответственно этому, если $n+1$ функций $a_1, \ldots, a_n, b$ аналитичны в D, то линейное уравнение порядка n

$$w^{(n)} + a_1(z)\,w^{(n-1)} + \ldots + a_n(z)\,w = b(z) \tag{7.2}$$

имеет в D единственное аналитическое решение, удовлетворяющее условиям

$$w(z_0) = \omega_1, \quad w'(z_0) = \omega_2, \ldots, w^{(n-1)}(z_0) = \omega_n,$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ — n данных комплексных чисел. Наконец, все результаты § 6 распространяются очевидным образом на случай (7.2).

§ 8. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Если коэффициенты линейной системы дифференциальных уравнений при $t \to \infty$ стремятся к постоянным, то иногда возможно охарактеризовать поведение решений. В аналитическом случае эта проблема разбирается в §§ 4 и 5 гл. V.

Здесь рассматривается проблема для действительного переменного. Простые случаи разбираются в задачах 29 и 35, помещенных в конце этой главы. Рассмотрим вначале пример

$$x'' + [1 + v(t) + r(t)]\, x = 0\,,$$

где v — действительная дифференцируемая функция, для которой $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$, r — интегрируемая функция и

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} |v'(t)|\, dt < \infty\,, \qquad \int\limits_{t_0}^{\infty} |r(t)|\, dt < \infty$$

для некоторого t_0. [На самом деле достаточно, чтобы функция v имела в интервале (t_0, ∞) ограниченную вариацию.] Без ограничения общности можно в дальнейшем предполагать, что $t_0 = 0$. Из доказанной ниже теоремы следует, что рассматриваемое уравнение имеет два решения φ и ψ, такие, что

$$\varphi(t) - \exp\left[i \int\limits_0^t \sqrt{1 + v(\tau)}\, d\tau\right] \to 0\,,$$

$$\varphi'(t) - i \exp\left[i \int\limits_0^t \sqrt{1 + v(\tau)}\, d\tau\right] \to 0$$

при $t \to \infty$, а ψ имеет аналогичное поведение с заменой i на $-i$.

Этот результат показывает, что функция r нисколько не влияет на грубую асимптотику. Однако случай

$$v(t) = t^{-\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

убеждает нас в том, что влияние v существенно. Эти асимптотические формулы показывают также, что если положить в уравнении функцию $r(t)$ равной нулю, а $1 + v(t)$ — постоянной, то результат будет отличаться от точного только членом $o(1)$ при $t \to \infty$.

В дальнейшем будет рассматриваться линейная система

$$x' = (A + V(t) + R(t))\, x\,, \tag{8.1}$$

которая включает как частный случай предыдущий пример.

Теорема 8.1. *Пусть A — постоянная матрица с различными характеристическими корнями μ_j, $j = 1, \ldots, n$. Пусть матрица V дифференцируема и удовлетворяет условию*

$$\int\limits_0^{\infty} |V'(t)|\, dt < \infty \tag{8.2}$$

и пусть $V(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Пусть матрица R интегрируема и

$$\int\limits_0^{\infty} |R(t)|\, dt < \infty\,. \tag{8.3}$$

Обозначим корни уравнения $\det(A + V(t) - \lambda E) = 0$ *через* $\lambda_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. *Очевидно, что можно, если это необходимо, переставить* μ_j *так, чтобы* $\lim\limits_{t\to\infty} \lambda_j(t) = \mu_j$. *Для данного* k *положим*

$$D_{kj}(t) = \operatorname{Re}(\lambda_k(t) - \lambda_j(t)).$$

Допустим, что все j, $1 \leq j \leq n$, *попадают в один из двух классов* I_1 *и* I_2, *где*

$$j \in I_1, \text{ если } \int_0^t D_{kj}(t)\,d\tau \to \infty \text{ при } t \to \infty$$

и

$$\int_{t_1}^{t_2} D_{kj}(\tau)\,d\tau > -K \qquad (t_2 \geq t_1 \geq 0), \tag{8.4}$$

$$j \in I_2, \text{ если } \int_{t_1}^{t_2} D_{kj}(\tau)\,d\tau < K \qquad (t_2 \geq t_1 \geq 0); \tag{8.5}$$

здесь k *фиксировано и* K — *постоянная. Пусть* p_k — *характеристический вектор* A, *соответствующий* μ_k, *так что*

$$Ap_k = \mu_k p_k. \tag{8.6}$$

Тогда существуют решение φ_k *системы* (8.1) *и число* t_0, $0 \leq t_0 < \infty$, *такие, что*

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_k(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(\tau)\,d\tau\right] = p_k. \tag{8.7}$$

Доказательство. Если условия теоремы выполняются для всех k, $1 \leq k \leq n$, и Φ — матрица со столбцами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то Φ — фундаментальная матрица, так как $\det \Phi(t) \neq 0$ для больших t, ибо p_k линейно независимы.

Предположим вначале, что $A + V(t)$ для $t \geq t_0$ имеет диагональный вид $\Lambda(t)$ причем t_0 выбрано так, что

$$e^K \int_{t_0}^{\infty} |R(\tau)|\,d\tau < \frac{1}{2}. \tag{8.8}$$

Пусть $\Psi(t)$ — диагональная матрица:

$$\Psi(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \Lambda(s)\,ds\right],$$

так что

$$\Psi'(t) = \Lambda\Psi. \tag{8.9}$$

Пусть e_k — вектор-столбец со всеми нулевыми элементами, за исклю-

чением k-го, который равен 1, и ψ_k — вектор, определенный равенством

$$\psi_k(t) = \Psi(t)\, e_k = \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\, ds\right] e_k .$$

При фиксированном k и I_1, I_2, определенных согласно неравенствам (8.4), (8.5), положим

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

где диагональные матрицы Ψ_1 и Ψ_2 содержат элементы Ψ, соответствующие столбцам с индексами j, принадлежащими соответственно I_1 и I_2. Тогда

$$\Psi_j' = \Lambda \Psi_j \quad (j = 1, 2). \tag{8.10}$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\varphi(t) = \psi_k(t) + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\, \Psi^{-1}(\tau)\, R(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau - \\ - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\, \Psi^{-1}(\tau)\, R(\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau . \tag{8.11}$$

Можно непосредственно проверить, что если уравнение (8.11) имеет решение φ, то

$$\varphi' = (\Lambda + R)\, \varphi . \tag{8.12}$$

Последнее уравнение имеет рассматриваемый нами вид (8.1).

Пусть $\varphi^0(t) = 0$ и

$$\varphi^{j+1}(t) = \psi_k(t) + \int_{t_0}^{t} \Psi_1(t)\, \Psi^{-1}(\tau)\, R(\tau)\, \varphi^j(\tau)\, d\tau - \\ - \int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\, \Psi^{-1}(\tau)\, R(\tau)\, \varphi^j(\tau)\, d\tau . \tag{8.13}$$

Тогда $\varphi^1(t) = \psi_k(t)$ и для $t \geq t_0$

$$|\varphi^1(t) - \varphi^0(t)| = \left| \exp\left[\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\, ds\right] \right| . \tag{8.14}$$

Каждый элемент диагональной матрицы $\Psi_1(t)\Psi^{-1}(\tau)$ имеет вид

$$h_l(t) = \exp\left[\int_{\tau}^{t} \lambda_l(s)\, ds\right] \qquad (l \in I_1)$$

или равен нулю. Но для $t_0 \leq \tau \leq t$

$$|h_l(t)| = \exp\left[-\int_\tau^t D_{kl}(s)\,ds\right]\exp\left[\int_\tau^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right] \leq$$

$$\leq e^K \exp\left[\int_\tau^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right].$$

Поэтому для $t_0 \leq \tau \leq t$

$$|\Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\,R(\tau)| \leq e^K\,|R(\tau)|\exp\left[\int_\tau^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right].$$

Точно так же для $\tau \geq t$ получим

$$|\Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\,R(\tau)| \leq e^K|R(\tau)|\exp\left[-\int_t^\tau \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right].$$

Используя эти неравенства, получаем из (8.13)

$$|\varphi^{j+1}(t) - \varphi^j(t)|\exp\left[-\int_{t_0}^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right] \leq$$

$$\leq e^K\left(\int_{t_0}^t + \int_t^\infty\right)|R(\tau)|\,|\varphi^j(\tau) - \varphi^{j-1}(\tau)|\exp\left[-\int_{t_0}^\tau \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right]d\tau.$$

Из (8.8) и (8.14) теперь по индукции следует

$$|\varphi^{j+1}(t) - \varphi^j(t)|\exp\left[-\int_{t_0}^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right] \leq \left(\frac{1}{2}\right)^j.$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $\{\varphi^j\}$ на каждом конечном подинтервале интервала $[t_0, \infty)$. Так как φ^j непрерывно, то предельная функция φ также непрерывна и, очевидно,

$$|\varphi(t)| \leq 2\exp\left[\int_{t_0}^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right]. \tag{8.15}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{t\to\infty}\left\{\varphi(t)\exp\left[-\int_{t_0}^t \lambda_k(s)\,ds\right] - e_k\right\} = 0. \tag{8.16}$$

Это будет установлено, если мы покажем, что при $t \to \infty$

$$\exp\left[-\int_{t_0}^t \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right]\int_{t_0}^t \Psi_1(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\,R(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \to 0 \tag{8.17}$$

и

$$\exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right]\int_{t}^{\infty} \Psi_2(t)\,\Psi^{-1}(\tau)\,R(\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \to 0. \tag{8.18}$$

Доказательство соотношения (8.18) сразу получается из (8.15) и (8.5). Доказательство соотношения (8.17) основывается на равенстве

$$\lim_{t\to\infty} |\Psi_1(t)| \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right] = 0, \tag{8.19}$$

которое является следствием (8.4). Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно подобрать такое t_1, что

$$2\,e^{K}\int_{t_1}^{\infty} |R(\tau)|\,d\tau < \varepsilon.$$

Поэтому, обозначая левую часть (8.17) через $J(t)$, получаем

$$|J(t)| \leq \varepsilon + \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \operatorname{Re}\lambda_k(s)\,ds\right] |\Psi_1(t)| \int_{t_0}^{t_1} |\Psi^{-1}(\tau)\,R(\tau)\,\varphi(\tau)|\,d\tau.$$

Из (8.19) следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} |J(t)| \leq \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то (8.17) доказано. Таким образом, теорема доказана для случая $A + V(t) = \Lambda(t)$, если за φ взята φ_k.

Доказательство теоремы 8.1 вытекает из следующей леммы.

Лемма. *Пусть A и V удовлетворяют условиям теоремы 8.1. Тогда существует матрица $S(t)$, которая при $t\to\infty$ стремится к постоянной неособой матрице T, такая, что*

$$S(A + V) = \Lambda S, \tag{8.20}$$

где $\Lambda(t)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_j(t)$, $j = 1,2,\ldots, n$. При $t\to\infty$ $\lambda_j(t)\to\mu_j$, где μ_j—характеристические корни матрицы A. Кроме того, для некоторого t_0

$$\int_{t_0}^{\infty} |S'(t)|\,dt < \infty. \tag{8.21}$$

Доказательство леммы мы дадим после доказательства теоремы 8.1.

Доказательство теоремы 8.1. Так как $S(t)\to T$ при $t\to\infty$ и T — неособая матрица, то $S(t)$ — неособая матрица для всех достаточно больших t. Выберем t_0 настолько большим, чтобы не только (8.21) выполнялось, но и $S^{-1}(t)$ существовала для $t \geq t_0$. Тогда, полагая в (8.1) $y = S(t)x$, получаем

$$y' = \Lambda y + (SRS^{-1} + S'S^{-1})y \quad (t \geq t_0). \tag{8.22}$$

Пусть $\widetilde{R} = SRS^{-1} + S'S^{-1}$. Тогда из (8.3) и (8.21) следует, что норма $|\widetilde{R}|$ интегрируема. Таким образом, данное выше доказательство теоремы 8.1 для специального случая годится для уравнения (8.22), так что (8.22) имеет решение θ_k, для которого

$$\lim_{t\to\infty} \theta_k(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\,ds\right] = e_k.$$

Поэтому (8.1) имеет решение $S^{-1}\theta_k = \varphi_k$. Так как $S^{-1}(t) \to T^{-1}$ при $t \to \infty$, то

$$\varphi_k(t) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} \lambda_k(s)\,ds\right] \to p_k \qquad (t \to \infty),$$

где p_k — k-й столбец T^{-1}. Так как $AT^{-1} = T^{-1}\Lambda(\infty)$, то $Ap_k = \mu_k p_k$. Это завершает доказательство теоремы 8.1.

Доказательство леммы. Существует постоянная матрица T, такая, что

$$TAT^{-1} = B,$$

где B — диагональная матрица с диагональными элементами μ_j.

Пусть $S = \widetilde{S}T$. Тогда

$$S(A+V)S^{-1} = \widetilde{S}T(A+V)T^{-1}\widetilde{S}^{-1} = \\ = \widetilde{S}(B + TVT^{-1})\widetilde{S}^{-1} = \widetilde{S}(B+\widetilde{V})\widetilde{S}^{-1} = \Lambda,$$

где $\widetilde{V} = TVT^{-1}$. Так как элементы матрицы $\widetilde{V}$ представляют собой линейные комбинации (с постоянными коэффициентами) из элементов матрицы V, то

$$\int_{t_0}^{\infty} |\widetilde{V}'(t)|\,dt < \infty$$

и $\widetilde{V}(\infty) = 0$.

Рассмотрим матрицу

$$M(\lambda, t) = B + \widetilde{V}(t) - \lambda E.$$

Тогда уравнение $\det M(\lambda, t) = 0$ имеет своими корнями $\lambda_j(t)$, причем $\lambda_j(\infty) = \mu_j$. Обозначим через $C_{ik}(\lambda, t)$ алгебраические дополнения элементов $m_{ik}(\lambda, t)$ матрицы $M(\lambda, t)$. Положим

$$\tilde{s}_{ik}(t) = \frac{C_{ki}(\lambda_i(t), t)}{\prod\limits_{j=1}^{n}{}' (\mu_j - \mu_i)}, \tag{8.23}$$

причем штрих обозначает, что пропущен член с $j = i$. Так как $C_{ki}(\lambda_i(t), t)$ при $t \to \infty$ стремится к алгебраическому дополнению

элемента матрицы $(B - \mu_i E)$, стоящего на пересечении k-й строки и i-го столбца, то

$$\tilde{s}_{ik}(\infty) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Обозначим матрицу с элементами $\tilde{s}_{ik}(t)$ через $\tilde{S}(t)$. Тогда, очевидно,

$$\tilde{S}(\infty) = E.$$

Далее, для $k = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1}^{n} C_{ji}(\lambda_i(t), t)\left[b_{jk} + \tilde{v}_{jk}(t) - \lambda_i(t)\delta_{jk}\right] = 0. \tag{8.24}$$

Для $i \neq k$ это верно, так как определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю. Для $i = k$ это верно, так как $\lambda_i(t)$ есть характеристический корень матрицы $B + \tilde{V}$ (и, следовательно, также матрицы $A + V$).

