

для $j = 0, 1, \dots, n - 1$; $a_0 \leq t, \tau \leq b_0$, $\operatorname{Im} l \neq 0$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n G}{\partial \tau^n}(t, \tau, l) &= \frac{\partial^n K}{\partial \tau^n}(t, \tau) + \frac{(-1)^n l G(t, \tau, l)}{p_0(\tau)} + \\ &+ \int_{\delta}^b G(t, s, l) \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} [l J(s, \tau) - L_s J(s, \tau)] ds \quad (4.10) \end{aligned}$$

для $t \neq \tau$. Так как свойство (v) было доказано, соотношения (4.9) и (4.10) доказывают свойство (i).

Очевидно, производная $\partial^{n-1}G/\partial t^{n-1}$ имеет тот же скачок при $t = \tau$, что и производная $\partial^{n-1}K/\partial t^{n-1}$, что доказывает свойство (ii). Из (4.8) следует, что функция G по переменному t удовлетворяет уравнению $Lx = lx$, если только $t \neq \tau$, что доказывает свойство (iii). Так как правые части равенств (4.6) и (4.7) с $\delta = \delta_m$ стремятся при $m \rightarrow \infty$ к правым частям равенств (4.9) и (4.10), то

$$\frac{\partial^j G_m}{\partial \tau^j} \rightarrow \frac{\partial^j G}{\partial \tau^j} \quad (j = 0, 1, \dots, n) \quad (4.11)$$

равномерно в каждой компактной (t, τ, l) -области, где $\operatorname{Im} l \neq 0$, и при условии $t \neq \tau$, когда $j = n - 1, n$. Соотношения симметрии дают

$$\frac{\partial^j G_m}{\partial t^j} \rightarrow \frac{\partial^j G}{\partial t^j} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

при тех же условиях, при которых справедливо соотношение (4.11). Возвращаясь к равенствам (4.6), (4.10), легко видеть, что смешанные производные $\partial^{j+k}G/\partial t^j \partial \tau^k$ ($j, k = 0, 1, \dots, n - 1$) существуют и обладают свойством (iv). Соотношение (v) было доказано.

Доказательство свойства (vi) основано на неравенстве (4.4). Из этого неравенства следует, что существует постоянная c_1 (зависящая только от δ_0 и δ_1), такая, что

$$\|G_\delta(\cdot, \tau, l)\|_\delta \leq c_1 |\operatorname{Im} l|^{-1} (|l| + 1) + c_1 \quad (\tau \in \delta_0).$$

Но $\|G_\delta(\cdot, \tau, l)\|_\delta \leq \|G_\delta(\cdot, \tau, l)\|_{\tilde{\delta}}$ для $\tilde{\delta} \subset \delta$, и полагая сперва $\delta \rightarrow (a, b)$ по последовательности δ_m , а затем $\tilde{\delta} \rightarrow (a, b)$, получаем, что для любых фиксированных (τ, l) , $\operatorname{Im} l \neq 0$, $G(\cdot, \tau, l) \in \mathfrak{L}^2(a, b)$. Отсюда также следует для фиксированных (t, l) , $\operatorname{Im} l \neq 0$, что $G(t, \cdot, l) \in \mathfrak{L}^2(a, b)$.

Остается доказать свойство (vii). Если $f \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, то интеграл

$$\int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau \quad (a < t < b, \operatorname{Im} l \neq 0)$$

сходится абсолютно в силу свойства (vi) [и равномерно для t из любого конечного подинтервала (a, b)]. Он определяет функцию v , и, используя изложенные выше свойства функции G , нетрудно видеть, что v имеет непрерывные производные до $(n - 1)$ -го порядка,

производная $v^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом замкнутом подинтервале интервала (a, b) и

$$Lv = lv + f.$$

Например, для доказательства существования и непрерывности производной v' вначале покажем при помощи равенства

$$u'(t) = \int_{\delta}^{\partial G_{\delta}} \frac{\partial G_{\delta}}{\partial t}(t, \tau, l) f(\tau) d\tau$$

и преобразований равенства (4.5), аналогичных преобразованиям равенства (4.1), сделанным при выводе равенства (4.4), что норма $\|\partial G(t, \cdot, l)/\partial t\|$ ограничена для фиксированных l , $\operatorname{Im} l \neq 0$, равномерно по t на каждом конечном подинтервале интервала (a, b) . Таким образом, интеграл

$$\int_a^b \frac{\partial G}{\partial t}(t, \tau, l) f(\tau) d\tau$$

сходится равномерно по t на каждом конечном подинтервале интервала (a, b) и, следовательно, представляет непрерывную функцию на (a, b) , которая, как легко проверить, есть v' . Из неравенства (4.3) при $\delta = \delta_m$, полагая $m \rightarrow \infty$, получаем, что

$$\|v\| \leq |\operatorname{Im} l|^{-1} \|f\|, \quad (4.12)$$

откуда и следует, что $v \in \mathfrak{L}^2(a, b)$. Так как $Lv = lv + f$, то

$$\|Lv\| \leq \left(1 + \frac{|l|}{|\operatorname{Im} l|}\right) \|f\|,$$

откуда вытекает, что $Lv \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, и тем самым завершается доказательство того, что $v \in \mathfrak{D}$.

Для каждой функции $f \in \mathfrak{L}^2(a, b)$ обозначим через $\mathfrak{G}(l)f$ функцию, определенную в пункте (vii) теоремы 4.1.

Рассмотрим теперь функции G , возникающие в случаях I и II. Предположим, что в случае II функция G получается, когда δ_0, δ_1 и δ — интервалы, замкнутые в точке a . Таким образом, $\delta = [a, b]$. В этом случае предполагается, что краевые условия $U_{\delta}x = 0$, которые определяют функцию G_{δ} , включают условия $U^{(1)}x = 0$. Итак, в случае II G_{δ} как функция t удовлетворяет условиям $U^{(1)}x = 0$. Можно показать, что все свойства сходимости теоремы 4.1 имеют место равномерно на множестве $a \leq t, \tau \leq b_0$ для любого $b_0 < b$. Таким образом, предельная функция G также удовлетворяет условиям $U^{(1)}x = 0$, и, следовательно, для таких G функция v из условия (vii) есть элемент множества \mathfrak{D} .

Покажем теперь, что в случаях I и II из предположения о том, что уравнения

$$Lx + ix = 0, \quad Lx - ix = 0$$

не имеют нетривиальных решений классов \mathfrak{D} , $\hat{\mathfrak{D}}$ соответственно, следует, что для любого l , $\operatorname{Im} l \neq 0$, уравнение $Lx - lx = 0$ не имеет нетривиальных решений в классах \mathfrak{D} , $\hat{\mathfrak{D}}$ соответственно. Рассуждения по существу одинаковы для обоих случаев и будут проведены для случая I.

Предположим, что для некоторого l_0 , $\operatorname{Im} l_0 > 0$, уравнение $(L - l_0)x = 0$ имеет только тривиальное решение в классе $\mathfrak{Q}^2(a, b)$. Пусть $|l - l_0| < \operatorname{Im} l_0$ и предположим, что $v \in \mathfrak{D}$ и $(L - l)v = 0$. Если

$$u = v - (l - l_0)\mathfrak{G}(l_0)v, \quad (4.13)$$

то $u \in \mathfrak{D}$. Очевидно, $(L - l_0)u = (L - l)v = 0$. Таким образом, $u = 0$ и из формулы (4.13) при помощи неравенства (4.12) получаем, что

$$\|v\| \leq \frac{|l - l_0|}{|\operatorname{Im} l_0|} \|u\| < \|v\|,$$

если $\|v\| \neq 0$. Значит, $v = 0$ и результат доказан для $|l - l_0| < \operatorname{Im} l_0$, а следовательно, и для $\operatorname{Im} l > 0$. Для $\operatorname{Im} l < 0$ доказательство аналогично.

Предположим теперь, что в случае I или II функция G для $\operatorname{Im} l \neq 0$ не единственна, и пусть функция \tilde{G} имеет те же самые свойства, что и G . Тогда разность $G - \tilde{G}$ как функция t принадлежит классу $C^n(a, b)$, а значит, и классу \mathfrak{D} или $\hat{\mathfrak{D}}$ соответственно и является решением уравнения $(L - l)x = 0$. Это невозможно, и тем самым доказана следующая

Теорема 4.2. В случаях I и II

$$G_\delta \rightarrow G \quad [\delta \rightarrow (a, b) \text{ в случае I}],$$

$$G_\delta \rightarrow G \quad [\delta \rightarrow [a, b) \text{ в случае II и } U^{(1)}G_\delta = 0]$$

равномерно в каждой компактной (t, τ, l) -области, где $\operatorname{Im} l \neq 0$, независимо от выбора краевых условий U_δ в случае I и $U_\delta^{(2)}$ в случае II. Функция G единственна в том смысле, что она является единственной функцией со свойствами, перечисленными в теореме 4.1 (и в случае II удовлетворяющей условиям $U^{(1)}x = 0$).

Функция G называется функцией Грина для задачи $Lx = lx$ на интервале (a, b) в случае I и для задачи $Lx = lx$, $U^{(1)}x = 0$ на интервале $[a, b)$ в случае II. В любом случае обозначим через $\mathfrak{G}(l)$ оператор, определенный для всех функций $f \in \mathfrak{Q}^2(a, b)$ равенством

$$\mathfrak{G}(l)f(t) = \int_a^b G(t, \tau, l)f(\tau) d\tau \quad (\operatorname{Im} l \neq 0).$$

Тогда из теоремы 4.2 следует: оператор $\mathfrak{G}(l)$ является обратным для оператора $L - l$ с областью \mathfrak{D} в случае I и с областью $\hat{\mathfrak{D}}$ в случае II.

§ 5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ МАТРИЦЫ ПРИ ПОМОЩИ ФУНКЦИИ ГРИНА

В этом параграфе существование спектральной матрицы ϱ будет установлено независимо от рассмотрений § 2 при помощи метода, родственного методу гл. IX. В частности, спектральные матрицы и функции Грина будут связаны формулами, аналогичными формулам (3.9), (3.10) гл. IX.

Рассмотрим сначала несингулярный случай. Пусть G_δ — функция Грина, соответствующая самосопряженной краевой задаче $Lx = lx$, $U_\delta x = 0$ на интервале δ . Пусть

$$H_\delta(t, \tau, l) = G_\delta(t, \tau, l) - G_\delta(t, \tau, \bar{l}).$$

Теорема 5.1. Спектральная матрица ϱ , определенная соотношением (2.6), удовлетворяет равенству

$$2i \operatorname{Im} l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_{\delta jk}(\lambda)}{|\lambda - l|^2} = \frac{\partial^{j+k-2} H_\delta}{\partial t^{j-1} \partial \tau^{k-1}}(c, c, l), \quad (5.1)$$

где $\operatorname{Im} l \neq 0$ и $j, k = 1, \dots, n$.

Доказательство. Если $\operatorname{Im} m \neq 0$, $\operatorname{Im} l \neq 0$, то

$$(l - m) \int_{\delta} G_\delta(t, s, l) G_\delta(s, \tau, m) ds = G_\delta(t, \tau, l) - G_\delta(t, \tau, m). \quad (5.2)$$

Чтобы это показать, обозначим через u решение задачи

$$(L - l)u = G_\delta(\quad, \tau, m), \quad U_\delta u = 0.$$

Тогда, очевидно,

$$u(t) = \int_{\delta} G_\delta(t, s, l) G_\delta(s, \tau, m) ds.$$

Пусть $v = G_\delta(\quad, \tau, l) - G_\delta(\quad, \tau, m)$. Тогда $v \in C^n(\delta)$ и $U_\delta v = 0$. Кроме того, ясно, что $Lv = lv + (l - m)G_\delta(\quad, \tau, m)$. Таким образом, $v = (l - m)u$, и это доказывает равенство (5.2). Положим в (5.2) $m = \bar{l}$. Получаем

$$2i \operatorname{Im} l \int_{\delta} G_\delta(t, s, l) G_\delta(s, \tau, \bar{l}) ds = H_\delta(t, \tau, l).$$

Так как $G_\delta(s, \tau, \bar{l}) = \overline{G_\delta(\tau, s, l)}$, то

$$2i \operatorname{Im} l \int_{\delta} \frac{\partial^j G_\delta}{\partial t^j}(t, s, l) \frac{\partial^k \overline{G_\delta}}{\partial \tau^k}(\tau, s, l) ds = \frac{\partial^{j+k} H_\delta}{\partial t^j \partial \tau^k}(t, \tau, l) \quad (5.3)$$

для $j, k = 0, 1, \dots, n-1$.

Обозначая через $\{\chi_{\delta k}\}$ и $\{\lambda_{\delta k}\}$ собственные функции и собственные значения для задачи $Lx = lx, U_\delta x = 0$, получаем из равенства

$$L \chi_{\delta m} = l \chi_{\delta m} + (\lambda_{\delta m} - l) \chi_{\delta m},$$

что

$$\chi_{\delta m}(t) = (\lambda_{\delta m} - l) \int_{\delta} G_\delta(t, s, l) \chi_{\delta m}(s) ds,$$

и, таким образом, для $k = 0, \dots, n-1$

$$\chi_{\delta m}^{(k)}(t) = (\lambda_{\delta m} - l) \int_{\delta} \frac{\partial^k G_\delta}{\partial t^k}(t, s, l) \chi_{\delta m}(s) ds.$$

Итак, m -й коэффициент Фурье функции $\partial^k \bar{G}_\delta(t, \tau, l)/\partial t^k$ относительно системы $\chi_{\delta m}$ равен $\chi_{\delta m}^{(k)}(t)/(\lambda_{\delta m} - l)$. Применяя к левой части формулы (5.3) равенство Парсеваля, получаем

$$\begin{aligned} 2i \operatorname{Im} l \int \frac{\partial^j G_\delta}{\partial t^j}(t, s, l) \frac{\partial^k \bar{G}_\delta}{\partial \tau^k}(\tau, s, l) ds &= \\ &= 2i \operatorname{Im} l \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_{\delta m}^{(j)}(t) \bar{\chi}_{\delta m}^{(k)}(\tau)}{|\lambda_{\delta m} - l|^2} = \frac{\partial^{j+k} H_\delta}{\partial t^j \partial \tau^k}(t, \tau, l). \end{aligned}$$

Используя определение матрицы ϱ_δ , можно это равенство переписать в виде

$$2i \operatorname{Im} l \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{p,q=1}^n \varphi_p^{(j)}(t, \lambda) \bar{\varphi}_q^{(k)}(\tau, l) |\lambda - l|^{-2} d\varrho_{\delta pq}(\lambda) = \frac{\partial^{j+k} H_\delta}{\partial t^j \partial \tau^k}(t, \tau, l).$$

Полагая $t = \tau = c$ и используя (2.2), докажем (5.1).

Пусть G — предел сходящейся последовательности $\{G_m\}$ из множества $\{G_\delta\}$ и пусть

$$H(t, \tau, l) = G(t, \tau, l) - G(t, \tau, l).$$

Далее, пусть

$$P_{\delta jk}(l) = \frac{\partial^{j+k-2} H_\delta}{\partial t^{j-1} \partial \tau^{k-1}}(c, c, l)$$

и

$$P_{jk}(l) = \frac{\partial^{j+k-2} H}{\partial t^{j-1} \partial \tau^{k-1}}(c, c, l)$$

для $j, k = 1, \dots, n$.

Теорема 5.2. Пусть $\{G_m\}$ — любая сходящаяся последовательность из множества $\{G_\delta\}$ и пусть $\varrho_m = (\varrho_{mjk})$ — спектральная матрица, соответствующая функции G_m . Тогда существует эрмитова неубывающая матрица $\varrho = (\varrho_{jk})$, элементы которой имеют ограниченную вариацию на каждом конечном λ -интервале, такая, что

$$\varrho_m(\lambda) - \varrho_m(\mu) \rightarrow \varrho(\lambda) - \varrho(\mu) \quad (m \rightarrow \infty), \quad (5.4)$$

если λ, μ — точки непрерывности матрицы ϱ . Далее, для таких точек λ, μ

$$\varrho_{jk}(\lambda) - \varrho_{jk}(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mu}^{\lambda} P_{jk}(v + i\epsilon) d v. \quad (5.5)$$

З а м е ч а н и я. Теорема 5.2 дает не только другое доказательство существования матрицы ϱ , но и новый результат, содержащийся в формуле (5.5). Очевидно, что в случаях I и II нет необходимости выбирать последовательность из множества $\{\delta\}$, но для $\varrho_\delta \rightarrow \varrho$ достаточно взять соответственно $\delta \rightarrow (a, b)$ и $\delta \rightarrow [a, b]$. В этих случаях функции G, H , а следовательно, и P_{jk} единственны, и в силу (5.5) все предельные матрицы ϱ совпадают.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5.2 аналогично во многом доказательству теоремы 3.1 гл. IX и будет только кратко намечено. Из соотношения (5.1) имеем

$$2i \operatorname{Im} l \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_{mjk}(\lambda)}{|\lambda - l|^2} = P_{mjk}(l)$$

и для $l = i$

$$\int_{-\mu}^{\mu} \frac{d\varrho_{mjj}(\lambda)}{1 + \lambda^2} \leq \frac{P_{mjj}(i)}{2i}, \quad (5.6)$$

ибо функция ϱ_{mjj} монотонна. Правая часть неравенства (5.6) ограничена, так как по пункту (iv) теоремы 4.1 $P_{mjj}(i) \rightarrow P_{jj}(i)$. Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_{mjj}(\lambda)}{1 + \lambda^2} < A \quad (j = 1, \dots, n),$$

где A — постоянная, и

$$|\varrho_{mjj}(\lambda)| < A(1 + \lambda^2).$$

Так как

$$|\varrho_{mjk}(\Delta)|^2 \leq \varrho_{mjj}(\Delta) \varrho_{mkk}(\Delta),$$

где $\varrho_{mjk}(\Delta) = \varrho_{mjk}(\lambda) - \varrho_{mjk}(\mu)$, $\Delta = (\mu, \lambda]$, то полная вариация функции ϱ_{mjk} на каждом конечном λ -интервале ограничена независимо от m . Из теоремы выбора Хелли следует существование подпоследовательности $\{\varrho_m\}$, сходящейся к матрице ϱ , которая обладает указанными в теореме свойствами. Кроме того, соображения, связанные с формулами (3.25) и (3.26) гл. IX, легко показывают, что разность

$$\frac{P_{jk}(l)}{2i \operatorname{Im} l} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varrho_{jk}(\lambda)}{|\lambda - l|^2}$$

является независящей от l постоянной при $\operatorname{Im} l \neq 0$. Формула обращения дает (5.5). Так как $P_{mjk} \rightarrow P_{jk}$, то соотношение (5.4) следует из (5.5).

