

## § 2. ПЕРВАЯ ВАРИАЦИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ ТРАЕКТОРИЙ (ОРБИТАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ)

Пусть  $p$  — действительное решение системы

$$x' = F(t, x) \quad \left( \dot{x} = \frac{d}{dt} \right) \quad (2.1)$$

для  $0 \leq t < \infty$ , где  $F$  — действительная непрерывная функция, имеющая непрерывные частные производные первого порядка по переменным  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , в области  $(t, x)$ -пространства, содержащей интегральную кривую  $(t, p(t))$ ,  $0 \leq t < \infty$ . [Требование действительности  $p$  и  $F$  может быть заменено любым другим условием, обеспечивающим локальное существование решений системы (2.1). Так, достаточно, чтобы  $F$  была аналитична по  $x$  для каждого  $t$ .] Пусть  $z = \varphi - p$ , где  $\varphi$  удовлетворяет системе (2.1), и обозначим матрицу со столбцами  $(\partial F / \partial x_i)(t, p(t))$  через  $F_x(t, p(t))$ . Тогда

$$z' = F(t, z + p(t)) - F(t, p(t)) = F_x(t, p(t))z + f(t, z), \quad (2.2)$$

где, по теореме о среднем,

$$f(t, z) = o(|z|) \quad (2.3)$$

для малых  $|z|$  равномерно по  $t$  в каждом конечном  $t$ -интервале. Если отбросить в (2.2) матрицу  $f$ , то получаем линейную систему

$$y' = F_x(t, p(t))y, \quad (2.4)$$

которая называется *первой вариацией* системы (2.1) относительно решения  $p(t)$ . Первая вариация определяет в некоторых случаях природу устойчивости решения  $p$  системы (2.1).

Важный случай возникает, когда функция  $F$  периодична по  $t$ . Пусть решение  $p$  периодично с наименьшим периодом  $\omega$  и пусть  $F$  периодична по  $t$  с периодом  $\omega$ . [Заметим, что  $\omega$  может не быть наименьшим периодом  $F$ . Если наименьший период  $F$  по  $t$  есть  $\omega/m$ , где  $m$  — целое и  $m > 1$ , то  $p$  называется *субгармоническим* решением системы (2.1).] Таким образом, уравнение (2.4) имеет периодическую матрицу коэффициентов с периодом  $\omega$ . Оценка (2.3) выполняется равномерно по  $t$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Уравнение (2.2) имеет вид, рассмотренный в теореме 1.4. Действительно, следующий результат непосредственно вытекает из теоремы 1.4.

**Теорема 2.1.** *Если все характеристические показатели, соответствующие уравнению первой вариации (2.4), имеют отрицательные действительные части, то периодическое решение  $p$  системы (2.1) асимптотически устойчиво.*

Значительно более тонкий случай возникает, когда правая часть системы (2.1) не зависит от  $t$ . В этом случае

$$x' = F(x). \quad (2.5)$$

Система (2.5) встречается в классической механике, например как уравнения Гамильтона.

Предположим, что  $p$  — периодическое решение системы (2.5) периода  $T$  и что функция  $F$  действительна и принадлежит классу  $C^1$  в некоторой области  $x$ -пространства, содержащей замкнутую кривую  $x = p(t)$ ,  $0 \leq t \leq T$ . Случай аналитической функции  $F$  (и, таким образом, не обязательно действительной) имеет особый интерес и будет упомянут позже. Так как  $p$  — решение системы (2.5), то  $p'(t) = F(p(t))$ . Дифференцируя это равенство, получаем, что  $p'(t)$  есть решение уравнения первой вариации

$$y' = F_x(p(t))y. \quad (2.6)$$

Очевидно, решение  $p'$  имеет период  $T$  и поэтому соответствующий этой функции, как решению линейной системы (2.6), характеристический показатель можно взять равным нулю. В этом случае уравнение (2.6) не может иметь более чем  $n - 1$  характеристических показателей с отрицательной действительной частью, и, таким образом, условия теоремы 2.1 не могут выполняться. В самом деле, заключения теоремы 2.1 не имеют места в этом случае. Чтобы убедиться в этом, заметим, что  $p_\delta(t) = p(t + \delta)$  для любого постоянного  $\delta$  есть решение системы (2.5). Выбирая  $\delta$  достаточно малым, можно сделать решения  $p$  и  $p_\delta$  сколь угодно близкими при  $t = 0$ . Несмотря на это, очевидно, что величина  $|p(t + \delta) - p(t)|$  не стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , так что асимптотической устойчивости не может быть.

