Пусть λ_1 — характеристический корень матрицы R, а числа $\lambda_1 + j$, $j \geq 1$, не являются характеристическими корнями. Выбирая $\lambda = \lambda_1$ и $s_0 = p_1$, где p_1 — характеристический вектор:

$$Rp_1 = \lambda_1 p_1,$$

показать, так же как при исследовании уравнения порядка n по методу Фробениуса, что ψ становится при этом истинным решением ψ_1 уравнения $w' - A(z)w = 0$.

Если в этой задаче λ_1 — кратный корень и если

$$Rp_j = \lambda_1 p_j + p_{j-1}, \quad j = 2, 3, \ldots, l,$$

то последующее решение может быть получено при рассмотрении уравнения

$$\left[E\frac{d}{dz} - A(z)\right]\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} = (\lambda E - R)\, s_0 z^{\lambda-1} \ln z + s_0 z^{\lambda-1}.$$

Если в этом уравнении положено $s_0 = p_1$, $\lambda = \lambda_1$ и если $\partial\psi/\partial\lambda$ обозначено затем через φ_1, то

$$\left[E\frac{d}{dz} - A(z)\right]\varphi_1 = p_1 z^{\lambda_1 - 1}.$$

(Заметим, что φ_1 содержит ряд с множителем $\ln z$.) Из уравнения

$$\left[E\frac{d}{dz} - A(z)\right]\psi = (\lambda E - R)\, s_0 z^{\lambda-1}$$

следует теперь, если положить $s_0 = p_2$, $\lambda = \lambda_1$ и обозначить ψ через $\tilde{\psi}_2$, что

$$\left[E\frac{d}{dz} - A(z)\right]\tilde{\psi}_2 = (\lambda_1 E - R)\, p_2 z^{\lambda_1 - 1} = -p_1 z^{\lambda_1 - 1}.$$

Итак, $\varphi_1 + \tilde{\psi}_2$ есть решение уравнения $w' - A(z)w = 0$. Распространить предыдущую процедуру на случай, когда $l > 2$.

Пусть λ_2 — характеристический корень, такой, что разность $\lambda_1 - \lambda_2 = k$ есть целое положительное число, а числа $\lambda_2 + j$ при $1 \leq j < k$ и $j > k$ не являются характеристическими корнями матрицы R. Показать, что если λ_1 — корень кратности m уравнения $\det(\lambda E - R) = 0$, то замена в выражении $\psi(z)$ коэффициента s_0 на $s_0(\lambda - \lambda_2)^m$ ведет к определению решения с первым членом z^{λ_2}.

Глава V

ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ С ИЗОЛИРОВАННЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ. ОСОБЕННОСТИ ВТОРОГО РОДА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно классификации особых точек для линейных систем, данной в гл. IV, точка $z=0$ является особенностью ранга ϱ, если система имеет вид

$$w' = z^{-\varrho-1} B(z)\, w\,, \tag{1.1}$$

где матрица B аналитична при $z=0$ и $B(0)\neq 0$. Эта глава посвящена изучению поведения решений линейных систем в окрестности особенности второго рода, т. е. когда ϱ — положительное целое число. Удобнее будет рассматривать эту особую точку при $z=\infty$, а не в начале. Для этого необходимо сделать подстановку $z=1/\zeta$ (см. § 6. гл. IV). Вводя новые обозначения, получаем

$$w' = z^r A(z)\, w\,, \tag{1.2}$$

где r — неотрицательное целое число и матрица A аналитична при $z=\infty$, $A(\infty)\neq 0$.

Оказывается, что изучение системы (1.2) при $r\geq 0$ много сложнее, чем изучение этой системы при $r=-1$, т. е. в случае особенности первого рода при $z=\infty$. Не легко даже доказать в общем случае, что существуют «формальные» решения системы (1.2) (будет рассмотрен только частный случай). Возникающие здесь реальные трудности объясняются отсутствием аналога теоремы 3.1 гл. IV. Это было продемонстрировано в гл. IV при помощи простого примера, который показывает, что формальное решение системы (1.2) действительно может быть расходящимся рядом. По-видимому, Пуанкаре первый заметил, что даже эти «формальные» расходящиеся выражения имеют некоторый смысл. Он показал для случая уравнения порядка n, что соответственно формальным решениям существуют истинные решения системы (1.2), имеющие формальные решения своими «асимптотическими разложениями». Эти факты будут в дальнейшем уточнены.

Следующий пример дает некоторые указания на метод, используемый в этой главе. Уравнение[1]

$$x'' + \left(1 - \frac{a}{t^2}\right) x = 0\,, \tag{1.3}$$

[1] Система первого порядка, соответствующая уравнению (1.3), имеет вид $x' = A(t)x$, где

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ at^{-2} - 1 & 0 \end{pmatrix};$$

если рассматривать ее для комплексных t, то система будет типа (1.2) при $r=0$.

где a — постоянная и t — действительное число, ведет себя при больших t почти как уравнение с постоянными коэффициентами, получаемое при $a = 0$. Это обстоятельство вместе с результатами, полученными в случае регулярной особой точки, подсказывает, что для больших t решение следует искать в виде ряда

$$\varphi(t) = e^{it}(t^{\sigma} + c_1 t^{\sigma-1} + c_2 t^{\sigma-2} + \ldots) \tag{1.4}$$

и аналогичного выражения, в котором i заменено на $-i$. Формальная подстановка ряда (1.4) в (1.3) дает $\sigma = 0$ и

$$c_{k+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{a - k(k+1)}{k+1}\right) c_k \quad (k \geq 0,\ c_0 = 1). \tag{1.5}$$

Если $a \neq m(m+1)$ для некоторого целого m, то коэффициенты c_k образуют бесконечную последовательность, для которой $|c_{k+1}/c_k| \to \infty$, $k \to \infty$. Поэтому ряд (1.4) расходится для всех $t \neq 0$. Однако, так как коэффициенты c_k, определяемые по формулам (1.5), формально удовлетворяют уравнению (1.3), этот ряд называется формальным решением (1.3).

Если «усечь» два различных решения уравнения (1.3), т. е. бесконечные ряды заменить на конечные суммы, содержащие первые члены, то можно надеяться, что уравнение второго порядка, которому удовлетворяют эти «усеченные» функции, отличается от (1.3) только членами, содержащими большие степени $1/t$. На этом пути можно найти уравнение, «близкое» к (1.3), при помощи формальных решений. Однако для данного примера этот процесс улучшения мы опускаем. Уравнение $x'' + x = 0$ достаточно близко к уравнению (1.3) для того, чтобы получить некоторое представление об истинных решениях уравнения (1.3).

Уравнение (1.3) можно записать в виде

$$x'' + x = \frac{a}{t^2} x. \tag{1.6}$$

Если бы уравнение (1.6) имело решение φ, которое при $t \to \infty$ вело бы себя как e^{it}, то метод вариации произвольных постоянных дал бы

$$\varphi(t) = e^{it} - a \int_t^{\infty} \sin(t - \tau)\, \varphi(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau. \tag{1.7}$$

В самом деле, если φ — непрерывная функция, равномерно ограниченная при $t \to \infty$ и удовлетворяющая (1.7), то прямое вычисление показывает, что φ должна удовлетворять (1.6), а (1.7) показывает, что

$$\varphi(t) - e^{it} \to 0 \qquad (t \to \infty).$$

Чтобы показать, что уравнение (1.7) имеет решение, можно применить метод последовательных приближений:

$$\varphi_0(t) = 0,$$

$$\varphi_{n+1}(t) = e^{it} - a \int_t^{\infty} \sin(t - \tau)\, \varphi_n(\tau)\, \tau^{-2}\, d\tau \quad (n \geq 0). \tag{1.8}$$

Очевидно, что

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leq 1,$$

и индукция показывает, что каждый из интегралов, стоящих справа в (1.8), существует при $1 \leq t < \infty$ и

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{|a|^n}{n!\, t^n} \qquad (n \geq 0,\ 1 \leq t < \infty).$$

Итак, последовательность $\{\varphi_n\}$ сходится равномерно при $1 \leq t < \infty$ к непрерывной предельной функции φ. Так как

$$|\varphi_n(t)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (\varphi_{k+1}(t) - \varphi_k(t)) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|a|^k}{k!\, t^k} < e^{|a|/t} \leq e^{|a|}$$

для $1 \leq t < \infty$, то функция φ равномерно ограничена и

$$|\varphi(t)| \leq e^{|a|} \qquad (1 \leq t < \infty). \tag{1.9}$$

Полагая теперь в (1.8) $n \to \infty$, получаем равенство (1.7).

Это решение уравнения (1.7), которое, как было показано, является также решением уравнения (1.6), удовлетворяет в силу (1.9) и (1.7) неравенству

$$|\varphi(t) - e^{it}| \leq \frac{|a|\, e^{|a|}}{t}.$$

Используя эту оценку в правой части (1.7), получаем

$$\left| \varphi(t) - e^{it} + a \int_t^\infty \sin(t - \tau)\, e^{i\tau} \tau^{-2}\, d\tau \right| \leq \frac{|a|^2 e^{|a|}}{2!\, t^2}.$$

Записав $\sin(t - \tau)$ в экспоненциальной форме и проинтегрировав по частям, приходим к формуле

$$\varphi(t) = e^{it} \left(1 + \frac{ia}{2t}\right) + O(t^{-2}) \quad (t \to \infty), \tag{1.10}$$

где $O(t^{-2})$ представляет функцию g, такую, что выражение $t^2 g(t)$ ограничено при $t \to \infty$. Формула (1.10) показывает, что сумма первых двух членов формального (расходящегося) ряда, определяемого равенствами (1.4) и (1.5), дает для больших t лучшую аппроксимацию решения φ, чем один первый член. Используя в правой части уравнения (1.7) оценку (1.10), найдем, что три члена (1.4) дают еще лучшую аппроксимацию для больших t. На самом деле, хотя ряд (1.4) и расходится, он дает информацию о решении φ в том смысле, что для каждого целого $n \geq 0$

$$\varphi(t) = e^{it} \sum_{k=0}^{n} c_k t^{-k} + O(t^{-n-1}) \quad (t \to \infty),$$

где коэффициенты c_k определяются по формулам (1.5).

В дальнейшем будет видно, что формальные ряды-решения рассмотренного типа типичны для особенности второго рода, и можно

показать, что при помощи вариации произвольных постоянных формальные ряды могут быть связаны с истинными решениями, как это было сделано в предыдущем случае.

Между прочим, уравнение (1.3) имеет решения $t^{1/2}J_\alpha(t)$ и $t^{1/2}Y_\alpha(t)$, где

$$\alpha = \left(a + \frac{1}{4}\right)^{1/2},$$

а J_α и Y_α — решения уравнения Бесселя

$$(tx')' + \left(t - \frac{\alpha^2}{t}\right)x = 0.$$

В случае, когда $\alpha = m + 1/2$ для некоторого целого $m \geq 0$, из (1.5) следует, что ряд (1.4) обрывается, и, значит, в этом случае формула (1.4) дает истинное решение уравнения (1.3), которое выражается через элементарные функции.

§ 2. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Формальные решения системы (1.2), так же как и формальные логарифмические суммы, введенные в § 3 гл. IV, содержат экспоненты многочленов. Формальной *логарифмически-экспоненциальной* суммой u называется конечное выражение вида

$$u = \sum_{j=1}^{k} p_j e^{\mu_j}, \tag{2.1}$$

где p_j — формальные логарифмические суммы, расположенные по степеням $1/z$, и μ_j — различные многочлены от z, причем $\mu_j(0) = 0$. По определению, сумма u идентична с суммой, полученной при помощи любой перестановки членов в (2.1). Если

$$v = \sum_{j=1}^{m} q_j e^{\nu_j}$$

— другая формальная логарифмически-экспоненциальная сумма, то u, по определению, считается *равной* v в том и только в том случае, если $k = m$ и если для некоторой перестановки $i_1, \ldots, i_k$ индексов $1, \ldots, k$ имеем $\mu_j = \nu_{i_j}$ и $p_j = q_{i_j}$ при $j = 1, \ldots, k$. Если $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — различные многочлены, встречающиеся в множестве $\mu_1, \ldots, \mu_k$, $\nu_1, \ldots, \nu_m$, то очевидно, что суммы u и v можно записать в виде

$$u = \sum_{j=1}^{n} p_j e^{\omega_j}, \quad v = \sum_{j=1}^{n} q_j e^{\omega_j},$$

причем некоторые из коэффициентов p_j и q_j могут равняться нулю. *Сумма* $u + v$ определяется так:

$$u + v = \sum_{j=1}^{n} (p_j + q_j) e^{\omega_j}.$$

Если $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ обозначают все различные многочлены, получаемые из всех сумм $\mu_i + \nu_j$ ($i = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, m$), то *произведение* uv определяется так:

$$uv = \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{\mu_i + \nu_j = \sigma_k} p_i q_j \right) e^{\sigma_k}.$$

Производной u' формальной логарифмически-экспоненциальной суммы называется, по определению, формальная логарифмически-экспоненциальная сумма

$$u' = \sum_{j=0}^{k} (p'_j + p_j \mu'_j) e^{\mu_j}.$$

Нетрудно проверить, что из этих определений следует справедливость обычных правил алгебры и дифференциального исчисления для сумм типа (2.1).

Формальной логарифмически-экспоненциальной матрицей U называется матрица, элементами которой u_{ij} служат формальные логарифмически-экспоненциальные суммы. Сумма и произведение двух таких матриц определяются по обычным формальным матричным правилам. Производной U' матрицы U, по определению, называется матрица с элементами u'_{ij}. Из определения очевидно, что множество формальных логарифмически-экспоненциальных матриц замкнуто относительно операций сложения, умножения и дифференцирования. Если $V = (v_{ij})$ — другая формальная логарифмически-экспоненциальная матрица, то, по определению, V равна U тогда и только тогда, когда $u_{ij} = v_{ij}$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Формальной матрицей-решением системы (1.2) называется формальная логарифмически-экспоненциальная матрица, столбцы которой удовлетворяют (1.2) в смысле равенства для таких матриц. Ясно, конечно, что в (1.2) матрица $z^r A(z)$ может рассматриваться как формальная логарифмически-экспоненциальная матрица; в самом деле, ее можно представить вблизи $z = \infty$ как сумму ряда Лорана по степеням $1/z$.

Теорема 2.1. *Для неотрицательных целых чисел r рассмотрим линейную систему*

$$w' = z^r A(z)\, w, \tag{2.2}$$

где A — сходящийся степенной ряд от z^{-1} в некоторой окрестности ∞:

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_k. \tag{2.3}$$

Предположим, что матрица $A_0 \neq 0$ имеет различные характеристические корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Тогда существует формальная матрица-решение для системы (2.2) вида

$$\hat{\Phi} = P z^R e^Q. \tag{2.4}$$

Здесь P — формальный степенной ряд по z^{-1}:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} P_k, \qquad \det P_0 \neq 0;$$

R — диагональная матрица комплексных постоянных; Q — матрица-многочлен:

$$Q(z) = \frac{z^{r+1}}{r+1} Q_0 + \frac{z^r}{r} Q_1 + \ldots + zQ_r \tag{2.5}$$

с коэффициентами — комплексными диагональными матрицами

$$Q_i = \begin{pmatrix} \lambda_1^{(i)} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{(i)} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^{(i)} \end{pmatrix} \quad (i = 0, 1, \ldots, r; \quad \lambda_j^{(0)} = \lambda_j). \tag{2.6}$$

Замечание. Простейший случай системы с особенностью второго рода в ∞ получим, когда

$$w' = Aw,$$

где A — *постоянная* матрица. Матрица-решение Φ дается в виде

$$\Phi = e^{zA}.$$

Быть может, ближайшей по простоте является система

$$w' = z^r Aw,$$

где r — целое положительное число и A — постоянная матрица. Легко проверить, что матрица-решение для этого уравнения имеет вид

$$\Phi = e^{(z^{r+1}/r+1)A}.$$

Отсюда ясно, что наличие членов низшей степени в выражении (2.5) для Q, матрицы R и формального степенного ряда P в (2.4) полностью обусловлено членами $z^{-1}A_1 + z^{-2}A_2 + \ldots$ матрицы A системы (2.3).

Доказательство теоремы 2.1. Во-первых, очевидно, что если P, R, Q — описанные выше матрицы, то произведение $Pz^R e^Q$ есть формальная логарифмически-экспоненциальная матрица, так как каждый из множителей R, z^R, e^Q обладает этим свойством. На самом деле в этом случае нет логарифмических членов, так как матрица R диагональная. Можно также предполагать с самого начала, что A_0 — диагональная матрица с элементами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, ибо простая подстановка $\tilde{w} = Tw$ в уравнение (2.2), где T — такая неособая постоянная матрица, что матрица TA_0T^{-1} имеет диагональную форму с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, приводит к этому. Заметим, что если предполагать матрицу A_0 диагональной, то из (2.6), в частности, следует, что $Q_0 = A_0$.