Поэтому из (8.23) и (8.24) следует, что

$$\tilde{S}(B + \tilde{V}) = \Lambda \tilde{S}.$$

Так как $\tilde{S}(\infty) = E$, то $\tilde{S}^{-1}$ существует для больших t и

$$\tilde{S}(B + \tilde{V})\tilde{S}^{-1} = \Lambda.$$

Наконец,

$$\int_{t_0}^{\infty} |\tilde{S}'(t)|\, dt < \infty. \tag{8.25}$$

Это следует из того, что s'_{ik} являются линейными однородными комбинациями элементов $\tilde{v}'_{ik}$ и λ'_i. Элементы $\tilde{v}'_{ik}$ абсолютно интегрируемы. Таким образом, остается только показать, что элементы λ'_i абсолютно интегрируемы. Пусть $F(\lambda, t) = \det M(\lambda, t)$. Тогда, так как $F(\lambda_i(t), t) = 0$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda_i(t), t)\,\lambda'_i(t) + \frac{\partial F}{\partial t}(\lambda_i(t), t) = 0.$$

Так как характеристические корни матрицы B различны, то производные $(\partial F/\partial \lambda)(\lambda_i(t), t)$ стремятся при $t \to \infty$ к отличным от нуля пределам. Выражение $(\partial F/\partial \lambda)(\lambda_i(t), t)$ линейно и однородно относительно $\tilde{v}'_{ij}$ и поэтому абсолютно интегрируемо. Таким образом, λ'_i абсолютно интегрируемы, что завершает доказательство неравенства (8.25).

Очевидно, что матрица $S = \tilde{S}T$ удовлетворяет условиям леммы.

Задачи

1. Пусть матрица A и вектор b — интегрируемые функции от t на интервале $[a, b]$. Пусть

$$|A(t)| \leq k(t), \qquad |b(t)| \leq k(t),$$

где

$$\int_a^b k(t)\,dt < \infty.$$

Пусть $\tau \in [a, b]$ и рассмотрим начальную задачу

$$x' = A(t)x + b(t), \qquad x(\tau) = \xi.$$

Доказать, что существует единственное решение φ на $[a, b]$ в том смысле, что $\varphi \in C$ и

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t A(s)\varphi(s)\,ds + \int_\tau^t b(s)\,ds$$

на $[a, b]$.

Указание. Использовать последовательные приближения. Пусть $\varphi_0(t) = \xi$ и

$$\varphi_{j+1}(t) = \xi + \int_\tau^t A(s)\varphi_j(s)\,ds + \int_\tau^t b(s)\,ds \quad (j \geq 0).$$

Доказать, что если $\int_\tau^t k(s)\,ds = K(t)$, то

$$|\varphi_j(t) - \varphi_{j-1}(t)| \leq (1 + |\xi|)\frac{|K(t)|^j}{j!},$$

так что последовательность $\{\varphi_j\}$ сходится равномерно на $[a, b]$. Если предыдущее имеет место для всех $b < \tilde{b}$, то решение существует на $[a, \tilde{b})$. Случай $\tilde{b} = \infty$ допустим. Аналогичная ситуация имеет место для левого конца. Для установления единственности использовать задачу 1 гл. I.

2. В этой задаче определим норму матрицы так:

$$|A| = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}|.$$

Тогда $|A + B| \leq |A| + |B|$ и $|AB| \leq |A| \cdot |B|$. Пусть A на $[a, b]$ принадлежит к классу C. Мультипликативный интеграл для $x' = A(t)x$ определяется следующим образом.

Разделим $[a, b]$ на m частей $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = b$. Для данного t найдем такое k, что $t_k < t \leq t_{k+1}$. Пусть E — единичная матрица и

$$\Phi_m(t) = [E + (t - t_k)A(t_k)]\,[E + (t_k - t_{k-1})A(t_{k-1})]\ldots[E + (t_1 - t_0)A(t_0)].$$

Очевидно, $\Phi_m(t)$ непрерывна и Φ'_m кусочно непрерывна на $[a, b]$. Если $|A(t)| \leq K$, то

$$|E + (t_j - t_{j-1})A(t_{j-1})| \leq 1 + (t_j - t_{j-1})K < e^{K(t_j - t_{j-1})}.$$

Поэтому

$$|\Phi_m(t)| \leq e^{K(t-a)} \leq e^{K(b-a)}.$$

Из определения $\Phi_m(t)$ следует

$$\Phi'_m(t) = A(t_k)\,[E + (t - t_k)A(t_k)]^{-1}\,\Phi_m(t).$$

Показать, что

$$\Phi'_m = A(t)\,\Phi_m + J_m(t),$$

где при данном $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь большое m, что $|J_m(t)| < \varepsilon$. Таким образом, $\Phi_m(a) = E$ и Φ_m есть ε-приближенное решение для уравнения $x' = A(t)x$. Используя это, доказать существование фундаментального решения Φ, для которого $\Phi(a) = E$.

3. Пусть матрица A непрерывна на интервале $(0, \infty)$. Пусть фундаментальное решение Φ системы $x' = A(t)x$ на $(0, \infty)$ равномерно ограничено и

$$\lim_{t\to\infty} \inf \operatorname{Re} \int_0^t \operatorname{sp} A(s)\,ds > -\infty.$$

Доказать, что Φ^{-1} равномерно ограничена на $(0, \infty)$. Кроме того, доказать, что не может быть решений, не равных тождественно нулю и удовлетворяющих условию $\varphi(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Указание. Использовать формулу (1.8).

4. Рассмотрим дифференциальное уравнение задачи 3 и дифференциальное уравнение $x' = B(t)x$ ($B \in C$ на $(0, \infty)$); решение последнего обозначим через ψ. Предположим, что

$$\int_0^\infty |A(t) - B(t)|\,dt < \infty.$$

Доказать, что ψ ограничено на $(0, \infty)$ и что, если $\psi(t_0) = \varphi(t_0)$, $\lim\limits_{t\to\infty} (\varphi(t) - \psi(t))$ существует. (Здесь φ — решение системы $x' = Ax$.)

Указание. Использовать равенство

$$\psi(t) = \varphi(t) + \int_{t^0}^t \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,(B(s) - A(s))\,\psi(s)\,ds$$

и задачу 1 гл. I.

5. Показать в задаче 4, что соответственно каждому данному φ существует единственное ψ, такое, что $\varphi(t) - \psi(t) \to 0$, если $t \to 0$.

Указание. Использовать равенство

$$\psi(t) = \varphi(t) - \int_t^\infty \Phi(t)\,\Phi^{-1}(s)\,(B(s) - A(s))\,\psi(s)\,ds.$$

6. Если $\int_0^\infty |B(t)|\,dt < \infty$, то каждое не равное тождественно нулю решение системы $x' = B(t)x$ стремится при $t \to \infty$ к отличному от нуля пределу. Более того, каков бы ни был постоянный вектор c, существует единственное решение ψ, которое стремится к c при $t \to \infty$.

Указание. Использовать то, что $A \equiv 0$ и $\Phi(\infty) = E$.

7. Пусть a_1, a_2 — непрерывные и периодические функции с периодом ω. Пусть φ_1 и φ_2 — решения уравнения $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$, причем $\varphi_1(0) = 1$, $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi_2'(0) = 1$. Использовать приведение к системе и показать, что мультипликаторы (или характеристические корни) являются решениями уравнения $\lambda^2 - A\lambda + B = 0$, где $A = \varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega)$ и $B = \exp\left[-\int_0^\omega a_1(t)\,dt\right]$.

8. Пусть a и b — действительные постоянные и p — действительная непрерывная функция t периода ω. Рассмотрим уравнение $x'' + [a + bp(t)]\,x = 0$. Пусть φ_1, φ_2 определены как в задаче 7, а $F(a, b) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2'(\omega)$. Показать,

что F есть целая функция переменных (a, b). Показать, что если $-2 < F(a, b) < 2$, то мультипликаторы комплексно сопряжены и по модулю равны 1 и все решения вместе с их первыми производными равномерно ограничены на $(-\infty, \infty)$. Показать, что если $F(a, b) > 2$ или $F(a, b) < -2$, то ни одно решение не может быть равномерно ограниченным на $(-\infty, \infty)$.

9. Показать, что если в предыдущей задаче $F(a, b) = 2$, то существует по крайней мере одно решение периода ω, а если $F(a, b) = -2$, то существует по крайней мере одно решение периода 2ω.

10. Показать, что если в задаче 8 $a \neq n^2$ ни для одного целого n и $b = 0$, то $-2 < F(a, 0) < 2$. Пользуясь непрерывностью функции $F(a, b)$, показать, что если $a \neq n^2$ и b достаточно мало, то все решения равномерно ограничены на $(-\infty, \infty)$.

11. Положим в задаче 8 $p(t) = \cos 2t$ и рассмотрим случай, когда a близко к $4n^2$ и b мало. Это можно записать в виде

$$x'' + [4n^2 + \gamma\mu + \mu \cos 2t]x = 0,$$

где γ действительно и μ — действительный малый параметр. Определить поведение кривой $F(a, b) = F(4n^2 + \gamma\mu, \mu) = 2$ в окрестности точки $(\mu = 0, \gamma = 0)$.

Указание. В векторной форме уравнение имеет вид $\dot{x}' = (A + \mu P(t))\dot{x}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4n^2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma - \cos 2t & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальное решение Φ, которое при $t = 0$ равно E, есть целая функция от μ, и поэтому

$$\Phi(t, \mu) = e^{At} + \mu\Phi_1(t) + \mu^2 \Phi_2(t) + \ldots,$$

где $F(4n^2 + \gamma\mu, \mu) = \operatorname{sp} \Phi(\pi, \mu)$. Показать, что

$$\Phi_j(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} P(s)\, \Phi_{j-1}(s)\, ds,$$

где

$$\Phi_1(t) = e^{At} \int_0^t e^{-As} P(s)\, e^{As}\, ds.$$

При $t = \pi$

$$\Phi_1(\pi) = \int_0^\pi e^{-As} P(s)\, e^{As}\, ds$$

и, следовательно,

$$\operatorname{sp} \Phi_1(\pi) = \int_0^\pi \operatorname{sp} [e^{-As} P(s)\, e^{As}]\, ds = \int_0^\pi \operatorname{sp} P(s)\, ds = 0.$$

Поэтому

$$F(4n^2 + \gamma\mu, \mu) = 2 + \mu^2 \operatorname{sp} \Phi_2(\pi) + \mu^3 \operatorname{sp} \Phi_3(\pi) + \ldots,$$

и из поведения $\operatorname{sp} \Phi_2(\pi)$ получаем результат для малых μ.

12. Дать прямое доказательство формулы (6.5), показав, что $W' = (-a_1/a_0)\, W$; использовать (6.4) и уравнение $L_n x = 0$.

13. Пусть A — постоянная квадратная матрица. Дать аналог доказательства теоремы 6.5 для системы $x' = Ax$.

Указание. Пусть p — постоянный вектор. Тогда

$$\left(E \frac{d}{dt} - A\right)(e^{\lambda t} p) = e^{\lambda t}(E\lambda - A)\, p.$$

Беря частную производную по λ, получаем

$$\left(E\frac{d}{dt}-A\right)te^{\lambda t}p = te^{\lambda t}(E\lambda - A)p + e^{\lambda t}p.$$

Используя предыдущее соотношение, показать, что если

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1 \quad \text{и} \quad Ap_2 = \lambda_1 p_2 + p_1,$$

то $e^{\lambda_1 t}p_1$ и $e^{\lambda_1 t}p_2 + te^{\lambda_1 t}p_1$ являются решениями. Обобщая этот процесс, получить общий результат § 4.

14. Пусть $L_n x = x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x$, где a_j — периодические функции периода ω на интервале $(-\infty, \infty)$. Найти вид решений на $(-\infty, \infty)$.

15. Показать, что если φ_1 и φ_2 — решения уравнения $x'' + a_1(t)x' + a_2(t)x = 0$, то

$$\varphi_1(t)\,\varphi_2'(t) - \varphi_2(t)\,\varphi_1'(t) = c\exp\left[-\int^t a_1(s)\,ds\right],$$

где c — постоянная. Показать, что если φ_1 — решение, то

$$\varphi_1(t)\int^t \frac{ds}{\varphi_1^2(s)}$$

есть независимое решение на том интервале, на котором $\varphi_1(t) \neq 0$.

16. В уравнении $x'' + a_1(t)\,x' + a_2(t)x = 0$ сделать замену переменной $s = F(t)$, где $F'(t) = \exp\left[-\int^t a_1(s)\,ds\right]$ и положить $t = G(s)$. Показать, что это приводит к уравнению

$$\frac{d^2x}{ds^2} + g(s)\,x = 0, \quad \text{где } g(s) \text{ обращается в } \frac{a_2(t)}{[F'(t)]^2} \text{ при } t = G(s).$$

17. Положим в уравнении, приведенном в начале задачи 16, $x = y\exp\left(-\frac{1}{2}\int^t a_1(\tau)\,d\tau\right)$. Показать, что уравнение принимает вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(a_2 - \frac{a_1^2}{4} - \frac{a_1'}{2}\right)y = 0.$$

18. Пусть $a(t) > 0$ и $a \in C^2$. Рассмотрим уравнение $x'' + a^2(t)\,x = 0$. Пусть $s = F(t)$, где $F'(t) = a(t)$, и $t = G(s)$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{d^2x}{ds^2} + a_1(s)\frac{dx}{ds} + x = 0, \qquad a_1(s) = \frac{a'(G(s))}{a^2(G(s))}.$$

Положить $x = y\exp\left(-\frac{1}{2}\int^s a_1(s)\,ds\right)$ и показать, что это уравнение преобразуется к виду

$$\frac{d^2y}{ds^2} + [1 + b(s)]\,y = 0,$$

где $b(s)$ равно

$$\frac{3}{4}\,\frac{a'^2(t)}{a^4(t)} - \frac{1}{2}\,\frac{a''(t)}{a^3(t)} \quad \text{при} \quad t = G(s).$$

Если $b \in C^2$, то предыдущее преобразование может быть повторено. Заметим, что если $a^2(t)$ — многочлен относительно t, то $b(s) \to 0$ при $s \to \infty$ и имеет ограниченную вариацию, так что применима теорема 8.1.

19. Показать, что комплексно сопряженные значения величин $W_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)/W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, определенных в теореме 6.4, являются решениями сопряженного уравнения $L_n^+ x = 0$.

Указание. Перейти к системе.

20. Получить формулу (6.15), используя непосредственно процесс «вариации постоянных». То есть пусть

$$\psi = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n,$$

где c_j рассматриваются как функции t, подчиненные условиям

$$\sum_{j=1}^{n} c_j'\varphi_j^{(i)} = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-2),$$

в которых $\varphi_j^{(i)}$ обозначает i-ю производную φ_j.

21. Пусть $f = f(t, s)$ — решение уравнения $L_n x = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x^{(j)}(s) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-2$, и $x^{(n-1)}(s) = 1/a_0(s)$. Показать, что интеграл

$$\int_{\tau}^{t} f(t, s)\, b(s)\, ds$$

есть решение уравнения $L_n x = b(t)$, которое обращается в нуль вместе со своими первыми $n-1$ производными в точке $t = \tau$. Сравнив это решение с (6.15), показать, что

$$f(t, s) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t) \frac{W_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(s)}{W(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(s)\, a_0(s)}.$$

22. Пусть $a_j \in C^{n-j}[a, b]$, так что оператор L_n^+ определен. Пусть для $s < t$ $K(t, s) = f(t, s)$, где функция $f(t, s)$ определена в задаче 21, и $K = 0$ для $s > t$. Показать, что K принадлежит к классу $C^{n-2}[a, b]$ как функция (s, t) и что производная $\partial^{n-1} K/\partial s^{n-1}$ имеет в точке $s = t$ разрыв первого рода со скачком $(-1)^n/a_0(t)$, но непрерывна для $a \leq s \leq t \leq b$ и $a \leq t \leq s \leq b$. Показать также, что $\overline{K}$ как функция s есть решение уравнения $L_n^+ x = 0$ для $s < t$.