В этом случае имеет место, однако, асимптотическая устойчивость другого типа, имеющая большое значение. Решение  $x = p(t)$  можно рассматривать как замкнутую кривую, или траекторию в  $x$ -пространстве с параметром  $t$ . Если  $n - 1$  характеристических показателей системы (2.6) имеют отрицательные действительные части, то замкнутая траектория асимптотически устойчива в том смысле, что *каждое решение системы (2.5), которое проходит вблизи траектории, стремится при  $t \rightarrow \infty$  к траектории*. Это называется *асимптотической устойчивостью траектории (асимптотической орбитальной устойчивостью)*. В самом деле, имеет место следующая

**Теорема 2.2.** Пусть  $n - 1$  характеристических показателей системы (2.6) имеют отрицательные действительные части. Тогда существует  $\varepsilon > 0$ , такое, что если решение  $\varphi$  системы (2.5) удовлетворяет неравенству  $|\varphi(t_1) - p(t_0)| < \varepsilon$  для некоторых  $t_0$  и  $t_1$ , то существует постоянная  $c$ , такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t) - p(t + c)| = 0. \quad (2.7)$$

Итак, не только имеет место устойчивость траектории, но каждое решение вблизи траектории обладает асимптотической фазой  $c$ .

В доказательстве, приводимом ниже, будет показано, что существует поверхность  $S$  в  $x$ -пространстве, имеющая размерность  $n - 1$  и такая, что все решения системы (2.5), которые начинаются при

$t = 0$  на  $S$ , стремятся при  $t \rightarrow \infty$  к кривой  $x = p(t)$ . Отсюда легко получается наш результат.

**Доказательство теоремы 2.2.** Предположим, что сделано такое преобразование координат (перенос и поворот), что  $p(0) = 0$  и  $p'(0)$  — вектор со всеми компонентами, равными нулю, кроме первой. Таким образом, вектор  $p'(0)$  кратен единичному вектору  $e_1$  с компонентами  $(1, 0, 0, \dots, 0)$ .

Далее, уравнение (2.2) имеет вид

$$z' = F_x(p(t)) z + f(t, z). \quad (2.8)$$

Так как

$$f_z(t, z) = F_x(z + p(t)) - F_x(p(t)),$$

то из непрерывности производной  $F_x$  следует, что

$$f_z = o(1) \quad (|z| \rightarrow 0) \quad (2.9)$$

равномерно по  $t$ .

Каждое фундаментальное решение  $\tilde{\Psi}$  системы (2.6) удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\Psi}(t + T) = \tilde{\Psi}(t) C,$$

где  $C$  — действительная неособая матрица. Так как  $p'$  — решение системы (2.6) с периодом  $T$ , то один характеристический корень матрицы  $C$  равен 1. Все другие характеристические корни по абсолютной величине меньше единицы, так как, по предположению,  $n - 1$  характеристических показателей системы (2.6) имеют отрицательные действительные части. Таким образом, существует действительная постоянная неособая матрица  $M$ , такая, что

$$M^{-1}CM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

где  $C_1$  — квадратная матрица порядка  $n - 1$ , все характеристические корни которой по абсолютной величине меньше 1. Матрица  $\Psi = \tilde{\Psi}M$  также является фундаментальной матрицей системы (2.6) и удовлетворяет соотношению

$$\Psi(t + T) = \Psi(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Обозначим через  $\psi_1$  первый столбец матрицы  $\Psi$ . Тогда из соотношения (2.10) следует, что  $\psi_1(T) = \psi_1(0)$ , так что  $\psi_1$  имеет период  $T$ . Так как  $n - 1$  характеристических показателей имеют отрицательные действительные части, то не может существовать двух независимых решений системы (2.6) с периодом  $T$ . Поэтому  $\psi_1 = kp'$  для некоторой постоянной  $k$ . Таким образом, без ограничения общности можно принять, что первый столбец матрицы  $\Psi(0)$  равен  $e_1$ , где  $e_1$  — вектор с первой компонентой, равной 1, и всеми другими компонентами, равными нулю.