Предположим, что $\hat{\Phi}$ в (2.4) — формальная матрица-решение уравнения (2.2), причем матрицы P, Q, R обладают указанными в теореме свойствами. Дифференцирование дает

$$\hat{\Phi}' = P'z^R e^Q + z^{-1}PRz^R e^Q + Pz^R(z^r Q_0 + z^{r-1}Q_1 + \ldots + Q_r)\, e^Q ,$$

и, используя то обстоятельство, что матрицы Q_i и z^R диагональные, получаем

$$\hat{\Phi}' = [P' + z^{-1}PR + P(z^r Q_0 + z^{r-1}Q_1 + \ldots + Q_r)]\, z^R e^Q .$$

Но из (2.2) следует, что

$$\hat{\Phi}' = z^r APz^R e^Q$$

и, значит,

$$P' + z^{-1}PR + P(z^r Q_0 + z^{r-1}Q_1 + \ldots + Q_r) = z^r AP .$$

Используя то обстоятельство, что P и A — степенные ряды, получаем отсюда

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k-1}P_k(R - kE) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}P_k\right)(z^r Q_0 + z^{r-1}Q_1 + \ldots + Q_r) =$$
$$= z^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}A_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k}P_k\right).$$

Сравнение коэффициентов при различных степенях z^{-1} дает

$$P_0 Q_0 - A_0 P_0 = 0 ,$$
$$P_k Q_0 - A_0 P_k = \sum_{l=1}^{k} (A_l P_{k-l} - P_{k-l} Q_l) \quad (1 \leq k \leq r) ,$$
$$P_{k+r+1} Q_0 - A_0 P_{k+r+1} = \sum_{l=1}^{r} (A_l P_{k+r+1-l} - P_{k+r+1-l} Q_l) + \sum_{l=r+1}^{k+r+1} A_l P_{k+r+1-l} + P_k(kE - R) \quad (k \geq 0) . \tag{2.7}$$

Таким образом, необходимое условие для того, чтобы $\hat{\Phi}$ в (2.4) была формальной матрицей-решением уравнения (1.2), заключается в том, что матрицы P_k, Q_k, R должны удовлетворять уравнениям (2.7). Наоборот, если существует некоторое множество матриц P_k, Q_k, R, которое удовлетворяет условиям (2.7), то матрица $\hat{\Phi}$, задаваемая посредством (2.4)—(2.6), будет формальной матрицей-решением уравнения (1.2). Мы получим это, проведя рассуждение в обратном порядке. Таким образом, остается показать, что система матричных уравнений (2.7) разрешима.

Так как, по предположению, матрица A_0 диагональная, то решение первого из уравнений (2.7) имеет вид

$$Q_0 = A_0, \qquad P_0 = E, \tag{2.8}$$

где E — единичная матрица.

Второе уравнение в (2.7) для $k = 1$ имеет вид

$$P_1Q_0 - A_0P_1 = A_1P_0 - P_0Q_1,$$

или, используя (2.8),

$$P_1A_0 - A_0P_1 = A_1 - Q_1. \tag{2.9}$$

Так как матрица A_0 диагональная, то диагональные члены слева в (2.9) равны нулю, и поэтому диагональные элементы матриц Q_1 и A_1 должны совпадать. Это определяет диагональную матрицу Q_1 однозначно. Недиагональные члены матрицы P_1 определяются в силу (2.9) из уравнений

$$(\lambda_j - \lambda_i)\, p_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(1)} \qquad (i \neq j), \tag{2.10}$$

где $p_{ij}^{(1)}$, $a_{ij}^{(1)}$ — элементы, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца соответственно матриц P_1, A_1. Так как $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$, то уравнения (2.10) определяют недиагональные элементы матрицы P_1 однозначно. Обозначим через $\widetilde{P}_1$ матрицу с нулевыми диагональными элементами и с элементами $p_{ij}^{(1)}$ на пересечении i-й строки и j-го столбца ($i \neq j$). Тогда решение уравнения (2.9) имеет вид

$$P_1 = \widetilde{P}_1 + D_1 = \widetilde{P}_1 + P_0D_1,$$

где D_1 — произвольная диагональная матрица. При этом использовано то, что $D_1A_0 - A_0D_1 = 0$, ибо A_0 — диагональная матрица. Заметим, что матрица $\widetilde{P}_1$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{P}_1A_0 - A_0\widetilde{P}_1 = A_1P_0 - P_0Q_1 = A_1 - Q_1.$$

Пусть $1 < k \leq r$ и предположим существование диагональных матриц $Q_0, Q_1, \ldots, Q_{k-1}$ и матриц $P_1, \ldots, P_{k-1}$ вида

$$P_i = \widetilde{P}_i + \widetilde{P}_{i-1}D_1 + \ldots + P_0D_i, \tag{2.11}$$

где $D_1, \ldots, D_{k-1}$ — произвольные диагональные матрицы, диагональные элементы матриц $\widetilde{P}_i$ равны нулю и матрицы $\widetilde{P}_i$ удовлетворяют уравнениям

$$\widetilde{P}_iA_0 - A_0\widetilde{P}_i = S_i \qquad (i = 1, \ldots, k-1), \tag{2.12}$$

в которых

$$S_i = \sum_{l=1}^{i} (A_l\widetilde{P}_{i-l} - \widetilde{P}_{i-l}Q_l) \qquad (i = 1, \ldots, k-1;\ \widetilde{P}_0 = E).$$

Так как матрица A_0 диагональная, то из (2.12) следует, что диагональные элементы каждой матрицы S_i равны нулю.

Подставляя выражение (2.11) во второе соотношение (2.7), получаем после приведения подобных членов

$$P_kA_0 - A_0P_k = \sum_{l=1}^{k-1} (A_l\widetilde{P}_{k-l} - \widetilde{P}_{k-l}Q_l) + (A_k - Q_k) + \\ + S_{k-1}D_1 + S_{k-2}D_2 + \ldots + S_1D_{k-1}. \quad (2.13)$$

Так как диагональные члены матрицы $P_kA_0 - A_0P_k$ равны нулю, что имеет место также для матриц $S_1, \ldots, S_{k-1}$, то формулы (2.13) определяют диагональные элементы матрицы Q_k однозначно, а следовательно, определяют однозначно и саму диагональную матрицу Q_k. Так же как в равенствах (2.9) и (2.10), решение $\widetilde{P}_k$ уравнения

$$\widetilde{P}_kA_0 - A_0\widetilde{P}_k = \sum_{l=1}^{k-1} (A_l\widetilde{P}_{k-l} - \widetilde{P}_{k-l}Q_l) + (A_k - Q_k) \quad (2.14)$$

определяется однозначно, исключая элементы главной диагонали Элементы главной диагонали матрицы $\widetilde{P}_k$ принимаются равными. нулю.

Тогда матрица

$$P_k = \widetilde{P}_k + \widetilde{P}_{k-1}D_1 + \ldots + P_0D_k, \quad (2.15)$$

где D_k — произвольная диагональная матрица, будет решением уравнения (2.13), ибо

$$P_kA_0 - A_0P_k = \widetilde{P}_kA_0 - A_0\widetilde{P}_k + (\widetilde{P}_{k-1}D_1A_0 - A_0\widetilde{P}_{k-1}D_1) + \ldots \\ \ldots + (P_0D_kA_0 - A_0P_0D_k) = \widetilde{P}_kA_0 - A_0\widetilde{P}_k + \\ + (\widetilde{P}_{k-1}A_0 - A_0\widetilde{P}_{k-1})D_1 + \ldots + (P_0A_0 - A_0P_0)D_k,$$

так как A_0 и D_i — диагональные матрицы. Используя (2.12) и (2.14), легко показать, что матрица P_k, определяемая равенством (2.15), удовлетворяет равенству (2.13). По индукции, соответственно выбору $Q_0 = A_0$, $P_0 = E$, отсюда следует существование диагональных матриц $Q_1, \ldots, Q_r$ и матриц $\widetilde{P}_1, \ldots, \widetilde{P}_r$ с нулевыми диагональными элементами, удовлетворяющих (2.12) для $i = 0, 1, \ldots, r$ и таких, что матрицы P_i в (2.11) удовлетворяют второму соотношению (2.7) для $k = i$.

Полагая $k = 0$ в третьем соотношении (2.7), получаем

$$P_{r+1}A_0 - A_0P_{r+1} = \sum_{l=1}^{r} (A_lP_{r+1-l} - P_{r+1-l}Q_l) + A_{r+1}P_0 - P_0R, \quad (2.16)$$

и именно в этом месте встречается матрица R. Если подставить P_i, определяемые равенством (2.11), в правую часть соотношения (2.16), то получим

$$P_{r+1}A_0 - A_0P_{r+1} = \sum_{l=1}^{r} (A_l\widetilde{P}_{r+1-l} - \widetilde{P}_{r+1-l}Q_l) + (A_{r+1} - R) + \\ + S_rD_1 + S_{r-1}D_2 + \ldots + S_1D_r. \quad (2.17)$$

Диагональные элементы в левой части равенства (2.17) равны нулю, точно так же как диагональные элементы в сумме $S_rD_1 + \ldots + S_1D_r$. Поэтому (2.17) определяет однозначно диагональную матрицу R и, как в (2.13), получаем решение уравнения (2.17) вида

$$P_{r+1} = \widetilde{P}_{r+1} + \widetilde{P}_rD_1 + \ldots + P_0D_{r+1}, \tag{2.18}$$

где матрица $\widetilde{P}_{r+1}$ удовлетворяет уравнению

$$\widetilde{P}_{r+1}A_0 - A_0\widetilde{P}_{r+1} = \sum_{l=1}^{r}(A_l\widetilde{P}_{r+1-l} - \widetilde{P}_{r+1-l}Q_l) + A_{r+1} - R \tag{2.19}$$

и имеет нулевые диагональные элементы, а D_{r+1} — произвольная диагональная матрица.

Последнее соотношение (2.7) для $k = 1$ отличается тем, что в него не входят новые члены, содержащие Q_k или R. Это уравнение имеет вид

$$P_{r+2}A_0 - A_0P_{r+2} = \sum_{l=1}^{r}(A_lP_{r+2-l} - P_{r+2-l}Q_l) + \\ + A_{r+1}P_1 + A_{r+2}P_0 + P_1(E - R), \tag{2.20}$$

и, используя выражения (2.11), (2.18) для P_i, получаем

$$P_{r+2}A_0 - A_0P_{r+2} = \sum_{l=1}^{r}(A_l\widetilde{P}_{r+2-l} - \widetilde{P}_{r+2-l}Q_l) + A_{r+1}\widetilde{P}_1 + A_{r+2} + \\ + \widetilde{P}_1(E - R) + \left[\sum_{l=1}^{r}(A_l\widetilde{P}_{r+1-l} - \widetilde{P}_{r+1-l}Q_l) + A_{r+1} - R\right]D_1 + \\ + S_rD_2 + \ldots + S_1D_{r+1} + D_1. \tag{2.21}$$

Но в силу (2.19) выражение в квадратных скобках имеет диагональ, состоящую из нулей, и так как все диагональные элементы левой части (2.21) равны нулю, то диагональная матрица D_1 однозначно определяется равенством (2.21). Так же как прежде, можно найти решение P_{r+2} уравнения (2.20) вида

$$P_{r+2} = \widetilde{P}_{r+2} + \widetilde{P}_{r+1}D_1 + \ldots + P_0D_{r+2},$$

где $\widetilde{P}_{r+2}$ — решение уравнения (2.20), в котором всюду P_k заменены на $\widetilde{P}_k$ и справа добавлена матрица D_1, диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}_{r+2}$ равны нулю и D_{r+2} — произвольная диагональная матрица.

При следующем шаге матрица D_2 определяется однозначно и вводится новая диагональная матрица D_{r+3}. Таким образом, при этом процессе всегда появляются $r + 1$ матриц D_k. Используя вторую индукцию, заключаем, что все матрицы $\widetilde{P}_k$ и D_k определяются однозначно из уравнений (2.7), и, следовательно, все матрицы P_k определяются однозначно, если только сделан начальный выбор $Q_0 = A_0$, $P_0 = E$. Это завершает доказательство.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

Напомним, как было установлено в § 1, что ряд

$$e^{it}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots) \tag{1.4}$$

есть формальное решение[1] уравнения

$$x'' + \left(1 - \frac{a}{t^2}\right) x = 0, \tag{1.3}$$

если только коэффициенты c_k определяются рекуррентно из уравнений

$$c_{k+1} = \frac{i}{2}\left(\frac{a - k(k+1)}{k+1}\right) c_k \quad (k \geq 0,\ c_0 = 1). \tag{1.5}$$

Если постоянная a не имеет вида $n(n+1)$, то ряд (1.4) расходится для всех $t \neq 0$. Однако было показано, что соответственно этому формальному решению существует истинное решение φ уравнения (1.3), такое, что

$$\varphi(t) = e^{it} \sum_{k=0}^{n} c_k t^{-k} + O(t^{-n-1}) \quad (t \to \infty);$$

в частности,

$$t^n \left[\varphi(t) - e^{it} \sum_{k=0}^{n} c_k t^{-k}\right] \to 0 \quad (t \to \infty). \tag{3.1}$$

Соотношение (3.1), характерное для обычной ситуации в случае особых точек второго рода, выражает тот факт, что формальный ряд (1.4) есть *асимптотический ряд* для решения уравнения (1.3).

Точнее, пусть S обозначает связное множество комплексной z-плоскости, содержащее ∞. Формальный степенной ряд относительно z^{-1}

$$p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k} \tag{3.2}$$

с частными суммами

$$s_k = \sum_{j=0}^{k} p_j z^{-j} \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

называется *асимптотическим рядом* (или разложением) на S для функции f (при $|z| \to \infty$), определенной на S, если для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$z^k(f - s_k) \to 0 \qquad (|z| \to \infty)$$

равномерно для $z \in S$.

Если p — асимптотический ряд для функции f на S, то это соотношение записывается так:

$$f \sim p \text{ на } S.$$

---

[1] Строго говоря, определение формального решения уравнения второго порядка не было дано. Его можно определить очевидным образом непосредственно или как первую компоненту каждого формального вектора-решения системы первого порядка, соответствующей уравнению (1.3).

Часто за S принимается часть сектора z-плоскости

$$S: \quad \varphi_1 \leq \arg z \leq \varphi_2, \ |z| \geq r.$$

Например, если формальный ряд p сходится на этом множестве S, то он представляет на S аналитическую функцию f, и очевидно, что $f \sim p$ на S.

Если f имеет асимптотическое разложение p на множестве S, то это разложение единственно, ибо коэффициенты p_k в (3.2) однозначно определяются из условий

$$f \to p_0, \ z(f - p_0) \to p_1, \quad z^2(f - p_0 - p_1 z^{-1}) \to p_2 \quad \text{и т. д.}$$

Тем не менее различные функции могут иметь одинаковые асимптотические ряды. Например, функция $g = e^{-z}$, определенная на множестве $S: |z| > 0, -\alpha \leq \arg z \leq \alpha$, где $\alpha < \pi/2$, имеет своим асимптотическим рядом формальный степенной ряд, равный тождественно нулю, т. е. $e^{-z} \sim 0$ на S. Таким образом, если f — произвольная функция, имеющая на S некоторое асимптотическое разложение, то функция $f + e^{-z}$ имеет на S асимптотическое разложение, такое же, как f.

Если f, g, h — три функции, определенные для $z \in S$, причем $h \neq 0$, и если

$$(f - g)\, h^{-1} \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k} \text{ на } S,$$

то это иногда записывают в виде

$$f \sim g + h \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k} \text{ на } S.$$

Например, было показано для действительных $t > 0$ (т. е. S — множество $|z| > 0$, $\arg z = 0$), что существует решение уравнения (1.3), такое, что

$$\varphi \sim e^{it}(1 + c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2} + \ldots) \text{ на } S,$$

где коэффициенты c_k определяются по формулам (1.5).

Теорема 3.1. *Пусть f и g — функции, определенные на связном множестве S, содержащем ∞, и*

$$f \sim p = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^{-k}, \quad g \sim q = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^{-k} \text{ на } S.$$

Если α, β — два произвольных комплексных числа, то на S

(a) $\alpha f + \beta g \sim \alpha p + \beta q = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha p_k + \beta q_k) z^{-k}$,

(b) $fg \sim pq = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad c_k = \sum_{j=0}^{k} p_j q_{k-j}$,

(c) $f^{-1} \sim \frac{1}{p_0} - \left(\frac{p_1}{p_0^2}\right) z^{-1} + \left(\frac{p_1^2 - p_0 p_2}{p_0^3}\right) z^{-2} + \ldots$ (*если* $p_0 \neq 0$).

Доказательство легко следует из определения асимптотических рядов и предоставляется читателю.

Следствие. *Если f_i $(i = 1, \ldots, m)$ — m функций, $f_i \sim p_i$, $z \in S$, и $g(z_1, \ldots, z_m)$ — многочлен, то функция $F(z) = g(f_1(z), \ldots, f_m(z))$ имеет асимптотическое разложение на S, и оно вычисляется так, как если бы все разложения были сходящимися рядами.*

Доказательство получается с помощью повторного применения свойств (*a*), (*b*), указанных в теореме (3.1).