Указание. Пусть $H = H(t, s)$ — решение уравнения $L_n^+ x = 0$ для $t \leq s$, удовлетворяющее при $t = s$ условиям

$$\frac{\partial^k H}{\partial t^k} = 0$$

для $k = 0, 1, \ldots, n-2$, и пусть $\partial^{n-1}H/\partial t^{n-1} = (-1)^{n-1}/\bar{a}_0(s)$ при $t = s$. Пусть $H = 0$ для $t > s$. Тогда при любых $p, q \in C[a, b]$ функции u и v, определенные равенствами

$$u(t) = \int_a^t K(t, s)\, p(s)\, ds, \qquad v(t) = \int_t^b H(t, s)\, q(s)\, ds,$$

удовлетворяют уравнениям $L_n u = p$ и $L_n^+ v = q$ соответственно и условиям $u^{(j)}(a) = v^{(j)}(b) = 0$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Поэтому в силу формулы Грина

$$\int_a^b (p\bar{v} - u\bar{q})\, dt = [uv](b) - [uv](a).$$

Так как $u^{(j)}(a) = v^{(j)}(b) = 0$, то оба члена справа равны нулю и, следовательно,

$$\int_a^b \overline{q}(t)\,dt \int_a^t \left(K(t,s) - \overline{H}(s,t)\right) p(s)\,ds = 0.$$

Так как это равенство имеет место для произвольных p и q, то $K(t,s) = \overline{H}(s,t)$, и дифференцируемость K относительно s следует из дифференцируемости H относительно t.

23. Записав форму (6.12) в виде

$$[uv] = \sum_{j,k=0}^{n-1} B_{jk} u^{(k)} \overline{v}^{(j)},$$

определить вид матрицы $B = (B_{jk})$ и доказать, что она неособая для всех $t \in I$. С этой целью вычислить ее определитель.

24. Показать, что если u — решение уравнения $L_n x = 0$ и v — решение уравнения $L_n^+ x = 0$, то $[uv](t)$ есть постоянная $[uv]$, не зависящая от $t \in I$. Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — фундаментальное множество для уравнения $L_n x = 0$ на I и пусть $\psi_1, \ldots, \psi_n$ — аналогичное множество для уравнения $L_n^+ x = 0$ на I. Показать, что матрица $S = (s_{jk}) = ([\varphi_j\, \psi_k])$ на I неособая. Пусть $S^{-1} = (\overline{s_{jk}^{-1}})$ — обратная матрица для матрицы S. Определим K посредством равенства

$$K(t,s) = \sum_{j,k=1}^{n} \overline{s_{jk}^{-1}} \varphi_k(t)\, \overline{\psi}_j(s) \qquad (s \leq t).$$

Доказать, что функция u, определенная равенством

$$u(t) = \int_\tau^t K(t,s)\, b(s)\,ds \qquad (\tau, t \in I),$$

есть решение уравнения $L_n x = b$, обращающееся в нуль вместе со своими первыми $n-1$ производными в точке τ. Сравнить этот результат с задачами 21 и 22.

25. Доказать, что если $L_n = L_n^+$, то форма $[uv](t)$ кососимметрична, т. е.

$$[uv](t) = -\overline{[vu](t)}.$$

Что отсюда следует для матрицы B задачи 23 и для матрицы S задачи 24?

26. Пусть P_j — многочлены, λ_j — постоянные и

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} P_j(t)\, e^{\lambda_j t}.$$

Пусть $m \geq 1$ и $\lambda_j \neq \lambda_k$, $j \neq k$, и пусть ни один из многочленов P_j не равен тождественно нулю. Показать, что если

$$\sigma = \max(\operatorname{Re} \lambda_j),$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \sup \left(e^{-\sigma t} |f(t)|\right) > 0.$$

З а м е ч а н и е. Это доказывает линейную независимость функций $P_j(t)\, e^{\lambda_j t}$.

У к а з а н и е. *Первый случай.* Пусть P_j — постоянные и $\lambda_j = i\mu_j$, где μ_j действительны, так что

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} c_j e^{i\mu_j t}.$$

Пользуясь равенством

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,e^{-i\mu_1 t}\,dt = c_1,$$

доказать, что

$$\lim_{t\to\infty}\sup|f(t)| > 0.$$

Второй случай. Пусть, по-прежнему, $\lambda_j = i\mu_j$ и M — наибольшая степень t для многочленов P_j. Тогда

$$f(t) = t^M f_1(t) + t^{M-1} f_2(t) + \ldots + f_M(t),$$

где f_j — такие же, как и в первом случае, и $f_1 \not\equiv 0$. Таким образом, для больших t

$$t^{-M}f(t) = f_1(t) + O\left(\frac{1}{t}\right)$$

и, согласно первому случаю,

$$\lim_{t\to\infty}\sup\left(t^{-M}|f(t)|\right) > 0.$$

Общий случай. Теперь

$$f(t) = e^{\sigma_1 t} f_1(t) + e^{\sigma_2 t} f_2(t) + \ldots + e^{\sigma_p}\, f_p(t),$$

где $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_p$, f_j — такие, как во втором случае, и $f_1 \not\equiv 0$. Очевидно, что

$$e^{-\sigma_1 t} f(t) = f_1(t) + O(t^Q e^{-(\sigma_1-\sigma_2)t})$$

для некоторого постоянного Q. Поэтому, согласно второму случаю,

$$\lim_{t\to\infty}\sup|e^{-\sigma_1 t} f(t)| > 0.$$

27. Рассмотреть систему линейных уравнений

$$w^{(n)} + A_1 w^{(n-1)} + \ldots + A_n w = 0,$$

где w — m-мерный вектор и A_i — постоянные квадратные матрицы порядка m. Определить фундаментальные матрицы для таких систем и вычислить одну из них.

28. Пусть функция f интегрируема и

$$\int_1^\infty t|f(t)|\,dt < \infty.$$

Доказать, что уравнение $x'' + f(t)x = 0$ имеет решение φ, такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 1, \qquad \lim_{t\to\infty}\varphi'(t) = 0.$$

Доказать, что существует решение ψ, такое, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = 1, \qquad \lim_{t\to\infty}\psi'(t) = 1.$$

Указание. Использовать последовательные приближения для решения уравнений

$$\varphi(t) = 1 + \int^\infty (t-s)\,f(s)\,\varphi(s)\,ds$$

и

$$\psi(t) = t + \int_a^t sf(s)\,\psi(s)\,ds + t\int_t^\infty f(s)\,\psi(s)\,ds,$$

где a выбрано так, что $\int_a^\infty t\,|\,f(t)\,|\,dt < 1/2$. (Если существование φ показано, то другой путь для получения ψ состоит в использовании соотношения $\varphi\psi' - \varphi'\psi = 1$.)

Эта задача есть частный случай задачи 35.

29. Пусть A — постоянная матрица и R — интегрируемая матрица, такая, что

$$\int_1^\infty |R(t)|\,dt < \infty.$$

Предположим, что каноническая матрица J, подобная A, диагональна, т. е. $J = J_0$. (В частности, это всегда имеет место, если характеристические корни A различны.) Доказать, что если λ_j — характеристические корни A и p_j — соответствующие характеристические векторы, так что $Ap_j = \lambda_j p_j$, то уравнение

$$x' = Ax + R(t)\,x$$

имеет такие решения φ_j, что

$$\lim_{t\to\infty} \varphi_j(t)e^{-\lambda_j t} = p_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(иными словами, для больших t решения ведут себя как решения при $R(t) \equiv 0$).

Указание. Пусть j фиксировано, $\operatorname{Re}\lambda_j = \sigma$ и $e^{At} = Y_1(t) + Y_2(t)$, где $Y_1(t)$ — сумма членов вида $e^{\lambda_k t}$, $\operatorname{Re}\lambda_k < \sigma$, и $Y_2(t)$ содержит лишь члены вида e^{λ_k}, $\operatorname{Re}\lambda_k \geq \sigma$. Тогда существуют постоянные $\delta > 0$ и K_1, K_2, такие, что

$$|Y_1(t)| \leq K_1\,e^{(\sigma-\delta)t} \qquad (t \geq 0),$$
$$|Y_2(t)| \leq K_2\,e^{\sigma t} \qquad (t \leq 0).$$

Пусть $\psi_0(t) = e^{\lambda_j t}p_j$ и

$$\psi_{l+1}(t) = e^{\lambda_j t}\,p_j + \int_a^t Y_1(t-s)\,R(s)\,\psi_l(s)\,ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)\,R(s)\,\psi_l(s)\,ds,$$

где a выбрано настолько большим, что

$$(K_1 + K_2)\int_a^\infty |R(t)|\,dt < \frac{1}{2}.$$

Пусть $|\,\psi_0(t)\,| \leq K_0\,e^{\sigma t}$, $t \leq 0$. Показать, что

$$|\psi_{l+1}(t) - \psi_l(t)| \leq \frac{K_0\,e^{\sigma t}}{2^{l+1}},$$

и тем самым доказать существование предельной функции φ_j, удовлетворяющей неравенству

$$|\varphi_j(t)| \leq 2\,K_0\,e^{\sigma t}$$

и уравнению

$$\varphi_j(t) = e^{\lambda_j t}\,p_j + \int_a^t Y_1(t-s)\,R(s)\,\varphi_j(s)\,ds - \int_t^\infty Y_2(t-s)\,R(s)\,\varphi_j(s)\,ds.$$

Отсюда

$$e^{-\sigma t}|\varphi_j(t)-e^{\lambda_j t}p_j|\leq 2K_0K_1\int_a^t e^{-\delta(t-s)}|R(s)|\,ds+2K_0K_2\int_t^\infty |R(s)|\,ds\leq$$

$$\leq 2K_0K_1e^{-\frac{1}{2}\delta t}\int_a^{\frac{1}{2}t}|R(s)|\,ds+2K_0(K_1+K_2)\int_{\frac{1}{2}t}^\infty |R(s)|\,ds,$$

что дает результат при $t\to\infty$.

30. Пусть $x''+(1+r(t))x=0$, где $\int_1^\infty |r(t)|\,dt<\infty$. Показать, что это уравнение имеет решения φ_1 и φ_2, такие, что

$$\lim_{t\to\infty}(\varphi_1(t)-e^{it})=0,\quad \lim_{t\to\infty}(\varphi_1'(t)-ie^{it})=0$$

и, аналогично, для φ_2 с заменой i на $-i$.

31. Сформулировать и доказать результат, аналогичный предыдущему, для уравнения $x''-(1+r(t))x=0$.

32. Пусть $L_nx=x^{(n)}+[a_1+r_1(t)]x^{(n-1)}+\ldots+[a_n+r_n(t)]x=0$, где a_k — постоянные и

$$\int_1^\infty |r_k(t)|\,dt<\infty\qquad (k=1,\ldots,n).$$

Пусть корни λ_j уравнения $\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$ различны. Тогда уравнение $L_nx=0$ имеет такое решение φ_j, что

$$\lim_{t\to\infty}(\varphi_j^{(k)}(t)-\lambda_j^k e^{\lambda_j t})e^{-\lambda_j t}=0\quad (k=0,1,\ldots,n-1)$$

для $j=1,2,\ldots,n$.

Указание. Использовать задачу 29.

33. Пусть матрица A непрерывная и периодическая периода ω,

$$x'=[A(t)+R(t)]x,$$

где R — такая же матрица, как и в задаче 29. Предположим, что уравнение $y'=A(t)y$ имеет n независимых решений вида $e^{\varrho_j t}p_j(t)$, где p_j имеют период ω. Доказать, что в этом случае данное уравнение имеет n решений φ_j, таких, что

$$\lim_{t\to\infty}[\varphi_j(t)e^{-\varrho_j t}-p_j(t)]=0\quad (j=1,\ldots,n);$$

Указание. Уравнение $y'=A(t)y$ имеет фундаментальное решение $P(t)e^{Bt}$, где матрица B имеет диагональную форму $B=J_0$. Очевидно, $P'+PB=AP$. Положим $x=P(t)z$. Тогда уравнение для z принимает вид

$$z'=Bz+P^{-1}RPz.$$

Теперь может быть использована задача 29, ибо B постоянна, и это дает требуемый результат. Заметим, что уравнение $u'=Bu$ имеет решения $e^{\varrho_j t}e_j$, где e_j — постоянный вектор с j-й строкой, равной 1, и всеми остальными строками равными 0.

34. Сформулировать и доказать результат, аналогичный предыдущему, для уравнения

$$L_nx=x^{(n)}+[a_1(t)+r_1(t)]x^{(n-1)}+\ldots+[a_n(t)+r_n(t)]x=0,$$

где a_j — периодические функции с периодом ω.

35. Рассмотрим случай $x' = Ax + R(t)x$, где матрица A постоянна; однако теперь каноническая форма A имеет, в терминологии теоремы 1.1, подматрицы J_k, $k \geq 1$, и максимальное число строк для всех матриц J_k, $k \geq 1$, равно $r + 1$. Тогда ни один из полиномиальных множителей при экспонентах в элементах матрицы e^{At} не имеет степени выше r. Здесь рассматривается случай $r \geq 1$. (Для $r = 0$ см. задачу 29.) Предположим, что $\int\limits_1^\infty t^r \mid R(t) \mid dt < \infty$. Пусть λ_j — характеристические корни A и пусть уравнение $y' = Ay$ имеет решение вида

$$e^{\lambda_j t} t^k c + O(e^{\lambda_j t} t^{k-1}),$$

где c — постоянный вектор. Очевидно, что $0 \leq k \leq r$. Доказать, что уравнение $x' = Ax + R(t)x$ имеет решение φ, такое, что

$$\lim_{t \to \infty} \left[\varphi(t)\, e^{-\lambda_j t} t^{-k} - c\right] = 0.$$

Указание. Пусть $\operatorname{Re} \lambda_j = \sigma$. Элементы матрицы $e^{A(t-s)}$ представляют собой суммы членов вида $e^{\lambda_p(t-s)} t^l s^m$, $0 \leq l + m \leq r$. Пусть

$$e^{A(t-s)} = Y_1(t, s) + Y_2(t, s),$$

где

$$|Y_1(t, s)| \leq K_1 e^{\sigma(t-s)} t^{k-1} s^{r-k+1} \quad (t \geq s \geq 1),$$

$$|Y_2(t, s)| \leq K_2 e^{\sigma(t-s)} t^k s^{r-k} \quad (s \geq t \geq 1).$$

Таким образом, матрица $Y_1(t, s)$ имеет все элементы, для которых экспоненциальные множители $e^{\lambda_p t}$ удовлетворяют условию $\operatorname{Re} \lambda_p < \sigma$. Если $\operatorname{Re} \lambda_p = \sigma$, то Y_1 состоит из членов, которые имеют множителями степени t, меньшие чем k. Доказательство аналогично случаю $r = 0$. В конце рассуждения интеграл $\int\limits_a^t$, содержащий Y_1, следует записать в виде $\int\limits_a^{\sqrt{t}} + \int\limits_{\sqrt{t}}^t$.

36. Сформулировать и доказать аналог предыдущего результата для уравнения n-го порядка $L_n x = 0$.

37. Сформулировать и доказать аналог задачи 35 для $r \geq 1$, когда A заменена периодической матрицей $A(t)$.

38. Сформулировать и доказать аналог предыдущего результата для уравнения n-го порядка $L_n x = 0$.

39. Пусть A — квадратная матрица порядка n, $A = \lambda E + Z$, где $Z = (z_{ij})$, а $z_{ij} = 1$, если $j = i + 1$, и $z_{ij} = 0$ в других случаях. Показать, что A подобна матрице $B = \lambda E + \gamma Z$, где $\gamma \neq 0$.