Задачи

1. Пусть L — дифференциальный оператор, определенный для r -мерных векторов x равенством

$$Lx = P_0 x^{(n)} + P_1 x^{(n-1)} + \dots + P_n x,$$

где P_k — квадратные матрицы порядка r из комплекснозначных функций класса C^{n-k} на открытом интервале (a, b) . Предположим, что $\det P_0(t) \neq 0$ для $a < t < b$ и что L формально самосопряжен, так что он совпадает с сопряженным по Лагранжу оператором L^+ , определяемым равенством

$$L^+x = (-1)^n (P_0^* x)^{(n)} + (-1)^{n-1} (P_1^* x)^{(n-1)} + \dots + P_n^* x.$$

Сформулировать и доказать аналоги теорем разложения, равенства Парсеваля и теоремы обратного преобразования в случаях I и II. Доказать также существование матрицы Грина в этих двух случаях и аналог теоремы 5.2.

2. Доказать, что задача $Lx = ix' + a(t)x = lx$, где a — непрерывная действительная функция в интервале $-\infty < t < \infty$, самосопряжена в указанном интервале. Показать, что спектр есть λ -ось, $-\infty < \lambda < \infty$. Получить теорему разложения для этого случая.

3. Рассмотрим оператор L , определенный для вектор-функций с r компонентами,

$$Lx = ix' + A(t)x,$$

где A — квадратная матрица порядка r из непрерывных функций в интервале $-\infty < t < \infty$, такая, что $A^*(t) = A(t)$. Тогда L формально самосопряжен. Доказать, что задача $Lx = lx$ самосопряжена на интервале $(-\infty, \infty)$ (нет никаких краевых условий).

Указание. Доказать, что каждое решение φ уравнения $Lx = lx$ имеет вид $\varphi(t, l) = e^{-ilt}\psi(t)$, где ψ — решение уравнения $x' = -iA(t)x$. Пусть $f \cdot g = \sum_{j=1}^r f_j \bar{g}_j$ для векторов f, g . Показать, что $(\psi \cdot \psi)' = 0$, так что $\psi(t) \cdot \psi(l) = c$, где c — постоянная, и

$$\varphi(t, l) \cdot \varphi(t, l) = e^{2\operatorname{Im} l t} \psi(t) \cdot \psi(l) = ce^{2\operatorname{Im} lt}.$$

Поэтому для любого комплексного l уравнение $Lx = lx$ не имеет нетривиальных решений класса $\mathfrak{L}_r^2(-\infty, \infty)$, т. е. таких, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^2 dt < \infty$.

Вычислить в этом случае спектральную матрицу и доказать, что спектр есть вся λ -ось, $-\infty < \lambda < \infty$. Эта задача представляет собой обобщение задачи 2 на случай систем.

4. Пусть L — оператор, определенный на вектор-функциях с $r = 2s$ ($s \geq 1$) компонентами равенством

$$Lx = Ix' + Ax,$$

где I — кососимметричная матрица, $I = -\Gamma = -I^{-1}$, вида

$$I = \begin{pmatrix} 0_s & E_s \\ -E_s & 0_s \end{pmatrix},$$

E_s и 0_s — соответственно единичная и нулевая квадратные матрицы порядка s и A — действительная постоянная матрица, такая, что $A = A'$. Таким образом, оператор L формально самосопряжен. Доказать, что для каждого комплексного l уравнение $Lx = lx$ не имеет нетривиальных решений класса $\mathfrak{L}_r^2(-\infty, \infty)$. Доказать, что для $\operatorname{Im} l \neq 0$ существует точно s линейно независимых решений класса $\mathfrak{L}_r^2(0, \infty)$.

Указание. Уравнение $Lx = lx$ есть уравнение с постоянными коэффициентами и фундаментальная матрица имеет вид

$$\Phi(t, l) = \exp [lI(A - lE)],$$

откуда видно, что не существует решений класса $\Omega_r^2(-\infty, \infty)$. Природа решений зависит от характеристических корней матрицы $I(A - lE)$. Характеристический многочлен для этой матрицы имеет вид

$$f(\mu, l) = \det [\mu E - I(A - lE)],$$

так что $f(\mu, l) = \bar{f}(\bar{\mu}, \bar{l})$. Исходя из равенства

$$f(\mu, l) = \det [l^{-1}(\mu E - I(A - lE))] =$$

показать, что $f(\mu, l) = f(-\mu, l)$. Так как матрица $A + \mu I$ эрмитова при $\operatorname{Re} \mu = 0$, то для $\operatorname{Im} l \neq 0$ ни один из характеристических корней матрицы $I(A - lE)$ не может быть чисто мнимым.

Таким образом, задача $Ix' + Ax = lx$ на интервале $(-\infty, \infty)$ самосопряжена. Доказать, что для $0 \leq t < \infty$ уравнение $Ix' + Ax = lx$ вместе с подходящим множеством с однородных краевых условий при $t = 0$ дает самосопряженную задачу. Изучить природу спектра в этих двух случаях.

5. Показать, что другой путь для получения самосопряженной задачи в условиях задачи 4 на интервале $0 \leq t < \infty$ состоит в использовании соотношения

$$(\varphi^* I \varphi)' = (\bar{l} - l) \varphi^* \varphi,$$

верного для каждого решения φ уравнения $Ix' + Ax = lx$.

Указание. Присоединить s условий $U^{(1)}x = 0$ при $t = 0$ так, чтобы для каждого решения φ , удовлетворяющего условиям $U^{(1)}\varphi = 0$, имело место соотношение $\varphi^* I \varphi = 0$ при $t = 0$.

6. Пусть L — оператор, задаваемый равенством $Lx = Ix' + A(t)x$, где I — матрица, определенная в задаче 4, и A — квадратная матрица порядка r ($r = 2s$, $s \geq 1$) из непрерывных на интервале $-\infty < t < \infty$ функций, периодических с периодом 1, т. е. $A(t+1) = A(t)$ и $A = A'$. Доказать, что задача $Lx = lx$ на интервале $-\infty < t < \infty$ самосопряжена без всяких краевых условий. Рассмотреть самосопряженные задачи на интервале $[0, \infty)$.

Указание. Из рассуждения § 5 гл. III следует, что фундаментальная матрица Φ уравнения $Lx = lx$, удовлетворяющая условию $\Phi(0, l) = E$ (E — единичная матрица), имеет вид $\Phi(t, l) = P(t, l) e^{tR(l)}$, где

$$P(t+1, l) = P(t, l)$$

и $R(l)$ — постоянная матрица при фиксированном l . Это показывает, что не существует решений класса $\Omega_r^2(-\infty, \infty)$ и нет точечного спектра. Задача на интервале $[0, \infty)$ может быть рассмотрена методом задачи 5.

7. Если (a, b) — открытый действительный интервал, то $\Omega^2(a, b)$ есть пространство Гильберта со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_a^b u \bar{v} dt.$$

Обозначим через \mathfrak{L} множество всех функций, удовлетворяющих условиям: $u \in \Omega^2(a, b)$, $u \in C^{n-1}$ на (a, b) , производная $u^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на каждом замкнутом подинтервале интервала (a, b) и $Lu \in \Omega^2(a, b)$, где L — формально самосопряженный дифференциальный оператор, определенный в § 1. Пусть T — оператор в $\Omega^2(a, b)$ с областью \mathfrak{D} , и $Tu = Lu$ для $u \in \mathfrak{D}$. Обозначим через \mathfrak{D}_S множество всех функций $u \in \mathfrak{D}$, таких, что $u = 0$ вне некоторого замкнутого ограниченного подинтервала интервала (a, b) , причем интервал может зависеть от u , и пусть S — оператор в $\Omega^2(a, b)$ с областью \mathfrak{D}_S , опре-

деленный равенством $Su = Lu$ для $u \in \mathfrak{D}_S$. Доказать, что S — симметричный оператор и его замыкание \tilde{S} — сопряженный оператор T^* для оператора T .

Указание. Использовать формулу вариации постоянных.

8. Предположим, что $T = T^*$, т. е. оператор T самосопряжен. Обозначим для каждого замкнутого подинтервала δ интервала (a, b) через \mathfrak{D}_δ множество всех функций $u \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, обладающих свойствами: $u \in C^{n-1}$ на δ , производная $u^{(n-1)}$ абсолютно непрерывна на δ , $Lu \in \mathfrak{L}^2(\delta)$, функция u удовлетворяет системе самосопряженных краевых условий $U_\delta u = 0$. Пусть T_δ — оператор с областью D_δ , определяемый соотношениями $T_\delta u(t) = Lu(t)$ для $t \in \delta$ и $T_\delta u(t) = 0$ для t не из δ . Показать, что оператор T_δ самосопряжен. Пусть спектральные разложения операторов T , T_δ имеют вид

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE(\lambda), \quad T_\delta = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda dE_\delta(\lambda).$$

Доказать, что $\|E_\delta(\lambda)u - E(\lambda)u\| \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow (a, b)$ для каждой функции $u \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, если λ не есть собственное значение оператора T .

Указание. Пусть T_∞ — точечный предел T_δ . Доказать, что замыкание \tilde{T}_∞ оператора T_∞ как раз равно T . Применить результат Реллиха [см. B. v. Sz.-Nagy, Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Ergeb. Math., 5 (1942), 561].

9. Используя результат задачи 8 и теорему 2.1, доказать, что

$$E(\Delta) f(t) = \int_{\Delta} \sum_{j,k=1}^n \varphi_j(t, \lambda) g_k(\lambda) d\varphi_{jk}(\lambda),^1$$

где $f \in \mathfrak{L}^2(a, b)$, $\Delta = (\mu, \lambda]$, $E(\Delta) = E(\lambda) - E(\mu)$ и функции φ_j, g_k определены в теореме 2.2. Пользуясь этим, доказать равенство Парсеваля и теорему разложения.

10. Сформулировать и доказать аналогичные результатам задач 8 и 9 теоремы, соответствующие случаю II.

¹ См. также Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954, стр. 397. — Прим. перев.

Гла в а XI

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА КОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ¹

Пусть $a \leq t \leq b$ — замкнутый конечный интервал и пусть L — линейный дифференциальный оператор порядка n ($n \geq 1$), определенный равенством

$$Lx = p_0 x^{(n)} + p_1 x^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} x' + p_n x,$$

где p_k — комплекснозначные функции класса C^{n-k} на интервале $[a, b]$ и $p_0(t) \neq 0$ на $[a, b]$. Основное содержание этой главы связано с краевыми задачами, такими, как исследование решений уравнения $Lx = 0$ на интервале $[a, b]$, удовлетворяющих системе однородных краевых условий вида

$$\sum_{k=1}^n (M_{jk} x^{(k-1)}(a) + N_{jk} x^{(k-1)}(b)) = 0 \quad (j = 1, \dots, m), \quad (1.1)$$

где M_{jk} и N_{jk} — комплексные постоянные. Каждой однородной краевой задаче соответствует «сопряженная» задача, которая связана с сопряженным по Лагранжу оператору L оператором L^+ , определяемым равенством

$$L^+ x = (-1)^n (\bar{p}_0 x^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{p}_1 x)^{n-1} + \dots + \bar{p}_n x),$$

и множеством краевых условий, «дополнительных» в некотором смысле к краевым условиям задачи, соответствующей оператору L . Будет показано, что многие свойства первоначальной задачи отображаются в «дополнительные» свойства сопряженной задачи. Эта глава в основном алгебраическая.

Основные результаты следуют из двух важных формул — формулы Грина и формулы краевых форм. Последняя будет рассмотрена в § 2. Напомним, что если, например, $u, v \in C^n$ на интервале $a \leq t \leq b$, то справедлива формула Грина

$$\int_{t_1}^{t_2} (Lu) \bar{v} dt - \int_{t_1}^{t_2} u(\bar{L}_v^+) dt = [uv](t_2) - [uv](t_1), \quad (1.2)$$

¹ Только в § 5 гл. XII используются результаты гл. XI и для этой цели теоремы 3.1, 3.2 и 4.1 могут быть опущены.

где $a \leq t_1 < t_2 \leq b$, а $[uv](t)$ — форма относительно величин $(u, u', \dots, u^{(n-1)})$ и $(v, v', \dots, v^{(n-1)})$, определяемая равенством

$$[uv](t) = \sum_{m=1}^n \sum_{j+k=m-1} (-1)^j u^{(k)}(t) (p_{n-m} \bar{v})^{(j)}(t).$$

Если записать форму $[uv](t)$ в виде

$$[uv](t) = \sum_{j,k=1}^n B_{jk}(t) u^{(k-1)}(t) \bar{v}^{(j-1)}(t),$$

то очевидно, что $B_{jk}(t) = 0$ для $j + k > n + 1$ и

$$B_{jk}(t) = (-1)^{j-1} p_0(t)$$

для $j + k = n + 1$. Поэтому матрица $B(t)$ с элементами $B_{jk}(t)$ есть треугольная матрица вида

$$B(t) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & \cdot & p_0(t) \\ \cdot & \cdot & & -p_0(t) & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ (-1)^{n-1} p_0(t) & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $\det B(t) = (p_0(t))^n$, и, следовательно, матрица $B(t)$ неособая для $a \leq t \leq b$.

Введем теперь понятие билинейной формы. Такой формой называется комплекснозначная функция \mathfrak{S} , определенная для пар k -мерных векторов f, g и удовлетворяющая условиям

$$\mathfrak{S}(\alpha f + \beta g, h) = \alpha \mathfrak{S}(f, h) + \beta \mathfrak{S}(g, h),$$

$$\mathfrak{S}(f, \alpha g + \beta h) = \bar{\alpha} \mathfrak{S}(f, g) + \bar{\beta} \mathfrak{S}(f, h)$$

для любых комплексных чисел α, β и векторов f, g, h . Если $f = (f_1, \dots, f_k)$ и $g = (g_1, \dots, g_k)$, то скалярное произведение $f \cdot g$ определяется равенством

$$f \cdot g = \sum_{i=1}^k f_i \bar{g}_i.$$

Если S — квадратная матрица порядка k с элементами s_{ij} , то $Sf \cdot g$ есть билинейная форма

$$\mathfrak{S}(f, g) = \mathfrak{S}f \cdot g = \sum_{i,j=1}^k s_{ij} f_j \bar{g}_i. \quad (1.3)$$

Очевидно, что $[uv](t)$ есть билинейная форма с матрицей $B(t)$. Выражение, стоящее в правой части формулы Грина (1.2), также можно рассматривать как форму относительно величин $(u(t_1), u'(t_1), \dots, u^{(n-1)}(t_1), u(t_2), \dots, u^{(n-1)}(t_2))$ и $(v(t_1), v'(t_1), \dots, v^{(n-1)}(t_1), v(t_2), \dots, v^{(n-1)}(t_2))$. Квадратная матрица $2n$ -го порядка \hat{B} , соответствующая этой форме, имеет вид

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} -B(t_1) & 0_n \\ 0_n & B(t_2) \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

где 0_n — нулевая матрица. Очевидно, $\det \hat{B} = (-1)^n \det B(t_1) \det B(t_2)$. Следовательно, матрица \hat{B} неособая для всех t_1, t_2 из $[a, b]$.