Применение. Если A — матрица из функций, компоненты которой имеют асимптотические разложения, $A \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^{-k}$ на S, то определитель $\det A$ имеет в этой области асимптотическое разложение, первый член которого равен $\det A_0$. Поэтому, если $\det A_0 \neq 0$, то $(\det A)^{-1}$ имеет в S асимптотическое разложение с первым членом $(\det A_0)^{-1}$. Так как элементы матрицы A^{-1} являются отношениями алгебраических дополнений $(n-1)$-го порядка матрицы A (которые имеют асимптотические разложения) и определителя $\det A$, то матрица A^{-1} имеет на S асимптотическое разложение, если $\det A_0 \neq 0$.

Теорема 3.2. (a) *Если $f \sim \sum_{k=0}^{\infty} p_k t^{-k}$ и функция f непрерывна при $t \geq t_0$ (t действительно), то*

$$F(t) = \int_t^{\infty} (f(\tau) - p_0 - p_1 \tau^{-1})\, d\tau \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_{k+1}}{k} t^{-k}.$$

(b) *Если, далее, производная f' существует, непрерывна и имеет асимптотическое разложение, то $f' \sim -\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)\, p_{k-1} t^{-k}$.*

Доказательство. (a) $t^2(f - p_0 - p_1 t^{-2}) \to p_2$, $t \to \infty$, и поэтому интеграл $F(t)$ существует для $t > t_0$. Далее, для фиксированного $m \geq 1$

$$f - \left(\sum_{k=0}^{m+1} p_k t^{-k} \right) = \varepsilon(t)\, t^{-(m+1)},$$

где $\varepsilon(t) \to 0$, $t \to \infty$. Следовательно,

$$\left| F - \sum_{k=1}^{m} \frac{p_{k+1}}{k} t^{-k} \right| = \left| \int_t^{\infty} \varepsilon(\tau)\, \tau^{-(m+1)}\, d\tau \right| \leq \varepsilon_M(t) \int_t^{\infty} \tau^{-(m+1)}\, d\tau,$$

где $\varepsilon_M(t) = \sup_{t \leq \tau < \infty} |\varepsilon(\tau)|$. Но $\varepsilon_M(t) \to 0$, $t \to \infty$, и так как

$$\int_t^{\infty} \tau^{-(m+1)}\, d\tau = \frac{1}{m} t^{-m},$$

то $t^m \left(F - \sum_{k=1}^{m} \frac{p_{k+1}}{k} t^{-k} \right) \to 0$, $t \to \infty$. Это доказывает (a).

(b) Пусть $f' \sim \sum_{k=0}^{\infty} q_k t^{-k}$. Тогда

$$f = \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\,d\tau + f(t_0) = \int_{t_0}^{t} (q_0 + q_1\tau^{-1})\,d\tau + \\ + \int_{t_0}^{t} (f'(\tau) - q_0 - q_1\tau^{-1})\,d\tau + f(t_0),$$

или

$$f = q_0 t + q_1 \ln t - \int_{t}^{\infty} (f'(\tau) - q_0 - q_1\tau^{-1})\,d\tau + c,$$

где c — постоянная. Так как функция f имеет единственное асимптотическое разложение, то из (a) следует, что $q_0 = q_1 = 0$ и $q_k = -(k-1)\,p_{k-1}$, $k \geq 2$. Это доказывает (b).

Если функция f имеет асимптотическое разложение, то производная f' не обязана его иметь. Например, если $f = e^{-t}\sin e^t$, то $f \sim 0$; $f' = -e^{-t}\sin e^t + \cos e^t$ не имеет асимптотического разложения, ибо $\lim \cos e^t$, $t \to \infty$, не существует.

§ 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЙ, КОТОРЫЕ ИМЕЮТ СВОИМИ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ РАЗЛОЖЕНИЯМИ ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ. ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом параграфе будет показано, что соответственно каждому формальному вектору-решению системы (2.2) существует истинное решение, которое имеет это формальное решение своим асимптотическим разложением, причем последнее пригодно в некотором секторе комплексной z-плоскости для достаточно больших z. Чтобы показать это, необходимо сделать некоторые оценки.

В дальнейшем важно будет уметь различать формальные и истинные решения. Истинная матрица-решение (или вектор-) системы (2.2) будет обозначаться через Φ (или φ), в то время как формальные решения всегда будут обозначаться через $\hat{\Phi}$ (или $\hat{\varphi}$). В этом параграфе, если не оговорено противное, предполагается всегда, что рассматриваемая система имеет такой же вид, как и в теореме 2.1, а именно:

$$w' = z^r A w \qquad (r \geq 0), \tag{4.1}$$

где матрица A_0 *имеет различные характеристические корни.*

Если P — формальный степенной ряд относительно z^{-1}:

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} P_k,$$

то $P_{(m)}$ обозначает многочлен относительно z^{-1}

$$P_{(m)} = \sum_{k=0}^{m} z^{-k} P_k \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если $\hat{\Phi} = P z^R e^Q$ [см. (2.4)] — формальная матрица-решение системы (4.1), то обозначим через $\hat{\Phi}_{(m)}$ «усеченное формальное решение»

$$\hat{\Phi}_{(m)} = P_{(m)} z^R e^Q. \tag{4.2}$$

Очевидно, матрицу $\hat{\Phi}_{(m)}$ можно также рассматривать как функцию z.

Наметим теперь в общих чертах используемый здесь метод. Так как $\hat{\Phi}$ — формальное решение системы (4.1), то очевидно, что формально

$$\hat{\Phi}' \hat{\Phi}^{-1} = z^r A.$$

Можно проверить, что для усеченных формальных решений, если матрица $B_{(m)}$ определена равенством

$$\hat{\Phi}'_{(m)} \hat{\Phi}^{-1}_{(m)} = z^r B_{(m)},$$

низшие члены $B_{(m)}$ совпадают с таковыми же членами A. Это следует из доказанной ниже леммы 4.1.

Так как матрицы $\hat{\Phi}_{(m)}$, $\hat{\Phi}'_{(m)}$ и $\hat{\Phi}^{-1}_{(m)}$ существуют для достаточно больших z как функции z, то $\hat{\Phi}_{(m)}$ есть истинная (а не только формальная) матрица-решение системы

$$w' = z^r B_{(m)} w. \tag{4.3}$$

Если систему (4.1) представить в виде

$$w' = z^r B_{(m)} w + z^r (A - B_{(m)}) w, \tag{4.4}$$

то, так как разность $A - B_{(m)}$ мала для больших z, уравнение (4.4) можно записать как интегральное уравнение, подобное уравнению (1.7), рассматривая последний член как данную функцию z и применяя метод вариации произвольных постоянных. Так как решение $\hat{\varphi}_{(m)}$ однородного уравнения (4.3), соответствующего уравнению (4.4), известно, то, как будет показано, интегральное уравнение может быть решено при помощи метода последовательных приближений; тем самым будет получено решение уравнения (4.4) (а значит, и (4.1)), которое ведет себя для больших z, как $\hat{\varphi}_{(m)}$.

Лемма 4.1. *Матрицы $\hat{\Phi}'_{(m)}$, $\hat{\Phi}^{-1}_{(m)}$ существуют для достаточно больших z, и если матрица $B_{(m)}$ определена равенством*

$$z^r B_{(m)} = \hat{\Phi}'_{(m)} \hat{\Phi}^{-1}_{(m)},$$

то

$$z^r A = z^r B_{(m)} + E_{(m)}, \tag{4.5}$$

где матрицы $B_{(m)}$, $z^{-r}E_{(m)}$ *аналитичны для всех достаточно больших* z *(включая* ∞*) и*[1]

$$E_{(m)}(z) = O(|z|^{r-m-1}) \quad (|z| \to +\infty). \tag{4.6}$$

Доказательство. Очевидно, что производная $\hat{\Phi}'_{(m)}$ существует. Так как $P_{(m)}$ — многочлен относительно z^{-1} и $\det P_0 \neq 0$, то функция $(\det P_{(m)})^{-1}$ существует для достаточно больших z как сходящийся степенной ряд относительно z^{-1}. Значит, матрица $P_{(m)}^{-1}$ существует и аналитична для всех достаточно больших z. Из (4.2) следует, что матрица

$$\hat{\Phi}_{(m)}^{-1} = e^{-Q} z^{-R} P_{(m)}^{-1} \tag{4.7}$$

существует для достаточно больших z. Далее,

$$\hat{\Phi}'_{(m)} = (P'_{(m)} + z^{-1}P_{(m)}R + P_{(m)}Q')\, z^R e^Q, \tag{4.8}$$

так как R, Q — диагональные матрицы. Из (4.7) и (4.8) следует соотношение

$$\hat{\Phi}'_{(m)}\hat{\Phi}_{(m)}^{-1} = (P'_{(m)} + z^{-1}P_{(m)}R + P_{(m)}Q')\, P_{(m)}^{-1}, \tag{4.9}$$

а так как Q' — полиномиальная матрица

$$Q' = z^r Q_0 + z^{r-1} Q_1 + \ldots + Q_r,$$

то очевидно, что матрица $B_{(m)} = z^{-r}\, \hat{\Phi}'_{(m)}\, \hat{\Phi}_{(m)}^{-1}$ аналитична для достаточно больших z.

Так как $\det P_0 \neq 0$, то формальный степенной ряд P имеет формальный обратный P^{-1} и, следовательно, матрица $\hat{\Phi}$ имеет формальную обратную матрицу

$$\hat{\Phi}^{-1} = e^{-Q} z^{-R} P^{-1}.$$

Далее, $\hat{\Phi}' = (P' + z^{-1}PR + PQ')\, z^R e^Q$ и поэтому

$$\hat{\Phi}'\hat{\Phi}^{-1} = (P' + z^{-1}PR + PQ')\, P^{-1}. \tag{4.10}$$

Но из (4.1) следует, что $\hat{\Phi}'\hat{\Phi}^{-1} = z^r A$, а так как матрица A аналитична для достаточно больших z, то матрица $z^{-r}\hat{\Phi}'\hat{\Phi}^{-1}$ должна быть для достаточно больших z сходящимся степенным рядом по степеням z^{-1} и, следовательно, аналитической функцией для больших z.

Остается сравнить выражения (4.9) и (4.10). Формальный ряд P может быть записан в виде

$$P = P_{(m)} + z^{-(m+1)} R_m, \tag{4.11}$$

[1] Запись (4.6) означает, что $|E_{(m)}(z)| \cdot |z|^{m+1-r} = O(1)$, $|z| \to \infty$, причем грань зависит от m.

где $R_m = R_0 + z^{-1} R_1 + \ldots$ — другой формальный степенной ряд по степеням z^{-1}. Будем обозначать через J_k каждый формальный матричный степенной ряд относительно z^{-1}, который имеет множителем z^{-k}, так что

$$z^k J_k = \tilde{J}_0 + z^{-1}\tilde{J}_1 + \ldots$$

при некоторых постоянных матрицах $\tilde{J}_0, \tilde{J}_1, \ldots$. Используя это обозначение, можно записать (4.11) в виде

$$P = P_{(m)} + J_{m+1}. \tag{4.12}$$

Далее,

$$\det P = \det P_{(m)} + J_{m+1},$$

и отсюда следует, что

$$(\det P)^{-1} = (\det P_{(m)})^{-1} + J_{m+1}.$$

Если $\operatorname{adj} P$ — такая формальная матрица, что

$$P \operatorname{adj} P = (\det P) E,$$

то, так как матрица $\operatorname{adj} P$ имеет своими элементами алгебраические дополнения элементов матрицы P,

$$\operatorname{adj} P = \operatorname{adj} P_{(m)} + J_{m+1}.$$

Поэтому

$$P^{-1} = P_{(m)}^{-1} + J_{m+1}. \tag{4.13}$$

Из (4.12) следует равенство

$$P' = P'_{(m)} + J_{m+2}, \tag{4.14}$$

и, комбинируя (4.12) — (4.14), получаем из (4.9) и (4.10)

$$\hat{\Phi}'\hat{\Phi}^{-1} = \hat{\Phi}'_m \hat{\Phi}_m^{-1} + J_{m+1-r}. \tag{4.15}$$

Число r в индексе последнего члена появилось из-за наличия матрицы $PQ'P^{-1}$ в формуле (4.10). Но из (4.15) следует, что

$$z^r A = z^r B_{(m)} + J_{m+1-r}, \tag{4.16}$$

а так как матрицы A и $B_{(m)}$ обе аналитичны для достаточно больших z, то и матрица $z^{-r} J_{m+1-r}$ обладает этим свойством. Обозначая матрицу J_{m+1-r} в (4.16) через $E_{(m)}$, мы видим, что $E_{(m)}$ удовлетворяет условиям леммы.

Асимптотическая природа формальных решений сперва будет получена для случая, когда $z = t$ действительно. Теорема 2.1 и лемма 4.1 применимы в этом частном случае. Чтобы доказать нижеследующую лемму 4.2, нам потребуются некоторые обозначения.

Для фиксированного целого $m \geq 0$ обозначим векторы-столбцы матрицы $\hat{\Phi}_{(m)}$ через $\hat{\varphi}_{(m)i}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\hat{\varphi}_{(m)i} = p_{(m)i} t^{\varrho_i} e^{q_i}, \tag{4.17}$$

где

$$q_i(t) = \lambda_i \frac{t^{r+1}}{r+1} + \lambda_i^{(1)} \frac{t^r}{r} + \ldots + \lambda_i^{(r)} t, \tag{4.18}$$

$p_{(m)i}$ — i-й столбец матрицы $P_{(m)}$ и ϱ_i — элемент, стоящий на пересечении i-го столбца и i-й строки матрицы R [см. теорему (2.1)].

В дальнейшем будем считать число i фиксированным. Так как $\operatorname{Re} q_j$ — многочлен, то его поведение при $t \to \infty$ определяется старшей степенью t. Разделим целые числа $j = 1, \ldots, n$ на два класса I_1, I_2 по следующему правилу:

$$j \in I_1, \text{ если } \operatorname{Re}(q_i - q_j) \to \infty \quad (t \to \infty), \tag{4.19}$$

$$j \in I_2, \text{ если } \operatorname{Re}(q_i - q_j) \text{ ограничена сверху } (t \to \infty).$$

Разумеется, классы I_1, I_2 зависят от выбранного i. Пусть, далее, $\varrho = \max\limits_j \operatorname{Re} \varrho_j$.

Лемма 4.2. *Пусть m — произвольное положительное число, такое, что $m - r - \varrho + \operatorname{Re} \varrho_j > 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Соответственно каждому вектору-столбцу $\hat{\varphi}_{(m)i}$ матрицы $\hat{\Phi}_{(m)}$ существует истинный вектор-решение $\varphi_{(m)i}$ системы*

$$w' = t^r A(t) w, \tag{4.20}$$

такой, что

$$|\varphi_{(m)i}(t)| = O(t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}) \quad (t \to +\infty).$$

Доказательство. Решение $\varphi_{(m)i}$ будет построено при помощи метода последовательных приближений в комбинации с одним вариантом формулы вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим две системы:

$$w' = t^r A w = t^r B_{(m)} w + E_{(m)} w, \tag{4.21}$$

$$w' = t^r B_{(m)} w. \tag{4.22}$$

Из определения матрицы $B_{(m)}$ следует, что $\hat{\Phi}_{(m)}(t)$ есть фундаментальная матрица для (4.22), если t достаточно велико ($\det P_0 \neq 0$). Таким образом, если рассматривать (4.21) как неоднородную систему, для которой (4.22) — соответствующая однородная система, то при помощи метода вариации произвольных постоянных можно выразить решения системы (4.21) через квадратуры решений системы (4.22). Проделывая это, необходимо надлежащим образом выбрать пределы интегрирования. Пусть t_0 настолько велико, что матрица $\hat{\Phi}_{(m)}^{-1}(t)$ существует для $t \geq t_0$, и разобьем $\hat{\Phi}_{(m)}^{-1}(t)$ на две части:

$$\hat{\Phi}_{(m)}^{-1} = e^{-Qt} t^{-R} P_{(m)}^{-1} = \hat{\Psi}_{(m)}^{(1)} + \hat{\Psi}_{(m)}^{(2)},$$

где j-я строка матрицы $\hat{\Psi}_{(m)}^{(1)}$ идентична с j-й строкой $\hat{\Phi}_{(m)}^{-1}$ или равна тождественно нулю соответственно случаям $j \in I_1$ или $j \in I_2$; анало-

гично определяем $\hat{\Psi}^{(2)}_{(m)}$. Таким образом, ненулевые строки матрицы $\hat{\Psi}^{(k)}_{(m)}$ состоят из тех строк матрицы $\hat{\Phi}^{-1}_{(m)}$, которые имеют множителем $e^{-q_j(t)}$ для $j \in I_k$, $k = 1, 2$.

Интегральное уравнение, которое нам надлежит рассмотреть, имеет следующий вид:

$$w(t) = \hat{\varphi}_{(m)i}(t) + \int_{t_0}^{t} K_1(t, \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \int_{\infty}^{t} K_2(t, \tau)\, w(\tau)\, d\tau \quad (t_0 \leq t < \infty), \tag{4.23}$$

где

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &= \hat{\Phi}_{(m)}(t)\, \hat{\Psi}^{(1)}_{(m)}(\tau)\, E_{(m)}(\tau), \\ K_2(t, \tau) &= \hat{\Phi}_{(m)}(t)\, \hat{\Psi}^{(2)}_{(m)}(\tau)\, E_{(m)}(\tau). \end{aligned} \tag{4.24}$$

Непосредственная проверка показывает, что если функция $w = \varphi(t)$ удовлетворяет (4.23), причем интеграл $\int_{\infty}^{t}$ сходится, то φ удовлетворяет (4.21).