Указание. Положить $P = (p_{ij})$, где $p_{ij} = \gamma^{i-1} \delta_{ij}$, и доказать, что $B = P^{-1}AP$.

40. Пусть A — действительная квадратная матрица порядка n. Доказать, что существует *действительная* неособая матрица P, такая, что матрица $\tilde{A} = P^{-1}AP$ имеет действительную каноническую форму, состоящую из действительных квадратных матриц $A_1, \ldots, A_k$, $B_1, \ldots, B_m$, расположенных вдоль главной диагонали. Каждая A_j имеет вид

$$A_j = \begin{pmatrix} S_j & 0_2 \ldots 0_2 & 0_2 \\ E_2 & S_j \ldots 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & E_2 \ldots 0_2 & 0_2 \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot \\ 0_2 & 0_2 \ldots E_2 & S_j \end{pmatrix},$$

где 0_2 — квадратная нулевая матрица второго порядка, E_2 — квадратная единичная матрица второго порядка и

$$S_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

B_j имеет вид

$$B_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_j & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & \dots & .. & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda_j \end{pmatrix}.$$

41. Доказать, что если C — действительная неособая квадратная матрица порядка n, то существует действительная матрица A, такая, что $e^A = C^2$.

Указание. Использовать задачу 40 и рассмотреть два случая: $\lambda_j > 0$, $\lambda_j < 0$. Заметим, что

$$S_j = \exp \begin{pmatrix} \ln (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2} & -\operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right) \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{\beta_j}{\alpha_j}\right) & \ln (\alpha_j^2 + \beta_j^2)^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Глава IV

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ. ОСОБЕННОСТИ ПЕРВОГО РОДА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой и следующей главах будет изучаться линейная система

$$w' = A(z)\,w \quad (z - \text{комплексное}), \tag{1.1}$$

где A — n-мерная квадратная (комплекснозначная) матрица с не более чем одной изолированной особенностью в некоторой точке z_0, однозначная и аналитическая вблизи этой точки. Если предположить, что A в точке z_0 имеет только полюс, то можно получить некоторые весьма специфические результаты о природе матрицы-решения Φ системы (1.1) вблизи z_0. Однако имеется один общий результат, который дает качественную картину поведения решения Φ даже в тех случаях, когда A в точке z_0 имеет произвольную изолированную особенность.

Пусть областью, в которой A аналитична и однозначна, является $0 < |z - z_0| < a$, где a — некоторая положительная постоянная. Эта область неодносвязна и поэтому решение системы (1.1) неоднозначно. Например, рассмотрим уравнение $w' = w/2z$, где w одномерно. Тогда $(wz^{-1/2})' = 0$ или $w = cz^{1/2}$, где c — постоянная. Это решение, исключая случай $c = 0$, неоднозначно для $0 < |z| < a$.

Задачу можно снова рассматривать в односвязной области, если допускать многолистные области. Пусть $z - z_0 = \varrho e^{i\theta}$, где $\varrho \geq 0$ и θ — действительные переменные. Пусть область D определяется неравенствами

$$D:\ 0 < \varrho < a, \qquad -\infty < \theta < \infty.$$

Эта область односвязна. Метод последовательных приближений, как он изложен в § 7 гл. III, легко приводит к доказательству существования аналитической фундаментальной матрицы для системы (1.1).

Другой процесс заключается в подстановке $z - z_0 = e^{\zeta}$. Тогда (1.1) принимает вид

$$\frac{dw}{d\zeta} = B(\zeta)\,w, \qquad B(\zeta) = e^{\zeta}\,A(z_0 + e^{\zeta}).$$

Очевидно, матрица B аналитична при $\zeta \in \widetilde{D}$, где $\widetilde{D}$ — полуплоскость $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \ln a$. Так как область $\widetilde{D}$ односвязна, то существует фундаментальная матрица-решение Ψ, аналитическая при $\zeta \in D$. Поэтому $\Phi(z) = \Psi(\ln(z - z_0))$ есть аналитическая фунда-

ментальная матрица системы (1.1) для $z \in D$. Так как функция $\ln(z - z_0)$ неоднозначна, то Φ — также неоднозначная функция z.

Пусть M — произвольная комплексная матрица. Определим степенную матрицу z^M следующим образом:

$$z^M = e^{(\ln z) M}. \tag{1.2}$$

Заметим, что для $z \neq 0$ матрица z^M неособая при любом M и $(z^M)^{-1} = z^{-M}$.

Теорема 1.1. *Если матрица A системы* (1.1) *однозначна и аналитична в области $0 < |z - z_0| < a$, то каждая фундаментальная матрица Φ системы* (1.1) *имеет вид*

$$\Phi(z) = S(z)(z - z_0)^P \quad (0 < |z - z_0| < a), \tag{1.3}$$

где матрица S однозначна и аналитична при $0 < |z - z_0| < a$ и P — постоянная матрица.

Доказательство, в сущности, такое же, как доказательство теоремы 5.1 гл. III, будет дано для случая $z_0 = 0$. Рассмотрим фундаментальную матрицу Φ для описанной выше бесконечнолистной области D. В D

$$\Phi'(z) = A(z)\Phi(z).$$

Так как $A(z e^{2\pi i}) = A(z)$, то

$$\Phi'(z e^{2\pi i}) = A(z)\Phi(z e^{2\pi i}).$$

Таким образом, $\tilde{\Phi}(z) = \Phi(z e^{2\pi i})$ есть фундаментальная матрица и поэтому

$$\Phi(z e^{2\pi i}) = \Phi(z) C, \tag{1.4}$$

где C — постоянная неособая матрица. Так как C — неособая матрица, то существует постоянная матрица P, такая, что

$$C = e^{2\pi i P} \tag{1.5}$$

(заметим, что P не единственна), и из (1.4) следует, что

$$\Phi(z e^{2\pi i}) = \Phi(z) e^{2\pi i P}. \tag{1.6}$$

Далее, пусть матрица S определяется из равенства

$$\Phi(z) = S(z) z^P \qquad (0 < |z| < a). \tag{1.7}$$

Очевидно, что матрица S аналитична для $0 < |z| < a$; покажем, что она в этой области также однозначна.

С одной стороны, из (1.7) следует

$$\Phi(z e^{2\pi i}) = S(z e^{2\pi i})(z e^{2\pi i})^P = S(z e^{2\pi i}) z^P e^{2\pi i P}, \tag{1.8}$$

а с другой стороны, из (1.6) —

$$\Phi(z e^{2\pi i}) = S(z) z^P e^{2\pi i P}. \tag{1.9}$$

Сравнение формул (1.8) и (1.9) показывает, что $S(ze^{2\pi i}) = S(z)$, и поэтому матрица S однозначна при $0 < |z| < a$, что доказывает теорему.

Существует фундаментальная матрица, в которой матрица P заменена на ее каноническую форму J, причем J и P связаны равенством $PT = TJ$, где T — некоторая неособая матрица. Очевидно, $S(z-z_0)^P T$ — также фундаментальная матрица, равная $STT^{-1}(z-z_0)^P T = ST(z-z_0)^J$. Так как T постоянна, то матрица $U = ST$ аналитична и однозначна для $0 < |z-z_0| < a$. Явный вид матрицы $(z-z_0)^J$ дается формулами (4.7) — (4.9) гл. III, если заменить в них t на $\ln(z-z_0)$. Если векторы-столбцы матрицы U обозначить через u_j, $j = 1, \ldots, n$, то u_j аналитичны и однозначны для $0 < |z-z_0| < a$, и столбцы φ_j фундаментальной матрицы $U(z-z_0)^J$ даются формулами, аналогичными приведенным в гл. III после формулы (4.10):

$$\begin{aligned}
&\varphi_j(z) = (z-z_0)^{\lambda_j} u_j(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, q),\\
&\varphi_{q+1}(z) = (z-z_0)^{\lambda_{q+1}} u_{q+1}(z),\\
&\varphi_{q+2}(z) = (z-z_0)^{\lambda_{q+1}} \left[u_{q+1}(z)\ln(z-z_0) + u_{q+2}(z)\right],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_{q+r_1}(z) = (z-z_0)^{\lambda_{q+1}} \left[\frac{u_{q+1}(z)}{(r_1-1)!}\ln^{r_1-1}(z-z_0) + \ldots + u_{q+r_1}(z)\right], \qquad (1.10)\\
&\varphi_{q+r_1+1}(z) = (z-z_0)^{\lambda_{q+2}} u_{q+r_1+1}(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_n(z) = (z-z_0)^{\lambda_{q+s}} \left[\frac{u_{n-r_s+1}(z)}{(r_s-1)!}\ln^{r_s-1}(z-z_0) + \ldots + u_n(z)\right].
\end{aligned}$$

В любом случае существует всегда хотя бы один вектор-решение, соответствующий каждому характеристическому корню λ_i матрицы P:

$$(z-z_0)^{\lambda_i} u, \qquad (1.11)$$

причем матрица u аналитична и однозначна при $0 < |z-z_0| < a$.

Как и в теореме 7.3 гл. I,

$$(\det \Phi)' = (\det \Phi)(\operatorname{sp} A). \qquad (1.12)$$

Так как

$$\det \Phi(z) = \det S(z) \det (z-z_0)^P = \det S(z)(z-z_0)^{\operatorname{sp} P},$$

то

$$\frac{(\det S)'}{\det S} + \frac{1}{z-z_0}\operatorname{sp} P = \operatorname{sp} A.$$

Интегрируя по окружности Γ с центром в точке z_0 и радиусом, меньшим чем a, получаем

$$m + \operatorname{sp} P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \operatorname{sp} A(z)\,dz, \qquad (1.13)$$

где m — целое число. Если $\det S(z_0) \neq 0$ или ∞, то $m = 0$. Интегрируя (1.12), получаем

$$\det \Phi(z) = \det \Phi(z_1) \exp\left(\int_{z_1}^{z} \operatorname{sp} A(\zeta)\, d\zeta \right). \tag{1.14}$$

§ 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЕННОСТЕЙ

Если матрица A в точке z_0 имеет особенность, то z_0 называется *особой точкой* системы

$$w' = A(z)\, w. \tag{2.1}$$

Если A в точке z_0 имеет не более чем полюс (т. е. либо A в точке z_0 аналитична, либо имеет полюс) и аналитична в области $0 < |z - z_0| < a$, $a > 0$, то A можно записать в виде

$$A(z) = (z - z_0)^{-\mu-1}\, \widetilde{A}(z), \tag{2.2}$$

где μ — целое и матрица $\widetilde{A}$ аналитична для $|z - z_0| < a$, $a > 0$, и $\widetilde{A}(z_0) \neq 0$.

Если $\mu \leq -1$, то A в точке z_0 аналитична и поэтому каждая фундаментальная матрица системы (2.1) аналитична для $|z - z_0| < a$. В силу этого, если $\mu \leq -1$, то z_0 называется аналитической точкой для системы (2.1). Если $\mu \geq 0$, то целое число μ называется (по Пуанкаре) *рангом* особенности. Оказывается, что имеется существенное различие между случаями $\mu = 0$ и $\mu \geq 1$. Поэтому соответственно случаям $\mu = 0$ или $\mu \geq 1$ точка z_0 называется *особой точкой первого рода* или *особой точкой второго рода* для системы (2.1). Случай $z_0 = \infty$ будет разобран в § 6.

Приведенная классификация систем (2.1), (2.2) не учитывает природу матрицы-решения системы (2.1) в точке z_0. Из сказанного в § 1 следует, что каждая фундаментальная матрица системы (2.1), для которой матрица A имеет изолированную особенность в точке z_0, имеет вид $\Phi(z) = S(z)(z - z_0)^P$, где матрица S однозначна и аналитична при $0 < |z - z_0| < a$ и P — постоянная матрица. Если S имеет в z_0 самое большее полюс, то z_0 называется *регулярной особой точкой* для системы (2.1); в противном случае z_0 называется *иррегулярной особой точкой* для (2.1). Эти наименования не очень обоснованы, но общеприняты и поэтому будут нами применяться. Если z_0 — регулярная особая точка для (2.1), то S может быть записана в виде $S(z) = (z - z_0)^{-k}\, \widetilde{S}(z)$, где k — целое, матрица $\widetilde{S}$ аналитична в точке z_0, $\widetilde{S}(z_0) \neq 0$. Следовательно, матрица Φ может быть записана в виде

$$\Phi(z) = \widetilde{S}(z)\, (z - z_0)^{P - kE}. \tag{2.3}$$

Теорема 2.1. *Если z_0 — особая точка первого рода для системы* (2.1), *то она — регулярная особая точка для* (2.1).

Доказательство будет дано для случая $z_0 = 0$. По предположению система (2.1) может быть записана в виде

$$w' = z^{-1} \widetilde{A}(z) w, \tag{2.4}$$

где матрица $\widetilde{A}$ аналитична для $0 \leq |z| < a$, $a > 0$ и $\widetilde{A}(0) \neq 0$. Следует показать, что если Φ — некоторая фундаментальная матрица для (2.4), то в представлении $\Phi = Sz^P$ (см. теорему 1.1) матрица S либо аналитична, либо имеет в точке $z = 0$ полюс. Мы получим это, показав, что существует положительное целое число m, такое, что матрица $z^m S$ ограничена в окрестности точки $z = 0$; в силу теоремы Римана отсюда будет следовать результат.

Пусть φ — произвольный ненулевой вектор-решение для (2.4) и пусть $\tilde{\varphi}(\varrho, \theta) = \varphi(\varrho e^{i\theta})$, $r = \|\tilde{\varphi}\|$. Тогда

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varrho}(\varrho, \theta) = \frac{d\varphi}{dz}(\varrho e^{i\theta}) e^{i\theta}$$

и, следовательно,

$$\left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varrho}(\varrho, \theta) \right\| = \left\| \frac{d\varphi}{dz}(\varrho e^{i\theta}) \right\| \leq \left\| \widetilde{A}(\varrho e^{i\theta}) \right\| \frac{r(\varrho, \theta)}{\varrho}.$$

Но как было показано в § 5 гл. I (где было t вместо ϱ),

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \varrho} \right| \leq \left\| \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \varrho} \right\|.$$

Поэтому, если $\|\widetilde{A}(z)\| \leq c$ для $|z| \leq \varrho_1 < a$, то

$$\left| \frac{\partial r}{\partial \varrho} \right| \leq \frac{cr}{\varrho} \qquad (0 < \varrho \leq \varrho_1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial r}{\partial \varrho} + \frac{cr}{\varrho} \geq 0 \qquad (0 < \varrho \leq \varrho_1),$$

и, значит, для $0 < \varrho \leq \varrho_1$

$$\varrho_1^c r(\varrho_1, \theta) - \varrho^c r(\varrho, \theta) \geq 0.$$

Если M обозначает максимум функции $r(\varrho_1, \theta)$ для $0 \leq \theta \leq 2\pi$, то

$$\|\varphi(\varrho e^{i\theta})\| = r(\varrho, \theta) \leq \frac{\varrho_1^c r(\varrho_1, \theta)}{\varrho^c} \leq \frac{M \varrho_1^c}{\varrho^c}.$$

Таким образом, если Φ — фундаментальная матрица для (2.4), то существует постоянная $d > 0$, такая, что ($z = \varrho e^{i\theta}$)

$$|\Phi(z)| \leq \frac{d}{\varrho^c} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < |z| \leq \varrho_1). \tag{2.5}$$

Остается оценить член z^{-P} в представлении $S = \Phi z^{-P}$. Имеем $z^{-P} = e^{-(\ln z)P} = e^{-(\ln \varrho)P} e^{-i\theta P}$ и, следовательно,

$$|z^{-P}| \leq |e^{-(\ln \varrho)P}| \, |e^{-i\theta P}|. \tag{2.6}$$

Далее,

$$|e^{-(\ln\varrho)P}| \leq (n-1) + e^{|\ln\varrho|\,|P|},$$

и если $0 < \varrho < 1$, то

$$|e^{-(\ln\varrho)P}| \leq (n-1) + e^{-|\ln\varrho|\,|P|} \leq n\varrho^{-|P|}. \tag{2.7}$$

Точно так же, если $0 \leq \theta \leq 2\pi$, то

$$|e^{-i\theta P}| \leq (n-1) + e^{2\pi|P|}. \tag{2.8}$$

Поэтому из (2.6)—(2.8) следует неравенство

$$|z^{-P}| \leq n\varrho^{-|P|}((n-1) + e^{2\pi|P|}),$$

если только $0 < \varrho < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Комбинируя это неравенство с (2.5), получаем окончательно

$$\varrho^{c+|P|}\,|S(z)| \leq \tilde{d}, \quad 0 < \varrho < \min(1, \varrho_1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

где $\tilde{d}$ — постоянная, не зависящая от z в области $0 < |z| < \min(1, \varrho_1)$. Итак, можно подобрать столь большое целое положительное число m, что матрица $z^m S$ будет ограничена в окрестности точки $z = 0$; это завершает доказательство теоремы.