§ 2. ФОРМУЛА КРАЕВЫХ ФОРМ

Произвольно заданное множество $2mn$ комплексных постоянных M_{ij}, N_{ij} ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$) определяет m краевых операторов U_1, \dots, U_m для функций x на интервале $a \leq t \leq b$, для которых производные $x^{(j)}$ ($j = 1, \dots, n-1$) существуют в точках a и b , при помощи равенств

$$U_i x = \sum_{j=1}^n (M_{ij} x^{(j-1)}(a) + N_{ij} x^{(j-1)}(b)) \quad (i = 1, \dots, m). \quad (2.1)$$

Очевидно, что если a и β — комплексные числа и $x_1, x_2 \in C^{n-1}$ на интервале $[a, b]$, то $U_i(a x_1 + \beta x_2) = a U_i x_1 + \beta U_i x_2$, т. е. U_i — линейные операторы. Операторы U_i будут также называться краевыми формами. Они называются линейно независимыми, если единственным множеством комплексных постоянных c_1, \dots, c_m , для которых равенство

$$\sum_{i=1}^m c_i U_i x = 0$$

выполняется для всех функций $x \in C^{n-1}$ на интервале $[a, b]$, является множество $c_1 = \dots = c_m = 0$.

Формы (2.1) можно описать короче, обозначив через ξ вектор, соответствующий функции x , с компонентами $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ и через M, N — прямоугольные матрицы с m строками и n столбцами, с элементами M_{ij}, N_{ij} соответственно. Далее, обозначим через U векторную краевую форму с компонентами U_1, \dots, U_m . В этих обозначениях выражение (2.1) принимает простой вид

$$Ux = M\xi(a) + N\xi(b). \quad (2.2)$$

Если $(M : N)$ обозначает матрицу с m строками и $2n$ столбцами:

$$(M : N) = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1n} & N_{11} & \dots & N_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{m1} & \dots & M_{mn} & N_{m1} & \dots & N_{mn} \end{pmatrix},$$

то, как легко видеть, формы U_1, \dots, U_m линейно независимы в том и только в том случае, если ранг матрицы $(M : N)$ равен m . Если последнее условие имеет место в выражении (2.2), то говорят, что U имеет ранг m . Мы будем предполагать всегда, что для каждой векторной формы U число компонент равно ее рангу.

К любым m линейно независимым краевым формам U_1, \dots, U_m всегда возможно присоединить (многими способами) $2n-m$ линейно независимых форм U_{m+1}, \dots, U_{2n} так, что комбинированная система

U_1, \dots, U_{2n} будет состоять из $2n$ линейно независимых краевых форм. Это эквивалентно включению матрицы $(M:N)$ в неособую квадратную матрицу порядка $2n$. Пусть U_c — векторная форма с компонентами U_{m+1}, \dots, U_{2n} . Если U — любая форма ранга m и U_c — любая форма ранга $2n-m$, такие, что векторная форма с компонентами U_1, \dots, U_{2n} имеет ранг $2n$, то U и U_c называются *дополнительными краевыми формами*.

З а м е ч а н и е. Результаты этой главы будут применяться лишь для случая $m = n$, и поэтому читатель, если он желает, может ограничиться этим случаем.

Формула краевых форм покажет, каким образом форму, стоящую в правой части формулы Грина (1.2), можно рассматривать как линейную комбинацию краевой и дополнительной форм. Чтобы доказать это, необходимо сделать два замечания относительно билинейных форм (1.3). Напомним, что сопряженной матрицей матрицы $A = (a_{ij})$ называется транспонированная комплексно сопряженная матрица $A^* = (\bar{a}_{ji})$. Таким образом,

$$Sf \cdot g = f \cdot S^* g.$$

Пусть теперь \mathfrak{S} — билинейная форма, соответствующая неособой матрице S , и пусть $\tilde{f} = Ff$, где F — неособая матрица. Существует единственная неособая матрица G , такая, что если $\tilde{g} = Gg$, то $\mathfrak{S}(f, g) = \tilde{f} \cdot \tilde{g}$ для всех векторов f и g . Чтобы увидеть это, заметим, что $\mathfrak{S}(f, g) = Sf \cdot g = SF^{-1}\tilde{f} \cdot g$. Следовательно, матрица $G = (SF^{-1})^*$ удовлетворяет условию и однозначно определена.

Предположим, что форма \mathfrak{S} определяется единичной матрицей E , т. е. $\mathfrak{S}(f, g) = f \cdot g$. Пусть F — неособая матрица, такая, что первые j ($1 \leq j < k$) компонент вектора $\tilde{f} = Ff$ совпадают с соответствующими компонентами вектора f . Тогда единственная неособая матрица G , такая, что $\tilde{g} = Gg$ и $\tilde{f} \cdot \tilde{g} = f \cdot g$, обладает тем свойством, что последние $k-j$ компонент вектора \tilde{g} являются линейными комбинациями последних $k-j$ компонент вектора g с неособой матрицей коэффициентов. Чтобы доказать это, заметим, что матрица F должна иметь вид

$$F = \begin{pmatrix} E_j & 0_+ \\ F_+ & F_{k-j} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

где 0_+ — нулевая матрица с j строками и $k-j$ столбцами. Пусть

$$G = \begin{pmatrix} G_j & G_- \\ G_- & G_{k-j} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

где G_j — квадратная матрица порядка j . Очевидно, равенство

$$f \cdot g = Ff \cdot Gg = G^* Ff \cdot g$$

должно выполняться тождественно относительно векторов f и g . Таким образом, $G^* F = E_k$, и это означает в силу (2.3) и (2.4), что $G_-^* F_{k-j} = 0_+$. Так как $\det F_{k-j} = \det F \neq 0$, то $G_-^* = 0_+$ или $G_- = 0_-$

есть нулевая матрица с $k-j$ строками и j столбцами. Отсюда следует, что матрица G_{k-j} неособая, ибо матрица G неособая, и это завершает доказательство.

Теорема 2.1 (Формула краевых форм). Для любой краевой формы U ранга m и любой дополнительной формы U_c существуют единственныe краевые формы U_c^+ , U^+ рангов соответственно m и $2n-m$, такие, что

$$[xy](b) - [xy](a) = Ux \cdot U_c^+ y + U_c x \cdot U^+ y. \quad (2.5)$$

Если \tilde{U}_c — любая другая дополнительная форма для формы U и \tilde{U}_c^+ , \tilde{U}^+ — соответствующие формы рангов m и $2n-m$, то

$$\tilde{U}^+ y = C^* U^+ y$$

для некоторой неособой матрицы C .

Доказательство. Левую часть формулы (2.5) можно рассматривать как билинейную форму \mathfrak{S} для векторов f , имеющих компоненты $(x(a), \dots, x^{(n-1)}(a), x(b), \dots, x^{(n-1)}(b))$, и g , имеющих компоненты $(y(a), \dots, y^{(n-1)}(a), y(b), \dots, y^{(n-1)}(b))$, с неособой матрицей B . Таким образом, если

$$Ux = M\xi(a) + N\xi(b),$$

то $Ux = (M:N)f$. Точно так же $U_c x = (\tilde{M}:\tilde{N})f$ для двух подходящих матриц \tilde{M} , \tilde{N} , для которых матрица

$$H = \begin{pmatrix} M & N \\ \tilde{M} & \tilde{N} \end{pmatrix}$$

имеет ранг $2n$. Итак,

$$\begin{pmatrix} Ux \\ U_c x \end{pmatrix} = Hf,$$

и, согласно утверждению, отмеченному курсивом на стр. 313, существует единственная неособая квадратная матрица J порядка $2n$, такая, что $\mathfrak{S}(f, g) = Hf \cdot Jg$. Если принять

$$Jg = \begin{pmatrix} U_c^+ y \\ U^+ y \end{pmatrix},$$

то соотношение (2.5) выполняется.

Второе утверждение теоремы следует из замечания, отмеченного курсивом на стр. 313 выше формулы (2.3), но теперь векторы Hf и Jg соответствуют векторам f и g в этом замечании.

§ 3. ОДНОРОДНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И СОПРЯЖЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Каждой краевой форме U ранга m соответствует однородное краевое условие

$$Ux = 0 \quad (3.1)$$

для функций $x \in C^{n-1}$ на интервале $[a, b]$; если U^+ — любая краевая

форма ранга $2n-m$, определенная как в теореме 2.1, то однородное краевое условие

$$U^+ x = 0 \quad (3.2)$$

называется *сопряженным краевым условием* по отношению к условию (3.1). Из формулы Грина и формулы краевых форм, положив $(u, v) = \int_a^b u \bar{v} dt$, получаем, что

$$(Lu, v) = (u, L^+ v)$$

для всех функций $u \in C^n$ на интервале $[a, b]$, удовлетворяющих условию (3.1) и всех функций $v \in C^n$ на $[a, b]$, удовлетворяющих условию (3.2).

Обозначим через D и D^+ линейные подмножества множества всех функций $u \in C^n$, удовлетворяющих условиям (3.1) и (3.2) соответственно. Тогда теорема 2.1 показывает, что D^+ однозначно определяется через U , хотя форма U^+ и не определена. Если применить теорему к форме U^+ вместо U , то получим, что (3.1) есть сопряженное условие к условию (3.2), и D однозначно определяется через U^+ .

Форме U^+ соответствуют две матрицы из комплексных постоянных P и Q , каждая с n строками и $2n-m$ столбцами, такие, что матрица $(P^* : Q^*)$ имеет ранг $2n-m$ и

$$U^+ x = P^* \xi(a) + Q^* \xi(b).$$

Интересно охарактеризовать сопряженное условие (3.2) непосредственно при помощи матриц M , N , P , Q .

Теорема 3.1. *Краевое условие $U^+ x = 0$ сопряжено к условию $Ux = 0$ в том и только в том случае, когда*

$$MB^{-1}(a)P = NB^{-1}(b)Q, \quad (3.3)$$

где $B(t)$ — матрица, соответствующая форме $[xy](t)$.

Доказательство. Пусть η — вектор с компонентами $(y, y', \dots, y^{(n-1)})$. Тогда $[xy](t) = B(t) \xi(t) \cdot \eta(t)$.

Предположим вначале, что $U^+ x = 0$ — сопряженное краевое условие к условию $Ux = 0$. Из теоремы 2.1 следует, что существуют формы U_c , U_c^+ рангов $2n-m$ и m соответственно, такие, что имеет место формула краевых форм. Положим

$$U_c x = M_c \xi(a) + N_c \xi(b), \text{ где ранг } (M_c : N_c) \text{ равен } 2n-m,$$

$$U_c^+ y = P_c^* \eta(a) + Q_c^* \eta(b), \text{ где ранг } (P_c^* : Q_c^*) \text{ равен } m.$$

Выписывая формулу краевых форм, получаем следующее тождество относительно векторов $\xi(a)$, $\xi(b)$, $\eta(a)$, $\eta(b)$:

$$(P_c M + PM_c) \xi(a) \cdot \eta(a) + (Q_c M + QM_c) \xi(a) \cdot \eta(b) +$$

$$+ (P_c N + PN_c) \xi(b) \cdot \eta(a) + (Q_c N + QN_c) \xi(b) \cdot \eta(b) =$$

$$= B(b) \xi(b) \cdot \eta(b) - B(a) \xi(a) \cdot \eta(a).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} P_c M + PM_c &= -B(a), & P_c N + PN_c &= 0_n, \\ Q_c M + QM_c &= 0_n, & Q_c N + QN_c &= B(b). \end{aligned}$$

Так как матрицы $B(a)$, $B(b)$ неособые, то отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} -B^{-1}(a)P_c & -B^{-1}(a)P \\ B^{-1}(b)Q_c & B^{-1}(b)Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M & N \\ M_c & N_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_n & 0_n \\ 0_n & E_n \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Матрица, содержащая матрицы M, \dots, N_c , неособая и, следовательно, такой же будет матрица, стоящая слева. Так как последняя является левой обратной матрицей для матрицы, содержащей M, \dots, N_c , то она также является правой обратной. Таким образом,

$$\begin{pmatrix} M & N \\ M_c & N_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -B^{-1}(a)P_c & -B^{-1}(a)P \\ B^{-1}(b)Q_c & B^{-1}(b)Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_m & 0_+ \\ 0_- & E_{2n-m} \end{pmatrix},$$

где 0_+ , 0_- — матрицы со всеми нулевыми элементами. Поэтому
 $-MB^{-1}(a)P + NB^{-1}(b)Q = 0_+$,

а это и есть соотношение (3.3).

Наоборот, предположим, что U_1^+ — форма ранга $2n-m$, причем

$$U_1^+ y = P_1^* \eta(a) + Q_1^* \eta(b),$$

и что имеет место соотношение

$$MB^{-1}(a)P_1 = NB^{-1}(b)Q_1. \quad (3.5)$$

Так как ранг матрицы $(M : N)$ равен m , то существует точно $2n-m$ линейно независимых $2n$ -строчных векторов-решений линейной системы $(M : N) u = 0$. Из соотношения (3.5) видно, что $2n-m$ столбцов матрицы

$$H_1 = \begin{pmatrix} B^{-1}(a)P_1 \\ -B^{-1}(b)Q_1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

являются решениями этой системы. Так как ранг матрицы $(P_1^* : Q_1^*)$ равен $2n-m$, то

$$\text{ранг } \begin{pmatrix} P_1 \\ Q_1 \end{pmatrix} = 2n-m,$$

и так как $B(a)$, $B(b)$ — неособые матрицы, то ранг матрицы H_1 в (3.6) равен $2n-m$.

Если $U^+x = P^*\xi(a) + N^*\xi(b) = 0$ — краевое условие, сопряженное к условию $Ux = 0$, то матрица, стоящая слева в формуле (3.4), неособая, и отсюда следует, что если

$$H = \begin{pmatrix} B^{-1}(a)P \\ -B^{-1}(b)Q \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

то ранг матрицы H должен быть равен $2n-m$. Поэтому в силу условия (3.3) столбцы матрицы H также образуют $2n-m$ линейно независимых решений системы $(M : N) u = 0$. Следовательно, существует неособая квадратная матрица A порядка $2n-m$, такая, что из

равенства $H_1 = HA$ следует, что $B^{-1}(a)P_1 = B^{-1}(a)PA$, $B^{-1}(b)Q_1 = B^{-1}(b)QA$, или $P_1 = PA$, $Q_1 = QA$. Значит, $U_1^+y = A^*U^+y$, и это доказывает, что $U_1^+y = 0$ есть условие, сопряженное к условию $Ux = 0$.

Если U — краевая форма ранга m , то задача отыскания решений, удовлетворяющих равенствам

$$\pi_m: Lx = 0, \quad Ux = 0$$

на интервале $[a, b]$, называется *однородной краевой задачей ранга m* . Задача

$$\pi_{2n-m}^+: L^+x = 0, \quad U^+x = 0$$

на интервале $[a, b]$ называется *сопряженной краевой задачей* к задаче π_m . Очевидно, что π_m — сопряженная задача к задаче π_{2n-m}^+ . Функция, равная тождественно нулю на интервале $[a, b]$, есть решение обеих задач π_m и π_{2n-m}^+ и эту функцию мы будем называть *три-вильным решением*.

Непосредственным следствием теоремы 3.1 является следующая

Теорема 3.2. Если $m = n$, то краевое условие $Ux = 0$ сопряжено само себе в том и только в том случае, когда

$$MB^{-1}(a)M^* = NB^{-1}(b)N^*.$$

Таким образом, если выполняется предыдущее соотношение и $L^+ = L$, то краевая задача π_n самосопряжена, т. е. если функции $u, v \in C^n$ на интервале $[a, b]$ и удовлетворяют условию $Ux = 0$, то

$$(Lu, v) = (u, Lv).$$

Последнее равенство следует из формулы Грина и формулы краевых форм.

Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальное множество для уравнения $Lx = 0$ и пусть Φ — неособая матрица:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \varphi'_1 & \cdots & \varphi'_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \varphi_1^{(n-1)} & \cdots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется *фундаментальной матрицей, соответствующей уравнению $Lx = 0$* . Аналогично, пусть ψ_1, \dots, ψ_n — фундаментальное множество для уравнения $L^+x = 0$ и Ψ — соответствующая матрица:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & \cdots & \psi_n \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \psi_1^{(n-1)} & \cdots & \psi_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Операторы U и U^+ распространяются на матрицы при помощи равенств

$$U\Phi = M\Phi(a) + N\Phi(b),$$

$$U^+\Psi = P^*\Psi(a) + Q^*\Psi(b).$$

Теорема 3.3. Задача π_m имеет точно k ($0 \leq k \leq n$) линейно независимых решений в том и только в том случае, когда матрица $U\Phi$ имеет ранг $n - k$, где Φ — любая фундаментальная матрица, соответствующая уравнению $Lx = 0$.

Доказательство. Функция φ удовлетворяет уравнению $Lx = 0$ в том и только в том случае, когда вектор $\hat{\varphi}$ с компонентами $\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}$ представим в виде $\hat{\varphi} = \Phi c$, где c — постоянный вектор. Таким образом, $U\varphi = 0$ тогда и только тогда, когда

$$U(\Phi c) = (U\Phi)c = 0.$$

Число линейно независимых векторов, удовлетворяющих уравнению $(U\Phi)c = 0$, равно $n -$ рангу матрицы $(U\Phi)$.

Если Φ_1 — любая другая фундаментальная матрица, соответствующая уравнению $Lx = 0$, то $\Phi_1 = \Phi C$, где C — неособая постоянная матрица. Поэтому

$$\text{ранг } (U\Phi_1) = \text{ранг } (U\Phi),$$

что завершает доказательство.

Если задача π_m имеет точно k линейно независимых решений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, то каждая линейная комбинация $\sum_{i=1}^k c_i \varphi_i$, где c_i — комплексные числа, также является решением. Кроме того, если φ — любое решение задачи π_m , то $\varphi = \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i$ при некотором выборе постоянных c_i . Таким образом, решения задачи π_m образуют векторное пространство размерности k над полем комплексных чисел.