Чтобы решить уравнение (4.23), определим последовательные приближения для $t \geq t_0$:

$$\varphi^0(t) \equiv 0,$$

$$\varphi^{k+1}(t) = \hat{\varphi}_{(m)i}(t) + \int_{t_0}^{t} K_1(t, \tau)\, \varphi^k(\tau)\, d\tau + \int_{\infty}^{t} K_2(t, \tau)\, \varphi^k(\tau)\, d\tau \tag{4.25}$$

$$(k = 0, 1, \ldots).$$

Необходимо доказать, что каждое из этих приближений существует. Это будет опущено, так как доказательство вполне аналогично приводимому ниже доказательству, относящемуся к абсолютной величине последовательных разностей. Чтобы оценить эти последние, необходидимо оценить ядра K_1 и K_2. Имеем

$$|K_1(t, \tau)| \leq |\hat{\Phi}_{(m)}(t)\, \hat{\Psi}^{(1)}_{(m)}(\tau)|\, |E_{(m)}(\tau)|, \tag{4.26}$$

и из леммы 4.1 следует

$$|E_{(m)}(\tau)| = O(\tau^{r-m-1}) \quad (\tau \to \infty). \tag{4.27}$$

Далее, i, j-й элемент матрицы $\hat{\Phi}_{(m)}(t)\, \hat{\Psi}^{(1)}_{(m)}(\tau)$ имеет вид

$$(\hat{\Phi}_{(m)}(t)\, \hat{\Psi}^{(1)}_{(m)}(\tau))_{ij} = \sum_{l \in I_1} (P_{(m)}(t))_{il}\, (P^{-1}_{(m)}(\tau))_{lj} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\varrho_l} e^{q_l(t) - q_l(\tau)}. \tag{4.28}$$

В силу сходимости многочленов $P^{-1}_{(m)}$ для достаточно больших t

$$|P_{(m)}(t)|, \ |P^{-1}_{(m)}(t)| = O(1) \quad (t \to \infty). \tag{4.29}$$

Из (4.26), используя (4.29) и аналогичную оценку для $K_2(t, \tau)$, получаем, что существуют постоянная $c = c(m) > 0$ и достаточно большое t_0 [которое можно взять равным t_0 из (4.25)], такие, что

$$|K_j(t, \tau)| \leq c \sum_{l \in I_j} t^{\operatorname{Re} \varrho_l} \tau^{r-m-1-\operatorname{Re} \varrho_l} e^{\operatorname{Re}(q_l(t)-q_l(\tau))} \tag{4.30}$$

$$(t, \tau \geq t_0;\ j = 1, 2).$$

Предположим, далее, t_0 настолько большим, что[1]

$$\sum_{l=1}^{n} \int_{t_0}^{\infty} \tau^{r+\varrho-m-1-\operatorname{Re} \varrho_l} d\tau < \frac{1}{4c} \tag{4.31}$$

и что

$$\operatorname{Re}(q_i(t) - q_l(t)) \text{ возрастает } (l \in I_1,\ t \geq t_0), \tag{4.32}$$

$$\operatorname{Re}(q_i(t) - q_l(t)) \text{ не возрастает } (l \in I_2,\ t \geq t_0).$$

Из (4.25) следует, что

$$\varphi^1(t) = \hat{\varphi}_{(m)i}(t) = p_{(m)i}(t)\, t^{\varrho_i} e^{q_i(t)},$$

и поэтому

$$|\varphi^1(t) - \varphi^0(t)| \leq c t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \quad (t \geq t_0).$$

Допустим, что

$$|\varphi^k(t) - \varphi^{k-1}(t)| \leq c\, 2^{-(k-1)} t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \quad (t \geq t_0). \tag{4.33}$$

Тогда из (4.25) следует

$$|\varphi^{k+1}(t) - \varphi^k(t)| \leq \Gamma_1 + \Gamma_2, \tag{4.34}$$

где

$$\Gamma_1 = \int_{t_0} |K_1(t, \tau)|\, |\varphi^k(\tau) - \varphi^{k-1}(\tau)|\, d\tau,$$

$$\Gamma_2 = \int_{t}^{\infty} |K_2(t, \tau)|\, |\varphi^k(\tau) - \varphi^{k-1}(\tau)|\, d\tau.$$

Вследствие (4.30) и (4.33) имеем

$$\Gamma_1 \leq c^2\, 2^{-(k-1)} t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \sum_{l \in I_1} \int_{t_0}^{t} \tau^{r+\varrho-m-1-\operatorname{Re} \varrho_l} e^{\operatorname{Re}(q_i(\tau)-q_l(\tau)+q_l(t)-q_i(t))}\, d\tau,$$

и в силу (4.32) $\operatorname{Re}(q_i(\tau) - q_l(\tau) + q_l(t) - q_i(t)) \leq 0$ для $t_0 \leq \tau \leq t$. Поэтому

$$\Gamma_1 \leq c^2\, 2^{-(k-1)} t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \cdot \sum_{l \in I_1} \int_{t_0}^{\infty} \tau^{r+\varrho-m-1-\operatorname{Re} \varrho_l}\, d\tau$$

и в силу (4.31)

$$\Gamma_1 \leq c\, 2^{-(k+1)} t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}.$$

---

[1] Все интегралы в (4.31) существуют в силу условия, наложенного на m.

Аналогичные рассуждения показывают, что Γ_2 удовлетворяет тому же неравенству, что и Γ_1. Таким образом, неравенство (4.33) справедливо с заменой k на $k+1$, и, будучи справедливым для $k=1$, оно справедливо по индукции для всех k.

Следовательно, ряд

$$\varphi^0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (\varphi^k(t) - \varphi^{k-1}(t))$$

сходится абсолютно и равномерно к вектору-функции $\varphi = \varphi_{(m)i}(t)$ на каждом конечном интервале $t_0 \leq t < T < \infty$. Далее,

$$|\varphi_{(m)i}(t)| \leq ct^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-(k-1)} = 2\, ct^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \quad (t \geq t_0). \tag{4.35}$$

Используя стандартные соображения о последовательных приближениях, получаем, что вектор $\varphi_{(m)i}$ удовлетворяет уравнению (4.23) и, следовательно, дифференциальной системе (4.21), что доказывает лемму 4.2.

Лемма 4.3. *Для каждого достаточно большого m решение $\varphi_{(m)i}$, указанное в лемме 4.2, удовлетворяет неравенству*

$$|\varphi_{(m)i}(t) - \hat{\varphi}_{(m)i}(t)| = O(t^{\operatorname{Re} \varrho_i + \mu - 1} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}) \quad (t \to \infty), \tag{4.36}$$

где μ — целое положительное число, не зависящее от m и i.

Доказательство. Насколько велико должно быть m, видно из следующего. Из (4.23) следует, что если $t > 2t_0$ и $m > r + \varrho - \operatorname{Re} \varrho_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то существует решение $\varphi_{(m)i}$, такое, что

$$|\varphi_{(m)i}(t) - \hat{\varphi}_{(m)i}(t)| \leq \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3, \tag{4.37}$$

где

$$\Lambda_1 = \int_{t_0}^{t/2} |K_1(t, \tau)|\, |\varphi_{(m)i}(\tau)|\, d\tau, \quad \Lambda_2 = \int_{2}^{t} |K_1(t, \tau)|\, |\varphi_{(m)i}(\tau)|\, d\tau, \tag{4.38}$$

$$\Lambda_3 = \int_{t}^{\infty} |K_2(t, \tau)|\, |\varphi_{(m)i}(\tau)|\, d\tau.$$

Рассмотрим вначале Λ_2. Из (4.30), (4.32) и (4.35) следует, что

$$\Lambda_2 \leq 2\, c^2 t^{\varrho} e^{\operatorname{Re} q_i(t)} \sum_{l=1}^{n} \int_{t/2}^{\infty} \tau^{r-m-1+\varrho-\operatorname{Re} \varrho_l}\, d\tau.$$

Далее,

$$t^{\varrho} \int_{t/2}^{\infty} \tau^{r-m-1+\varrho-\operatorname{Re} \varrho_l}\, d\tau = O(t^{r-m+2\varrho-\operatorname{Re} \varrho_l}) = O(t^{\mu-1+\operatorname{Re} \varrho_l}) \quad (t \to \infty),$$

где μ — произвольное целое положительное число, превосходящее

$r+2\varrho-2\min\limits_{l}\operatorname{Re}\varrho_l$. Выберем m настолько большим, что $\mu-m<0$. Тогда

$$\Lambda_2=O(t^{\mu-m+\operatorname{Re}\varrho_i}e^{\operatorname{Re}q_i(t)})\quad(t\to\infty). \tag{4.39}$$

Аналогичные рассуждения показывают, что эта оценка имеет место также для Λ_3.

Возвращаясь к Λ_1, применим (4.30) — (4.32), (4.35). Получим

$$\Lambda_1\leq\frac{c}{2}t^{\varrho}e^{\operatorname{Re}q_i(t)}\sum_{l\in I_1}e^{\operatorname{Re}(q_l(t)-q_i(t)+q_i(t/2)-q_l(t/2))}. \tag{4.40}$$

Обозначим через σ_{il} высшую степень t, встречающуюся в выражении $\operatorname{Re}(q_i(t)-q_l(t))$. Так как $\operatorname{Re}(q_i-q_l)$ возрастает для $t\geq t_0$ $(l\in I_1)$, то коэффициент β_{il} при $t^{\sigma_{il}}$ в этом выражении положителен. Коэффициентом при $t^{\sigma_{il}}$ в выражении

$$\operatorname{Re}\left(q_l(t)-q_i(t)+q_i\left(\frac{t}{2}\right)-q_l\left(\frac{t}{2}\right)\right)$$

служит число

$$\frac{\beta_{il}}{2^{\sigma_{il}}}-\beta_{il}=\beta_{il}\left(\frac{1}{2^{\sigma_{il}}}-1\right)<0,$$

так как $\sigma_{il}>0$. Из (4.40) поэтому следует, что член под знаком суммы есть $O(e^{-\gamma t})$ для некоторого $\gamma>0$, а значит, в частности,

$$\Lambda_1=O(t^{\mu-m+\operatorname{Re}\varrho_i}e^{\operatorname{Re}q_i(t)})\qquad(t\to\infty). \tag{4.41}$$

Комбинируя (4.37) с (4.41), получаем (4.36), что доказывает лемму.

Лемма 4.4. *Если число m достаточно велико, то для каждого фиксированного целого $m'>m$*

$$|\varphi_{(m')i}(t)-\varphi_{(m)i}(t)|=O(e^{\operatorname{Re}q_i(t)-at})\quad(t\to\infty), \tag{4.42}$$

где a — положительная постоянная, не зависящая от m' и m.

Доказательство. Выберем m настолько большим, что лемма 4.3 выполняется, и пусть $m'=m+l$, где l — целое положительное число. Из леммы (4.3) получаем

$$\varphi_{(m)i}(t)=\varphi_{(m)i}(t)+O(t^{\operatorname{Re}\varrho_i+\mu-m}e^{\operatorname{Re}q_i(t)})\quad(t\to\infty), \tag{4.43}$$

где m таково, что $\mu-m<0$. Следовательно, если $\Phi_{(m)}$ — матрица с векторами-столбцами $\varphi_{(m)1},\ldots,\varphi_{(m)n}$, то

$$\Phi_{(m)}(t)\,e^{-Q(t)}\,t^{-R}=\hat{\Phi}_{(m)}(t)\,e^{-Q(t)}t^{-R}+O(t^{\mu-m})=$$
$$=P_{(m)}(t)+O(t^{\mu-m})=P_0+O(t^{-1})\quad(t\to\infty).$$

Так как, по теореме 2.1, $\det P_0\neq0$, то отсюда следует, что $\det\Phi_{(m)}(t)\neq0$ для всех достаточно больших t, а значит, $\Phi_{(m)}$ есть фундаментальная матрица для системы $w'=t^rAw$ при всех достаточно больших t.

Но $\Phi_{(m+l)}$ — также фундаментальная матрица и, следовательно,

$$\varphi_{(m)i}(t) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \varphi_{(m+l)j}(t), \tag{4.44}$$

где c_{ij} — постоянные. Напомним, что

$$\hat{\varphi}_{(m)i}(t) = p_{(m)i}(t)\, t^{\varrho_i} e^{q_i(t)}, \tag{4.45}$$

где $p_{(m)i}(t)$ — i-й столбец матрицы $P_{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{m} t^{-k} P_k$, имеющий вид

$$p_{(m)i}(t) = \sum_{k=0}^{m} t^{-k} p_{ik}, \tag{4.46}$$

причем здесь p_{ik} — постоянные векторы. Напомним также, что если матрица A_0 предполагается диагональной, тс P_0 может быть выбрана как единичная матрица E. Это предположение, очевидно, не уменьшает общности рассуждений, и поэтому будет в дальнейшем приниматься. В таком случае p_{i0} — вектор с единицей в i-й строке и нулями во всех других. В силу (4.43) формула (4.44) эквивалентна следующей оценке:

$$\hat{\varphi}_{(m)i}(t) + O(t^{\operatorname{Re}\varrho_i+\mu-m} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}) = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \hat{\varphi}_{(m+l)j}(t) + \\ + O\left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\, t^{\operatorname{Re}\varrho_j+\mu-m-l} e^{\operatorname{Re} q_j(t)}\right),$$

и, пользуясь (4.45) и (4.46), отсюда получаем

$$t^{\varrho_i} e^{q_i(t)}(c_{ii} - 1)\, p_{(m)i}(t) + \sum_{j\neq i} c_{ij} t^{\varrho_j} e^{q_j(t)} p_{(m)j}(t) = \\ = O(t^{\operatorname{Re}\varrho_i+\mu-m} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}) + O\left(\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|\, t^{\operatorname{Re}\varrho_j+\mu-m} e^{\operatorname{Re} q_j(t)}\right). \tag{4.47}$$

Пусть, как и прежде, I_1 обозначает множество всех целых k ($k = 1, \ldots, n$), таких, что $\operatorname{Re}(q_i - q_k) \to \infty$ ($t \to +\infty$) и I_2 — дополнительное множество относительно $1, 2, \ldots, n$. Из структуры выражений q_i, как многочленов без постоянного члена, следует, что $k \in I_2$ в том и только в том случае, когда или $\operatorname{Re} q_i = \operatorname{Re} q_k$, или $\operatorname{Re}(q_i - q_k) \to -\infty$ ($t \to +\infty$). Покажем теперь, что в (4.44) $c_{ii} = 1$, и если $k \neq i$, $k \in I_2$, то $c_{ik} = 0$.

Пусть I_{21} — множество всех таких k, что $\operatorname{Re}(q_i - q_k) \to -\infty$ ($t \to +\infty$). Предположим, что I_{21}^* — множество всех $k' \in I_{21}$, таких, что $\operatorname{Re}(q_k - q_{k'})$ ограничена сверху при $t \to +\infty$ для всех $k \in I_{21}$. Пусть k'' — произвольное целое число, принадлежащее I_{21}^* и такое, что $\operatorname{Re}\varrho_{k''} \geq \operatorname{Re}\varrho_{k'}$ для всех $k' \in I_{21}^*$. Разделим (4.47) на $t^{\varrho_{k''}} e^{q_{k''}(t)}$ и пусть $t \to +\infty$. Если рассмотреть k''-ю строку, то получим $c_{ik''} = 0$. Продолжая таким образом, покажем, что $c_{ik} = 0$ для всех $k \in I_{21}$.

Пусть I_{22} — множество всех $k \neq i$, таких, что $\operatorname{Re} q_i = \operatorname{Re} q_k$, и пусть $k' \in I_{22}$ таково, что $\operatorname{Re}\varrho_{k'} \geq \operatorname{Re}\varrho_k$ для всех $k \in I_{22}$. Разделим

(4.47) на $t^{\varrho_{k'}} e^{q_{k'}(t)}$ и пусть $t \to +\infty$. Рассматривая k'-ю строку, при переходе к пределу получаем, что $c_{ik'} = 0$, если $\operatorname{Re} \varrho_{k'} > \operatorname{Re} \varrho_i$. При $\operatorname{Re} \varrho_{k'} = \operatorname{Re} \varrho_i$ рассмотрение k-й строки показывает также, что $c_{ik'} = 0$. Теперь, деля на $t^{\varrho_i} e^{q_i(t)}$ и полагая $t \to +\infty$, легко получить, что $c_{ii} = 1$. Далее, в точности такие рассуждения проходят для $\operatorname{Re} \varrho_{k'} < \operatorname{Re} \varrho_i$, $k' \in I_{22}$. При этом m следует полагать настолько большим, чтобы было $\operatorname{Re} \varrho_i - \operatorname{Re} \varrho_{k'} + \mu - m < 0$ для всех $k' \in I_{22}$, таких, что $\operatorname{Re} \varrho_{k'} < \operatorname{Re} \varrho_i$.