Для систем ($n > 1$) обращение теоремы 2.1, вообще говоря, неверно. Например, пусть $n = 2$ и рассмотрим систему

$$w' = (z^{-2}C_1 + C_2)\,w,$$

где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{3}{16} & 0 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта система имеет в точке $z = 0$ особенность второго рода с рангом $\mu = 1$. Легко видеть, что фундаментальная матрица для этой системы имеет вид

$$\Phi(z) = \begin{pmatrix} z^{1/4} & z^{3/4} \\ \frac{1}{4}z^{-3/4} & \frac{3}{4}z^{-1/4} \end{pmatrix}.$$

Если матрицы S и R определены как

$$S = \begin{pmatrix} z & z \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

то, как легко видеть, $\Phi = Sz^R$ и из этого представления Φ следует, что $z = 0$ есть регулярная особая точка.

Однако для уравнения порядка n можно указать необходимое и достаточное условие, которое следует наложить на коэффициенты уравнения, для того чтобы точка z_0 была регулярной особой точкой; см. § 5 этой главы, в особенности теоремы 5.1 и 5.2.

Может случиться, даже тогда, когда коэффициенты матрицы A системы (2.1) в точке z_0 имеют особенность, что все фундаментальные

матрицы в z_0 аналитичны. В этом случае z_0 является *кажущейся особенностью* для (2.1). Например, рассмотрим систему

$$w' = z^{-1}Ew.$$

Очевидно, что фундаментальная матрица для нее имеет вид $\Phi = z^E = zE$ и аналитична при $z = 0$. Заметим, что $\det \Phi(0) = 0$. Это положение является общим при данных обстоятельствах.

Теорема 2.2. *Пусть в системе* (2.1) *матрица A однозначна и аналитична вблизи точки z_0, но в z_0 имеет особенность. Если Φ — фундаментальная матрица, то или Φ имеет особенность в точке z_0, или* $\det \Phi(z_0) = 0$.

Доказательство. Предположим, что Φ аналитична в точке z_0 и $\det \Phi(z_0) \neq 0$. Тогда Φ^{-1} существует в z_0 и является аналитической функцией z в окрестности z_0. Поэтому матрица $\Phi'\Phi^{-1}$ аналитична в z_0. Но $\Phi'\Phi^{-1} = A$, что приводит к противоречию.

§ 3. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Хотя теорема 2.1 и дает качественное описание решений для системы с особенностью первого рода в точке z_0, однако она не только не указывает явного вида матрицы $P - kE$ в формуле (2.3), но даже не дает алгорифма для вычисления этих решений. Это будет сделано в настоящем параграфе. Мы будем рассматривать случай $z_0 = 0$; изменения, которые необходимо сделать в случае любого z_0, будут очевидны.

В качестве примера рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ w_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{z} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}.$$

Эта система легко приводится к уравнению второго порядка $w_2'' - w_2/z = 0$. Используя то обстоятельство, что в силу (1.11) существует хотя бы одно решение вида $z^p(s_0 + s_1 z + \ldots)$, где $p, s_0, \ldots$ — постоянные, получаем

$$p(p-1)s_0 z^{p-2} + (p+1)ps_1 z^{p-1} + \ldots - s_0 z^{p-1} - s_1 z^p - \ldots = 0.$$

Таким образом,

$$p(p-1)s_0 z^{p-2} + [(p+1)ps_1 - s_0] z^{p-1} + \ldots$$
$$\ldots + [(p+k)(p+k-1)s_k - s_{k-1}] z^{p+k-2} + \ldots = 0.$$

Отсюда получается одно из возможных решений

$$p = 1, \quad s_0 = 1, \quad s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2^2 3}, \quad s_3 = \frac{1}{2^2 3^2 4}, \ldots,$$

$$s_k = \frac{1}{(k!)^2 (k+1)}.$$

Таким образом, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{(k!)^2 (k+1)}$$

удовлетворяет уравнению $w_2'' - w_2/z = 0$. Возникает вопрос: представляет ли этот ряд действительно некоторое решение, или, что эквивалентно, сходится ли ряд? В рассматриваемом случае очевидно, что ряд сходится. В действительности, ряд, удовлетворяющий формально системе (2.4), всегда дает истинное решение и это будет доказано.

[Не всегда ряд, являющийся формальным решением уравнений более общего класса, чем (2.4), сходится. В самом деле, расходящийся ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!\, z^k$$

является формальным решением уравнения второго порядка

$$z^2 w'' + (3z - 1) w' + w = 0,$$

где w — скаляр.]

Необходимо с достаточной общностью определить понятие формального ряда, с тем чтобы включить все возможные решения системы (2.4).

Под *формальным рядом (Лорана)* f мы будем понимать выражение вида

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m z^m,$$

где c_m — комплексные числа, *причем все коэффициенты c_m с отрицательными индексами, за исключением конечного их числа, равны нулю.* Если

$$g = \sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m z^m$$

— другой формальный ряд, то, по определению, ряд f *равен* g в том и только в том случае, когда $c_m = d_m$ для всех m. *Сумма* $f + g$ и *произведение* fg двух формальных рядов определяются при помощи равенств

$$f + g = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (c_m + d_m) z^m,$$

$$fg = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^m, \qquad h_m = \sum_{k+l=m} c_k d_l.$$

Заметим, что сумма, фигурирующая в определении коэффициента h_m, конечна, и, следовательно, произведение fg определено для всех формальных рядов f и g. (Если бы c_{-m} не обращались все в нуль для

достаточно больших m, то сумма, определяющая h_m, не была бы конечной и поэтому могла бы не сходиться. Таким образом, произведение fg не было бы определено.) Если формальный ряд f таков, что $c_{-m} = 0$ для $m = 1, 2, \ldots$, то f называется *формальным степенным рядом*. Производной f' формального ряда f называется формальный ряд

$$f' = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (m+1)\, c_{m+1} z^m .$$

Если f_{jk} — формальные ряды Лорана и μ_j — комплексные числа, то конечная сумма

$$p = \sum_{j,k=0}^{\infty} f_{jk} z^{\mu_j} (\ln z)^k, \qquad f_{jk} = 0 \text{ для больших } j+k,$$

называется *формальной логарифмической суммой*. Пусть

$$q = \sum_{j,k=0}^{\infty} g_{jk} z^{\mu_j} (\ln z)^k$$

— также формальная логарифмическая сумма. Сумма $p+q$ и произведение pq определяются так, как если бы коэффициенты f_{jk} и g_{jk} были скалярами. Получающиеся коэффициенты могут быть приведены и дают формальные ряды Лорана. Таким образом, сложение и умножение формальных логарифмических сумм приводит к формальным логарифмическим суммам[1]. Производная формальной логарифмической суммы p определяется посредством равенства

$$p' = \sum_{j,k=0}^{\infty} [f'_{jk} + \mu_j f_{jk} z^{-1} + (k+1) f_{j(k+1)} z^{-1}]\, z^{\mu_j} (\ln z)^k \qquad (3.1)$$

и также является формальной логарифмической суммой.

Говорят, что формальная логарифмическая сумма приведена, если ни одна из разностей $\mu_i - \mu_j$, $i \neq j$, не является целым числом. Очевидно, что формальная логарифмическая сумма всегда может быть приведена. Говорят, что приведенная сумма p равна нулю, в том и только в том случае, когда все коэффициенты f_{jk} равны нулю. Говорят, что формальная логарифмическая сумма равна нулю, в том и только в том случае, когда ее приведенная сумма равна нулю. Две формальные суммы называются равными, если их разность равна нулю.

Формальной логарифмической матрицей L называется матрица с элементами l_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$, представляющими собой формальные логарифмические суммы. Сумма, произведение и равенство двух таких матриц определяются как обычные сумма, произведе-

[1] Выражаясь алгебраически, формальная логарифмическая сумма есть элемент алгебры над полем комлексных чисел, порожденной формальными рядами Лорана, степенями z и целыми степенями $\ln z$.

ние и равенство матриц. Производная L' такой матрицы определяется как матрица с элементами l'_{ij}.

Возвращаясь теперь к дифференциальным уравнениям, рассмотрим систему, имеющую особенность первого рода в точке $z = 0$,

$$w' = A(z)\,w, \tag{3.2}$$

где $A(z) = \sum\limits_{m=-1}^{\infty} z^m A_m$ — ряд Лорана, сходящийся около точки $z = 0$. Очевидно, A можно рассматривать как формальную логарифмическую матрицу. *Под формальным решением* системы (3.2) понимается формальная логарифмическая матрица Φ, которая удовлетворяет системе (3.2), рассматриваемой как равенство формальных логарифмических матриц.

Теорема 3.1. *Если Φ — формальное решение системы* (3.2), *то Φ действительно представляет собой решение, т. е. формальные ряды, встречающиеся в Φ, сходятся в области $0 < |z| < a$ для некоторого $a > 0$.*

Доказательство. В силу теоремы 2.1 существует фундаментальная матрица $\widetilde{\Phi}$ системы (3.2), которая имеет вид

$$\widetilde{\Phi} = S z^P,$$

где матрица P имеет каноническую форму, а матрица S однозначна, аналитична для $0 < |z| < a$ и точка $z = 0$ является для нее не более чем полюсом. Таким образом, S может быть разложена для $0 < |z| < a$ в сходящийся ряд Лорана с конечным числом отрицательных членов. Из рассмотрения структуры S и z^P ясно, что $\widetilde{\Phi}$ можно рассматривать как формальную логарифмическую матрицу. Так как матрица $\widetilde{\Phi}^{-1} = z^{-P} S^{-1}$ существует для $0 < |z| < a$, то $\widetilde{\Phi}^{-1}$ также можно рассматривать как формальную логарифмическую матрицу.

Если Φ — произвольное формальное решение для (3.2), то в формальном смысле

$$(\widetilde{\Phi}^{-1}\Phi)' = -\widetilde{\Phi}^{-1}\widetilde{\Phi}'\widetilde{\Phi}^{-1}\Phi + \widetilde{\Phi}^{-1}\Phi' = -\widetilde{\Phi}^{-1}A\Phi + \widetilde{\Phi}^{-1}A\Phi = 0,$$

так как Φ и $\widetilde{\Phi}$ — формальные решения (3.2). Покажем теперь, что отсюда следует, что формальная логарифмическая матрица $\widetilde{\Phi}^{-1}\Phi$ постоянна. Достаточно доказать, что если p — произвольная формальная (скалярная) логарифмическая сумма и $p' = 0$, то p — постоянная.

Пусть сумма p приведена. Так как $p' = 0$, то из (3.1) следует, что

$$f'_{jk} + \mu_j f_{jk} z^{-1} + (k+1) f_{j(k+1)} z^{-1} = 0 \tag{3.3}$$

для всех j и k. Пусть наивысший показатель степени $\ln z$ в p с ненулевым коэффициентом есть N и предположим, что

$$f_{0N} z^{\mu_0} + f_{1N} z^{\mu_1} + \ldots + f_{rN} z^{\mu_r}$$

— этот коэффициент. При $k = N$ из (3.3) следует

$$f'_{jN} + \mu_j f_{jN} z^{-1} = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, r),$$

так как $f_{j(N+1)} = 0$. Используя то обстоятельство, что f_{jN} — формальный ряд Лорана $\sum c_{jm}^{(N)} z^m$, получаем

$$(m + \mu_j) c_{jm}^{(N)} = 0$$

для всех m и $j = 0, 1, \ldots, r$. Отсюда следует, что μ_j при некотором j есть целое число, ибо в противном случае было бы $c_{jm}^{(N)} = 0$ для всех m и $j = 0, 1, \ldots, r$, а следовательно, и $f_{jN} = 0$ для всех $j = 0, 1, \ldots, r$, что противоречит выбору N. Так как сумма p приведена, то существует по крайней мере одно целое μ_j. Пусть это число есть μ_0 и предположим, не нарушая общности рассуждений, что $\mu_0 = 0$. Тогда

$$f_{jN} = 0 \qquad (j \geq 1),$$
$$f_{0N} = c_{00}^{(N)}.$$

Предположим теперь, что $N \geq 1$. Тогда из (3.3) при $k = N - 1$ следует, как прежде, что

$$f_{j(N-1)} = 0 \qquad (j \geq 1),$$
$$f'_{0(N-1)} + N c_{00}^{(N)} z^{-1} = 0.$$

Но последнее равенство может выполняться лишь в том случае, когда $c_{00}^{(N)} = 0$, что снова противоречит выбору N. Таким образом, $N = 0$, и $p = c_{00}^{(0)}$ есть постоянная.

Теперь из равенства $\tilde{\Phi}^{-1}\Phi = C$, где C — постоянная матрица, следует, что формально $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi} C$. Но так как $\tilde{\Phi}$ — истинная фундаментальная матрица для (3.2), то $\tilde{\Phi} C$ есть истинная матрица-решение для (3.2). Поэтому Φ сама должна быть истинной матрицей-решением для (3.2), и все формальные ряды в Φ должны сходиться для $0 < |z| < a$. Это доказывает теорему 3.1. В частности, каждый формальный вектор-решение есть истинное решение, так как Φ может иметь все одинаковые столбцы.

§ 4. СТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Вид решений системы (2.4) известен из формул (1.10) и теоремы 2.1. Здесь будет указан эффективный способ отыскания решений при помощи рекуррентных формул для коэффициентов рядов. Система $w' = A(z)w$ с особенностью первого рода в точке $z = 0$ может быть записана в виде

$$w' = \left(z^{-1} R + \sum_{m=0}^{\infty} z^m A_m\right) w, \tag{4.1}$$

где $R \neq 0$, A_m — постоянные матрицы и степенной ряд в (4.1) сходится для $|z| < a$, $a > 0$. Если все $A_m = 0$, то получаем систему $w' = z^{-1} Rw$, которая имеет фундаментальную матрицу $\Phi = z^R$,

что может быть легко проверено. Дополнительный степенной ряд в (4.1) приводит в основном к введению в решение степенного ряда, т. е. фундаментальная матрица для (4.1) имеет вид $\Phi = Pz^{\hat{R}}$, где P — степенной ряд и $\hat{R}$ — постоянная матрица (см. теорему 2.1). В частном случае матрица $\hat{R}$ совпадает с R из (4.1).