Существует определенная двойственность между числом нетривиальных решений задач π_m и π_{2n-m}^+ .

Теорема 3.4. Если задача π_m имеет точно k линейно независимых решений, то задача π_{2n-m}^+ имеет точно $k+m-n$ линейно независимых решений.

Доказательство. Пусть $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — k линейно независимых решений задачи π_m . Предположим, что форма U_c , где

$$U_c x = M_c \xi(a) + N_c \xi(b),$$

есть краевая форма ранга $2n-m$, дополнительная к форме U . Вначале докажем, что векторы $U_c \varphi_i$ ($i = 1, \dots, k$) линейно независимы. Предположим противное. Тогда для некоторых постоянных a_1, \dots, a_k , из которых хотя бы одна не равна нулю,

$$\sum_{i=1}^k a_i U_c \varphi_i = 0,$$

и отсюда следует, что

$$U_c \left(\sum_{i=1}^k a_i \varphi_i \right) = 0. \quad (3.8)$$

Далее,

$$U \left(\sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i \right) = 0, \quad (3.9)$$

ибо каждый вектор φ_i удовлетворяет условию $Ux = 0$. Таким образом, если $\tilde{\varphi} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi_i$ и $\tilde{\xi}$ — соответствующий ξ вектор, то (3.8) и (3.9) совместно дают

$$M \tilde{\xi}(a) + N \tilde{\xi}(b) = 0,$$

$$M_c \tilde{\xi}(a) + N_c \tilde{\xi}(b) = 0.$$

Так как

$$\text{ранг} \begin{pmatrix} M & N \\ M_c & N_c \end{pmatrix} = 2n,$$

то $\tilde{\xi}(a) = \tilde{\xi}(b) = 0$. Но $L\tilde{\varphi} = 0$ и, следовательно, в силу единственности $\tilde{\varphi}(t) = 0$ для $a \leq t \leq b$. Это противоречит определению $\tilde{\varphi}$ как нетривиальной линейной комбинации решений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$. Итак,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

Пусть ψ_1, \dots, ψ_n — n линейно независимых решений уравнения $L^+x = 0$ и предположим, что Ψ — соответствующая фундаментальная матрица. Формула Грина дает

$$[0] = (L\varphi_i, \psi_j) - (\varphi_i, L^+\psi_j) = [\varphi_i \psi_j](b) - [\varphi_i \psi_j](a)$$

для $i = 1, \dots, k$; $j = 1, \dots, n$. В силу формулы краевых форм это равно выражению

$$U\varphi_i \cdot U_c^+ \psi_j + U_c \varphi_i \cdot U^+ \psi_j.$$

Так как $U\varphi_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$), то

$$U_c \varphi_i \cdot U^+ \psi_j = 0,$$

или, так как $f \cdot g = g^* \cdot f$ для всех векторов-столбцов f и g ,

$$(U^+ \Psi)^* U_c \varphi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, k).$$

Следовательно, система $(U^+ \Psi)^* v = 0$ имеет своими решениями k линейно независимых $(2n-m)$ -мерных векторов $U_c \varphi_1, \dots, U_c \varphi_k$. Поэтому

$$\text{ранг } (U^+ \Psi) = \text{ранг } (U^+ \Psi)^* \leq (2n-m) - k.$$

Предположим, что ранг матрицы $(U^+ \Psi)$, равный r , меньше $(2n-m)-k$. Тогда можно показать аналогичными рассуждениями, что если Φ — любая фундаментальная матрица, соответствующая уравнению $Lx = 0$, то ранг матрицы $(U\Phi)$ не превосходит числа $m-(n-r) < n-k$, что является противоречием. Поэтому ранг матрицы $(U^+ \Psi)$ равен $2n-m-k$ и отсюда следует в силу теоремы 3.3, что существует точно $k+m-n$ линейно независимых решений задачи $\begin{cases} Lx = 0 \\ \pi_n \end{cases}$.

В частности, задачи π_n и π_n^+ имеют одинаковое число линейно независимых решений.

§ 4. НЕОДНОРОДНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ФУНКЦИЯ ГРИНА

Неоднородная краевая задача, соответствующая задаче π_m , есть задача вида

$$Lx = f, \quad Ux = \gamma \quad (4.1)$$

на интервале $a \leq t \leq b$, где f — комплекснозначная непрерывная функция на $[a, b]$ и γ — комплексный постоянный вектор, причем либо f — ненулевая функция, либо $\gamma \neq 0$. Здесь будет предполагаться, что U — краевая форма ранга m . Очевидно, что если φ и $\tilde{\varphi}$ — два решения задачи (4.1), то разность $\varphi - \tilde{\varphi}$ есть решение задачи π_m . Следовательно, если задача π_m имеет k линейно независимых решений $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, то $\varphi = \tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^k c_i \varphi_i$ при некоторых постоянных c_1, \dots, c_k .

Задача (4.1) не всегда имеет решение; теорема, сформулированная ниже, дает необходимое и достаточное условие для существования решения. Будет использован следующий результат. Пусть A — матрица и b — вектор. Тогда уравнение $Ax = b$ имеет решение тогда и только тогда, когда $b \cdot u = 0$ для каждого решения u уравнения $A^*x = 0$.

Теорема 4.1. *Неоднородная задача (4.1) имеет решение в том и только в том случае, когда равенство*

$$(f, \psi) = \gamma \cdot U_c^+ \psi \quad (4.2)$$

справедливо для каждого решения ψ однородной сопряженной задачи π_{2n-m}^+ .

Если $\gamma = 0$, то условие (4.2) означает, что функция f должна быть ортогональна всем решениям ψ задачи π_{2n-m}^+ .

Доказательство теоремы 4.1. Если φ — решение задачи (4.1) и функция ψ удовлетворяет задаче π_{2n-m}^+ , то формула Грина и формула краевых форм дают

$$(L\varphi, \psi) - (\varphi, L^+ \psi) = U\varphi \cdot U_c^+ \psi + U_c \varphi \cdot U^+ \psi$$

и равенство (4.2) получается непосредственно.

Наоборот, предположим, что равенство (4.2) выполняется для всех функций ψ , удовлетворяющих задаче π_{2n-m}^+ . Каждое решение φ уравнения $Lx = f$ имеет вид

$$\varphi = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + \tilde{\varphi},$$

где $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ — фундаментальное множество для уравнения $Lx = 0$, c_i — постоянные и $\tilde{\varphi}$ — частное решение уравнения $Lx = f$. Таким образом, задача (4.1) имеет решение тогда и только тогда, когда существуют постоянные c_1, \dots, c_n , такие, что

$$\sum_{i=1}^n c_i U\varphi_i + U\tilde{\varphi} = \gamma,$$

или

$$(U\Phi)c = \gamma - U\tilde{\varphi}, \quad (4.3)$$

где Φ — фундаментальная матрица, соответствующая решениям $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, и c — постоянный вектор с компонентами c_1, \dots, c_n . Далее, уравнение (4.3) имеет решение c тогда и только тогда, когда вектор $\gamma - U\tilde{\varphi}$ ортогонален каждому решению и соответствующей сопряженной однородной системы:

$$(U\Phi)^* u = 0, \quad (4.4)$$

т. е.

$$(\gamma - U\tilde{\varphi}) \cdot u = 0. \quad (4.5)$$

Пусть задача π_{2n-m}^+ имеет точно k^+ линейно независимых решений $\psi_1, \dots, \psi_{k^+}$. Используя в точности те же соображения, что и при доказательстве теоремы 4.3, можно показать, что k^+ векторов $U_c^+ \psi_1, \dots, U_c^+ \psi_{k^+}$ представляют собой линейно независимые m -мерные векторы, являющиеся решениями уравнения (4.4). Число линейно независимых решений уравнения (4.4) равно m — ранг $(U\Phi) = m - (n-k)$, где k — число линейно независимых решений задачи π_m . Но из теоремы 3.4 следует, что $k^+ = m-n+k$. Следовательно, равенство (4.5) имеет место для каждого вектора u , удовлетворяющего уравнению (4.4), в том и только в том случае, когда

$$(\gamma - U\tilde{\varphi}) \cdot U_c^+ \psi_i = 0 \quad (i = 1, \dots, k^+). \quad (4.6)$$

Применяя к решениям $\tilde{\varphi}$ и ψ_i формулу Грина и формулу краевых форм, получаем

$$(f, \psi_i) = U\tilde{\varphi} \cdot U_c^+ \psi_i, \quad (4.7)$$

и вместе с (4.2) это дает равенство (4.6). Поэтому существует постоянный вектор c , такой, что имеет место равенство (4.3), а это доказывает существование решения задачи (4.1).

Следствие. Если $m = n$, то задача (4.1) имеет единственное решение и задача π_n имеет единственное тривиальное решение.

Доказательство. По теореме 3.4 задача π_n^+ имеет только тривиальное решение, так что только функция $\psi = 0$ может удовлетворять условию (4.2). Более прямое доказательство состоит в том, что матрица $U\Phi$ в (4.3) должна иметь ранг n , что и ведет непосредственно к результату.

Предположим, что $m = n$. По теореме 3.4 отсюда следует, что задачи π_n и π_n^+ имеют одно и то же число k линейно независимых решений. Если $k = 0$, то можно явно решить неоднородную систему (4.1) при $\gamma = 0$ посредством функции Грина.

Существование функции Грина $G(t, \tau, l)$ для задачи

$$Lx - Ix = f, \quad Ux = 0$$

было установлено в гл. VII. Там было показано, что если однородная задача не имеет решения при данном l , то функция G существует.

(Было также показано, что если для одного значения l однородная задача не имеет решения, то она может иметь решения только для такого множества значений l , которое является множеством нулей некоторой целой функции.) Здесь l берется равным нулю и будет предполагаться, что задача π_n имеет только тривиальное решение. Функция $G(t, \tau, 0)$ будет обозначаться через $G(t, \tau)$. Единственное решение задачи (4.1) при $\gamma = 0$ дается в виде $\mathfrak{G}f$, где

$$\mathfrak{G}f(t) = \int_a^b G(t, \tau) f(\tau) d\tau.$$

Если задача π_n имеет только тривиальное решение, то очевидно, что задача π_n^+ имеет только тривиальное решение, и, следовательно, функция Грина G^+ задачи π_n^+ существует и единственна.

Теорема 4.2. *Если задача π_n имеет только тривиальное решение, то функция Грина G^+ для задачи π_n^+ дается в виде*

$$G^+(t, \tau) = \bar{G}(\tau, t). \quad (4.8)$$

Доказательство. Пусть $a < \tau_1 < \tau_2 < b$ и рассмотрим функции G_1 и G_2^+ , определяемые равенствами $G_1(t) = G(t, \tau_1)$, $G_2^+(t) = G^+(t, \tau_2)$. Тогда, применяя к каждому из интервалов $[a, \tau_1 - 0]$, $[\tau_1 + 0, \tau_2 - 0]$, $[\tau_2 + 0, b]$ формулу Грина, получаем

$$\begin{aligned} [G_1 G_2^+] (\tau_1 - 0) - [G_1 G_2^+] (a) + [G_1 G_2^+] (\tau_2 - 0) - \\ - [G_1 G_2^+] (\tau_1 + 0) + [G_1 G_2^+] (b) - [G_1 G_2^+] (\tau_2 + 0) = 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

По формуле краевых форм

$$[G_1 G_2^+] (b) - [G_1 G_2^+] (a) = 0. \quad (4.10)$$

Из вида выражения $[xy](t)$ следует, что единственными членами в равенстве (4.9), представляющими интерес, являются члены, содержащие $(n-1)$ -е производные; это будут

$$p_0(t) [(-1)^{n-1} x(t) \bar{y}^{(n-1)}(t) + x^{(n-1)}(t) \bar{y}(t)]. \quad (4.11)$$

Далее, функция G удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}} (\tau + 0, \tau) - \frac{\partial^{n-1} G}{\partial t^{n-1}} (\tau - 0, \tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}, \quad (4.12)$$

и, аналогично, G^+ — уравнению

$$\frac{\partial^{n-1} G^+}{\partial t^{n-1}} (\tau + 0, \tau) - \frac{\partial^{n-1} G^+}{\partial t^{n-1}} (\tau - 0, \tau) = \frac{1}{(-1)^n \bar{p}_0(\tau)}. \quad (4.13)$$

Из формул (4.9)–(4.13) легко получаем, что $\bar{G}^+(\tau_1, \tau_2) - G(\tau_2, \tau_1) = 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что это справедливо для $\tau_1 > \tau_2$, и это доказывает теорему.

Чтобы рассмотреть функцию $G(t, \tau, l)$, следует вместо L рассмотреть дифференциальный оператор $(L-l)$. Пусть $L_1 = L-l$ и рассмотрим задачу

$$L_1x = 0, \quad Ux = 0. \quad (4.14)$$

Сопряженная задача задается при помощи оператора $L_1^+ = L^+ - l$ и формы U^+ . Применяя к (4.14) теорему 4.2, получаем, что

$$G^+(t, \tau, l) = \bar{G}(\tau, t, \bar{l}). \quad (4.15)$$

Для самосопряженной задачи, где $L^+ = L$ и формы U и U^+ эквивалентны, имеем

$$G(t, \tau, l) = \bar{G}(\tau, t, \bar{l}),$$

что было уже доказано в гл. VII.

Задачи

1. Пусть $Lx = -(px')' + qx$, где функция p положительна, производная p' абсолютно непрерывна на интервале $[a, b]$, а функция q непрерывна и действительна. Пусть

$$Ux = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(a) \\ x'(a) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(b) \\ x'(b) \end{pmatrix}.$$

Показать, что формы U самосопряжены тогда и только тогда, когда

$$\frac{\bar{m}_{11}m_{12} - \bar{m}_{12}m_{11}}{p(a)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{12} - \bar{n}_{12}n_{11}}{p(b)},$$

$$\frac{\bar{m}_{21}m_{22} - \bar{m}_{22}m_{21}}{p(a)} = \frac{\bar{n}_{21}n_{22} - \bar{n}_{22}n_{21}}{p(b)},$$

$$\frac{\bar{m}_{11}m_{22} - \bar{m}_{21}\bar{m}_{12}}{p(a)} = \frac{\bar{n}_{11}n_{22} - \bar{n}_{21}\bar{n}_{12}}{p(b)},$$

Отметим, что если матрицы M и N действительны, то требуется только последнее условие.

2. Доказать равенство (4.15), используя формулу $(Lu, v) = (u, L^+v)$ для функций $u, v \in C^n[a, b]$, удовлетворяющих условиям $Uu = 0$, $U^+v = 0$.

Указание. Для функций $f, g \in C[a, b]$ пусть

$$u(t) = \int_a^b G(t, \tau, \bar{l}) f(\tau) d\tau, \quad v(t) = \int_a^b G^+(t, \tau, l) g(\tau) d\tau.$$

Тогда

$$Lu = \bar{L}u + f, \quad L^+v = Lv + g, \quad Uu = 0, \quad U^+v = 0.$$

3. Пусть сопряженным для оператора L является оператор L^+ ; пусть краевая форма U имеет ранг n и сопряженную форму U^+ . Предположим, что для всех функций $u, v \in C^n[a, b]$, удовлетворяющих условию $Ux = 0$,

$$(Lu, v) = (u, Lv).$$

Показать, что тогда $L^+ = L$ и что форма U самосопряжена, т. е. условие $U^+x = 0$ эквивалентно условию $Ux = 0$.

Указание. Для всех функций $u, v \in C^n[a, b]$, исчезающих тождественно вблизи a и b , $(u, Lv) = (u, L^+v)$. Отсюда следует, что $(L - L^+)v = 0$ для всех

таких v и, таким образом, $L = L^+$, так как линейное однородное дифференциальное уравнение не может иметь решений, исчезающих на интервале и не равных тождественно нулю. Если U^+ — сопряженная форма для U , то

$$(Lu, v) - (u, Lv) = Uu \cdot U_c^+ v + U_c u \cdot U^+ v,$$

так что для всех функций u, v , удовлетворяющих условию $Ux = 0, U_c u \cdot U^+ v = 0$. Отсюда следует, что $U^+ v = 0$ для всех v , удовлетворяющих условию $Uv = 0$. Так как ранги матриц, соответствующих формам U и U^+ , равны n , то отсюда следует требуемый результат.

4. Пусть операторы L, L^+ и форма U определены как в задаче 18 гл. VII, но теперь не предполагается более, что самосопряженность имеет место. Показать, что форма U^+ и задача, сопряженная к задаче $Lx = lx, Ux = 0$, определены.

5. Так как выше предполагается, что матрица U имеет nr компонент, то показать, что предыдущая задача и ее сопряженная имеют одинаковое число линейно независимых решений.

6. Показать, что если оператор L и форма U такие же, как и в задаче 4, и U имеет nr компонент и если квадратная матрица $G(t, \tau, l)$ порядка r есть функция Грина для задачи $Lx = lx + f, Ux = 0$, а $G^+(t, \tau, l)$ — функция Грина для сопряженной задачи, то

$$G^+(t, \tau, l) = G^*(\tau, t, \bar{l}).$$

Глава XII

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В случае когда краевая задача на конечном интервале не является самосопряженной, методы гл. VII недостаточны и для получения теоремы разложения необходим новый подход. Такой подход дает *интегральный метод Коши*. Этот метод применим также к самосопряженным задачам, рассмотренным уже в гл. VII, и дает исчерпывающую информацию о сходимости разложений для каждой интегрируемой функции.