Поэтому из (4.44) следует

$$\varphi_{(m)i}(t) = \varphi_{(m+l)i}(t) + \sum_{j \in I_1} c_{ij} \varphi_{(m+l)j}(t).$$

Отсюда вытекает, если использовать (4.43) и (4.45), что

$$\varphi_{(m)i}(t) = \varphi_{(m+l)i}(t) + O\left(e^{\operatorname{Re} q_i(t)} E(t)\right),$$

где $E(t) = O(e^{-at})$ для некоторой постоянной $a > 0$, которая не зависит от m или m'. Это доказывает оценку (4.42).

Теперь можно выяснить асимптотическую природу формальных решений в действительном случае.

Теорема 4.1. *Пусть $\hat{\varphi}_i = p_i t^{\varrho_i} e^{q_i}$ — произвольный вектор-столбец формальной матрицы-решения $\hat{\Phi} = P t^R e^Q$ системы* (4.20), *где матрица A удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *для $z = t$. Тогда существует для всех достаточно больших t истинный вектор-решение φ_i этой системы, такой, что оценка*

$$|\varphi_i(t) - \hat{\varphi}_{(m)i}(t)| = O\left(t^{\operatorname{Re} \varrho_i - m - 1} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty) \tag{4.48}$$

имеет место для всех $m = 0, 1, 2, \ldots$. В частности, $\varphi_i \sim \hat{\varphi}_i$.

Доказательство. Из леммы 4.3 следует, что для каждого достаточно большого m', скажем $m' \geq m_1$, существует решение $\varphi_{(m')i}$, такое, что

$$\varphi_{(m')i}(t) = \hat{\varphi}_{(m')i}(t) + O\left(t^{\operatorname{Re} \varrho_i + \mu - m'} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty), \tag{4.49}$$

где μ — целое положительное число, не зависящее от m'. Выберем целое число m_1 так, чтобы было $m_1 > \mu$. По лемме 4.4 для достаточно больших m, скажем $m \geq m_2 \geq m_1$ и $m' > m$,

$$\varphi_{(m)i}(t) = \varphi_{(m')i}(t) + O\left(e^{\operatorname{Re} q_i(t) - at}\right) \quad (t \to +\infty), \tag{4.50}$$

где a — положительная постоянная. Комбинируя (4.49) и (4.50), получаем для $m = m_2$ и всех $m' > m_2$

$$\varphi_{(m_2)i}(t) = \hat{\varphi}_{(m')i}(t) + O\left(t^{\operatorname{Re} \varrho_i + \mu - m'} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{4.51}$$

Но из определения решения $\hat{\varphi}_{(m')i}(t)$ следует, что

$$\hat{\varphi}_{(m')i}(t) = \hat{\varphi}_{(m'-\mu-1)i}(t) + O\left(t^{\operatorname{Re} \varrho_i + \mu - m'} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{4.52}$$

Полагая $m = m' - \mu - 1$ и комбинируя (4.51) и (4.52), получаем для всех $m > m_2 - \mu - 1$

$$\varphi_{(m_2)i}(t) = \hat{\varphi}_{(m)i}(t) + O\left(t^{\operatorname{Re} \varrho_i - m - 1} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{4.53}$$

Остается доказать (4.53) для $m = 0, 1, \ldots, m_2 - \mu - 1$. Так как

$$\hat{\varphi}_{(m)i}(t) = \hat{\varphi}_{(m-1)i}(t) + O\left(t^{\operatorname{Re}\varrho_i - m} e^{\operatorname{Re} q_i(t)}\right) \quad (t \to +\infty),$$

то (4.53) имеет место для $m = m_2 - \mu - 1$. Используя индукцию, нетрудно видеть, что (4.53) должно быть справедливо для $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тем самым теорема доказана, если в качестве φ_i выбирается решение $\varphi_{(m_2)i}$.

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В КОМПЛЕКСНОМ СЛУЧАЕ

Результат, высказанный в теореме 4.1, справедлив не только для действительных $z = t$, но, очевидно, также на каждом луче $z = te^{i\theta}$, каково бы ни было фиксированное θ. Однако теорема не связывает решения вдоль одного луча с решениями вдоль другого луча. В этом параграфе будет показано при помощи некоторых теорем теории функций комплексного переменного, что теорема 4.1 может быть использована для доказательства того, что решение φ_i с асимптотическим разложением $\hat{\varphi}_i$ вдоль надлежащего луча на самом деле имеет $\hat{\varphi}_i$ своим асимптотическим разложением в некотором секторе z-плоскости.

Необходимые нам результаты из теории функций, формулируемые ниже, принадлежат Фрагмену и Линделефу и являются обобщением теоремы о максимуме модуля[1]. При $z = |z| e^{i\theta}$ мы будем пользоваться обозначением $\arg z = \theta$.

Теорема А. *Пусть f — аналитическая функция при*

$$k \leq |z| < \infty, \qquad \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2,$$

где k, θ_1, θ_2 — действительные постоянные. Пусть

$$f(z) = O\left(e^{c|z|^m}\right) \qquad (|z| \to \infty)$$

равномерно при $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ для некоторых постоянных c и m, таких, что

$$m(\theta_2 - \theta_1) < \pi.$$

Если функция f ограничена при $|z| \to \infty$ на лучах $\arg z = \theta_1$ и $\arg z = \theta_2$, то f ограничена равномерно при $|z| \to \infty$ в секторе $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$.

Теорема В. *Пусть f — аналитическая и равномерно ограниченная функция в области, определенной в теореме А. Кроме того, предположим, что существуют постоянные a и b, такие, что $f(z) \to a$ при $|z| \to \infty$ на луче $\arg z = \theta_1$ и $f(z) \to b$ при $|z| \to \infty$ на луче $\arg z = \theta_2$. Тогда $a = b$ и $f(z) \to a$ равномерно в секторе $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$ при $|z| \to \infty$.*

---

[1] Доказательства этих теорем см. в книге Титчмарш Е. К., Теория функций, Гостехиздат, 1951, стр. 203.

Напомним, что рассматриваемая система имеет вид

$$w' = z^r A(z)\, w \qquad (r \geq 0), \tag{5.1}$$

где

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_k \tag{5.2}$$

и последний ряд сходится при $|z| > d$ для некоторого $d > 0$. Из (5.1) непосредственно следует существование такой постоянной $c_1 > 0$, что каждое решение φ системы (5.1) удовлетворяет для больших $|z|$ неравенству $|\varphi'| \leq c_1 |z|^r |\varphi|$. Если положить $c = c_1/(r+1)$, то из последнего неравенства следует, что

$$\varphi(z) = O\left(e^{c|z|^{r+1}}\right) \qquad (|z| \to \infty) \tag{5.3}$$

равномерно в каждом фиксированном секторе z-плоскости, ограниченном двумя лучами.

Выберем целое число i $(1 \leq i \leq n)$ и зафиксируем его в дальнейших рассуждениях. Так как, по предположению, характеристические корни $\lambda_j (j = 1, \ldots, n)$ матрицы A_0 различны, то уравнение

$$\operatorname{Re}\left[(\lambda_i - \lambda_j) z^{r+1}\right] = 0 \qquad (j \neq i) \tag{5.4}$$

определяет в z-плоскости конечное число направлений. Это — направления $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$, для которых

$$\cos\left[\arg(\lambda_i - \lambda_j) + (r+1)\theta\right] = 0.$$

Обозначим через S_i сектор

$$S_i: \qquad \alpha \leq \arg z \leq \beta,$$

такой, что все направления, определенные из уравнения (5.4), находятся вне S_i. Докажем следующий результат.

Теорема 5.1. *Если $\hat{\varphi}_i = p_i z^{\varrho_i} e^{q_i}$ — произвольный формальный вектор-решение системы* (5.1), *то существует в секторе S_i, определенном выше, для всех достаточно больших $|z|$ истинное решение φ_i системы* (5.1), *такое, что*

$$\varphi_i \sim \hat{\varphi}_i$$

равномерно в S_i.

Легким следствием этой теоремы является следующий результат.

Теорема 5.2. *Если сектор S z-плоскости не содержит направлений, для которых*

$$\operatorname{Re}\left[(\lambda_l - \lambda_j) z^{r+1}\right] = 0 \quad (l, j = 1, \ldots n; \quad l \neq j),$$

то существует для всех достаточно больших $|z|$ фундаментальное множество решений φ_i $(i = 1, \ldots, n)$ системы (5.1) *в S, такое, что*

$$\varphi_i \sim \hat{\varphi}_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

равномерно в S.

Доказательство теоремы 5.1. Для любого $j = 1, 2, \ldots, n$

$$q_i(z) - q_j(z) = (\lambda_i - \lambda_j)\frac{z^{r+1}}{r+1} + (\lambda_i^{(1)} - \lambda_j^{(1)})\frac{z^r}{r} + \ldots + (\lambda_i^{(r)} - \lambda_j^{(r)})z,$$

и ясно, что поведение $\operatorname{Re}(q_i - q_j)$ в S_i для $j \neq i$ при $|z| \to \infty$ зависит от поведения первого члена

$$\operatorname{Re}\left[\frac{(\lambda_i - \lambda_j)z^{r+1}}{r+1}\right],$$

так как $|\lambda_i - \lambda_j| \neq 0$. Из определения сектора S_i следует, что целые числа $j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$ распадаются на два класса I_1 и I_2, для которых

$$\operatorname{Re}(q_i - q_j) \to \infty \qquad (j \in I_1) \tag{5.5}$$

равномерно в S_i при $|z| \to \infty$ и

$$\operatorname{Re}(q_i - q_j) \to -\infty \qquad (j \in I_2) \tag{5.6}$$

равномерно в S_i при $|z| \to \infty$.

Из теоремы 4.1 вытекает существование решения φ_i системы (5.1) на луче $\arg z = \alpha$ для всех достаточно больших $|z|$, обладающего тем свойством, что

$$\varphi_i \sim \hat{\varphi}_i \qquad (\arg z = \alpha). \tag{5.7}$$

Из свойства единственности следует, что функция φ_i может быть продолжена за пределы луча $\arg z = \alpha$, и, следовательно, можно предполагать, что φ_i существует для всех достаточно больших $|z|$ и удовлетворяет оценке (5.7) на луче $\arg z = \alpha$. Выберем теперь число γ так, чтобы

$$\alpha < \gamma \leq \beta \quad \text{и} \quad \gamma - \alpha < \frac{\pi}{r+1}. \tag{5.8}$$

Можно также предполагать, что γ выбрано так, что на луче $\arg z = \gamma$ имеем для любых l и j, $l \neq j$, или

$$\operatorname{Re}(q_l - q_j) \to \infty \quad (\arg z = \gamma),$$

или

$$\operatorname{Re}(q_l - q_j) \to -\infty \quad (\arg z = \gamma),$$

Из теоремы 4.1 следует, что на луче $\arg z = \gamma$ существует для достаточно больших $|z|$ фундаментальное множество решений $\psi_1, \ldots, \psi_n$ системы (5.1), таких, что

$$\psi_j \sim \hat{\varphi}_j \qquad (\arg z = \gamma). \tag{5.9}$$

Таким образом, для некоторых постоянных $c_1, \ldots, c_n$

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} c_j \psi_j \tag{5.10}$$

при всех достаточно больших $|z|$.

Предположим, что существует такое $k \in I_2$, что $c_k \neq 0$ и что для всех $l \in I_2$, для которых $l \neq k$ и $c_l \neq 0$, имеет место соотношение

$$\operatorname{Re}(q_k - q_l) \to \infty \qquad (\arg z = \gamma) \tag{5.11}$$

при $|z| \to \infty$. Если $m > 0$—произвольное целое число, то в силу (5.9) и (5.10) имеем в обозначениях теоремы 4.1

$$\varphi_i = c_k \hat{\varphi}_{(m)k} + O(|z|^{\operatorname{Re}\varrho_k - m - 1} e^{\operatorname{Re} q_k(z)}) \quad (\arg z = \gamma).$$

В частности, если

$$f(z) = \varphi_i(z) e^{-q_k(z)} z^{-\varrho_k},$$

то

$$f(z) = a + O(|z|^{-1}) \qquad (|z| \to \infty, \ \arg z = \gamma),$$

где a — постоянный вектор, не равный тождественно нулю. На луче $\arg z = \alpha$ имеем, так как $k \in I_2$ и выполняется соотношение (5.7),

$$f(z) = O(|z|^{-1}) \quad (|z| \to \infty, \ \arg z = \alpha).$$

Вспоминая (5.3) и используя теорему А и затем теорему В для каждой компоненты f, получаем, что $a = 0$, а это невозможно. Таким образом, числá k с предположенными свойствами не существует и неисчезающие члены в правой части равенства (5.10) таковы, что $j \in I_1$ и $j = i$.

Из (5.7) следует, что вектор

$$g(z) = \varphi_i(z) e^{-q_i(z)} z^{-\varrho_i}$$

таков, что

$$g(z) \to c \qquad (|z| \to \infty, \ \arg z = \alpha),$$

где c — постоянный вектор, определяемый равенством

$$c = \lim_{z \to \infty} \hat{\varphi}_{(m)i}(z) e^{-q_i z} z^{-\varrho_i}.$$

Из (5.9) и (5.10) имеем также

$$g(z) \to c_i c \qquad (|z| \to \infty, \ \arg z = \gamma)$$

и в силу теоремы В отсюда следует, что $c_i = 1$. Таким образом, формула (5.10) дает

$$(\varphi_i - \hat{\varphi}_{(m)i}) e^{-q_i} z^{-\varrho_i} z^{m+1} = O(1) \quad (|z| \to \infty, \ \arg z = \gamma).$$

В силу (5.7) это соотношение, очевидно, справедливо для $\arg z = \alpha$. Применяя к разности $\varphi_i - \hat{\varphi}_{(m)i}$ теорему А, заключаем, что оно справедливо равномерно в области $\alpha \leq \arg z \leq \gamma$. Это эквивалентно асимптотическому равенству

$$\varphi_i \sim \hat{\varphi}_i \qquad (\alpha \leq \arg z \leq \gamma).$$

Если $\gamma < \beta$, то, повторяя предыдущие соображения конечное число раз в секторах с углами меньшими $\pi/(r+1)$, получаем теорему для сектора S_i.

Следующее замечание показывает, что обычно сектор S_i может быть расширен. Кривая, вдоль которой $\operatorname{Re}(q_i - q_j) = 0$ для некоторого $j \neq i$, может заменить луч в условиях теорем A и B. Кроме того, результаты, полученные в § 4 для z, изменяющегося вдоль луча, вообще говоря, справедливы при изменении z вдоль такой кривой. При помощи незначительного изменения предыдущих рассуждений можно получить асимптотические соотношения в некотором секторе S_i, ограниченном двумя такими кривыми, но не содержащем ни одной такой кривой внутри. Далее, наши соотношения обычно могут быть распространены на примыкающий сектор. Покажем это на примере. Метод является вполне общим.

Рассмотрим уравнение (1.3) при $a = -1/4$ и комплексной независимой переменной, так что мы имеем систему

$$\frac{dw}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 + \frac{1}{4z^2}\right) & 0 \end{pmatrix} w$$

с корнями $\lambda_1 = i$ и $\lambda_2 = -i$. Беря первую компоненту вектора w и обозначая ее через u, получаем

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(1 + \frac{1}{4z^2}\right) u = 0, \tag{5.12}$$

и, как видно из (1.5), это уравнение имеет следующие два формальных решения

$$\hat{\varphi}_1 = e^{iz}\left(1 + \frac{1}{8iz} + \ldots\right),$$

$$\hat{\varphi}_2 = e^{-iz}\left(1 - \frac{1}{8iz} + \ldots\right).$$

Рассмотрим теперь решение φ_1 уравнения (5.12), которое по теореме 5.1 удовлетворяет для $\delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$, где $\delta > 0$, соотношению

$$\varphi_1 \sim \hat{\varphi}_1. \tag{5.13}$$

Пусть ψ_1 и ψ_2 — два решения уравнения (5.12), которые на луче $\arg z = 0$ ведут себя асимптотически соответственно как $\hat{\varphi}_1$ и $\hat{\varphi}_2$. Тогда для некоторых постоянных c_1 и c_2

$$\varphi_1 = c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2.$$

Умножая это равенство на e^{iz}, получаем, что

$$e^{iz}\varphi_1(z) = c_1 e^{2iz} + c_2 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \tag{5.14}$$

на луче $\arg z = 0$ при $z \to +\infty$. Используя (5.13), находим

$$e^{iz}\varphi_1(z) = e^{2iz}\left(1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right)\right) \tag{5.15}$$

на луче $\arg z = \pi/2$ при $|z| \to \infty$.