Теорема 4.1. *Если среди разностей характеристических корней матрицы R в системе* (4.1) *нет целых положительных чисел, то* (4.1) *имеет фундаментальную матрицу вида*

$$\Phi = Pz^R \quad (0 < |z| < c, \quad c > 0), \tag{4.2}$$

где P — степенной ряд

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m, \quad P_0 = E. \tag{4.3}$$

Замечание. Из (4.2) и (4.3) непосредственно следует, что фундаментальную матрицу можно задавать также в виде Sz^{R_0}, где R_0 — каноническая форма матрицы R и S — степенной ряд с неособой матрицей $S(0)$. Это дает представление решения в виде (1.10) с аналитическими вблизи точки $z_0 = 0$ векторами u_j.

Доказательство теоремы 4.1. Докажем, что (4.1) имеет формальное решение вида (4.2), (4.3), а по теореме 3.1 отсюда будет следовать, что (4.2) есть истинное решение. Так как $P_0 = E$, то $P(z)$ — неособая матрица для $|z| < c$ при некотором $c > 0$, а отсюда следует, что Φ — неособая матрица при $0 < |z| < c$, которая, значит, в этой области является фундаментальной матрицей.

Пусть J — каноническая форма R. Тогда существует неособая постоянная матрица T, такая, что $RT = TJ$. Матрица J имеет вид, указанный в теореме 1.1 гл. III. Пусть Q_m — постоянные матрицы и пусть

$$\Phi(z) = Q(z)\, z^J = (Q_0 + z\, Q_1 + \ldots)\, z^J \tag{4.4}$$

— формальная логарифмическая матрица. Подставляя ее в (4.1), получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)\, z^m Q_{m+1} = z^{-1}(RQ_0 - Q_0 J) + \\ + \sum_{m=0}^{\infty} z^m (RQ_{m+1} - Q_{m+1} J) + \sum_{m=0}^{\infty} z^m C_m, \tag{4.5}$$

где

$$C_m = \sum_{k=0}^{m} A_k\, Q_{m-k}.$$

Тождество (4.5) будет иметь место тогда и только тогда, когда выполняются равенства

$$RQ_0 = Q_0 J,$$

$$Q_{m+1}[J + (m+1)E] = RQ_{m+1} + C_m \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.6}$$

Первому уравнению (4.6) можно удовлетворить, положив $Q_0 = T$. Чтобы удовлетворить остальным уравнениям, удобно рассматривать матричные уравнения по столбцам. Пусть столбцы матриц Q_m обозначены через $q_m^{(j)}$, $j = 1,\ldots, n$. j-й столбец матрицы J содержит два элемента, которые могут быть отличны от нуля: λ_j (j-й характеристический корень матрицы R) в j-й строке этого j-го столбца и, для $j \geq 2$, δ_j^* в $(j-1)$-й строке j-го столбца, где δ_j^* равно либо 0, либо 1. Во всем последующем всегда δ_1^* — нуль. Беря j-й столбец равенства (4.6), получаем

$$[\lambda_j + (m+1)]\, q_{m+1}^{(j)} + \delta_j^*\, q_{m+1}^{(j-1)} = R q_{m+1}^{(j)} + c_m^{(j)}$$
$$(j = 1, \ldots, n;\ \ m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.7)$$

где $c_m^{(j)}$ — j-й столбец матрицы C_m. Уравнение (4.7) можно записать в виде

$$[(\lambda_j + m + 1)E - R]\, q_{m+1}^{(j)} = c_m^{(j)} - \delta_j^*\, q_{m+1}^{(j-1)}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n;\ \ m = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (4.8)$$

причем $c_m^{(j)}$ зависят только от $q_k^{(l)}$, $l \leq j$, $k \leq m$. Полагая $m = 0$, получаем из уравнений (4.8) рекуррентную последовательность для $q_1^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, так как $\lambda_j + 1$ не является корнем R. Полагая $m = 1$, получаем из (4.8) снова рекуррентную последовательность для $q_2^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и, применяя индукцию, получаем, что формальное решение (4.4) определяется рекуррентно при помощи формул (4.8). (На самом деле можно находить последовательно столбец за столбцом; это означает, что могут быть найдены n векторов-решений, составляющих матрицу.)

Очевидно, что матрица ΦT^{-1} также является решением для (4.1). Это можно записать в виде

$$QT^{-1}(Tz^J T^{-1}) = Pz^R,$$

где $P(z) = Q(z)\,T^{-1} = (T + zQ_1 + \ldots)\,T^{-1} = E + zP_1 + \ldots$. Это завершает доказательство.

Общий случай, когда матрица R может иметь характеристические корни, отличающиеся на целые числа, можно свести к теореме 4.1 при помощи следующей леммы.

Лемма. *Предположим, что $\varrho_1, \ldots, \varrho_k$ ($k \leq n$) — различные характеристические корни матрицы R (без учета их кратности) в системе* (4.1). *Существует матрица-функция V от z, неособая для $z \neq 0$ и линейная относительная z, такая, что преобразование $w = V\widetilde{w}$ переводит* (4.1) *в систему для $\widetilde{w}$ того же вида, что и* (4.1):

$$\widetilde{w}' = \Big(z^{-1}\widetilde{R} + \sum_{m=0}^{\infty} z^m \widetilde{A}_m\Big)\widetilde{w}, \qquad (4.9)$$

причем матрица $\widetilde{R}$ имеет характеристические корни $\varrho_1 - 1, \varrho_2, \ldots, \varrho_k$.

Доказательство. Вначале предположим, что R имеет каноническую форму и

$$R = \begin{pmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь R_1 — квадратная матрица порядка p_1, которая содержит все члены, содержащие корень ϱ_1 в R:

$$R_1 = \begin{pmatrix} \varrho_1 & \delta_2^* & 0 \dots 0 \\ 0 & \varrho_1 & \delta_3^* \dots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \dots \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \varrho_1 \end{pmatrix},$$

причем δ_i^* равно либо 0, либо 1. Определим матрицу U равенством

$$U = \begin{pmatrix} zE_{p_1} & 0 \\ 0 & E_{n-p_1} \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Очевидно, U — неособая матрица для $z \neq 0$ и

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} z^{-1}E_{p_1} & 0 \\ 0 & E_{n-p_1} \end{pmatrix}.$$

Тогда из подстановки $w = U\tilde{w}$ следует в силу (4.1)

$$\tilde{w}' = \left[z^{-1}U^{-1}RU - U^{-1}U' + \sum_{m=0}^{\infty} z^m (U^{-1}A_m U)\right]\tilde{w}. \tag{4.11}$$

Но $U^{-1}RU = R$, и после несложных вычислений получаем

$$z^{-1}U^{-1}RU - U^{-1}U' = z^{-1}\begin{pmatrix} R_1 - E_{p_1} & 0 \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Если

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} — блок матрицы A_0 длины и ширины p_1, то (4.11) можно записать как (4.9), где

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R_1 - E_{p_1} & A_{12} \\ 0 & R_2 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица $\tilde{R}$ обладает требуемыми свойствами. Если R не имеет предполагаемого вида, то преобразование U можно заменить на преобразование TU, где T выбирается так, что $T^{-1}RT$ имеет желаемый вид. Полагая $V = TU$, докажем лемму.

Теорема 4.2. *Система* (4.1) *имеет фундаментальную матрицу* Φ *вида*

$$\Phi = Pz^{\hat{R}} \quad (0 < |z| < c, \quad c > 0), \tag{4.12}$$

где P — *степенной ряд*:

$$P(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P_m, \tag{4.13}$$

и $\hat{R}$ — постоянная матрица, характеристические корни которой не отличаются один от другого на целые положительные числа.

Доказательство получается непосредственно последовательным применением предыдущей леммы и, в конце, теоремы 4.1. В самом деле, применяя достаточно много преобразований V_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, указанного в предыдущей лемме вида, получаем в конечном счете представление $\Phi = V_1 \ldots V_l \widetilde{P} z^{\hat{R}}$, где $\widetilde{P}(0) = E$ и $\hat{R}$ выражается через R явным образом. Итак, матрица $P = V_1 \ldots V_l \widetilde{P}$, и поэтому она представляется степенным рядом.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПОРЯДКА n

Рассмотрим уравнение порядка n

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(z)\, w^{(m)} = 0 \qquad (a_0(z) \equiv 1), \tag{5.1}$$

где коэффициенты a_k однозначны и аналитичны в окрестности точки z_0, исключая эту точку. Если какой-либо коэффициент a_k имеет особенность в точке z_0, то z_0 называется *особой точкой* для (5.1); в противном случае z_0 называется аналитической точкой для (5.1). Аналогично определению особой точки первого рода для систем первого порядка говорят, что z_0 есть *особая точка первого рода* для (5.1), если z_0 является особой точкой для (5.1) и коэффициенты уравнения (5.1) имеют вид

$$a_k(z) = (z - z_0)^{-k}\, b_k(z) \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{5.2}$$

где функции b_k аналитичны в точке z_0. Говорят, что уравнение (5.1) имеет в точке z_0 *особенность не более чем первого рода*, если z_0 есть либо аналитическая точка, либо особая точка первого рода для (5.1).

Простейшее уравнение порядка n, имеющее начало координат особенностью первого рода, имеет вид

$$w^{(n)} + b_1 z^{-1} w^{(n-1)} + b_2 z^{-2} w^{(n-2)} + \ldots + b_n z^{-n} w = 0,$$

где b_i — постоянные. Очевидно, что ему эквивалентно уравнение

$$z^n w^{(n)} + b_1 z^{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + b_n w = 0,$$

называемое *уравнением Эйлера*. Это уравнение можно преобразовать в уравнение с постоянными коэффициентами при помощи подстановки $z = e^s$, ибо если $\widetilde{w}(s) = w(e^s)$, то

$$(zw')_{z=e^s} = \frac{d\widetilde{w}}{ds}(s), \quad (z^2 w'')_{z=e^s} = \frac{d^2\widetilde{w}}{ds^2}(s) - \frac{d\widetilde{w}}{ds}(s) \qquad \text{и. т. д.}$$

Преобразованное уравнение

$$\widetilde{w}^{(n)} + c_1 \widetilde{w}^{(n-1)} + \ldots + c_n \widetilde{w} = 0$$

с постоянными коэффициентами c_i имеет фундаментальное множество решений, состоящее из функций вида

$$s^k e^{\mu s},$$

где μ — корень характеристического уравнения

$$\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + \ldots + c_n = 0$$

и k — неотрицательное целое число, меньшее чем кратность корня μ. Исходное уравнение Эйлера имеет, стало быть, фундаментальное множество решений вида

$$z^\mu (\ln z)^k.$$

Легкое вычисление показывает, что характеристическое уравнение, которому удовлетворяет μ, будучи записано при помощи постоянных b_i, имеет вид

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)\, b_1 + \ldots + b_n = 0.$$

Оно называется *определяющим уравнением* для уравнения Эйлера.

Другой способ получения решений уравнения Эйлера вытекает из следующего замечания. Если положить

$$L(w) = z^n w^{(n)} + b_1 z^{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + b_n w,$$

то

$$L(z^\lambda) = f(\lambda)\, z^\lambda,$$

где f — определяющий многочлен:

$$f(\lambda) = \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2)\, b_1 + \ldots + b_n.$$

Следовательно, z^μ есть решение, если $f(\mu) = 0$. Если все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения $f(\lambda) = 0$ различны, то функции $z^{\lambda_1}, \ldots, z^{\lambda_n}$ образуют фундаментальное множество для уравнения Эйлера. Если μ — корень кратности 2, то

$$f(\mu) = f'(\mu) = 0.$$

Но

$$L\left(\frac{\partial}{\partial\lambda} z^\lambda\right) = L(z^\lambda \ln z) = \frac{\partial}{\partial\lambda} L(z^\lambda) = [f'(\lambda) + (\ln z) f(\lambda)]\, z^\lambda$$

и, следовательно, $z^\mu \ln z$ является в этом случае другим решением. Продолжая таким образом, можно получить фундаментальное множество для уравнения Эйлера. Эта идея может быть обобщена для получения фундаментального множества решений произвольного уравнения порядка n, для которого начало координат есть регулярная особая точка; см. § 8.

Следует заметить, что если z_0 — особая точка первого рода для уравнения (5.1), то z_0 может не быть особой точкой первого рода для соответствующей (5.1) системы первого порядка (см. § 6 гл. I).

В самом деле, только в том случае, когда коэффициенты a_k имеют в точке z_0 не более чем простые полюсы, это будет верно. Однако существует соответствующая (5.1) система первого порядка, обладающая тем свойством, что если z_0 — особая точка первого рода, то z_0 есть особая точка первого рода для системы.

Предположим, что (5.1) имеет в точке z_0 не более чем особенность первого рода, и пусть ψ — решение уравнения (5.1). Определим вектор $\hat{\varphi}$ с компонентами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ так:

$$\varphi_k = (z - z_0)^{k-1} \varphi^{(k-1)} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{5.3}$$

Тогда, очевидно,

$$(z - z_0) \varphi_k' = (k - 1) \varphi_k + \varphi_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \tag{5.4}$$

$$(z - z_0) \varphi_n' = (n - 1) \varphi_n - \sum_{m=1}^{n} b_{n-m+1}(z) \varphi_m.$$

Поэтому вектор $\hat{\varphi}$ является решением линейной системы

$$w' = A(z) w, \tag{5.5}$$

где A имеет вид

$$A(z) = (z - z_0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -b_n & -b_{n-1} & \cdot & \cdot & \ldots & (n-1) - b_1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Очевидно, матрица $(z - z_0)A$ аналитична и не обращается в нуль в точке z_0 и поэтому система (5.5), (5.6) имеет в точке z_0 особенность первого рода. Из теоремы 2.1. следует, что z_0 — регулярная особая точка для (5.5). Так как элементы первой строки любой фундаментальной матрицы для (5.5) образуют n линейно независимых решений уравнения (5.1) [см. (5.3), (5.4)], то каждое решение (5.1) вблизи z_0 есть конечная линейная комбинация членов вида

$$(z - z_0)^r (\ln (z - z_0))^k p(z), \tag{5.7}$$

где r — постоянная (в общем случае комплексная), k — неотрицательное целое число, не превосходящее $n - 1$, и функция p аналитична в точке z_0, $p(z_0) \neq 0$.

Если каждое решение уравнения (5.1) может быть представлено вблизи z_0 как конечная линейная комбинация членов вида (5.7), где r и p определены выше, то говорят, что z_0 есть *регулярная особая точка* для (5.1). Таким образом, предыдущие соображения доказывают следующий аналог теоремы 2.1.

Теорема 5.1. *Если уравнение* (5.1) *имеет в точке* z_0 *особенность не более чем первого рода, то* z_0 *есть регулярная особая точка для* (5.1).

Из результатов § 1 следует, что в любом случае решение уравнения (5.1) должно быть линейной комбинацией членов вида (5.7), но с функциями p, имеющими, возможно, существенную особенность в точке z_0, так что p представляется рядом Лорана, а не обязательно степенным рядом. В случае если функции p не могут все быть выбраны аналитическими в точке z_0, говорят, что уравнение (5.1) имеет в точке z_0 *иррегулярную особенность*.

Имеет также место обращение теоремы 5.1.