Сущность метода можно легко увидеть, рассматривая теорему разложения в самосопряженном случае в несколько ином свете. Пусть L — обычновенный формально самосопряженный дифференциальный оператор порядка n и рассмотрим самосопряженную краевую задачу

$$\pi: Lx = lx, \quad Ux = 0$$

на конечном замкнутом интервале $a \leq t \leq b$. Тогда для уравнения $Lx = lx$ существует полное ортонормированное множество собственных функций $\{\chi_k\}$ и функция Грина

$$G = G(t, \tau, l),$$

если только l не есть собственное значение λ_k , $k = 1, 2, \dots$. Теорема разложения гл. VII. гласит, что для каждой функции $f \in \mathfrak{L}^2(a, b)$

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \chi_k) \chi_k,$$

где

$$(f, \chi_k) = \int_a^b f(t) \bar{\chi}_k(t) dt,$$

и ряд сходится в среднем к f . Пусть

$$\mathfrak{G}(l)f(t) = \int_a^b G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau.$$

Тогда, так как $L\chi_k = \lambda_k \chi_k = \bar{l}\chi_k + (\lambda_k - \bar{l})\chi_k$,

$$(\mathfrak{G}(l)f, \chi_k) = (f, \mathfrak{G}(\bar{l})\chi_k) = (\lambda_k - l)^{-1} (f, \chi_k)$$

и, следовательно, ряд Фурье для функции $\mathfrak{G}(l)f$ имеет вид

$$\mathfrak{G}(l)f = \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k - l)^{-1} (f, \chi_k) \chi_k.$$

Используя теорему о вычетах, получим *интегральную формулу Коши* для разложения в ряд функции f :

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f, \chi_k) \chi_k = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{C_m} \mathfrak{G}(l)f dl,$$

где C_m — простая замкнутая кривая в l -плоскости, окружающая каждый из полюсов $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в точности один раз в направлении против часовой стрелки.

В несамосопряженном случае возможно, как показано в гл. VII, определить функцию Грина $G(t, \tau, l)$, если только целая функция $A = A(l)$ не обращается в нуль тождественно. Далее, имеет смысл рассматривать интеграл

$$\int_{C_m} \mathfrak{G}(l) f dl,$$

где C_m — простая замкнутая кривая, окружающая собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, которые могут быть комплексными. Тогда теорема разложения получится, если мы покажем, что, ограничиваясь надлежащими функциями f ,

$$f = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{C_m} \mathfrak{G}(l) f dl. \quad (1.1)$$

Таким образом, функция f представляется как сумма с обратным знаком вычетов функции $\mathfrak{G}(l)f$.

В этой главе вначале будет рассмотрена задача второго порядка

$$Lx = -x'' + q(t)x = lx, \quad (1.2)$$

$$U_i x = a_{i1} x(0) + a_{i2} x'(0) + a_{i3} x(\pi) + a_{i4} x'(\pi) = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь q — непрерывная¹ комплекснозначная функция на интервале $0 \leq t \leq \pi$ и a_{ij} — комплексные постоянные. При помощи преобразования вида $t = at + \beta$ любой замкнутый конечный интервал $a \leq t \leq b$ может быть преобразован в интервал $0 \leq t \leq \pi$, так что, не ограничивая общности, можно рассматривать последний интервал. Обобщение на случай, когда L — оператор порядка n , получается непосредственно и будет намечено в § 4.

Матрица $A = (a_{ij})$, состоящая из двух строк и четырех столбцов, задает краевые условия. Будем предполагать, что ее ранг

¹ Из доказательств будет видно, что ограничение, согласно которому функция q должна быть непрерывной, может быть значительно ослаблено. На самом деле все результаты имеют место, если потребовать, чтобы функция q была интегрируемой на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

равен 2; в противном случае существовало бы только одно линейно независимое краевое условие. Пусть φ_1, φ_2 — линейно независимые решения уравнения $Lx = lx$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_j^{(k-1)}(0, l) = \delta_{jk}$$

для $j, k = 1, 2$. Эти функции непрерывны по совокупности переменных (t, l) для $0 \leq t \leq \pi$ и всех l , а при фиксированном t являются целыми функциями l . Для данного l нетривиальное решение существует в том и только в том случае, когда определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} U_1 \varphi_1 & U_1 \varphi_2 \\ U_2 \varphi_1 & U_2 \varphi_2 \end{vmatrix}$$

обращается в нуль. Как функция l определитель Δ есть целая функция, и ее нули являются собственными значениями для задачи (1.2).

Мы видели, что в самосопряженном случае функция Δ не может обращаться в нуль тождественно, ибо все собственные значения действительны. Более того, функция Δ обращалась в нуль только в счетном множестве точек действительной оси. Для несамосопряженного случая положение может быть совсем другим. Например, если q — нулевая функция на интервале $0 \leq t \leq \pi$ и

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

то элементарные вычисления показывают, что функция Δ обращается в нуль для всех l . С другой стороны, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

при той же функции q , то Δ — постоянная, не равная нулю, и поэтому не существует собственных значений. Очевидно, необходимо дать достаточные условия, которые гарантировали бы отсутствие этих случаев вырождения.

Метод этой главы покажет, что в большом числе случаев общая задача (1.2) может быть сведена к изучению той же задачи при $q(t) = 0$ для $0 \leq t \leq \pi$. В последнем случае функция Δ от l может быть указана в явном виде, так же как и функция Грина.

Если указанный метод оказывается недостаточным, то задачу (1.2) изучают непосредственно, используя результаты гл. VI для получения асимптотического поведения ее функции Грина при $|l| \rightarrow \infty$, как указано в конце § 3.

§ 2. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ $Lx = -x''$

Так как в дальнейшем интерес будет сосредоточен на задаче (1.2) с соответствующей функцией Грина G , то будет удобно обозначить через Λ специальный оператор, задаваемый равенством

$$\Lambda x = -x'',$$

и через Γ — функцию Грина (если она существует) для задачи на интервале $0 \leq t \leq \pi$

$$Ax = lx, \quad U_1x = 0, \quad U_2x = 0. \quad (2.1)$$

Полагая $l = \varrho^2$, получаем, что $e^{i\varrho t}$ и $e^{-i\varrho t}$ — независимые решения уравнения $Ax = \varrho^2 x$, исключая случай $\varrho = 0$. Нули функции ω от ϱ , определенной равенством

$$\omega(\varrho) = \begin{vmatrix} U_1 e^{i\varrho t} & U_1 e^{-i\varrho t} \\ U_2 e^{i\varrho t} & U_2 e^{-i\varrho t} \end{vmatrix}, \quad (2.2)$$

— это те значения ϱ , для которых задача (2.1) имеет нетривиальные решения при $l = \varrho^2$, исключая $\varrho = 0$. Функция Грина задачи (2.1) существует для тех ϱ , для которых $\omega(\varrho) \neq 0$, и при $\varrho \neq 0$ имеет вид

$$\Gamma(t, \tau, \varrho^2) = \frac{M(t, \tau, \varrho)}{\omega(\varrho)}, \quad (2.3)$$

где функция M определяется равенством

$$M(t, \tau, \varrho) = \begin{vmatrix} \gamma(t, \tau, \varrho) & e^{i\varrho t} & e^{-i\varrho t} \\ U_1 \gamma & U_1 e^{i\varrho t} & U_1 e^{-i\varrho t} \\ U_2 \gamma & U_2 e^{i\varrho t} & U_2 e^{-i\varrho t} \end{vmatrix}, \quad (2.4)$$

причем γ есть фундаментальное решение уравнения $Ax = \varrho^2 x$. Его можно определить как такое решение этого уравнения [рассматриваемое как функция t для фиксированного τ ($0 < \tau < \pi$)] при $0 < \tau < t \leq \pi$, которое удовлетворяет условиям $\gamma(\tau + 0, \tau, \varrho) = 0$, $(\partial\gamma/\partial t)(\tau + 0, \tau, \varrho) = -1$ и $\gamma(t, \tau, \varrho) = 0$ для $0 \leq t \leq \tau$. При таком определении функции γ решение φ уравнения $Ax = \varrho^2 x + f$, где функция f интегрируема на интервале $0 \leq t \leq \pi$, имеет вид

$$\varphi(t) = \int_0^t \gamma(t, \tau, \varrho) f(\tau) d\tau.$$

Формула (2.3) может быть проверена непосредственно, исходя из определения функции Γ , или с ссылкой на задачу 12 гл. VII. Так как Γ — мероморфная функция l и, следовательно, ϱ , то она должна определяться по формуле (2.3) также для $\varrho = 0$.

Изучим теперь явный вид функции Γ . Из определения функции ω следует, что

$$\begin{aligned} \omega(\varrho) = & -e^{i\varrho\pi} \begin{vmatrix} a_{11} - i\varrho a_{12} & a_{13} + i\varrho a_{14} \\ a_{21} - i\varrho a_{22} & a_{23} + i\varrho a_{24} \end{vmatrix} + \\ & + e^{-i\varrho\pi} \begin{vmatrix} a_{11} + i\varrho a_{12} & a_{13} - i\varrho a_{14} \\ a_{21} + i\varrho a_{22} & a_{23} - i\varrho a_{24} \end{vmatrix} - 2i\varrho \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - 2i\varrho \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Используя обозначение

$$A_{jk} = \begin{vmatrix} a_{1j} & a_{1k} \\ a_{2j} & a_{2k} \end{vmatrix},$$

можно записать это выражение в виде

$$\omega(\varrho) = -P(\varrho)e^{i\varrho\pi} + P(-\varrho)e^{-i\varrho\pi} - 2i(A_{12} + A_{34})\varrho, \quad (2.5)$$

где

$$P(\varrho) = A_{24}\varrho^2 + i(A_{14} - A_{23})\varrho + A_{13}. \quad (2.6)$$

Другой вид формулы (2.5) таков:

$$\begin{aligned} \omega(\varrho) = & -2i(A_{24}\varrho^2 + A_{13})\sin\pi\varrho + 2i(A_{23} - A_{14})\varrho\cos\pi\varrho - \\ & - 2i(A_{12} + A_{34})\varrho. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Отсюда очевидно, что ω есть целая функция с бесконечным числом нулей, исключая случаи $A_{24} = 0$, $A_{13} = 0$ и $A_{23} = A_{14}$.

Легко видеть, что функция y выражается так:

$$\begin{aligned} y(t, \tau, \varrho) = & -\varrho^{-1}\sin\varrho(t - \tau) \quad (\tau < t), \\ = & 0 \quad (t \leq \tau). \end{aligned}$$

После несколько утомительного вычисления найдем, что функция M удовлетворяет для $t \leq \tau$ равенству

$$\begin{aligned} -2i\varrho M(t, \tau, \varrho) = & P(\varrho)e^{i\varrho(\pi - \tau + t)} + P(-\varrho)e^{-i\varrho(\pi - \tau + t)} + Q(\varrho)e^{i\varrho(\pi - \tau - t)} + \\ & + Q(-\varrho)e^{-i\varrho(\pi - \tau - t)} + 2iA_{34}\varrho[e^{i\varrho(t - \tau)} - e^{-i\varrho(t - \tau)}], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где функция P определяется формулой (2.6) и

$$Q(\varrho) = A_{24}\varrho^2 - i(A_{14} + A_{23})\varrho - A_{13}.$$

Для $t > \tau$

$$\begin{aligned} -2i\varrho M(t, \tau, \varrho) = & P(\varrho)e^{i\varrho(\pi - t + \tau)} + P(-\varrho)e^{-i\varrho(\pi - t + \tau)} + Q(\varrho)e^{i\varrho(\pi - t - \tau)} + \\ & + Q(-\varrho)e^{-i\varrho(\pi - t - \tau)} + 2iA_{12}\varrho[e^{i\varrho(\tau - t)} - e^{-i\varrho(\tau - t)}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При помощи тригонометрических функций равенство (2.8) для $t \leq \tau$ выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} -i\varrho M(t, \tau, \varrho) = & (A_{24}\varrho^2 + A_{13})\cos\varrho(\pi - \tau + t) - \\ & - (A_{14} - A_{23})\varrho\sin\varrho(\pi - \tau + t) + (A_{24}\varrho^2 - A_{13})\cos\varrho(\pi - \tau - t) + \\ & + (A_{14} + A_{23})\varrho\sin\varrho(\pi - \tau - t) - 2\varrho A_{34}\sin\varrho(t - \tau). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Аналогичная формула для $-i\varrho M(t, \tau, \varrho)$ получается при $t > \tau$ с помощью перестановки t и τ и замены A_{34} на A_{12} в правой части равенства (2.10).

Если $A_{24} \neq 0$, то из выражения (2.7) легко находим, что нули функции ω для больших $|\varrho|$ лежат вблизи точек $\varrho = \pm m$, где m пробегает целые положительные числа. Окружим каждое целое число $\pm m$ окружностью радиуса $1/4$ с центром в этом целом числе. Обозначим множество точек, внутренних для этих кругов, через E . Тогда окружности C_m с уравнениями $|\varrho| = m + 1/2$ не пересекают множество E (и, таким образом, не встречают нулей ω) для больших целых m . Следовательно, они могут быть взяты в качестве простых замкнутых кривых, окружающих нули ω . Так как $l = \varrho^2$, то окружности C_m переходят в окружности \tilde{C}_m : $|l| = \left(m + \frac{1}{2}\right)^2$ в l -плоскости.

Определим функции σ_m для интегрируемых функций f на $0 \leq t \leq \pi$ равенством

$$\begin{aligned} \sigma_m(t) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{C_m} \left(\int_0^\pi \Gamma(t, \tau, l) f(\tau) d\tau \right) dl = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \left(\int_0^\pi \Gamma(t, \tau, \varrho^2) f(\tau) d\tau \right) \varrho d\varrho, \quad (2.11) \end{aligned}$$

причем каждая окружность обходится один раз в положительном направлении. Будет показано, что в случае $A_{24} \neq 0$ разность между σ_m и m -й частной суммой косинус-разложения Фурье функции f стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ равномерно на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Частные суммы s_m косинус-ряда даются равенством

$$s_m(t) = \sum_{k=0}^m c_k \cos kt,$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(\tau) d\tau, \quad c_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos k\tau f(\tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Теорема 2.1. Если $A_{24} \neq 0$, то разность $\sigma_m - s_m$ стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$ равномерно на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

Замечание. Последовательность $\{\sigma_m\}$ называется *равно-сходящейся* с последовательностью $\{s_m\}$ на некотором интервале, если $\sigma_m - s_m \rightarrow 0$ равномерно на этом интервале при $m \rightarrow \infty$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\varrho = u + iv$, где u, v действительны. Из (2.7) следует, что

$$[\omega(\varrho)] = -2iA_{24}\varrho^2 \sin \pi\varrho + O(|\varrho|e^{|v|}), \quad (|\varrho| \rightarrow \infty),$$

и если ϱ лежит вне множества E , определенного выше, то $|\sin \pi\varrho| > \text{const } e^{|v|}$. Таким образом, если ϱ лежит вне E , то

$$\frac{1}{\omega(\varrho)} = -\frac{1}{2iA_{24}\varrho^2 \sin \pi\varrho} + O\left(\frac{e^{-|v|\pi}}{|\varrho|^3}\right) \quad (|\varrho| \rightarrow \infty).$$

Так как $\Gamma(t, \tau, \varrho^2) = M(t, \tau, \varrho)/\omega(\varrho)$, то из (2.10) следует, что для больших $|\varrho|$, когда ϱ лежит вне E ,

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \tau, \varrho^2) &= -\frac{1}{2} \frac{\cos \varrho(\pi - \tau + t) + \cos \varrho(\pi - \tau - t)}{\varrho \sin \pi\varrho} + O\left(\frac{e^{-|v|(\tau-t)}}{|\varrho|^2}\right) + \\ &\quad + O\left(\frac{e^{-|v|(\pi-(\tau-t))}}{|\varrho|^2}\right) \quad (t \leq \tau), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Gamma(t, \tau, \varrho^2) &= -\frac{\cos \varrho(\pi - \tau) \cos \varrho t}{\varrho \sin \pi\varrho} + O\left(\frac{e^{-|v|(\tau-t)}}{|\varrho|^2}\right) + O\left(\frac{e^{-|v|(\pi-(\tau-t))}}{|\varrho|^2}\right) \\ &\quad \quad \quad (t \leq \tau). \quad (2.12) \end{aligned}$$

Аналогичная оценка для функции Γ имеет место при $t > \tau$, единственное изменение состоит в том, что t и τ следует поменять местами в формуле (2.12). Таким образом, из (2.11) следует, что σ_m можно рассматривать как сумму двух слагаемых $\sigma_m^{(1)}$ и $\sigma_m^{(2)}$, причем

$$\begin{aligned} \sigma_m^{(1)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \left\{ \int_0^t \frac{\cos \varrho(\pi - t) \cos \varrho\tau}{\sin \pi\varrho} f(\tau) d\tau + \right. \right. \\ \left. \left. + \int_t^\pi \frac{\cos \varrho(\pi - \tau) \cos \varrho t}{\sin \pi\varrho} f(\tau) d\tau \right\} d\varrho. \right. \end{aligned}$$

Меняя порядок интегрирования и используя теорему о вычетах, получаем

$$\sigma_m^{(1)}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + 2 \sum_{k=1}^m \cos kt \cos k\tau \right) f(\tau) d\tau = s_m(t),$$

что является частной суммой m -го порядка косинус-разложения Фурье функции $f(t)$.