Пусть

$$F(z) = \frac{1}{z} \int_{x_0}^{z} e^{is} \varphi_1(s)\, ds,$$

где x_0 — большое положительное число и интеграл берется в верхней полуплоскости по дуге окружности $|s| = x_0$ до луча $\arg s = \arg z$, а затем вдоль луча $\arg s = \arg z$. Очевидно, что из (5.14) и (5.15) следует

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = c_2 \qquad (\arg z = 0),$$

$$\lim_{z\to\infty} F(z) = 0 \qquad \left(\arg z = \frac{\pi}{2}\right).$$

Таким образом, из теоремы А, применяя теорему В, получаем, что $c_2 = 0$. Рассматривая теперь функцию $e^{-iz}\varphi_1(z)$ на лучах $\arg z = 0$ и $\pi/2$, находим, что $c_1 = 1$. Итак,

$$[\varphi_1(z) - \hat{\varphi}_{(m)1}(z)]\, e^{-iz} z^{m+1} = O(1)$$

на лучах $\arg z = 0$ и $\pi/2$, откуда следует, что $\varphi_1 \sim \hat{\varphi}_1$ равномерно в секторе $0 \leq \arg z \leq \pi/2$. Эти соображения могут быть теперь повторены для сектора $[\pi/2, \pi]$. Кроме того, их можно повторить для секторов $[\pi, 2\pi - \delta]$ и $[-\pi + \delta, 0]$ для некоторого $\delta > 0$, так что окончательно

$$\varphi_1 \sim \hat{\varphi}_1 \qquad (-\pi + \delta \leq \arg z \leq 2\pi - \delta). \tag{5.16}$$

(В самом деле, $z^{-1/2}\varphi_1(z)$, — с точностью до постоянного множителя, функция Ханкеля.)

Аналогичные результаты имеют место для решения φ_2:

$$\varphi_2 \sim \hat{\varphi}_2 \qquad (-2\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta). \tag{5.17}$$

Уравнение (5.12) имеет своим решением выражение $z^{1/2}J_0(z)$, где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка. Так как решения φ_1 и φ_2 независимы, то

$$z^{1/2} J_0(z) = c_1 \varphi_1(z) + c_2 \varphi_2(z)$$

для некоторых постоянных c_1 и c_2. [Легко проверить, что $c_1 = \bar{c}_2 = (2/\pi)^{1/2} e^{-\pi i/4}$.] Из (5.16) и (5.17) следует

$$z^{1/2} J_0(z) \sim c_1 \hat{\varphi}_1(z) + c_2 \hat{\varphi}_2(z) \quad (-\pi + \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta).$$

Так как J_0 — целая функция z, то она однозначна. Формальный ряд, стоящий справа, также однозначен. Так как слева встречается множитель $z^{1/2}$, то левая часть многозначна, так что предыдущая асимптотическая формула не может быть справедливой при $-\pi \leq \arg z \leq \pi$. Таким образом, полученный результат в некотором смысле является наилучшим. Используя очевидное обобщение метода, примененного в этом примере, часто возможно асимптотические формулы распространить на секторы, большие, чем секторы в теореме 5.1.

§ 6. СЛУЧАЙ, КОГДА МАТРИЦА A_0 ИМЕЕТ КРАТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КОРНИ

Этот случай значительно сложней, чем рассмотренный в § 2. Доказательство существования формального решения содержит новые существенные трудности. Это можно проиллюстрировать в действительном случае на примере уравнения

$$tw'' + w' + w = 0. \tag{6.1}$$

Соответствующая уравнению (6.1) система имеет вид

$$w_1' = w_2,$$
$$w_2' = -t^{-1} w_1 - t^{-1} w_2.$$

Если w — вектор с компонентами w_1, w_2, то

$$w' = (A_0 + t^{-1} A_1) w, \tag{6.2}$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Следовательно, матрица A_0 имеет двойной корень $\lambda = 0$ с непростым элементарным делителем. Если сделать подстановку $t = s^2$, то уравнение (6.1) принимает вид

$$w'' + s^{-1} w' + 4 w = 0 \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right) \tag{6.4}$$

с соответствующей системой

$$w' = (B_0 + s^{-1} B_1) w \qquad \left(' = \frac{d}{ds}\right), \tag{6.5}$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Таким образом, матрица B_0 имеет характеристические корни $\lambda = \pm 2i$, и, следовательно, можно применить к системе (6.5) теорему 2.1. Из этой теоремы вытекает, что (6.4) имеет формальное решение вида

$$e^{2is} s^r \left(1 + \frac{c_1}{s} + \ldots\right). \tag{6.7}$$

Подставляя (6.7) в (6.4), найдем, что $r = -1/2$. Так как уравнение (6.4) действительное, то комплексно сопряженное к (6.7) выражение также должно быть формальным решением. Отсюда получаем, полагая $s = t^{1/2}$, что (6.1) имеет формальное решение вида

$$\hat{w} = c_1 p_1(t^{1/2}) t^{-1/4} e^{2it^{1/2}} + c_2 p_2(t^{1/2}) t^{-1/4} e^{-2it^{1/2}}, \tag{6.8}$$

где c_1, c_2 — постоянные и p_1, p_2 — формальные степенные ряды по t^{-1}. Итак, ясно, что в показательные члены и формальные ряды могут входить дробные степени t.

Можно показать, что в общем случае, когда матрица A_0 имеет кратные характеристические корни, справедлива следующая теорема, однако ввиду сложности доказательство опускается.

Теорема 5.1. *Рассмотрим систему*

$$w' = z^r A(z)\, w, \tag{6.9}$$

где r — неотрицательное целое число,

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_k$$

и последний ряд сходится при $|z| > a$ для некоторого $a > 0$. Тогда существует формальная матрица-решение для (6.9) *вида*

$$\Phi = Se^Q. \tag{6.10}$$

Здесь Q — диагональная матрица с диагональными элементами q_i, представляющими собой многочлены типа

$$q_i(z) = q_{i0}(z^{1/h})^{l_i} + q_{i1}(z^{1/h})^{l_i-1} + \ldots + q_{i(l_i-1)} z^{1/h},$$

где l_i и h — целые, и S — матрица, элементы которой s_{ij} — формальные выражения вида

$$s_{ij} = z^{r_{ij}} \sum_{m=0}^{m_{ij}} \sigma_{ijm} \ln^m z.$$

В этой формуле r_{ij} — постоянные, а σ_{ijm} — формальные ряды:

$$\sigma_{ijm} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_{ijml} z^{-l/h},$$

где σ_{ijml} — постоянные. Кроме того, формальные определители матрицы S не обращаются в нуль для больших $|z| < \infty$.

Далее можно показать, что существуют решения системы (6.9), которые имеют эти формальные решения своими асимптотическими разложениями в некоторых секторах z-плоскости. Доказательства §§ 4 и 5 могут быть легко применены к этому более общему случаю.

§ 7. ИРРЕГУЛЯРНЫЕ ОСОБЫЕ ТОЧКИ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА n

Рассмотрим уравнение порядка n вида

$$\sum_{m=0}^{n} z^{mr} a_m(z)\, w^{(n-m)} = 0 \qquad (a_0(z) \equiv 1), \tag{7.1}$$

где $r \geq 0$ — целое число и коэффициенты a_m — аналитические функции в окрестности точки $z = \infty$, т. е.

$$a_m(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{mp} z^{-p}$$

и ряд сходится при $|z| > a$ для некоторого $a > 0$. Пусть φ — некоторое решение уравнения (7.1) и пусть компоненты φ_k имеют вид

$$\varphi_k = z^{-(k-1)r}\varphi^{(k-1)} \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{7.2}$$

Тогда легко проверить, что

$$\begin{aligned} \varphi_k' &= -(k-1)rz^{-1}\varphi_k + z^r\varphi_{k+1} \quad (k = 1, \ldots, n-1), \\ \varphi_n' &= -(n-1)rz^{-1}\varphi_n - z^r(a_n\varphi_1 + a_{n-1}\varphi_2 + \ldots + a_1\varphi_n). \end{aligned} \tag{7.3}$$

Следовательно, если φ — решение (7.1), то вектор с компонентами φ_k, определенными по формулам (7.2), есть решение системы

$$w' = z^r A(z)\, w, \tag{7.4}$$

где

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -rz^{-r-1} & 1 & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -2rz^{-r-1} & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot\cdot & 0 & 1 \\ -a_n(z) & -a_{n-1}(z) & \cdot & \cdot\cdot & -a_2(z) & -(n-1)rz^{-r-1} - a_1(z) \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Наоборот, первая компонента каждого вектора-решения системы (7.4), (7.5) есть решение уравнения (7.1). Поэтому теоремы 2.1, 4.1 и 5.1 могут быть применены к (7.4), (7.5) с тем, чтобы получить формальные решения и их асимптотическое поведение; рассматривая же первую компоненту, получаем соответствующие результаты для уравнения (7.1).

Если матрицу A записать в виде

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} A_k,$$

где A_k — постоянные матрицы, то

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot\cdot 0 & 1 \\ -a_{n0} & \cdot & \cdot & \ldots & -a_{10} \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение для матрицы A_0, как следует из формулы (6.19) гл. III, имеет вид

$$\lambda^n + a_{10}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n0} = 0 \tag{7.6}$$

и его можно непосредственно получить, если заменить в (7.1) производную $w^{(k)}$ на λ^k и $z^{kr}a_k(z)$ на a_{k0} — постоянное слагаемое в разложении a_k.

§ 8. ИНТЕГРАЛ ЛАПЛАСА И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЯДЫ

При доказательстве существования истинных решений системы (1.2), представимых асимптотически формальными логарифмически-экспоненциальными рядами[1], в основу может быть положен интеграл Лапласа.

Здесь мы рассмотрим частный случай

$$(a_0 z + b_0)\, w^{(n)} + (a_1 z + b_1)\, w^{(n-1)} + \ldots + (a_n z + b_n)\, w = 0\,, \quad (8.1)$$

где a_j, b_j — постоянные. Положим

$$P(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n\,,$$

$$Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n\,.$$

Пусть F — аналитическая функция и

$$\varphi(z) = \int\limits_C F(s)\, e^{sz}\, ds\,,$$

где C — путь в комплексной плоскости, который будет ниже определен.

Предположим, что φ — решение уравнения (8.1). Так как формально

$$\varphi^{(k)}(z) = \int\limits_C F(s)\, s^k\, e^{sz}\, ds\,,$$

то уравнение (8.1) приводится к виду

$$\int\limits_C F(s)\, [z P(s) + Q(s)]\, e^{sz}\, ds = 0\,.$$

Очевидно, интегрирование по частям дает

$$\int\limits_C FP\, z e^{sz}\, ds = F(s) P(s)\, e^{sz}\Big|_C - \int\limits_C \frac{d}{ds}(FP)\, e^{sz}\, ds\,,$$

где $FPe^{sz}|_C$ — вариация функции на контуре C. Таким образом,

$$\int\limits_C [FQ - FP' - F'P]\, e^{sz}\, ds + FP\, e^{sz}|_C = 0\,.$$

Выберем F так, чтобы было

$$F'P + F(P' - Q) = 0\,.$$

Следовательно,

$$F = \frac{1}{P} \exp\left[\int^{s} \frac{Q(\sigma)}{P(\sigma)}\, d\sigma\right]. \quad (8.2)$$

[1] См., например, Айнс Е. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Теперь условие, что интеграл φ удовлетворяет уравнению (8.1), принимает простой вид

$$V = \exp\left[\int^{s} \frac{Q(\sigma)}{P(\sigma)}\, d\sigma\right] e^{sz}\big|_C = 0. \tag{8.3}$$

Если $s_1, \ldots, s_m$ — корни уравнения $P(s) = 0$ и они простые, то

$$\int^{s} \frac{Q(\sigma)}{P(\sigma)}\, d\sigma = R(s) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \ln(s - s_j),$$

где $R(s)$ — многочлен и α_j — постоянные. Таким образом,

$$V = e^{sz + R(s)} \prod_{j=1}^{m} (s - s_j)^{\alpha_j}\big|_C$$

и C выбирается так, что $V = 0$. Это может налагать ограничение на z.

В случае, когда степень многочлена $P(s)$ равна n, $R(s) = as$, где a — постоянная, и

$$V = e^{(z+a)s} \prod_{j=1}^{n} (s - s_j)^{\alpha_j}\big|_C.$$

Если $\operatorname{Re} \alpha_k > 0$, то пусть

$$\varphi_k(z) = \int_{s_k}^{\infty} e^{s(z+a)} \prod_{j=1}^{n} (s - s_j)^{\alpha_j - 1}\, ds, \tag{8.4}$$

где интеграл берется вдоль прямой линии от точки $s = s_k$ до $s = \infty$. Если линия интегрирования образует с положительным направлением действительной оси s-плоскости угол γ, то интеграл в выражении для φ_k сходится для $\pi/2 < \arg z + \gamma < 3\pi/2$, и φ_k есть решение (8.1). Область применимости представления может быть изменена варьированием γ.

Далее легко показать, что такие интегралы (которые являются на самом деле преобразованиями Лапласа) представимы асимптотическими рядами.

В качестве примера возьмем уравнение

$$zw'' + (\gamma - z)\, w' - \alpha w = 0 \tag{8.5}$$

(рассмотренное в гл. IV). Здесь

$$P(s) = s^2 - s, \qquad Q(s) = \gamma s - \alpha.$$

Следовательно,

$$F(s) = s^{\alpha - 1}(s - 1)^{\gamma - \alpha - 1}$$

и

$$V = s^{\alpha}(s - 1)^{\gamma - \alpha} e^{sz}\big|_C.$$

Если $\operatorname{Re} \alpha > 0$ и $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, то решение дается в виде

$$\int_0^1 s^{\alpha - 1}(s - 1)^{\gamma - \alpha - 1} e^{sz}\, ds.$$

Другое решение, годное для $\operatorname{Re} z < 0$, $\operatorname{Re}(\gamma - \alpha) > 0$, представляет собой интеграл

$$\int_1^\infty s^{\alpha-1}(s-1)^{\gamma-\alpha-1} e^{sz}\, ds. \tag{8.6}$$

Решения могут быть также представлены интегралами по петлеобразному пути, который обходит точку $s = 0$ в положительном направлении, а точку $s = 1$ — в отрицательном, и затем вновь точку $s = 0$ — в отрицательном направлении, точку $s = 1$ — в положительном.

Если $s = \sigma + 1$, то решение (8.6) принимает вид

$$e^z \int_0^\infty (1+\sigma)^{\alpha-1} \sigma^{\gamma-\alpha-1} e^{\sigma z}\, d\sigma. \tag{8.7}$$

Для всех $\sigma \geq 0$ (в действительности для всех σ, таких, что $|\arg \sigma| < \pi - \delta$)

$$(1+\sigma)^{\alpha-1} = 1 + (\alpha-1)\sigma + \\ + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}\sigma^2 + \ldots + \frac{(\alpha-1)\ldots(\alpha-k)}{k!}\sigma^k + F_k(\sigma)\sigma^{k+1},$$

где функция $F_k(\sigma)$ равномерно ограничена.

Таким образом, решение (8.7) асимптотически равно

$$e^z\left[\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)}{z^{\gamma-\alpha}} + \frac{(\alpha-1)\Gamma(\gamma-\alpha+1)}{z^{\gamma-\alpha+1}} + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\Gamma(\gamma-\alpha+2)}{2!\, z^{\gamma-\alpha+2}} + \ldots\right].$$

При помощи изменения направления пути интегрирования в σ-плоскости область применимости асимптотического разложения может быть расширена до сектора $-\pi/2 < \arg z < 5\pi/2$.

Задачи

1. Предположим, что матрица A системы (4.1) аналитична в некоторой области D комплексной z-плоскости и что

$$A \sim A_0 + z^{-1}A_1 + \ldots$$

в D. Доказать, что теоремы 4.1, 5.1 и 5.2 справедливы при дополнительном ограничении $z \in D$.

2. Провести рассуждения, аналогичные проведенным в конце § 5, для уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \left(1 + \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2}\right)u = 0,$$

где a и b — действительные постоянные.

3. Выяснить зависимость между предыдущей задачей и уравнением (8.5), разобранным в конце § 8 (см. задачу 7 гл. IV).

4. Пусть для больших $|z|$

$$f(z) = e^{g(z)} z^\mu \left(b_0 + \frac{b_1}{z} + \ldots\right),$$

где $g(z) = g_0 z^{\pi+1}/(\pi+1) + \ldots + g_\pi z$ — многочлен степени $\pi + 1$, μ — посто-

янная и b_j — постоянные векторы. Пусть матрица $A(z)$ такая же, как и в формуле (2.3). Показать, что система

$$w' = z^r A(z) w + f(z)$$

имеет формальное решение

$$\psi = e^g z^k \left[c_0 + \frac{c_1}{z} + \ldots \right],$$

где $k = \mu - \pi$, если $r \leq \pi$, и $k = \mu - r$, если $r > \pi$. Предполагается также: или ни один из характеристических корней A_0 не равен g_0, если $r = \pi$, или ни один из характеристических корней A_0 не равен нулю, если $r > \pi$.