Теорема 5.2. *Если z_0 — регулярная особая точка для уравнения* (5.1), *то* (5.1) *имеет в z_0 не более чем особенность первого рода.*

Доказательство. Предположим, что коэффициенты a_k в (5.1) связаны с b_k посредством равенства (5.2). Мы не предполагаем теперь, что коэффициенты b_k аналитичны *в точке* z_0, но предполагаем, что b_k аналитичны и однозначны в окрестности точки z_0, исключая эту точку. В таком случае очевидно, что система (5.5), (5.6) удовлетворяет условиям теоремы 1.1. Так как элемент первой строки любого вектора-решения системы (5.5) есть решение уравнения (5.1), то из этой теоремы и формул (1.10), (1.11) следует, что существует решение φ_1 уравнения (5.1), имеющее вблизи z_0 вид

$$\varphi_1(z) = (z - z_0)^r p(z),$$

где функция p однозначна и аналитична вблизи z_0, исключая эту точку. Но так как z_0 — регулярная особая точка, то это решение должно иметь вид

$$\varphi_1(z) = (z - z_0)^s q(z), \tag{5.8}$$

где s — постоянная и функция q аналитична в точке z_0, $q(z_0) \neq 0$.

Если φ — произвольное решение уравнения (5.1) вблизи z_0 и

$$\varphi = \varphi_1 \psi$$

(вариация параметров), то функция ψ должна быть решением уравнения

$$\sum_{m=0}^{n} c_{n-m}(z) \tilde{w}^{(m)} = 0, \tag{5.9}$$

где

$$c_{n-m} = a_{n-m}\varphi_1 + (m+1)a_{n-m-1}\varphi_1' + \ldots + \binom{n-1}{n-m-1} a_1 \varphi_1^{(n-m-1)} + \\ + \binom{n}{m} \varphi_1^{(n-m)} \quad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{5.10}$$

Однако из (5.10) следует

$$c_n = a_n \varphi_1 + a_{n-1}\varphi_1' + \ldots + a_1 \varphi_1^{(n-1)} + \varphi_1^{(n)},$$

что равно нулю, ибо φ_1 удовлетворяет (5.1). Таким образом, (5.9)

действительно представляет собой линейное уравнение порядка $n-1$ для $\tilde{w}'$. Полагая $u = \tilde{w}'$ и деля (5.9) на φ_1, получаем уравнение

$$\sum_{m=0}^{n-1} d_{n-m-1}(z)\, u^{(m)} = 0\,, \tag{5.11}$$

где

$$d_0 = 1\,,$$

$$d_k = \frac{c_k}{\varphi_1} = a_k + (n-k+1)\, a_{k-1}\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \ldots + \binom{n}{n-k}\frac{\varphi_1^{(k)}}{\varphi_1}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)\,. \tag{5.12}$$

Теперь доказательство проводится по индукции. Рассмотрим случай $n = 1$:

$$w' + a_1(z)\, w = 0\,, \tag{5.13}$$

где a_1 — аналитическая и однозначная функция вблизи z_0, исключая эту точку. Если решение φ_1 вида (5.8) подставить в (5.13), то получим

$$(z - z_0)\, a_1(z) = -s - (z - z_0)\frac{q'(z)}{q(z)}\,.$$

Поэтому функция $(z - z_0)a_1$ аналитична в точке z_0, что доказывает теорему для $n = 1$.

Предположим, что теорема верна для уравнений порядка $n-1$. Так как z_0 — регулярная особая точка для (5.1), то она остается регулярной для (5.11), ибо уравнение (5.11) имеет своими решениями функции $(\varphi_i/\varphi_1)'$, $i = 2, \ldots, n$, где $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — n линейно независимых решений (5.1), а φ_1 — функция, определенная формулой (5.8). Если бы функции $(\varphi_i/\varphi_1)'$ были линейно зависимы, то существовали бы постоянные c_i, такие, что $\sum_{i=2}^{n} c_i(\varphi_i/\varphi_1)' = 0$. Интегрируя это равенство, получаем линейную зависимость функций φ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, что невозможно. Таким образом, производные $(\varphi_i/\varphi_1)'$ образуют фундаментальное множество для (5.11). Эти производные $(\varphi_i/\varphi_1)'$ представляют собой, по предположению, суммы выражений вида

$$(z - z_0)^a\,(\ln(z - z_0))^b\,\frac{\tilde{p}(z)}{p(z)}\,,$$

где a — постоянная, b — целое, $p(z_0) \neq 0$, $\tilde{p}$ — аналитическая функция в точке z_0. Следовательно, по предположению индукции, коэффициенты d_k в (5.11) имеют в точке z_0 полюс не более k-го порядка. Полагая в (5.12) $k = 1$, получаем, что a_1 имеет полюс не более первого порядка. Замечая, что $\varphi_1^{(k)}/\varphi_1$ имеет в z_0 полюс не более k-го порядка, из (5.12) по индукции находим, что a_k должен иметь в z_0 полюс не более k-го порядка, а это доказывает теорему. [Формула (5.12) справедлива для $k = n$, если d_n положить равным нулю.]

Если z_0 — регулярная особая точка для (5.1), то можно произвести эффективное вычисление фундаментального множества, рас-

смотрев соответствующую систему (5.5), (5.6) и применив затем теоремы 4.1 и 4.2. Если система (5.5) записана в виде

$$w' = \left[(z - z_0)^{-1} R + \sum_{m=0}^{\infty} (z - z_0)^m A_m\right] w,$$

где R и A_m — постоянные матрицы, то R есть вычет матрицы A в точке z_0. Если функции b_k в (5.2) имеют вид

$$b_k(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{km} z^m \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

то характеристическое уравнение $\det(\lambda E - R) = 0$ для R в развернутом виде записывается так:

$$\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1) + \\ + b_{10}\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 2) + \ldots + b_{(n-1)0}\lambda + b_{n0} = 0. \quad (5.14)$$

Это уравнение называется *определяющим уравнением для* (5.1) относительно регулярной особой точки z_0. Как показано в § 4, природа корней определяющего уравнения определяет сложность решений уравнения (5.1). Если корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения (5.14) различны и не разнятся на положительные целые числа, то множество n линейно независимых решений уравнения (5.1) дается в виде

$$\varphi_i = (z - z_0)^{\lambda_i} p_i \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

где функции p_i могут быть разложены вблизи z_0 в степенные ряды и $p_i(z_0) \neq 0$. В более сложных ситуациях, когда в решениях появляются логарифмы, эффективный подсчет может быть облегчен использованием методов, подобных методу Фробениуса, кратко описываемому в § 8.

§ 6. ОСОБЕННОСТИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

Говорят, что функция f аналитична в ∞, если ее можно представить степенным рядом

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{c_j}{z^j},$$

который сходится для достаточно больших $|z|$. Функция f имеет в ∞ нуль порядка m, если $c_m \neq 0$, а $c_j = 0$ при $j < m$, и имеет в ∞ полюс порядка m, если функция $z^{-k}f$ аналитична в ∞ при $k = m$, но не при $k < m$. Таким образом, функция f аналитична в ∞, если функция g, определенная равенством $g(z) = f(1/z)$, аналитична в точке 0, и имеет нуль или полюс в ∞ некоторого порядка, если g имеет нуль или полюс в точке 0 того же порядка.

Чтобы изучить поведение системы

$$w' = A(z)\, w \qquad (6.1)$$

или уравнения порядка n

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(z)\, w^{(m)} = 0 \tag{6.2}$$

в окрестности изолированной особенности при $z = \infty$, делают подстановку $z = 1/\zeta$ и получают новую систему или уравнение с функциями-решениями от ζ, называемую *порожденной* подстановкой $z = 1/\zeta$ системой или уравнением. Точка $z = \infty$ называется особенностью некоторого типа для (6.1) или (6.2), если точка $\zeta = 0$ есть особенность того же типа для соответствующей порожденной системы или уравнения. Например, в случае системы (6.1), если $z = 1/\zeta$, $\widetilde{w}(\zeta) = w(1/\zeta)$, $\widetilde{A}(\zeta) = A(1/\zeta)$, порожденная система, соответствующая (6.1), имеет вид

$$\frac{d\widetilde{w}}{d\zeta} = -\frac{\widetilde{A}(\zeta)}{\zeta^2}\,\widetilde{w}. \tag{6.3}$$

Теорема 6.1. *Для того чтобы система* (6.1) *имела особую точку первого рода при $z = \infty$, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была аналитической при $z = \infty$ и $A(\infty) = 0$.*

Доказательство. Порожденная система (6.3) имеет при $\zeta = 0$ особенность первого рода в том и только в том случае, если матрица $\widetilde{A}$ аналитична при $\zeta = 0$ и $\widetilde{A}(0) = 0$. Так как $A(1/\zeta) = \widetilde{A}(\zeta)$, то это доказывает теорему.

Теорема 6.2. *Для того чтобы точка $z = \infty$ была регулярной особой точкой уравнения*

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(z)\, w^{(m)} = 0 \qquad (a_0(z) \equiv 1),$$

необходимо и достаточно, чтобы каждый коэффициент a_k был аналитичным при $z = \infty$ и имел в этой точке нуль не менее k-го порядка.

Доказательство. Если $b_k(z) = z^k a_k(z)$, то предыдущее условие для a_k эквивалентно условию, что функции b_k все аналитичны при $z = \infty$. Дифференциальное уравнение может быть записано в виде

$$\sum_{m=0}^{n} z^m\, b_{n-m}(z)\, w^{(m)} = 0 \qquad (b_0(z) \equiv 1). \tag{6.4}$$

Положим $z = 1/\zeta$, $\widetilde{w}(\zeta) = w(1/\zeta)$, $\widetilde{b}_{n-m}(\zeta) = b_{n-m}(1/\zeta)$. Тогда по индукции нетрудно получить, что

$$(z^m w^{(m)})_{z=1/\zeta} = (-1)^m \zeta^m \widetilde{w}^{(m)}(\zeta) + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{jm} \zeta^j \widetilde{w}^{(j)}(\zeta),$$

где a_{jm} — постоянные. Поэтому (6.4) в результате подстановки $z = 1/\zeta$ преобразуется в уравнение

$$\sum_{m=0}^{n} \zeta^m c_{n-m}(\zeta) \tilde{w}^{(m)} = 0 \qquad (c_0(\zeta) \equiv 1), \tag{6.5}$$

где

$$(-1)^n c_{n-m} = (-1)^m \tilde{b}_{n-m} + \sum_{j=m+1}^{n} a_{mj} \tilde{b}_{n-j} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{6.6}$$

Далее, $\zeta = 0$ — регулярная особая точка для (6.5) тогда и только тогда, когда каждый коэффициент c_k аналитичен при $\zeta = 0$; в силу же (6.6) это справедливо тогда и только тогда, когда каждый коэффициент $\tilde{b}_k$ аналитичен при $\zeta = 0$. Но последнее утверждение имеет место тогда и только тогда, когда каждый коэффициент b_k аналитичен при $z = \infty$, что доказывает теорему.

Интересно выяснить структуру матрицы A в (6.1) в том случае, когда $k+1$ различных точек $z_1, z_2, \ldots, z_k, \infty$ являются изолированными особенностями первого рода для (6.1) и других особенностей система (6.1) не имеет. Такая система называется *системой типа Фукса.*

Теорема 6.3. *Система* (6.1) *имеет изолированные особенности первого рода в различных точках* $z_1, \ldots, z_k, \infty$ *и не имеет других особых точек в том и только в том случае, когда матрица* A *имеет вид*

$$A(z) = \sum_{m=1}^{k} (z - z_m)^{-1} R_m, \tag{6.7}$$

где R_m *— постоянные матрицы.*

Доказательство. Во-первых, очевидно, что если A имеет вид (6.7), то (6.1) имеет изолированные особенности первого рода в точках $z_1, \ldots, z_k$; так как матрица A аналитична при $z = \infty$ и $A(\infty) = 0$, то из теоремы 6.1 следует, что (6.1) имеет при $z = \infty$ особенность первого рода. Очевидно, что в этом случае это единственные особенности для (6.1).

Наоборот, предположим, что (6.1) имеет изолированные особенности первого рода в точках $z_1, \ldots, z_k, \infty$ и не имеет других особых точек. Таким образом, матрица A имеет простые полюсы в точках $z_1, \ldots, z_k$; пусть R_m — вычет A относительно z_m. В таком случае матрица-функция F, определенная равенством

$$F(z) = A(z) - \sum_{m=1}^{k} (z - z_m)^{-1} R_m, \tag{6.8}$$

должна быть целой функцией. Так как $z = \infty$ — также особенность первого рода, то, по теореме (6.1), матрица A аналитична при $z = \infty$ и $A(\infty) = 0$. Из (6.8) следует, что матрица F должна быть

аналитической при $z = \infty$. По теореме Лиувилля F должна быть постоянной, и, так как $F(\infty) = 0$, $F(z) \equiv 0$. Это доказывает теорему.

Для случая $k = 1$ система (6.1), где матрица A определяется по формуле (6.7), имеет вид

$$w' = (z - z_1)^{-1} R_1 w.$$

Эта система имеет фундаментальную матрицу $\Phi = (z - z_1)^{R_1}$. Для случая $k \neq 1$ эта нелокальная задача много труднее и не будет здесь изучаться.

Соответствующий результат для уравнения порядка n дается в следующей теореме.

Теорема 6.4. *Для того чтобы уравнение*

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(z)\, w^{(m)} = 0 \qquad (a_0(z) \equiv 1) \tag{6.9}$$

имело регулярные особые точки в различных точках $z_1, \ldots, z_k, \infty$ и не имело других особенностей, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты a_h имели вид

$$a_h(z) = \prod_{m=1}^{k} (z - z_m)^{-h}\, b_h(z) \quad (h = 1, \ldots, n), \tag{6.10}$$

где b_h — многочлен не более чем $h(k-1)$-й степени.

Доказательство. Из теорем 5.1, 5.2 следует, что необходимое и достаточное условие того, что точки $z_1, \ldots, z_k$ являются регулярными особыми точками уравнения (6.9), заключается в том, что функции $b_h(z) = \prod_{m=1}^{k} (z - z_m)^h a_h(z)$ аналитичны для всех конечных z. Из теоремы 6.2 следует, что для того, чтобы точка $z = \infty$ была регулярной особой точкой, необходимо и достаточно, чтобы функции $\tilde{a}_h = z^h a_h$ были аналитическими при $z = \infty$. Поэтому $z = \infty$ есть регулярная особая точка для (6.9) в том и только в том случае, если

$$b_h = z^{-h} \prod_{m=1}^{k} (z - z_m)^h\, \tilde{a}_h, \tag{6.11}$$

где функция $\tilde{a}_h$ аналитична при $z = \infty$ и функция b_h аналитична в каждой конечной части z-плоскости. Но (6.11) эквивалентно равенству

$$b_h = z^{h(k-1)} \prod_{m=1}^{k} \left(1 - \frac{z_m}{z}\right)^h \tilde{a}_h,$$

и, так как функция $\prod_{m=1}^{k} (1 - z_m/z)^h \tilde{a}_h$ аналитична при $z = \infty$, это равенство может иметь место в том и только в том случае, когда b_h являются многочленами от z не более чем $h(k-1)$-й степени. Это доказывает теорему.

§ 7. ПРИМЕР. УРАВНЕНИЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Проиллюстрируем предыдущий материал на случае линейного уравнения второго порядка

$$w'' + f(z)\,w' + g(z)\,w = 0. \tag{7.1}$$

В силу теоремы 6.4, для того чтобы различные точки $z_1, \ldots, z_k, \infty$ были регулярными особыми точками для (7.1), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство $f = \prod_{m=1}^{k} (z - z_m)^{-1} \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ — многочлен не более чем $(k-1)$-й степени, а вид g указан ниже. Таким образом, функция f может быть представлена в виде суммы элементарных дробей:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{a_m}{(z - z_m)} \quad (a_m \text{ — постоянные}). \tag{7.2}$$

Аналогично,

$$g(z) = \sum_{m=1}^{k} \frac{b_m}{(z - z_m)^2} + \sum_{m=1}^{k} \frac{c_m}{(z - z_m)}, \tag{7.3}$$

где b_m, c_m — постоянные. Легко видеть, что для того, чтобы функция $z^2 g$ была аналитична при $z = \infty$, необходимо и достаточно выполнение равенства $\sum_{m=1}^{k} c_m = 0$.