Остается только показать, что член $\sigma_m^{(2)}(t)$ стремится при $m \rightarrow \infty$ к нулю равномерно на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Из (2.12) получаем оценку

$$\int_{C_m t}^\pi \int \frac{e^{-|v|(\tau-t)}}{|\varrho|} |f(\tau)| d\tau |d\varrho|. \quad (2.13)$$

Если $\delta > 0$, то эта величина порядка

$$O \left(\int_{C_m} e^{-|v|\delta} \left| \frac{d\varrho}{\varrho} \right| \right) + O \left(\int_t^{t+\delta} |f(\tau)| d\tau \right).$$

Так как окружность C_m имеет радиус $r_m = m + 1/2$, то простое вычисление показывает, что

$$\int_{C_m} e^{-|v|\delta} \left| \frac{d\varrho}{\varrho} \right| < \frac{16}{\delta r_m}. \quad (2.14)$$

Выбирая δ достаточно малым, можно сделать интеграл $\int_t^{t+\delta} |f(\tau)| d\tau$

сколь угодно малым независимо от t , так как функция $\int_0^t |f(\tau)| d\tau$

равномерно непрерывна на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Выбрав δ , можно затем сделать целое число m настолько большим, что интеграл в неравенстве (2.14) станет сколь угодно малым. Таким образом, выражение (2.13) стремится к нулю равномерно по t при $m \rightarrow \infty$. Совершенно аналогичные рассмотрения применимы к последнему члену в формуле (2.12) с той лишь разницей, что вместо интеграла по про-

межутку $(t, t + \delta)$ появляется интеграл по промежутку $(\pi - \delta, \pi)$. Члены для $t > \tau$ оцениваются аналогично, и это доказывает теорему.

Случай $A_{24} \neq 0$ не единственный, при котором имеет место теорема типа теоремы 2.1. Например, если $A_{24} = 0$ и $A_{14} - A_{23} \neq 0$, то равенства (2.7) и (2.10) обеспечивают существование окружностей C_m и множества E , таких, как прежде, причем C_m не пересекает E для больших t . Имеют место оценки, аналогичные (2.12). Для изучающего будет полезно сформулировать и доказать аналог теоремы 2.1 для этого случая, а также для случая, когда $A_{13} \neq 0$ и все остальные определители A_{ij} равны нулю.

Можно доказать непосредственно, что если функция f дифференцируема на интервале $0 \leq t \leq \pi$, то функции σ_m , определенные формулой (2.11), сходятся к f при $t \rightarrow \infty$, исключая, возможно, точки 0 и π . Так как M — линейная сумма экспонент относительно τ , то интеграл

$$\int_t^\pi M(t, \tau, \varrho) f(\tau) d\tau$$

представляет собой сумму с типичным членом

$$\int_t^\pi e^{i\varrho(\pi-\tau+t)} f(\tau) d\tau.$$

Этот член можно проинтегрировать по частям, что дает

$$\frac{f(t) e^{-i\varrho\pi}}{i\varrho} - \frac{f(\pi) e^{i\varrho t}}{i\varrho} + \frac{1}{i\varrho} \int_t^\pi e^{i\varrho(\pi-\tau+t)} f'(\tau) d\tau.$$

Интегрирование по ϱ дает из членов, аналогичных первому, функцию $f(t)$. Второй и третий члены стремятся к нулю, в чем убеждаемся почти как при доказательстве теоремы 2.1.

§ 3. ФУНКЦИЯ ГРИНА И ТЕОРЕМА РАЗЛОЖЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ $Lx = -x'' + q(t)x$

Пусть G — функция Грина задачи

$$Lx = -x'' + q(t)x = lx, \quad U_1x = 0, \quad U_2x = 0, \quad (3.1)$$

где условия U_1 , U_2 даны в (1.2) и q — непрерывная комплексно-значная функция на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Как и в § 2, пусть Γ — функция Грина для задачи

$$Ax = -x'' = lx, \quad U_1x = 0, \quad U_2x = 0. \quad (3.2)$$

Так как производные $\partial G/\partial t$ и $\partial \Gamma/\partial t$ имеют один и тот же разрыв при $t = \tau$, то разность $G - \Gamma$, рассматриваемая как функция t , принадлежит классу C^1 и, исключая, быть может, $t = \tau$, — классу C^2 . Более того, так как G удовлетворяет уравнению $Lx = lx$ (исключ-

чая $t = \tau$) и Γ удовлетворяет уравнению $Ax = lx$ (исключая $t = \tau$), то разность $G - \Gamma$ на самом деле принадлежит классу C^2 , ибо

$$A(G - \Gamma) - l(G - \Gamma) = -q(t)G.$$

Из этого уравнения и из условий $U_i(G - \Gamma) = 0$, $i = 1, 2$, следует, что, исключая полюсы функций G и Γ ,

$$G(t, \tau, l) - \Gamma(t, \tau, l) = -\int_0^\pi \Gamma(t, s, l) q(s) G(s, \tau, l) ds. \quad (3.3)$$

Мы увидим, что интегральное уравнение (3.3) в основном выражает поведение функции G через известное поведение функции Γ . Ниже будет показано, что если Γ для больших $|l|$ удовлетворяет некоторым требованиям, то уравнение (3.3) имеет решение G , и из (3.3) непосредственно следует, что эта функция G имеет все необходимые свойства функции Грина для больших $|l|$ и поэтому должна быть функцией Грина. Таким образом, при выполнении этих условий для *каждой* непрерывной функции q функция G существует и мероморфна, ибо если G существует хотя бы для одного l , то $A \not\equiv 0$.

Из (2.12) и аналогичного соотношения для $t > \tau$ следует, что для больших $|\varrho|$, причем ϱ лежит вне E , при предположении $A_{24} \neq 0$,

$$|\Gamma(t, \tau, \varrho^2)| \leq k |\varrho|^{-1} h_v(t, \tau), \quad (3.4)$$

где k — постоянная, зависящая только от краевых условий, и

$$h_v(t, \tau) = e^{-|v|(t-\tau)} + e^{-|v|(\pi - |t-\tau|)}.$$

Существование решения G уравнения (3.8) будет доказано в предположении, что Γ удовлетворяет неравенству (3.4).

Очевидно, что случай $A_{24} \neq 0$ не единственный, когда неравенство (3.4) выполняется. Если $A_{24} = 0$ и $A_{23} - A_{14} \neq 0$, то из (2.7) и (2.10) следует существование множества E , вне которого неравенство (3.4) справедливо, а также существование семейства окружностей C_m с радиусами, возрастающими на 1 при возрастании m на 1, причем для больших m окружности C_m не пересекают E . В другом случае, в котором выполняется неравенство (3.4), $A_{13} \neq 0$ и все другие $A_{ij} = 0$.

Теорема 3.1. *Если функция Грина Γ задачи (3.2) удовлетворяет неравенству (3.4) для всех достаточно больших $|\varrho|$, то для всех достаточно больших $|\varrho|$ и ϱ , лежащих вне множества E , существует решение G интегрального уравнения (3.3).*

Доказательство. Можно использовать метод последовательных приближений. Пусть $G_0(t, \tau, l) — функция, равная нулю;$ определим функции G_{p+1} , $p = 0, 1, 2, \dots$, равенствами

$$G_{p+1}(t, \tau, l) = \Gamma(t, \tau, l) - \int_0^\pi \Gamma(t, s, l) q(s) G_p(s, \tau, l) ds \quad (3.5)$$

для всех достаточно больших $|\varrho|$, где $l = \varrho^2$. Пусть

$$\max |G_{p+1}(t, \tau, \varrho^2) - G_p(t, \tau, \varrho^2)| |h_v(t, \tau)|^{-1} |\varrho| = k_p, \quad (3.6)$$

где максимум берется для $0 \leq t \leq \pi$ при фиксированном τ и достаточно больших $|\varrho|$, причем ϱ лежит вне E . В силу (3.4) и (3.5) очевидно, что равенство (3.6) выполняется для $p = 0$ при $k_0 = k$. Предположим теперь, что неравенства

$$k_j \leq \frac{k}{2^j}, \quad (j = 0, 1, \dots, p) \quad (3.7)$$

уже доказаны. Тогда будет показано, что (3.7) имеет также место для $j = p + 1$. В самом деле, из равенства (3.5) следует, что

$$k_{p+1} \leq k k_p |\varrho|^{-1} \max_{0 \leq t \leq \pi} \int_0^\pi |q(s)| h_v(t, s) h_v(s, \tau) (h_v(t, \tau))^{-1} ds.$$

Используя неравенства $|s - t| + |\tau - s| \geq |t - \tau|$, $\pi - |t - s| + |\tau - s| \geq \pi - |t - \tau|$, $\pi - |\tau - s| + |t - s| \geq \pi - |t - \tau|$ и $2\pi - |t - s| - |\tau - s| \geq |t - \tau|$, получаем

$$h_v(t, s) h_v(s, \tau) \leq 2 h_v(t, \tau).$$

Таким образом,

$$k_{p+1} \leq 2 k k_p |\varrho|^{-1} \int_0^\pi |q(s)| ds, \quad (3.8)$$

и если $|\varrho|$ достаточно велико, то

$$2 k |\varrho|^{-1} \int_0^\pi |q(s)| ds < \frac{1}{2}.$$

Используя это в неравенстве (3.8), получаем неравенство (3.7) для $j = p + 1$ и, следовательно, получаем по индукции неравенство (3.7) для всех j .

Теперь легко доказать равномерную сходимость последовательности $\{G_p\}$ к предельной функции G . Эта функция G удовлетворяет (3.3) для всех достаточно больших $|l|$, что доказывает теорему.

Из неравенства (3.7) также следует, что $|G|$ удовлетворяет тому же неравенству (3.4), что и Γ , с заменой k на $2k$. Используя эту оценку снова в уравнении (3.3), получаем

$$|G(t, \tau, \varrho^2) - \Gamma(t, \tau, \varrho^2)| \leq 4 k^2 |\varrho|^{-2} h_v(t, \tau) \int_0^\pi |q(s)| ds. \quad (3.9)$$

Пусть f — интегрируемая функция на интервале $0 \leq t \leq \pi$ и

$$S_m(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \left(\int_0^\pi G(t, \tau, \varrho^2) f(\tau) d\tau \right) \varrho d\varrho.$$

Напомним, что σ_m — соответствующая сумма для функции f , составленная с использованием Γ :

$$\sigma_m(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \left(\int_0^\pi \Gamma(t, \tau, \varrho^2) f(\tau) d\tau \right) \varrho d\varrho.$$

Можно показать, что если Γ удовлетворяет неравенству (3.4), то последовательность $\{S_m\}$ равносходится с последовательностью $\{\sigma_m\}$, а это означает, что $S_m - \sigma_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ равномерно по t , $0 \leq t \leq \pi$. Тем самым изучение сходимости последовательности $\{S_m\}$ будет сведено к простому случаю, рассмотренному в § 2.

Теорема 3.2. *Если функция Γ удовлетворяет неравенству (3.4), то последовательность $\{S_m\}$ равносходится с последовательностью $\{\sigma_m\}$.*

Доказательство. Из неравенства (3.9) следует, что для малых $\delta > 0$

$$2\pi|S_m(t) - \sigma_m(t)| \leq 2k_1 \left(\int_{-\delta}^{t-\delta} + \int_{t+\delta}^{\pi-\delta} \right) |f(\tau)| d\tau \int_{C_m} e^{-|\varrho|\delta} \left| \frac{d\varrho}{\varrho} \right| + \\ + 4\pi k_1 \left(\int_0^\delta + \int_{t-\delta}^{t+\delta} + \int_{\pi-\delta}^\pi \right) |f(\tau)| d\tau, \quad (3.10)$$

где

$$k_1 = 4k^2 \int_0^\pi |q(s)| ds;$$

если $t < \delta$ или $t > \pi - \delta$, то необходимо сделать очевидные изменения пределов интегрирования. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно выбрать δ настолько малым, что последний член правой части неравенства (3.10) может быть сделан меньше $\varepsilon/2$ независимо от t на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Выбрав такое δ , можно затем взять m настолько большим, чтобы сделать первый член правой части неравенства (3.10) меньше $\varepsilon/2$, используя (2.14). Это доказывает равносходимость последовательностей $\{S_m\}$ и $\{\sigma_m\}$.

В частном случае, когда теорема 3.2 справедлива, $A_{24} \neq 0$. Сопоставляя это с теоремой 2.1, получаем, что в этом случае последовательность $\{S_m\}$ будет равносходящейся с косинус-разложением Фурье функции f на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

В случае когда неравенство (3.4) не имеет места, построение функции G при помощи функции Γ усложняется. Поведение функции $G(t, \tau, l)$ при $|l| \rightarrow \infty$ может быть получено из теоремы 3.1 гл. VI. Для уравнения порядка n это связано с § 5 гл. V, а случай $Lx = lx$ задачи (3.1) рассмотрен как пример в конце § 5. При $l = \varrho^2$ уравнение $Lx = lx$ имеет для $\text{Im } \varrho \geq 0$ два решения φ_1 и φ_2 с асимптотическим поведением

$$\begin{aligned}\varphi_1(t, \varrho) &\sim e^{i\varrho t} \left[1 + \frac{1}{2i\varrho} \int_0^t q(s) ds + O\left(\frac{1}{|\varrho|^2}\right) \right], \\ \varphi_2(t, \varrho) &\sim e^{-i\varrho t} \left[1 - \frac{1}{2i\varrho} \int_0^t q(s) ds + O\left(\frac{1}{|\varrho|^2}\right) \right].\end{aligned}\quad (3.11)$$

Кроме того,

$$\varphi'_1(t, \varrho) \sim e^{i\varrho t} \left[i\varrho + \frac{1}{2} \int_0^t q(s) ds + O\left(\frac{1}{|\varrho|}\right) \right], \quad (3.12)$$

и аналогичное соотношение имеет место для $\varphi'_2(t, \varrho)$.

Выражая функции A , $K(t, \tau, l)$ гл. VII и $G(t, \tau, l)$ через φ_1 и φ_2 и используя (3.11) и (3.12), определяем поведение A и G для больших $|\varrho|$ (при $\operatorname{Im} \varrho \geq 0$). Так как $l = \varrho^2$, то это определяет поведение G для больших $|l|$, и таким образом может быть изучена сходимость последовательности

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{C_m} \left(\int_0^\pi G(t, \tau, l) f(\tau) d\tau \right) dl$$

при $m \rightarrow \infty$.

§ 4. СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ПОРЯДКА n

Метод, развитый в § 2 и 3, непосредственно обобщается на случай линейного дифференциального оператора порядка n . Рассмотрим оператор L , где

$$Lx = x^{(n)} + p_1(t) x^{(n-1)} + \dots + p_n(t) x$$

и p_j — непрерывные комплекснозначные функции на некотором замкнутом конечном интервале, который без ограничения общности можно считать интервалом $0 \leq t \leq \pi$. Пусть U — краевой оператор с компонентами

$$U_i x = \sum_{j=1}^n (a_{ij} x^{(j-1)}(0) + b_{ij} x^{(j-1)}(\pi)) \quad (i = 1, \dots, n),$$

где a_{ij} , b_{ij} — постоянные. Рассматривается краевая задача $Lx = lx$, $Ux = 0$. Несколько более общая задача

$$Lx = lr(t) x, \quad Ux = 0,$$

где функция $r \neq 0$ на интервале $0 \leq t \leq \pi$ и принадлежит классу C^n на этом интервале, может быть сведена к случаю, когда $r(t) = 1$ при $0 \leq t \leq \pi$ с помощью подстановки $ds = (r(t))^{1/n} dt$. Можно также предполагать, что $p_1(t) = 0$ при $0 \leq t \leq \pi$, если p_1 — функция класса C^{n-1} , ибо подстановка $x = qy$, где q — решение уравнения

$nq' + p_1q = 0$, приводит к этому случаю. Таким образом, мы будем предполагать, что краевая задача имеет вид

$$Lx = x^{(n)} + p_2(t)x^{(n-2)} + \dots + p_n(t)x = lx, \quad Ux = 0, \quad (4.1)$$

где p_2, \dots, p_n — непрерывные функции на интервале $0 \leq t \leq \pi$.

Рассмотрим соответствующую упрощенную задачу

$$Ax = x^{(n)} = lx, \quad Ux = 0. \quad (4.2)$$

Если n корней из 1 обозначены через a_1, \dots, a_n , то линейно независимыми решениями уравнения $Ax = lx$ для $l \neq 0$ будут функции $e^{a_1 \omega t}, e^{a_2 \omega t}, \dots, e^{a_n \omega t}$, где $\omega = \rho^n$. Используя эти решения, можно изучить, как и в § 2, явное выражение функции Грина G для задачи (4.2) и получить аналогичные результаты о разложениях.