5. Пусть многочлены q_i определены так, как в (4.18). Пусть S — сектор z-плоскости, в котором для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ или

$$\operatorname{Re}(q_j - g) \to \infty, \tag{a}$$

или

$$\operatorname{Re}(q_j - g) \to -\infty \tag{b}$$

при $|z| \to \infty$. Показать, что дифференциальное уравнение задачи 4 имеет решение φ, такое, что

$$\varphi \sim \psi \qquad (z \in S).$$

Указание. Пусть $\hat{\psi}_m$ — усеченная сумма, состоящая из $m + 1$ членов ряда ψ. Пусть $\tilde{w} = w - \hat{\psi}_m$. Тогда

$$\tilde{w}' = z^r A(z)\, \tilde{w} + f_m(z),$$

где

$$e^{-g} f_m = O(|z|^{l+k-m-1}) \qquad (l = \max(\pi, r)).$$

Показать, используя интегральное уравнение, аналогичное (4.23), что вдоль любого фиксированного радиуса в S существует решение $\tilde{w} = \chi(z, m)$, $\chi(z, m)\, e^{-g} = O(|z|^{k-m-1})$, но с решениями $\hat{\Psi}^{(1)}_{(m)}$, и $\hat{\Psi}^{(2)}_{(m)}$, которые определены по условиям (a) и (b), указанным выше, а не по (4.19). Затем использовать прием § 5.

Глава VI

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, СОДЕРЖАЩИХ БОЛЬШОЙ ПАРАМЕТР

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе будет рассматриваться линейная система дифференциальных уравнений

$$x' = \varrho^r A(t, \varrho) x \qquad (a \leq t \leq b), \tag{1.1}$$

где $r \geq 1$ — целое, A — матрица, непрерывная по совокупности переменных (t, ϱ) для $a \leq t \leq b$ и больших $|\varrho|$ и аналитическая по ϱ для больших $|\varrho|$, так что

$$A(t, \varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} A_k(t) \tag{1.2}$$

для больших $|\varrho|$ с непрерывными матрицами A_k. Такие системы встречаются в задачах на собственные значения, как будет показано в гл. VII. (Результаты этой главы не используются в гл. VII.) Эти системы встречаются также в тех случаях, когда старшая производная в линейном дифференциальном уравнении порядка n имеет множителем малый параметр — например, в теории пограничного слоя. Результаты и методы этой главы не изменяются, если соотношение (1.2) будет формальным с расходящимся рядом.

В некоторых случаях решения уравнения (1.1) изучаются при действительных t и больших комплексных ϱ. В других случаях ϱ может быть действительным большим, а t — комплексным или обе переменные могут быть комплексными. Методы этой главы имеют много общего с методами гл. V. Здесь будет рассмотрен случай действительных t и комплексных ϱ. Изменения, которые необходимо внести в других случаях, достаточно тесно примыкают к методам гл. V, и в настоящей главе мы этим не будем заниматься.

Мы будем предполагать, что матрица $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни для $t \in [a, b]$ или по крайней мере, что число различных характеристических корней $A_0(t)$ не меняется, если t пробегает значения от a до b. Это исключает из рассмотрения некоторые очень интересные задачи. Одна из таких задач возникает в случае уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 w}{dt^2} + [\varrho^2 t + q_0(t) + q_1(t) \varrho^{-1} + \ldots] w = 0 \tag{1.3}$$

в окрестности точки $t = 0$. Если использовать в этом случае переход к системе, полагая $w = w_1$ и $w' = \varrho w_2$, то для (1.3) будем иметь $r = 1$ и

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $A_0(t)$ имеет различные характеристические корни, за исключением точки $t = 0$. Чтобы изучить уравнение (1.3), следует, используя метод вариации произвольных постоянных и решения уравнения

$$w'' + \varrho^2 t w = 0,$$

которые выражаются в явном виде через некоторые функции Бесселя, заменить его интегральным уравнением. По методу это очень похоже на то, что было уже дано в гл. V, и на то, что будет дано в этой главе. Однако в этом примере мы имеем более сложную асимптотическую формулу ввиду наличия функций Бесселя. Говорят, что уравнение (1.3) имеет в точке $t = 0$ *точку ветвления*. Изучение точек ветвления здесь не будет проводиться.

§ 2. ФОРМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

Для случая, который будет изучаться вначале, достаточно рассмотреть *формальные ряды (Лорана)* по степеням ϱ^{-1} с непрерывными коэффициентами, т. е. ряды вида

$$p = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k(t)\, \varrho^{-k},$$

где p_k — непрерывные функции t на интервале $a \leq t \leq b$ и все p_k с отрицательными индексами, за исключением конечного числа их, равны нулю для $a \leq t \leq b$. Ряд не обязан сходиться. Если каждый коэффициент p_k дифференцируем, то производная p' ряда p определяется как формальный ряд

$$p' = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k'(t)\, \varrho^{-k}.$$

Два формальных ряда называются равными, если коэффициенты при одинаковых степенях ϱ^{-1} равны. Сумма, произведение и прочие операции с формальными рядами определяются так, как было указано ранее.

Пусть q — многочлен относительно ϱ:

$$q = q_0(t)\, \varrho^r + q_1(t)\, \varrho^{r-1} + \ldots + q_r(t),$$

где $q_k \in C$ на интервале $a \leq t \leq b$. Мы будем рассматривать формальные выражения вида pe^q. Два таких выражения равны в том и только в том случае, когда многочлены q равны для $a \leq t \leq b$ и формальные

ряды p равны. Если p и q дифференцируемы по t, то, по определению,

$$(pe^q)' = (p' + pq')\, e^q .$$

Очевидно, $(pe^q)'$ есть выражение того же вида, что и pe^q.

Мы будем рассматривать также формальные матрицы Pe^Q, где Q — диагональные матрицы, элементами которых служат многочлены от ϱ рассмотренного выше типа, а элементами матрицы P служат формальные ряды. Две такие матрицы называются равными в том и только в том случае, когда равны матрицы-ряды P и диагональные полиномиальные матрицы Q. Так как матрица Q диагональная, то производная матрицы e^Q равна $Q'e^Q$.

Из (1.1) и (1.2) ясно, что выражение $\varrho^r A(t, \varrho)$ можно рассматривать как формальный ряд. Формальная матрица Pe^Q называется *формальным решением* системы (1.1), если формально

$$(Pe^Q)' = (P' + PQ')\, e^Q = \varrho^r\, A(t, \varrho)\, Pe^Q ,$$

т. е.

$$P' + PQ' = \varrho^r\, A(t, \varrho)\, P .$$

Теорема 2.1. *Пусть матрицы A_k в* (1.2) *бесконечно дифференцируемы на интервале $a \leq t \leq b$ и предположим, что характеристические корни $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ матрицы $A_0(t)$ различны при $a \leq t \leq b$, так что*

$$\lambda_i(t) - \lambda_j(t) \neq 0 \qquad (i \neq j,\ a \leq t \leq b) . \tag{2.1}$$

Тогда система (1.1) *имеет формальную матрицу-решение Pe^Q, где*

$$P = \sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} P_k(t) , \qquad Q = \varrho^r\, Q_0(t) + \ldots + Q_r(t) .$$

Кроме того, матрица $P_0(t)$ неособая на интервале $a \leq t \leq b$, а $Q_0'(t) = \Lambda(t)$, где $\Lambda(t)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.1, гл. V. Из (2.1) легко получаем, что из существования всех производных матрицы A_0 следует их существование для корней $\lambda_i(t)$ и поэтому для матрицы Λ. Для каждого t в интервале $a \leq t \leq b$ существует неособая матрица $B_0(t)$, такая, что $B_0^{-1}(t) A_0(t) B_0(t) = \Lambda(t)$. Важно заметить, что из равенства $A_0 B_0 = B_0 \Lambda$ вытекает в силу (2.1), что матрица B_0 может быть выбрана так, чтобы она имела на интервале $[a, b]$ все производные. В самом деле, каждый столбец B_0 единственен с точностью до скалярного множителя. С другой стороны, k-й столбец B_0 может быть выбран как кратное алгебраических дополнений строки матрицы $(A_0 - \lambda_k E)$. Так как, по условию (2.1), корни λ_j различны, то для любого фиксированного t алгебраические дополнения каждой строки не могут все обратиться в нуль. Если алгебраические дополнения какой-либо строки матрицы $(A_0 - \lambda_k E)$ не все равны нулю в точке t, то по непрерывности это верно для

некоторого интервала, содержащего t. По теореме Гейне—Бореля существует конечное множество интервалов, объединение которых равно $[a, b]$, таких, что на каждом из этих интервалов алгебраические дополнения некоторой строки матрицы $A_0 - \lambda_k E$ не все равны нулю. Выбирая одну такую строку для каждого из интервалов конечного множества, убедимся, что алгебраические дополнения бесконечно дифференцируемы. Склеивая алгебраические дополнения этих строк при помощи бесконечно дифференцируемых скалярных множителей, возможно найти k-й столбец матрицы B_0, который не обращается в нуль на интервале $[a, b]$ и имеет все производные.

Преобразование $x = B_0 y$ дает для y систему того же типа, что и (1.1), с заменой A_0 на Λ. Таким образом, без какого-либо ограничения можно предполагать, что матрица A_0 диагональная. Из того, что Pe^Q есть формальное решение системы (1.1), следует

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} P'_k + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} P_k\right)(\varrho^r Q'_0 + \ldots + Q'_r) = \\ = \varrho^r \left(\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} A_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \varrho^{-k} P_k\right). \quad (2.2)$$

Следовательно, приравнивая коэффициенты при ϱ^r, получаем

$$P_0 Q'_0 = A_0 P_0.$$

Предполагая, что уравнение (1.1) было преобразовано указанным образом, так что матрица A_0 имеет диагональную форму, находим, очевидно, что $Q'_0 = \Lambda = A_0$, и $P_0 = E$ есть решение этого уравнения.

Коэффициенты при ϱ^{r-1} в (2.2) дают

$$P_1 Q'_0 + P_0 Q'_1 = A_0 P_1 + A_1 P_0. \quad (2.3)$$

Так как $P_0 = E$, а матрицы $A_0 = Q'_0$ и Q'_1 диагональные, то элементы $p_{ij}^{(1)}$ матрицы P_1 при $i \neq j$ удовлетворяют уравнению

$$p_{ij}^{(1)}(\lambda_j - \lambda_i) = a_{ij}^{(1)},$$

где $a_{ij}^{(1)}$ — элементы матрицы A_1. Согласно (2.1) это определяет элементы $p_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$, однозначно. Пусть $\widetilde{P}_1$ — матрица с элементами $p_{ij}^{(1)}$, $i \neq j$, определенными как выше, и с нулевыми диагональными элементами. Для $i = j$ равенство (2.3) дает

$$(q_{ii}^{(1)})' = a_{ii}^{(1)}.$$

Таким образом, матрица Q'_1 определяется однозначно. Матрицы $Q_j(t)$ могут быть единственным образом определены по матрицам $Q'_j(t)$, если потребовать, чтобы было $Q_j(a) = 0$. Пусть $P_1 = \widetilde{P}_1 + P_0 D_0$, где $D_0(t)$ — неопределенная диагональная матрица. Тогда, очевидно, выполняется равенство (2.3).

Этот процесс продолжается до приравнивания коэффициентов при ϱ^{-1} и появления члена P'_1. То, что производная $\widetilde{P}'_1$ существует,

есть, очевидно, следствие дифференцируемости матриц A_0 и A_1. При рассмотрении последующих степеней ϱ будут появляться старшие производные матриц A_j. Из уравнения, получающегося приравниванием коэффициентов при ϱ^{-1}, следует также, что матрица D_0' определена. Тесная аналогия с доказательством теоремы 2.1 гл. V очевидна и дальнейшие детали опускаются.

Замечание. В случае когда матрицы A_k принадлежат классу C^m, но не принадлежат классу C^{m+1}, предыдущие соображения годны лишь до момента появления m-х производных. Таким образом, в этом случае можно только доказать существование младших членов формальных рядов.

§ 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ

Понятие асимптотического ряда было уже введено в гл. V. Там были получены асимптотические ряды по переменной z. Здесь будут рассмотрены асимптотические ряды по параметру ϱ. Через S будет обозначаться область ϱ-плоскости, заключенная между двумя дугами, каждая из которых стремится к ∞ и которые не пересекаются, за исключением их общей начальной точки. Говорят, что функция $f = f(t, \varrho)$ представлена в S формальным асимптотическим рядом

$$f(t, \varrho) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t)\, \varrho^{-j}$$

для $a \leq t \leq b$, если для каждого неотрицательного m существует постоянная K_m, такая, что

$$\left| f(t, \varrho) - \sum_{j=0}^{m} c_j(t)\, \varrho^{-j} \right| \leq \frac{K_m}{|\varrho|^{m+1}}$$

для всех достаточно больших $\varrho \in S$ и для $a \leq t \leq b$.

Пусть функция q непрерывна по совокупности переменных (t, ϱ) для $t \in [a, b]$, $\varrho \in S$. Говорят, что функция f представляется асимптотически в области S рядом

$$f(t, \varrho) \sim e^{q(t, \varrho)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t)\, \varrho^{-j},$$

если для каждого m существует постоянная K_m, такая, что

$$\left| f(t, \varrho) - e^{q(t, \varrho)} \sum_{j=0}^{m} c_j(t)\, \varrho^{-j} \right| \leq \frac{|e^{q(t, \varrho)}|\, K_m}{\varrho^{m+1}} \tag{3.1}$$

для достаточно больших $\varrho \in S$ и $t \in [a, b]$. Аналогично функция f представляется асимптотически выражением

$$\sum_{k=1}^{N} e^{q_k(t, \varrho)} \sum_{j=0}^{\infty} c_{kj}(t)\, \varrho^{-j},$$

если для каждого m

$$\left| f(t, \varrho) - \sum_{k=1}^{N} e^{q_k(t, \varrho)} \sum_{j=0}^{m} c_{kj}(t) \varrho^{-j} \right| \leq K_m \sum_{k=1}^{N} \frac{|e^{q_k(t, \varrho)}|}{|\varrho|^{m+1}}.$$

Если соотношение (3.1) имеет место для $m \leq M$, где M — целое число, то это записывается в виде

$$f(t, \varrho) \underset{M}{\sim} e^{q(t, \varrho)} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(t) \varrho^{-j}.$$

В дальнейшем будет видно, что две граничные дуги области S обладают тем свойством, что при $|\varrho| \to \infty$ на каждой из них $\arg \varrho$ стремится к определенному предельному значению.

Пусть элемент, стоящий на пересечении k-й строки и k-го столбца диагональной матрицы Q теоремы 2.1, обозначен через q_k. Тогда $q_k'(t, \varrho) = \varrho^k \lambda_k(t) + \ldots$.

Условие Н. *Предположим, что существует область S комплексной ϱ-плоскости, ограниченная двумя дугами, стремящимися к бесконечности, и такими, что для любых i и j, $1 \leq i, j \leq n$, при всех достаточно больших $|\varrho|$, $\varrho \in S$, и $a \leq t \leq b$ выполняется одно из неравенств*

$$\operatorname{Re}[q_i'(t, \varrho) - q_j'(t, \varrho)] \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{Re}[q_i'(t, \varrho) - q_j'(t, \varrho)] \leq 0. \tag{3.3}$$

Область S не обязательно существует. Если, однако, интервал $[a, b]$ заменить интервалом $[a, c]$, где c достаточно близко к a, то S будет существовать. В самом деле, так как

$$\lambda_i(t) - \lambda_j(t) \neq 0, \qquad i \neq j,$$

то

$$\arg \varrho^r [\lambda_i(t) - \lambda_j(t)] = r\theta + \varphi_{ij}(t),$$

где $\arg \varrho = \theta$ и $\varphi_{ij}(t) = \arg [\lambda_i(t) - \lambda_j(t)]$. Очевидно,

$$\operatorname{Re} \varrho^r [\lambda_i(t) - \lambda_j(t)] \neq 0, \tag{3.4}$$

если $\cos[r\theta + \varphi_{ij}(t)] \neq 0$. Итак, если число c достаточно близко к a, то функция $\varphi_{ij}(t)$ достаточно близка к постоянной $\varphi_{ij}(a)$, так что может быть найдена такая область изменения аргумента θ, в которой $\cos[r\theta + \varphi_{ij}(t)] \neq 0$ для всех $i \neq j$. Отсюда следует существование в ϱ-плоскости сектора, в котором имеет место (3.4) для всех $i \neq j$. Так как для больших $|\varrho|$ главным членом разности $q_i - q_j$ будет $\varrho^r(\lambda_i - \lambda_j)$, то легко заключить, что S существует. Таким образом, если t-интервал достаточно мал, то область S существует.

То обстоятельство, что $\arg \varrho = \theta$ стремится на граничных дугах S к определенному пределу при $|\varrho| \to \infty$, легко следует из того,

что выражение $\operatorname{Re}[q_i' - q_j']$ есть многочлен относительно ϱ и поэтому его поведение при больших $|\varrho|$ в основном определяется содержащейся в нем старшей степенью ϱ. Обозначим столбцы матрицы P из теоремы 2.1 через $p^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда выражения $p^{(j)} e^{q_j}$ будут формальными решениями системы (1.1) для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3.1. *Если выполняется условие* H, *то для каждого фиксированного целого* $m > 0$ *и для каждого целого* k, $1 \leq k \leq n$, *существует решение* $\varphi_m^{(k)}$ *системы* (1.1), *такое, что*

$$\varphi_m^{(k)} \underset{m}{\sim} p^k e^{q_k}$$

для $\varrho \in S$ *и* $a \leq t \leq b$.