В случае, когда уравнение (7.1) имеет две регулярные особые точки, скажем $z = 0$ и $z = \infty$, $k = 1$ и (7.1) принимает вид

$$z^2 w'' + a_1 z w' + b_1 w = 0,$$

где a_1, b_1 — постоянные. Это — уравнение Эйлера, рассмотренное в начале § 5.

Предположим, что уравнение (7.1) имеет в точности три регулярные особые точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1$ и $z = \infty$. Тогда (7.1) имеет вид [см. (7.2) и (7.3)]

$$z^2 (z-1)^2 w'' + (az + b)\, z(z-1)\, w' + (cz^2 + dz + e)\, w = 0, \tag{7.4}$$

где $a, \ldots, e$ — постоянные. Обычно рассматривают уравнение (7.4) в нормальном виде. Определяющие уравнения для (7.4) относительно точек $z = 0$ и $z = 1$ имеют соответственно вид:

$$\lambda(\lambda - 1) - \lambda b + e = 0 \tag{7.5}$$

и

$$\lambda(\lambda - 1) + \lambda(a + b) + (c + d + e) = 0. \tag{7.6}$$

Пусть r — корень уравнения (7.5), так что (7.4) имеет решение вида

$$z^r + c_1 z^{r+1} + \ldots. \tag{7.7}$$

То, что такое решение всегда существует, следует из теоремы 4.1 (или, более непосредственно, из рассмотрений начала § 8). Пусть s —

аналогичный корень уравнения (7.6). Пусть $\tilde{w} = wz^{-r}(z-1)^{-s}$. Тогда дифференциальное уравнение для $\tilde{w}$, полученное из (7.4), должно иметь такой же вид, как и (7.4), ибо подстановка переводит все аналитические решения в аналитические, за исключением, возможно, точек $z = 0$, 1 или ∞, и сохраняет регулярный характер особенностей решений в точках $z = 0$, 1 и ∞. Кроме того, так как уравнение для $\tilde{w}$ имеет соответствующее (7.7) решение вида $1 + c_1 z + \ldots$, то нуль есть корень определяющего уравнения в точке $z = 0$, соответствующего уравнению (7.5). Таким образом, в уравнении для $\tilde{w}$ постоянная, соответствующая e, должна равняться нулю. Аналогичный результат имеет место для постоянной, соответствующей $c + d + e$ в уравнении (7.6).

В результате указанной подстановки уравнение (7.4) примет вид

$$z(z-1)w'' + (az+b)w' + cw = 0,$$

а если ввести новые постоянные α, β, γ, то получим

$$z(1-z)w'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)z]w' - \alpha\beta w = 0. \tag{7.8}$$

Это — *гипергеометрическое уравнение*, теория которого разработана детально[1].

Положим в (7.8) $\zeta = \beta z$, $\tilde{w}(\zeta) = w(\zeta/\beta)$. Тогда уравнение (7.8) преобразуется в следующее уравнение для $\tilde{w}$

$$\zeta\left(1-\frac{\zeta}{\beta}\right)\tilde{w}'' + \left[\gamma - \zeta - \frac{(\alpha+1)}{\beta}\zeta\right]\tilde{w}' - \alpha\tilde{w} = 0 \quad \left(' = \frac{d}{d\zeta}\right). \tag{7.9}$$

Уравнение (7.9) имеет регулярные особые точки при $\zeta = 0$, β, ∞, и если $\beta \to \infty$, то из (7.9) формально получаем

$$\zeta\tilde{w}'' + (\gamma - \zeta)\tilde{w}' - \alpha\tilde{w} = 0. \tag{7.10}$$

Для этого уравнения $\zeta = 0$ есть регулярная особая точка, но $\zeta = \infty$ — иррегулярная особая точка. Других особых точек уравнение (7.10) не имеет. Уравнение (7.10) представляет собой одну из форм уравнения, называемого в силу очевидных соображений *вырожденным гипергеометрическим уравнением.*

§ 8. МЕТОД ФРОБЕНИУСА

Обобщение на произвольные уравнения порядка n второго метода отыскания решений уравнения Эйлера (§ 5) называется методом Фробениуса. Если предположить, что начало координат есть регулярная особая точка, то уравнение порядка n принимает вид

$$z^n w^{(n)} + z^{n-1} b_1 w^{(n-1)} + \ldots + b_n w = 0, \tag{8.1}$$

[1] См. Copson E. T., An introduction to the theory of functions of a complex variable, New York, 1935, Ch. 10. (См. также Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н., Курс современного анализа, т. II, ГТТИ, М.—Л., 1934. гл. 14. — *Прим. перев.*)

где коэффициенты b_j аналитичны в окрестности начала. Пусть

$$L(w) = z^n w^{(n)} + z^{(n-1)} b_1 w^{(n-1)} + \ldots + b_n w$$

и

$$b_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_{jk} z^k \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Определяющее уравнение, соответствующее (8.1), имеет вид

$$\lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 1) + \\ + b_{10} \lambda(\lambda - 1) \ldots (\lambda - n + 2) + \ldots + b_{(n-1)0} \lambda + b_{n0} = 0.$$

Обозначим через $f(\lambda)$ многочлен, стоящий в левой части этого уравнения. Если для $j = 1, \ldots, n$ имеют место равенства

$$b_{jk} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

то (8.1) — уравнение Эйлера. Мы видели, что в этом случае

$$L(z^\lambda) = f(\lambda) z^\lambda$$

и z^λ есть решение уравнения $L(w) = 0$, если $f(\lambda) = 0$. В более общем случае уравнения (8.1) пытаются найти формальный ряд

$$\varphi(z) = z^\lambda \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j \qquad (c_0 = 1),$$

такой, что

$$L(\varphi) = f(\lambda) z^\lambda.$$

Это является основной идеей метода Фробениуса.

Подстановка формального ряда для φ в L дает выражение

$$L(\varphi) = f(\lambda) z^\lambda + \\ + [f(\lambda + 1) c_1 - g_1] z^{\lambda+1} + \ldots + [f(\lambda + j) c_j - g_j] z^{\lambda+j} + \ldots, \tag{8.3}$$

где функции g_j зависят линейно от $c_1, \ldots, c_{j-1}$ с полиномиальными относительно λ коэффициентами. Уравнения

$$f(\lambda + j) c_j = g_j \qquad (j = 1, 2, \ldots) \tag{8.4}$$

образуют рекуррентную систему, из которой можно выразить коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$ как функции λ при всех λ, за исключением, возможно, нулей функций $f(\lambda + j)$. Очевидно, что так определенные c_j представляют собой рациональные функции λ, и (8.3) принимает вид

$$L(\varphi) = f(\lambda) z^\lambda. \tag{8.5}$$

Если λ_1 — корень определяющего уравнения $f(\lambda) = 0$ и $f(\lambda_1 + j) \neq 0$, $j \geq 1$, то из (8.5) следует, что φ есть формальное и, следовательно, истинное решение уравнения $L(w) = 0$, которое мы обозначим через φ_1.

Рассмотрим равенство (8.5) вблизи точки λ_1 и продифференцируем обе части по λ. Получим

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} L(\varphi) = (f'(\lambda) + (\ln z) f(\lambda)) z^{\lambda},$$

и если принять во внимание формальную коммутативность:

$$\frac{\partial L(\varphi)}{\partial\lambda} = L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right),$$

то придем к формальному соотношению

$$L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\right) = (f'(\lambda) + (\ln z) f(\lambda)) z^{\lambda}. \tag{8.6}$$

Если λ_1 — двойной корень уравнения $f(\lambda) = 0$, то $f(\lambda_1) = f'(\lambda_1) = 0$, и (8.6) показывает, что значение производной $\partial\varphi/\partial\lambda$ при $\lambda = \lambda_1$ есть формальное, а следовательно, и истинное решение уравнения $L(w) = 0$. Это решение имеет вид

$$(\ln z)\varphi_1 + \varphi_2,$$

где

$$\varphi_2(z) = z^{\lambda_1} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial c_j}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=\lambda_1} z^j.$$

Если λ_1 — корень кратности m, то легко видеть, что для получения m решений следует дифференцировать $m-1$ раз относительно λ.

В случае, когда λ_2 — также корень уравнения $f(\lambda) = 0$ и $\lambda_1 - \lambda_2 = k$ — целое положительное число, предыдущие соображения не могут быть использованы для корня λ_2, ибо функция $f(\lambda_2 + j)$ обращается в нуль при $j = k$. Пусть $f(\lambda_2 + j) \neq 0$ для $1 \leq j < k$ и для $j > k$. Пусть m — кратность корня λ_1 уравнения $f(\lambda) = 0$. Рассмотрим теперь формальный ряд

$$\varphi(z) = (\lambda - \lambda_2)^m z^{\lambda} + c_1 z^{\lambda+1} + c_2 z^{\lambda+2} + \ldots .$$

Тогда тот же процесс, который дал (8.5), теперь приводит к равенству

$$L(\varphi) = f(\lambda)(\lambda - \lambda_2)^m z^{\lambda}. \tag{8.7}$$

Кроме того, уравнения (8.4) теперь определяют $c_1, c_2, \ldots, c_{k-1}$ с множителем $(\lambda - \lambda_2)^m$. Однако для c_k уравнение имеет вид

$$f(\lambda + k) c_k = g_k,$$

и $(\lambda - \lambda_2)^m$ является множителем не только для g_k, но и для $f(\lambda + k)$. Таким образом, c_k определяется как рациональная функция λ и не имеет своим полюсом λ_2. Теперь легко определить члены c_j, $j > k$, которые также не имеют λ_2 своим полюсом.

Ряд для φ имеет теперь в своих первых k членах множитель $(\lambda - \lambda_2)^m$, а последующие члены не обязательно содержат этот множитель. Если λ взять равным λ_2, то (8.7) показывает, что φ есть решение. Однако первые k членов φ обращаются в нуль, так что φ

может иметь своим первым членом относительно z только z^{λ_1}. На самом деле решение, найденное этим способом, есть просто кратное решения φ_1, найденного выше.

Чтобы найти решение, действительно соответствующее корню λ_2, следует рассмотреть m-ю производную относительно λ равенства (8.7):

$$L\left(\frac{\partial^m \varphi}{\partial \lambda^m}\right) = m!\, f(\lambda)\, z^\lambda + I\,, \tag{8.8}$$

где функция I содержит разность $(\lambda - \lambda_2)$ в качестве множителя. Полагая $\lambda = \lambda_2$, получаем

$$L(\varphi_{m+1}) = 0\,,$$

где φ_{m+1} — значение производной $\partial^m\varphi/\partial\lambda^m$ при $\lambda = \lambda_2$. Первый член φ_{m+1} есть $m!\, z^{\lambda_2}$, и таким образом найдено решение, отличное от любого решения, соответствующего λ_1. Заметим, что в φ_{m+1} степени z^{λ_2+j}, $j \geq k$, могут быть умножены на степени $\ln z$ вплоть до m-й.

Если $f(\lambda)$ имеет λ_2 кратным корнем, то высшие производные функции φ относительно λ дадут, очевидно, дальнейшие решения.

Случай, когда три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ отличаются на целые числа, предлагается как упражнение, точно так же как общая формулировка метода.

Задачи

1. Рассмотрим систему

$$z^n w^{(n)} + z^{n-1} B_1 w^{(n-1)} + \ldots + B_n w = 0,$$

где B_i — квадратные постоянные матрицы порядка m и w — m-мерный вектор. Вычислить фундаментальное множество для этой системы.

2. Рассмотреть детально систему

$$z^n w^{(n)} + z^{n-1} B_1 w^{(n-1)} + \ldots + B_n w = 0,$$

где B_i — аналитические (вблизи начала) квадратные матрицы порядка m и w — m-мерный вектор.

3. Предположим, что уравнение (5.1) имеет не более чем особенность первого рода в точке z_0. Положить $z - z_0 = e^s$ и найти затем систему, соответствующую преобразованному уравнению. Показать, что она имеет вид

$$(z - z_0)w' = A(z)w,$$

где

$$A(z) = A_0 + (z - z_0)\, A_1 + (z - z_0)^2\, A_2 + \ldots .$$

Подсчитать характеристическое уравнение для A_0 и показать, что оно совпадает с определяющим уравнением (5.14).

4. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$w'' + f(z)w' + g(z)w = 0.$$

Каким условиям функции f и g должны удовлетворять на ∞, чтобы эта точка была аналитической для уравнения (*)? Показать, что если обе функции f и g не равны тождественно нулю (и аналитичны всюду, кроме начала) и ∞ — аналитическая точка, то начало должно быть особой точкой для уравнения (*). Изучить возможную природу особенности в начале.

5. Показать, что ряд

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} z^2 + \ldots$$

есть решение гипергеометрического уравнения. Вывести из (7.8), что ряд $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ как функция z может иметь особенности только при $z = 1$ и $z = \infty$.

6. Показать, что для надлежащим образом ограниченных значений β, γ и z

$$\frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-zt)^{-\alpha}\, dt.$$

7. В уравнении (7.10) положим $w = \zeta^{(1/2)\gamma} e^{-(1/2)\zeta} \tilde{w}$. Показать, что уравнение для w имеет вид

$$\frac{d^2 w}{d\zeta^2} + \left[-\frac{1}{4} + \frac{k}{\zeta} + \frac{\frac{1}{4} - m^2}{\zeta^2}\right] w = 0,$$

где $m = \frac{1}{2}(\gamma - 1)$ и $k = \frac{1}{2}\gamma - \alpha$ (см. задачу 17 гл. III).

8. Уравнение Бесселя имеет вид

$$w'' + \frac{1}{z} w' + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) w = 0.$$

Показать, что если $w = z^{-1/2} u$, то

$$u'' + \left(1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{z^2}\right) u = 0.$$

9. Показать, что если $w = z^n v$, то уравнение Бесселя принимает вид

$$zv'' + (2n+1)v' + zv = 0.$$

10. Найти два ряда-решения для уравнения Бесселя, годных для малых $|z|$ в случае нецелого n.

11. Классифицировать особые точки для уравнения Лежандра

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + n(n+1)w = 0$$

и для присоединенного уравнения Лежандра

$$(1-z^2)w'' - 2zw' + \left[n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2}\right] w = 0.$$

12. Для уравнения, коэффициенты которого «почти» постоянны и которое рассмотрено в задачах 29 и 35 гл. III, существует регулярная особая точка. Показать это для регулярной точки при $z = \infty$, преобразовав уравнение

$$\frac{dw}{dz} = \left(\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots\right) w$$

в уравнение

$$\frac{dw}{ds} = (A_0 + A_1 e^{-s} + \ldots) w.$$

13. Пусть $A(z) = R/z + A_0 + A_1 z + \ldots$, где $R, A_0, \ldots$ — постоянные квадратные матрицы. Пусть ψ обозначает формальный ряд $s_0 z^\lambda + s_1 z^{\lambda+1} + \ldots$, где s_j — векторы. Показать, что $s_1, s_2, \ldots$ могут быть выбраны как рациональные функции λ так, что

$$\left[E\frac{d}{dz} - A(z)\right]\psi = (\lambda E - R)\, s_0 z^{\lambda-1}.$$