Соотношение между функциями Грина G для задачи (4.1) и Γ получается следующим образом. Так как G и Γ как функции t принадлежат классу C^{n-2} и так как их $(n-1)$ -е производные имеют один и тот же разрыв при $t = \tau$, то разность $G - \Gamma$ как функция t принадлежит классу C^{n-1} . Из дифференциальных уравнений (4.1) и (4.2) следует, что n -я производная разности $G - \Gamma$ непрерывна при $t = \tau$, так что в действительности $G - \Gamma \in C^n$ по t на интервале $0 \leq t \leq \pi$. Очевидно, имеем равенство (исключая $t = \tau$)

$$A(G - \Gamma) - l(G - \Gamma) = -p_2 G^{(n-2)} - \dots - p_n G, \quad (4.3)$$

где $G^{(k)}$ обозначает k -ю производную функции G относительно t . Так как $U(G - \Gamma) = 0$, то из (4.3) следует, что

$$G(t, \tau, l) - \Gamma(t, \tau, l) = \int_0^\pi \Gamma(t, s, l) f(s, \tau, l) ds, \quad (4.4)$$

где

$$f(s, \tau, l) = -p_2(s) G^{(n-2)}(s, \tau, l) - \dots - p_n(s) G(s, \tau, l).$$

Из (4.4) следует, что

$$G^{(k)}(t, \tau, l) - \Gamma^{(k)}(t, \tau, l) = \int_0^\pi \Gamma^{(k)}(t, s, l) f(s, \tau, l) ds. \quad (4.5)$$

В тех случаях, когда функция Γ имеет достаточно хорошее поведение, уравнения (4.4) и (4.5) могут быть использованы при больших $|l|$ ($l = \rho^n$) для определения функции G . Как и в § 3, уравнения (4.4) и (4.5) могут быть рассмотрены при помощи метода последовательных приближений. Это дает также оценку для $|G - \Gamma|$, которая может быть использована, как в § 3, чтобы получить теорему равносходимости для представлений функции при помощи функций G и Γ .

В случае когда функция Γ имеет более сложное поведение, поведение функции G при больших $|l|$ может быть изучено непосредственно, используя результат гл. VI, как это было уже указано в конце § 3 для случая $n = 2$.

§ 5. ХАРАКТЕР РАЗЛОЖЕНИЯ

Прежде чем доказывать теорему разложения, рассмотрим характер разложения. Ортогональность собственных функций, которая имеет место, когда задача π самосопряжена, не сохраняется более в случае несамосопряженной задачи π . Она заменяется соотношением биортогональности, содержащим собственные функции задачи π и собственные функции сопряженной задачи π^+ , определенной в гл. XI.

Пусть $l = \lambda$ — собственное значение задачи π ; это означает, что задача

$$(L - \lambda)x = 0, \quad Ux = 0 \quad (5.1)$$

имеет k независимых решений, $k \geq 1$. В силу теоремы 3.4 гл. XI отсюда следует, что задача

$$(L^+ - \bar{\lambda})x = 0, \quad U^+x = 0 \quad (5.2)$$

также имеет k независимых решений. Пусть λ_p и λ_q — собственные значения задачи π и χ_p — собственная функция задачи π для $l = \lambda_p$. Пусть ψ_q — собственная функция задачи π^+ для $l = \bar{\lambda}_q$. То, что

$$(\chi_p, \psi_q) = \int_a^b \chi_p \bar{\psi}_q dt = 0, \quad (5.3)$$

следует непосредственно при $\lambda_p \neq \lambda_q$ из соотношения сопряженности

$$(L\chi_p, \psi_q) - (\chi_p, L^+\psi_q) = 0, \quad (5.4)$$

установленного выше в гл. XI после формулы (3.2).

В случае $\lambda_p = \lambda_q$ связь между функциями χ и ψ дается в одном важном случае следующей теоремой.

Теорема 5.1. *Если функция Грина $G = G(t, \tau, l)$ задачи π имеет простой полюс в точке $l = \lambda_p$, то вычет G в этом полюсе равен*

$$= \sum_{j=m_p}^{n_p} \chi_j(t) \bar{\psi}_j(\tau), \quad (5.5)$$

где χ_j и ψ_j — собственные функции задачи π при $l = \lambda_p$ и задачи π^+ при $l = \bar{\lambda}_p$ соответственно. Кроме того,

$$(\chi_i, \psi_j) = \delta_{ij} \quad (m_p \leq i, j \leq n_p)$$

и функции χ_j , $m_p \leq j \leq n_p$, образуют полное множество собственных функций для задачи π при $l = \lambda_p$, а функции ψ_j аналогично — для задачи π^+ при $l = \bar{\lambda}_p$.

Отсюда и из равенства (5.3) следует, что функции χ_i , соответствующие собственному значению λ_p , ортогональны ко всем собственным функциям задачи π^+ , за исключением одной. Исключением является функция ψ_i , соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}_p$, и $(\chi_i, \psi_i) = 1$. Отсюда следует

Теорема 5.2. *Если все полюсы функции G простые и если $\{\chi_i\}$ — собственные функции задачи π , то собственные функции задачи π^+ могут быть расположены в последовательность $\{\psi_j\}$ так, что*

$$(\chi_i, \psi_j) = \delta_{ij}.$$

При этом, если χ_i соответствует собственному значению λ_p , то ψ_i соответствует собственному значению $\bar{\lambda}_p$.

В этом случае в силу того, что (5.5) имеет место во всех полюсах, разложение (1.1) принимает вид

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(t) \int_a^b f(\tau) \bar{\psi}_j(\tau) d\tau; \quad (5.6)$$

в самосопряженном случае, разумеется, это разложение принимает вид известного разложения по ортогональным функциям с $\psi_j = \chi_j$. Разложение (1.1) не имеет простого вида (5.6), если функция G имеет полюсы порядка выше первого.

Доказательство теоремы 5.1. Пусть вычет функции G в простом полюсе $l = \lambda_p$ равен $G_0(t, \tau)$. Пусть χ_j — собственная функция задачи π при $l = \lambda_p$. Тогда

$$(L - l) \chi_j = (\lambda_p - l) \chi_j,$$

так что

$$\chi_j(t) = (\lambda_p - l) \int_a^b G(t, \tau, l) \chi_j(\tau) d\tau.$$

Полагая $l \rightarrow \lambda_p$, получаем $(l - \lambda_p)G(t, \tau, l) \rightarrow G_0(t, \tau)$. Таким образом,

$$\chi_j(t) = - \int_a^b G_0(t, \tau) \chi_j(\tau) d\tau. \quad (5.7)$$

Из формулы (2.6) гл. VII следует, что разность $G(t, \tau, l) - K(t, \tau, l)$ как функция t принадлежит классу $C^n[a, b]$. Кроме того, $K(t, \tau, l)$ — целая функция l . Значит, $G_0(t, \tau)$ есть также вычет функции $G - K$ при $l = \lambda_p$ и, следовательно,

$$G_0(t, \tau) = \frac{1}{2\pi i} \int (G(t, \tau, l) - K(t, \tau, l)) dl,$$

где интеграл берется по малой окружности с центром в точке λ_p . Таким образом, $G_0 = G_0(t, \tau)$ принадлежит классу C^n как функция t .

Из равенства $(L - l)G = 0$, $t \neq \tau$, где оператор L применяется к G как функции t , следует

$$(L - \lambda_p)G = (l - \lambda_p)G, \quad UG = 0.$$

Разлагая функцию G в ряд Лорана в окрестности точки $l = \lambda_p$; получаем для $t \neq \tau$

$$(L - \lambda_p)G_0 = 0, \quad UG_0 = 0. \quad (5.8)$$

Так как $G_0 \in C^n$ как функция t , то равенства (5.8) также справедливы при $t = \tau$, и поэтому

$$G_0(t, \tau) = \sum_{j=m_p}^{n_p} C_j(\tau) \chi_j(t), \quad (5.9)$$

где χ_j , $m_p \leq j \leq n_p$, — независимые собственные функции задачи π при $l = \lambda_p$ и C_j — функции τ .

Так как $G^+(t, \tau, l) = \bar{G}(\tau, t, \bar{l})$, то $\bar{G}_0(\tau, t)$ есть вычет функции G^+ в точке $l = \lambda_p$; эта функция по t также принадлежит классу C^n , так что аналогом системы (5.8) для задачи π^+ является

$$(L^+ - \bar{\lambda}_p)_t \bar{G}_0(\tau, t) = 0, \quad U_t \bar{G}_0(\tau, t) = 0. \quad (5.10)$$

Таким образом, так как функции χ_j независимы, каждая функция $\bar{C}_j(t)$ в (5.9) должна быть собственной функцией задачи π^+ при $l = \bar{\lambda}_p$. Обозначая эти собственные функции $\bar{C}_j(t)$ через $-\psi_j(t)$, получаем разложение (5.5).

Подставляя разложение (5.5) в формулу (5.7), получаем

$$\chi_j(t) = \sum_{i=m_p}^{n_p} \chi_i(t) \int_a^b \bar{\psi}_i(\tau) \chi_j(\tau) d\tau.$$

Так как функции χ_j независимы, то соотношение $(\chi_j, \psi_i) = \delta_{ji}$ получается непосредственно. Это соотношение показывает, что ни одна из функций ψ_i не равна тождественно нулю, и, таким образом, все собственные функции χ_j задачи π при $l = \lambda_p$ встречаются в разложении (5.5). Если бы функции ψ_i были не независимы, то соотношение $(\chi_i, \psi_j) = \delta_{ij}$ было бы невозможно. Это завершает доказательство теоремы 5.1.

Функция Грина может не иметь простых полюсов. В задаче

$$-x'' = lx, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) + x'(\pi) = 0$$

она имеет полюсы второго порядка при всех собственных значениях $\lambda_k = (2k + 1)^2$. В самом деле, здесь

$$G(t, \tau, l) = \frac{\sin l^{1/2} t \cos l^{1/2}(\pi - \tau)}{2 l^{1/2} \cos^2 \left(\frac{1}{2} l^{1/2} \pi \right)} - \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \frac{\sin l^{1/2}(t - \tau)}{l^{1/2}} & (t > \tau). \end{cases}$$

Задачи

1. Определить характер вычетов функции $G(t, \tau, l)$ в кратных полюсах G .
 2. Рассмотрим систему

$$Lx = x' - A(t)x = lR(t)x$$

на интервале $a \leq t \leq b$, где x — вектор, а A и R — непрерывные квадратные матрицы порядка n , причем характеристические корни R различны на интервале $a \leq t \leq b$. Пусть M и N — постоянные матрицы и $Ux = Mx(a) + Nx(b) = 0$ — краевое условие для решений системы $Lx = lR(t)x$. Существует непрерывная неособая матрица T на интервале $a \leq t \leq b$, такая, что $T^{-1}RT = D$ есть диагональная матрица. Полагая $x = Ty$, получаем

$$y' - (T^{-1}AT - T^{-1}T')y = lDy,$$

если только производная T' существует. Итак, предположим, что матрица R диагональная. Пусть $A = A_1 + A_2$, где A_1 — диагональная матрица, состоящая из диагональных элементов матрицы A , и пусть

$$P_0(t) = \exp \left[\int_a^t A_1(s) ds \right],$$

так что $P'_0 = A_1 P_0$. Предположим, что P_1 — единственная матрица с нулевыми диагональными элементами, удовлетворяющая равенству $P_1 R - RP_1 = A_2 P_0$. Пусть

$$\Psi(t, l) = (P_0(t) + P_1(t)l^{-1}) \exp [lA(t)],$$

где

$$A(t) = \int_a^t R(s) ds.$$

Показать, что Ψ есть фундаментальная матрица для системы

$$x' - A(t)x = lR(t)x + B(t, l)l^{-1}x,$$

где величина $|B(t, l)|$ ограничена для $a \leq t \leq b$ и больших $|l|$. Так как матрица Ψ известна, то можно выразить в явном виде матрицу Грина Γ задачи

$$Lx = lR(t)x + B(t, l)l^{-1}x, \quad Ux = 0. \quad (*)$$

Сделать это. (См. задачу 16 гл. VII.) Пусть G — матрица Грина для задачи $Lx = lR(t)x$, $Ux = 0$. Доказать, что

$$G(t, \tau, l) = \Gamma(t, \tau, l) - l^{-1} \int_a^b \Gamma(t, s, l) B(s, l) G(s, \tau, l) ds$$

и получить для задачи (*) результаты, аналогичные полученным в §§ 2 и 3.

3. В задаче 4 гл. IX решение φ_1 может быть использовано для построения функции Грина $G(t, \tau, s^2)$ на интервале $0 \leq t < \infty$ при $\operatorname{Im} s > 0$. В самом деле, если $Ae^{is} = F$, как в задаче 5 гл. IX, то

$$G(t, \tau, s^2) = \begin{cases} \frac{\psi(t, s) \varphi_1(\tau, s)}{F(s)} & (t < \tau), \\ \frac{\psi(\tau, s) \varphi_1(t, s)}{F(s)} & (t > \tau). \end{cases}$$

Теперь функция $\int G dl$ соответствует функции $2 \int G s ds$. Пусть для функции класса C^1 , равной нулю для малых t и для больших t ,

$$J(t) = \int_C s ds \int_0^\infty G(t, \tau, s^2) f(\tau) d\tau,$$

где C — путь в s -плоскости, состоящий из прямой линии от $-R + i\varepsilon$ до $R + i\varepsilon$ и полуокружности $i\varepsilon + Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$. Показать, что если существует такое

$\delta > 0$, что $\int_0^\infty e^{\delta t} |q(t)| dt < \infty$ (можно потребовать гораздо меньшего), то

функция F аналитична при $\operatorname{Im} s > -\delta$ и $F \rightarrow 1$ при $|s| \rightarrow \infty$. Таким образом, функция F имеет конечное число нулей для $\operatorname{Im} s \geq 0$. Рассмотрим функцию J при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. Та часть J , которая соответствует полуокружности, может быть оценена при $R \rightarrow \infty$. Заметим, что $\psi(t, s) \sim (\sin ts)/s$ при $|s| \rightarrow \infty$. Поступить аналогично при $\operatorname{Im} s < 0$. Комбинируя эти случаи, получить теорему разложения задачи 4 гл. IX. Ослабить условия, наложенные на f . Задача $x'(0) + ax(0) = 0$ для действительных a может быть решена так же, как выше.

Как показывает несложный анализ, этот метод интересен тем, что он годен для комплекснозначных функций $q(t)$ и комплексных a . Рассмотреть случай $x(0) = 0$ с комплексной функцией $q(t)$ и получить теорему разложения для этого случая. Заметим, что задача уже не самосопряжена и, таким образом, функция F может иметь нули на мнимой оси. Собственные функции в этом случае не обязательно ортогональны.

Глава XIII

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 1. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В этой главе мы ограничиваемся изучением локального поведения нелинейных систем, т. е. поведением решений, начинающихся вблизи известного решения системы.

Решение ψ системы

$$x' = F(t, x) \quad \left(' = \frac{d}{dt} \right),$$

определенное для $t \geq 0$, называется *устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что каждое решение φ системы, удовлетворяющее неравенству

$$|\varphi(0) - \psi(0)| < \delta,$$

удовлетворяет также неравенству

$$|\varphi(t) - \psi(t)| < \varepsilon \quad (t \geq 0).$$

Заметим, что это определение предполагает, что решения, начинающиеся вблизи $\psi(0)$, существуют для всех $t \geq 0$. Решение ψ называется *асимптотически устойчивым*, если в дополнение к устойчивости

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Следующий результат Перрона дает простейший пример асимптотической устойчивости.

Теорема 1.1. Пусть дана система

$$x' = Ax + f(t, x), \tag{1.1}$$

где A — действительная постоянная матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части. Пусть матрица f действительна, непрерывна для малых $|x|$ и $t \geq 0$ и

$$f(t, x) = o(|x|) \quad (|x| \rightarrow 0)$$

равномерно по t , $t \geq 0$. Тогда решение, равное тождественно нулю, асимптотически устойчиво.

Условия, что матрицы A и f действительны или что f непрерывна, могут быть заменены любыми другими условиями, обеспечиваю-

щими локальное существование решения системы (1.1) при малых $|x|$ и $t \geq 0$.

Условие, что характеристические корни матрицы A имеют отрицательные действительные части, обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения для линейной системы $y' = Ay$.

Доказательство теоремы 1.1. Решение φ системы (1.1), для которого $|\varphi(0)|$ мало, может быть продолжено для возрастающих t , если только величина $|\varphi(t)|$ остается малой. Если решение $\varphi(t)$ существует, то из (1.1) следует, что

$$\varphi(t) = e^{tA} \varphi(0) + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.2)$$

Так как действительные части характеристических корней матрицы A отрицательны, то существуют постоянные K и σ , такие, что

$$|e^{tA}| \leq Ke^{-\sigma t} \quad (t \geq 0). \quad (1.3)$$

Используя (1.3), получаем из (1.2)

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-\sigma t} + K \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} |f(s, \varphi(s))| ds.$$

Для любого $\varepsilon > 0$ существует δ , такое, что $|f(t, x)| \leq \varepsilon|x|/K$ для $|x| \leq \delta$. Таким образом, до тех пор пока $|\varphi(t)| \leq \delta$,

$$e^{\sigma t} |\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| + \varepsilon \int_0^t e^{\sigma s} |\varphi(s)| ds.$$

Из этого неравенства следует в силу результата задачи 1 гл. I, что

$$e^{\sigma t} |\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{\sigma t},$$

или

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-(\sigma-\varepsilon)t} \quad (t \geq 0). \quad (1.4)$$

Если ε выбрано так, что $\varepsilon < \sigma$, то неравенство (1.4) показывает, что $|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)|$, если только $|\varphi(t)| \leq \delta$. Таким образом, если $|\varphi(0)| < \delta/K$, то неравенство (1.4) выполняется для всех $t \geq 0$, что завершает доказательство теоремы 1.1.