Замечание. Если коэффициенты A_k принадлежат классу C^N для некоторого $N > 0$, то предыдущая теорема имеет место для $m \leq N$.

Доказательство теоремы 3.1 имеет много общего с доказательством теоремы 4.1 гл. V. Усеченные ряды $\hat{P}_m$, точно так же, как и $\hat{p}_m^{(k)}$, имеют все члены до степени ϱ^{-m}, совпадающие соответственно с членами матрицы P и вектора $p^{(k)}$, и обрываются на членах со степенью ϱ^{-m}. Таким образом,

$$\hat{P}_m(t, \varrho) = \sum_{j=0}^{m} \varrho^{-j} P_j(t).$$

Так как Pe^Q — формальное решение системы (1.1), то

$$(P' + PQ') P^{-1} = \varrho^r A.$$

Существование формального ряда P^{-1} легко получить с помощью тех же соображений, что и в лемме 4.1 гл. V.

Рассмотрим теперь матрицу $B_m(t, \varrho)$, определенную равенством

$$(\hat{P}_m' + \hat{P}_m Q')(\hat{P}_m)^{-1} = \varrho^r B_m.$$

Легко установить тождественность матриц B_m и A вплоть до членов со степенью $\varrho^{-(m+r)}$, включая эту степень. Иными словами, существует постоянная C_1, зависящая от m и такая, что

$$|A(t, \varrho) - B_m(t, \varrho)| \leq \frac{C_1}{|\varrho|^{m+r+1}} \tag{3.5}$$

для больших $|\varrho|$ и $a \leq t \leq b$. Кроме того, матрица $\hat{P}_m e^Q$ есть истинное фундаментальное решение системы

$$x' = \varrho^r B_m(t, \varrho) x. \tag{3,6}$$

Пусть k, $1 \leq k \leq n$, фиксировано в этом доказательстве. Пусть $\varrho \in S$, и положим

$$\hat{P}_m = V_m^{(1)} + V_m^{(2)},$$

где матрица $V_m^{(1)}$ имеет столбец с номером j, совпадающий со столбцом с номером j матрицы $\hat{P}_m$, если для $\varrho \in S$ и $a \leq t \leq b$

$$\operatorname{Re}(q_j'(t, \varrho) - q_k'(t, \varrho)) \geq 0. \tag{3.7}$$

Столбцы с номером j в матрице $V_m^{(1)}$, для которых (3.7) не имеет места, заполняются нулями. Это определяет также матрицу $V_m^{(2)}$.

Запишем систему (1.1) в виде

$$x' = \varrho^r B_m x + \varrho^r (A - B_m) x.$$

Очевидно, что $\hat{p}_m^{(k)} e^{q_k}$ есть решение системы (3.6). Если интегральное уравнение

$$\varphi(t, \varrho) = \hat{p}_m^{(k)}(t, \varrho) e^{q_k(t, \varrho)} -$$

$$- \varrho^r V_m^{(1)}(t, \varrho) e^{Q(t, \varrho)} \int_t^b e^{-Q(\tau, \varrho)} (\hat{P}_m(\tau, \varrho))^{-1} (A(\tau, \varrho) - B_m(\tau, \varrho)) \varphi(\tau, \varrho) d\tau +$$

$$+ \varrho^r V_m^{(2)}(t, \varrho) e^{Q(t, \varrho)} \int_a^t e^{-Q(\tau, \varrho)} (\hat{P}_m(\tau, \varrho))^{-1} (A(\tau, \varrho) - B_m(\tau, \varrho)) \varphi(\tau, \varrho) d\tau \tag{3.8}$$

имеет непрерывное решение φ, то легко заключить, что φ есть решение системы (1.1). Ввиду обращения в нуль некоторых столбцов матрицы $V_m^{(1)}$, единственными экспоненциальными членами, встречающимися в элементах матрицы $V_m^{(1)} e^{Q(t, \varrho) - Q(\tau, \varrho)}$, будут члены $e^{q_j(t, \varrho) - q_j(\tau, \varrho)}$, где j удовлетворяет условию (3.7). Аналогичный результат имеет место для матрицы

$$V_m^{(2)} e^{Q(t, \varrho) - Q(\tau, \varrho)}.$$

Пусть

$$K_m^{(1)}(t, \tau, \varrho) = V_m^{(1)}(t, \varrho) e^{Q(t, \varrho) - Q(\tau, \varrho)} (\hat{P}_m(\tau, \varrho))^{-1} (A(\tau, \varrho) - B_m(\tau, \varrho)),$$

и пусть матрица $K_m^{(2)}$ определяется аналогично с заменой $V_m^{(1)}$ на $V_m^{(2)}$. При $t \leq \tau \leq b$ и $\varrho \in S$ для каждого j, удовлетворяющего (3.7), справедлива оценка

$$|e^{q_j(t, \varrho) - q_j(\tau, \varrho) - q_k(t, \varrho) + q_k(\tau, \varrho)}| =$$

$$= \exp\left\{ - \int_t^\tau \operatorname{Re}[q_j'(\sigma, \varrho) - q_k'(\sigma, \varrho)] d\sigma \right\} \leq 1.$$

Таким образом, для $t \leq \tau \leq b$, $\varrho \in S$ и больших $|\varrho|$ существует постоянная C_2, зависящая от m и такая, что

$$|\varrho|^{r+m+1} |K_m^{(1)}(t, \tau, \varrho) e^{q_k(\tau, \varrho) - q_k(t, \varrho)}| \leq C_2, \tag{3.9}$$

Аналогично для $a \leq \tau \leq t$

$$|\varrho|^{r+m+1} |K_m^{(2)}(t, \tau, \varrho) e^{q_k(\tau, \varrho) - q_k(t, \varrho)}| \leq C_3. \tag{3.10}$$

где C_3 — некоторая постоянная.

Покажем, применяя метод последовательных приближений, что интегральное уравнение (3.8) имеет решение. Пусть $\varphi_0(t, \varrho) = 0$ и пусть для $l \geq 0$

$$\varphi_{(l+1)}(t, \varrho) = \hat{p}_m^{(k)}(t, \varrho)\, e^{q_k(t, \varrho)} - \varrho^r \int_t^b K_m^{(1)}(t, \tau, \varrho)\, \varphi_{(l)}(\tau, \varrho)\, d\tau +$$

$$+ \varrho^r \int_a^t K_m^{(2)}(t, \tau, \varrho)\, \varphi_{(l)}(\tau, \varrho)\, d\tau .$$

Очевидно, что для больших $|\varrho|$, $\varrho \in S$, из (3.9) и (3.10) следует неравенство

$$|(\varphi_{(l+1)} - \varphi_{(l)})\, e^{-q_k}| \leq \frac{(b-a)(C_2 + C_3)}{|\varrho|^{m+1}} \max |(\varphi_{(l)} - \varphi_{(l-1)})\, e^{-q_k}| ,$$

где максимум берется относительно интервала $a \leq t \leq b$.

Если $|\hat{p}_m^{(k)}(t, \varrho)| \leq C_0$ и если $|\varrho|$ настолько велико, что $(b-a)(C_2 + C_3) \leq (1/2)|\varrho|^{m+1}$, то нетрудно получить оценку

$$|\varphi_{(l+1)}(t, \varrho) - \varphi_{(l)}(t, \varrho)|\, |e^{-q_k(t, \varrho)}| \leq \frac{C_0}{2^l} .$$

Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $\{\varphi_{(l)}\}$ к пределу φ, который является решением интегрального уравнения. Кроме того, очевидно также, что

$$|\varphi_{(l)}(t, \varrho)\, e^{-q_k(t, \varrho)}| \leq 2\, C_0 .$$

Из интегрального уравнения легко находим оценку

$$|\varphi(t, \varrho)\, e^{-q_k(t, \varrho)} - \hat{p}_m^{(k)}(t, \varrho)| \leq \frac{2\, C_0 (b-a)(C_2 + C_3)}{|\varrho|^{m+1}} ,$$

что доказывает теорему.

§ 4. СЛУЧАЙ РАВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ

Случай, когда два или более характеристических корня в некоторой изолированной точке интервала $[a, b]$ совпадают, здесь не будет рассматриваться. Однако большой интерес представляет случай, когда несколько корней $\lambda_i(t)$ тождественны на интервале $[a, b]$. Иначе говоря, для каждого данного i или j либо $\lambda_i(t) \equiv \lambda_j(t)$ на интервале $[a, b]$, либо, наоборот, $\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t)$ для всех $t \in [a, b]$. Можно показать, что в этом случае на некоторых подинтервалах интервала $[a, b]$ существуют формальные решения, однако теперь вместо многочленов от ϱ и рядов по степеням $1/\varrho$ решение содержит аналогичные выражения от $\varrho^{1/k}$, где k — некоторое целое положительное число. Таким образом, $q_i(t, \varrho)$ представляют собой многочлены по степеням $\varrho^{1/k}$, а $P(t, \varrho)$ — ряды по степеням $\varrho^{-1/k}$.

Доказательство[1] того, что формальные решения существуют, значительно сложнее, чем в случае, рассмотренном в § 2. Однако доказательство того, что в подходящих секторах существуют истинные решения, для которых формальные решения являются асимптотическими, очень похоже на изложенное в § 3.

Тривиальным примером является система

$$x_1' = x_2, \qquad x_2' = \varrho x_1.$$

Здесь $r = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. С другой стороны, нетрудно видеть, что истинное решение $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ имеет вид

$$\varphi_1(t, \varrho) = c_1 e^{t\sqrt{\varrho}} + c_2 e^{-t\sqrt{\varrho}},$$

$$\varphi_2(t, \varrho) = c_1 \varrho^{\sqrt{\varrho}} e^{t\sqrt{\varrho}} - c_2 \varrho^{\sqrt{\varrho}} e^{-t\sqrt{\varrho}},$$

где c_1 и c_2 — постоянные.

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПОРЯДКА n

Рассмотрим уравнение порядка n

$$u^{(n)} + \varrho^r a_1(t, \varrho) u^{(n-1)} + \ldots + \varrho^{nr} a_n(t, \varrho) u = 0 \tag{5.1}$$

на интервале $a \leq t \leq b$, где

$$a_j(t, \varrho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}(t) \varrho^{-k}.$$

Если $u = x_1$ и

$$x_1' = \varrho^r x_2, \quad x_2' = \varrho^r x_3, \ldots, \quad x_{n-1}' = \varrho^r x_n, \tag{5.2}$$

то

$$u' = \varrho^r x_2, \quad u'' = \varrho^{2r} x_3, \ldots, \quad u^{(n-1)} = \varrho^{(n-1)r} x_n,$$

и (5.1) принимает вид

$$x_n' = -\varrho^r [a_n(t, \varrho) x_1 + \ldots + a_1(t, \varrho) x_n]. \tag{5.3}$$

Таким образом, уравнения (5.2) и (5.3) образуют систему n уравнений первого порядка, и теория, развитая в предыдущих параграфах, применима.

Матрица системы с характеристическими корнями $\lambda_i(t)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_{n0}(t) & -a_{(n-1)0}(t) & \ldots & -a_{10}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

[1] Turritin H. L., Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary linear differential equations containing a parameter, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, vol. 2, Princeton, 1952.

Если все корни $\lambda_i(t)$ различны, то можно использовать теорему 3.1. Если выполняются условия теоремы 3.1, то система (5.2), (5.3) имеет n формальных решений $p^{(j)}e^{q_j}$ и для каждого целого $m > 0$ существует n истинных независимых решений уравнения (5.1) $\psi_i = \psi_i(t, \varrho, m)$, $i = 1, \ldots, n$, таких, что

$$\psi_i(t, \varrho, m) \underset{m}{\sim} p_1^{(i)}(t, \varrho)\, e^{q_i(t, \varrho)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где 1 означает первую компоненту вектора $p^{(i)}$. Очевидно, что производные функций ψ_i удовлетворяют соотношениям

$$\psi_i'(t, \varrho, m) \underset{m}{\sim} \varrho^r\, p_2^{(i)}(t, \varrho)\, e^{q_i(t, \varrho)} \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$\psi_i''(t, \varrho, m) \underset{m}{\sim} \varrho^{2r}\, p_3^{(i)}(t, \varrho)\, e^{q_i(t, \varrho)} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и т. д.

Как пример рассмотрим уравнение

$$y'' + [\varrho^2 + q(t)]\, y = 0$$

на интервале $0 \leq t \leq 1$, где функция q, по предположению, принадлежит классу C^∞. Полагая $y = x_1$, $y' = \varrho x_2$ и используя (5.4), получаем

$$\lambda_1(t) = i, \qquad \lambda_2(t) = -i.$$

Таким образом, рассматривается формальное решение

$$e^{i\varrho t}(c_0(t) + c_1(t)\varrho^{-1} + \ldots).$$

Это приводит к равенству

$$(c_0'' + c_1''\varrho^{-1} + \ldots) + 2i\varrho(c_0' + c_1'\varrho^{-1} + \ldots) + q(c_0 + c_1\varrho^{-1} + \ldots) = 0.$$

Полагая $c_0 = 1$, получаем, приравнивая нулю коэффициенты при последовательных степенях ϱ^{-1},

$$2ic_1' + q = 0,$$

$$c_1'' + 2ic_2' + qc_1 = 0$$

и т. д.

Определение $c_1(t), c_2(t), \ldots$ может быть произведено однозначно, если учесть, что они обращаются в нуль при $t = 0$.

Замечание. Формальный ряд может быть также получен из соотношения

$$\varphi(t, \varrho) = e^{i\varrho t} + \varrho^{-1} \int_t^1 \sin \varrho(t - \tau)\, q(\tau)\, \varphi(\tau, \varrho)\, d\tau, \tag{5.5}$$

которое дает в то же время простое доказательство существования решения, представимого асимптотически этим рядом. Здесь за S можно взять верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \varrho \geq 0$.

В самом деле, используя последовательные приближения, в которых $\varphi_0 = 0$ и

$$\varphi_{l+1} = e^{i\varrho t} + \varrho^{-1} \int_t^1 \sin \varrho(t-\tau)\, q(\tau)\, \varphi_l(\tau, \varrho)\, d\tau,$$

получаем, если $|q(t)| \leq M$, что

$$|\varphi_{l+1} - \varphi_l| \leq \frac{M^l |e^{i\varrho t}|}{|\varrho|^l}.$$

Таким образом, φ_n сходятся равномерно для больших $|\varrho|$ при $\operatorname{Im} \varrho \geq 0$, $0 \leq t \leq 1$, к решению φ. Далее, если $|\varrho| \geq 2M$, то

$$|\varphi(t, \varrho)| \leq 2\, |e^{i\varrho t}|$$

для $\varrho \in S$, $0 \leq t \leq 1$. Последнее неравенство вместе с (5.5) дает

$$|\varphi - e^{i\varrho t}| \leq \frac{2M |e^{i\varrho t}|}{|\varrho|}.$$

Если эту оценку использовать в (5.5), то получим

$$\varphi(t, \varrho) = e^{i\varrho t} + \frac{e^{i\varrho t}}{2i\varrho} \int_t^1 q(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2i\varrho} \int_t^1 e^{i\varrho(2\tau - t)} q(\tau) d\tau + O\left(\frac{e^{i\varrho t}}{|\varrho|^2}\right).$$

Применяя во втором интеграле интегрирование по частям, имеем

$$\varphi(t, \varrho) = e^{i\varrho t} \left[1 + \int_t^1 \frac{q(\tau)}{2i\varrho} d\tau + O\left(\frac{1}{|\varrho|^2}\right)\right].$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно, что и доставляет независимое доказательство асимптотической формулы для решения φ в области S.

Задачи

1. Пусть

$$f(t, \varrho) = e^{g(t,\varrho)} [h_0(t) + h_1(t)\varrho^{-1} + \ldots]$$

для больших $|\varrho|$ и $a \leq t \leq b$, где

$$g(t, \varrho) = \varrho^{\mu} \sum_{j=0}^{\mu-1} g_j(t)\, \varrho^{-j}.$$

Функции h_j и g_j принадлежат классу C^∞ и μ — неотрицательное целое число. Пусть

$$A(t, \varrho) = A_0(t) + A_1(t)\, \varrho^{-1} + \ldots,$$

где $A_j \in C^\infty$ на интервале $[a, b]$. Показать, что дифференциальное уравнение $x' = \varrho^r A(t, \varrho)\, x + f(t, \varrho)$ имеет формальное решение $\psi(t, \varrho) = \varrho^{-k} e^g [c_0(t) + c_1(t)\, \varrho^{-1} + \ldots]$, где $k = r$, если $\mu \leq r$, и $k = \mu$, если $\mu \geq r$, причем предполагается выполненным одно из следующих условий: (1) ни один из характеристических корней матрицы $A_0(t)$ не обращается в нуль на интервале $[a, b]$ при $\mu < r$, (2) ни один из характеристических корней матрицы $A_0(t)$ не равен $g_0'(t)$ для всех $t \in [a, b]$ при $\mu = r$, (3) $g_0'(t) \neq 0$ для всех $t \in [a, b]$ при $\mu > r$.