Обозначим характеристические корни матрицы A через λ_k , $k = 1, 2, \dots, n$, и пусть

$$\max(\operatorname{Re} \lambda_k) = -\mu < 0. \quad (1.5)$$

Тогда каждое решение φ системы (1.1), которое стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, удовлетворяет условию

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} \leq -\mu. \quad (1.6)$$

Таким образом, по теореме 1.1, все решения, для которых $|\varphi(0)|$ достаточно мало, удовлетворяют неравенству (1.6).

Чтобы доказать неравенство (1.6), заметим, что σ в (1.3) можно положить равным $\mu - \varepsilon$ для любого данного $\varepsilon > 0$. При этом может возникнуть необходимость считать $K = K_\varepsilon$ большим, чем прежде. Так как $\varphi(t) \rightarrow 0$, то, выбирая t_0 достаточно большим, можно сделать $|\varphi(t_0)|$ сколь угодно малым. Таким образом, применяя теорему 1.1 для $t \geq t_0$, получаем, как в (1.4), что

$$e^{(\sigma-\varepsilon)(t-t_0)} |\varphi(t)| = O(1) \quad (t \rightarrow \infty).$$

Так как $\sigma = \mu - \varepsilon$, то

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} \leq -\mu + 2\varepsilon.$$

Поскольку ε сколь угодно мало, получаем неравенство (1.6).

При более общей формулировке теоремы 1.1 требование $|f| = o(|x|)$ ослабляется. Достаточно предполагать, что для некоторого $k > 0$

$$|f(t, x)| \leq k|x| \quad (t \geq 0) \quad (1.7)$$

при малых $|x|$ и что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют δ и T , для которых

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon|x| \quad (|x| \leq \delta, \quad t \geq T). \quad (1.8)$$

Чтобы показать достаточность условий (1.7) и (1.8), заметим, что применение неравенства (1.7) к системе (1.1) дает

$$\|\varphi\|' \leq (\|A\| + kn^{1/2}) \|\varphi\|,$$

где $\|\varphi\|$ — евклидова длина вектора φ . Здесь использовано, что $n^{-1/2}|x| \leq \|x\| \leq |x|$, где x имеет n компонент. Таким образом, если только евклидова длина $\|\varphi(t)\|$ мала,

$$\|\varphi(t)\| \leq \|\varphi(0)\| e^{(\|A\| + kn^{1/2})t},$$

или

$$|\varphi(t)| \leq n^{1/2} |\varphi(0)| e^{(\|A\| + kn^{1/2})t} \quad (t \geq 0), \quad (1.9)$$

когда $|\varphi(t)|$ мало. Точно так же

$$|\varphi(0)| \leq n^{1/2} |\varphi(t)| e^{(\|A\| + kn^{1/2})t} \quad (t \geq 0).$$

Выбрав ε , используем условие (1.8) при $t \geq T$ и применим теорему 1.1 к интервалу $t \geq T$, предполагая, что $|\varphi(T)|$ мало. Но, согласно неравенству (1.9), $|\varphi(T)|$ мало, если $|\varphi(0)|$ достаточно мало. Это доказывает, что условия (1.7) и (1.8) могут заменить в теореме (1.1) условие $|f| = o(|x|)$. В этом случае справедливо также неравенство (1.6).

Неравенство (1.9) и следующее за ним показывают, что устойчивость на интервалах $[0, \infty)$ и $[T, \infty)$ эквивалентна.

Интересный частный случай, в котором выполняются условия (1.7) и (1.8), — это случай, когда матрица $f(t, x)$ в (1.1) заменяется на матрицу $B(t)x + g(t, x)$, где $B(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и $|g(t, x)| = o(|x|)$.

для малых $|x|$ равномерно при $t \geq 0$. В этом случае система (1.1) может быть записана в виде

$$x' = Ax + B(t)x + g(t, x). \quad (1.10)$$

Чтобы теорема 1.1 была справедливой для $t \geq T$, достаточно, чтобы условие (1.8) было выполнено не для произвольно малых ε , а только для $\varepsilon < \sigma/K$, причем σ и K — те постоянные, которые фигурируют в неравенстве (1.3). При этом менее ограничительном условии неравенство (1.6) может не выполняться.

В случае, когда матрица A в (1.1) имеет один или более характеристических корней с положительной действительной частью, решение $\varphi = 0$ не может быть устойчивым. В этом смысле теорема 1.1 и следующие из нее результаты являются наилучшими.

Теорема 1.2. *Пусть хотя бы один характеристический корень матрицы A в (1.1) имеет положительную действительную часть. Пусть матрица $f(t, x)$ удовлетворяет условию (1.8). Тогда решение $\varphi = 0$ системы (1.1) неустойчиво.*

З а м е ч а н и е. При несколько более ограничительных условиях этот результат является следствием теоремы 4.1 этой главы.

Д о к а з а т е льс т в о т е о р е м ы 1.2. Чтобы доказать теорему, заметим, что преобразование $x = Py$, где P — постоянная матрица, приводит к уравнению

$$y' = By + g(t, y), \quad (1.11)$$

где $B = P^{-1}AP$. Мы покажем, что нулевое решение системы (1.11) неустойчиво, а отсюда, очевидно, следует, что решение $\varphi = 0$ неустойчиво для системы (1.1). Выбирая P частным образом, можно привести матрицу B к виду

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

где B_1 — каноническая матрица порядка k , все характеристические корни которой имеют положительные действительные части, в то время как B_2 — каноническая матрица, все характеристические корни которой имеют неположительные действительные части. Характеристические корни находятся на главной диагонали. Можно предполагать, что не равные нулю элементы вне главной диагонали равны $\gamma > 0$, причем γ может быть сделано меньше любого наперед заданного числа при надлежащем выборе матрицы P . Хотя вектор y , соответствующий действительному x , может быть комплексным, вектор Py должен быть действительным. Таким образом, матрица

$$g(t, y) = P^{-1}f(t, Py)$$

определенна.

Обозначим компоненты вектора φ через φ_j и пусть

$$R^2 = \sum_{i=1}^k |\varphi_i|^2 \text{ и } \varrho^2 = \sum_{i=k+1}^n |\varphi_i|^2.$$

Пусть действительные части характеристических корней матрицы B_1 превосходят некоторое $\sigma > 0$. Выберем $\varepsilon < \sigma/10$ и выберем η и T так, чтобы было

$$|g(t, y)| \leq \varepsilon \|y\| \quad (t \geq T) \quad (1.13)$$

для $\|y\| \leq \eta$.

Предположим, что нулевое решение системы (1.11) устойчиво. Таким образом, для выбранных выше η и T существует $\delta > 0$, такое, что если φ — решение системы (1.11) с $\varrho(T) + R(T) < \delta$, то $\varrho(t) + R(t) < \eta$ для $t \geq T$. Возьмем такое решение φ с $R(T) = 2\varrho(T) > 0$.

Выбирая σ как выше, получаем, используя (1.11), (1.12) и (1.13), что для $t \geq T$

$$\sum_{i=1}^k (\varphi'_i \bar{\varphi}_i + \varphi_i \bar{\varphi}'_i) = 2RR' \geq 2\sigma R^2 - 2\gamma R^2 - 2\varepsilon(\varrho + R)R.$$

Следовательно, так как γ может быть выбрано меньше $\sigma/20$ и так как ε выбрано меньше $\sigma/10$,

$$R' \geq \frac{1}{2}\sigma R - \varepsilon\varrho. \quad (1.14)$$

Точно так же

$$\varrho' \leq \varepsilon(\varrho + R) + \frac{\sigma}{20}\varrho. \quad (1.15)$$

Из (1.14) и (1.15) следует, что

$$(R - \varrho)' \geq \frac{1}{4}\sigma(R - \varrho).$$

Итак,

$$R(t) - \varrho(t) \geq (R(T) - \varrho(T)) e^{\sigma(t-T)/4}.$$

Так как $R(T) = 2\varrho(T)$, то $R(t) \geq \varrho(T)e^{\sigma(t-T)/4}$. Это невозможно, ибо в предположении устойчивости $\varrho(t) + R(t) < \eta$ для $t \geq T$, и, следовательно, теорема доказана.

Пусть матрица $f(t, x)$ состоит из линейного члена $B(t)x$ и члена, который для малых $|x|$ есть $O(|x|^{1+a})$, $a > 0$. Предположение такого типа о f ведет к возможности, что $f(t, x)$ как функция t при фиксированном x может неограниченно расти при $t \rightarrow \infty$, не нарушая асимптотическую устойчивость. Этот случай рассмотрен в следующей теореме.

Теорема 1.3. Пусть в теореме 1.1 условие $|f(t, x)| = o(|x|)$ заменено условиями, состоящими в следующем: для малых $|x|$ и всех $t \geq 0$

$$|f(t, x)| \leq k|x| + |x|^{1+a}t^b, \quad (1.16)$$

где $a > 0$, b и k — постоянные, и, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют $\delta > 0$ и $T \geq 0$, такие, что для $|x| \leq \delta$ и $t \geq T$

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon|x| + |x|^{1+a}t^b. \quad (1.17)$$

Тогда решение $\varphi = 0$ системы (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Для постоянных K и σ , определенных как в (1.3), выберем $\eta < \sigma$. Выберем ε в (1.17) так, что $\varepsilon K < (1/2)\eta$. Выбор ε определяет δ и T . Из (1.16) для $|x| < 1$ и $0 \leq t \leq T$ следует, что

$$|f(t, x)| \leq (k + T^b) |x|. \quad (1.18)$$

Используя (1.18) почти так, как (1.7) было использовано при выводе (1.9), получаем, что $|\varphi(T)|$ может быть сделано сколь угодно малым, если взять $|\varphi(0)|$ достаточно малым. Пусть $|\varphi(0)|$ настолько мало, что

$$|\varphi(T)| < \frac{\delta}{2K} \quad (1.19)$$

и для $t \geq T$

$$K^{1+a} |\varphi(T)|^a e^{-a(\sigma-\eta)(t-T)} t^b < \frac{1}{4} \eta. \quad (1.20)$$

Это требование заведомо может быть выполнено, так как $\sigma > \eta$. Из неравенства (1.3), примененного для $t \geq T$, и (1.17) получаем

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| \leq K |\varphi(T)| e^{-\sigma(t-T)} + \varepsilon K \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} |\varphi(s)| ds + \\ + K \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} |\varphi(s)|^{1+a} s^b ds, \end{aligned} \quad (1.21)$$

если только $|\varphi(t)| \leq \delta$. Из (1.3) для $t = 0$ находим, что $K \geq 1$. Если только

$$|\varphi(t)|^a t^b \leq \frac{\eta}{2K}, \quad (1.22)$$

то из (1.16), используя неравенство $\varepsilon K < (1/2)\eta$, получаем

$$|\varphi(t)| e^{\sigma t} \leq K |\varphi(T)| e^{\sigma T} + \eta \int_T^t e^{\sigma s} |\varphi(s)| ds,$$

причем это и следующие неравенства справедливы, если только $|\varphi(t)| \leq \delta$ и имеет место неравенство (1.22). Применяя результат задачи 1 гл. I, получаем из этого неравенства

$$e^{\sigma t} |\varphi(t)| \leq K |\varphi(T)| e^{\sigma T} e^{\eta(t-T)},$$

или

$$|\varphi(t)| \leq K |\varphi(T)| e^{-(\sigma-\eta)(t-T)}. \quad (1.23)$$

Так как (1.19) выполняется, то из неравенства (1.23) следует, что $|\varphi(t)| < \delta$ для $t \geq T$. Из (1.20) и (1.23) следует, что неравенство (1.22) также выполняется для всех $t \geq T$ и, таким образом, неравенство (1.23) имеет место для всех $t \geq T$, что доказывает теорему.

Легко показать, что неравенство (1.6) справедливо при условиях теоремы 1.3 для всех решений системы (1.1), которые стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Из доказательства очевидно, что для справедливости теоремы 1.3 не необходимо, чтобы ε в условии (1.17) было сколь угодно малым. Достаточно, если $\varepsilon < \sigma/K$.

Важным случаем применимости теоремы 1.3 является система

$$\frac{dx}{ds} = \left(s^r \sum_{m=0}^{\infty} s^{-m} A_m \right) x + g(s, x), \quad (1.24)$$

где A_m — постоянные матрицы, r — постоянная ($r > -1$) и $g(s, x)$ — степенной ряд по x_i для малых $|x|$, начинающийся с членов по крайней мере второй степени, с коэффициентами порядка $O(s^b)$ для больших s при постоянном b . В результате замены $t = s^{r+1}/(r+1)$ система (1.24) принимает предполагаемый в теореме 1.3 вид с $A_0 = A$. Система (1.24) представляет собой некоторое обобщение на нелинейные системы случая иррегулярной особой точки на бесконечности. Изучение системы (1.24) для комплексных s в случае аналитической матрицы g требует небольшой модификации рассуждений.

Результаты, полученные для системы (1.1), могут быть легко распространены на случай

$$x' = Ax + f(t, x, x'). \quad (1.25)$$

В теореме 1.1 необходимо лишь потребовать, чтобы матрица $f(t, x, w)$ удовлетворяла условию

$$f(t, x, w) = o(|x| + |w|) \quad (1.26)$$

равномерно по $t \geq 0$ для малых $|x| + |w|$. Заключение состоит в том, что если $|\varphi(0)|$ и $|\varphi'(0)|$ достаточно малы, то $\varphi(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Различные обобщения, справедливые в случае (1.1), применимы также к системе (1.25).

Чтобы доказать это утверждение, определим α и $\beta < 1$ так, чтобы при K и σ таких, как в (1.3), выполнялось неравенство

$$0 < \gamma = \frac{\alpha + \beta|A|}{1 - \beta} K < \sigma. \quad (1.27)$$

Из условия (1.26) следует, что существует $\delta > 0$, такое, что для $|x| + |w| \leq \delta$

$$|f(t, x, w)| \leq \alpha|x| + \beta|w|.$$

Пусть величины $|\varphi(0)|$ и $|\varphi'(0)|$ малы. Тогда, если только $|\varphi(t)|$ и $|\varphi'(t)|$ малы, из (1.25) следует, что

$$|\varphi'| \leq |A||\varphi| + |f| \leq (|A| + \alpha)|\varphi| + \beta|\varphi'|,$$

или

$$|\varphi'| \leq \frac{|A| + \alpha}{1 - \beta} |\varphi|. \quad (1.28)$$

Таким образом, величина $|\varphi'(t)|$ остается малой, если только мала величина $|\varphi(t)|$. Из (1.3) следует, что

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-\sigma t} + K \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} (\alpha |\varphi(s)| + \beta |\varphi'(s)|) ds.$$

Используя (1.28) и (1.27), получаем

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-\sigma t} + \gamma \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} |\varphi(s)| ds.$$

Но отсюда вытекает, что

$$|\varphi(t)| \leq K|\varphi(0)| e^{-(\sigma-\gamma)t} \quad (t \geq 0).$$

Итак, если $|\varphi(0)|$ и $|\varphi'(0)|$ достаточно малы, то $|\varphi(t)|$ и $|\varphi'(t)|$ остаются малыми, и теорема доказана.

Теорема 1.4. Теоремы 1.1, 1.2 и 1.3 применимы также в том случае, когда постоянная матрица A заменена на действительную периодическую матрицу $P(t)$ и все n характеристических показателей системы

$$y' = P(t) y \quad (1.29)$$

имеют отрицательные действительные части.

Доказательство. Фундаментальная матрица Φ решений системы (1.29) имеет вид (теорема 5.1 гл. III)

$$\Phi(t) = Z(t) e^{tB},$$

где Z — периодическая неособая матрица и B — постоянная матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части. Подставим выражение $x = Z(t)w$ в систему

$$x' = P(t)x + f(t, x). \quad (1.30)$$

Тогда получим

$$w' = Bw + Z^{-1}(t)f(t, Z(t)w), \quad (1.31)$$

так что все теоремы применимы к системе (1.31) и, следовательно, также к решениям системы (1.30). В самом деле, действительное решение φ системы (1.30) порождает решение $\psi = Z^{-1}\varphi$ системы (1.31), для которого можно показать, как в теоремах 1.1 или 1.3, что оно стремится к нулю. Отсюда следует, что φ также стремится к нулю.

Условия, что матрицы f и P в (1.30) действительны, были использованы лишь для того, чтобы получить локальное существование решения, и могут быть заменены любым другим условием, обеспечивающим локальное существование решений, например аналитичностью f по x .