Матрица-решение  $\Psi$  может быть представлена в виде

$$\Psi(t) = Z(t) e^{tB}, \quad (2.11)$$

где матрица  $Z$  имеет период  $T$ ,  $e^{TB} = M^{-1}CM$ , так что

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

причем  $B_1 = \ln C_1/T$  и все характеристические корни матрицы  $B_1$  имеют отрицательные действительные части. Следовательно,

$$\Psi(t) = Z(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{tB_1} \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$U_1(t, s) = Z(t) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{(t-s)B_1} \end{pmatrix} Z^{-1}(s)$$

и

$$U_2(t, s) = Z(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z^{-1}(s).$$

Очевидно, матрица

$$U_1(t, s) + U_2(t, s) = \Psi(t) \Psi^{-1}(s) \quad (2.12)$$

действительна и как функция  $t$  при фиксированном  $s$  есть решение системы (2.6). Так как первый столбец матрицы

$$Z(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

совпадает с первым столбцом матрицы  $\Psi(t)$ , то эта матрица действительна и является решением системы (2.6). Первая строка матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Z^{-1}(s) \quad (2.14)$$

совпадает с первой строкой матрицы  $\Psi^{-1}(s)$  и, следовательно, действительна. Так как матрица  $U_2(t, s)$  — произведение матриц (2.13) и (2.14), то  $U_2(t, s)$  есть действительная матрица, являющаяся при фиксированном  $s$  решением системы (2.6). Поскольку в силу (2.12)  $U_1 + U_2$  — действительное решение, матрица  $U_1$  есть также действительное решение системы (2.6) при фиксированном  $s$ .

Пусть действительные части характеристических корней матрицы  $B_1$  все меньше —  $\sigma$ , где  $\sigma > 0$ . Тогда существует постоянная  $K$ , такая, что

$$|U_1(t, s)| \leq K e^{-\sigma(t-s)} \quad (t \geq s), \quad (2.15)$$

$$|U_2(t, s)| \leq K. \quad (2.16)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\theta(t) = \Psi(t) a + \int_0^t U_1(t, s) f(s, \theta(s)) ds - \int_t^\infty U_2(t, s) f(s, \theta(s)) ds, \quad (2.17)$$

где  $a$  — постоянный вектор с первой компонентой, равной нулю. Из представления (2.11) следует, что для  $t \geq 0$  существует постоянная  $K_1$ , такая, что

$$|\Psi(t) a| \leq K_1 |a| e^{-\sigma t}. \quad (2.18)$$

Легко проверить, используя формулу (2.12) и тот факт, что матрицы  $U_j$  являются решениями системы (2.6), что если интегралы, стоящие справа в уравнении (2.17), и их производные сходятся, то  $\theta$  есть решение уравнения (2.8). В силу (2.9) существует  $\delta$ , такое, что

$$|f(\tilde{z}) - f(z)| \leq \frac{\sigma}{8K} |\tilde{z} - z| \quad (|\tilde{z}|, |z| < \delta). \quad (2.19)$$

Покажем при помощи последовательных приближений, что если  $|a| < \delta/(2K_1)$ , то уравнение (2.17) имеет для  $t \geq 0$  решение  $\theta = \theta(t, a)$  и

$$|\theta(t, a)| \leq 2K_1|a| e^{-\frac{1}{2}\sigma t}. \quad (2.20)$$

Пусть  $\theta_{(0)}(t, a) = 0$  и пусть функция  $\theta_{(k+1)}(t, a)$  получается при помощи замены в правой части уравнения (2.17) функции  $\theta(t)$  на  $\theta_{(k)}(t, a)$ . Очевидно в силу (2.18), что

$$|\theta_{(1)}(t, a) - \theta_{(0)}(t, a)| \leq K_1|a| e^{-\frac{1}{2}\sigma t}$$

для  $t \geq 0$ . Легко доказать, что если при  $t \geq 0$

$$|\theta_{(j)}(t, a) - \theta_{(j-1)}(t, a)| \leq \frac{K_1|a| e^{-\frac{1}{2}\sigma t}}{2^{j-1}} \quad (2.21)$$

для  $j \leq k$ , то  $|\theta_{(j)}(t, a)| < 2K_1|a| < \delta$  для  $j \leq k$ . Используя (2.15), (2.16) и (2.19), получаем

$$\begin{aligned} |\theta_{(k+1)}(t, a) - \theta_{(k)}(t, a)| &\leq K \int_0^t e^{-\sigma(t-s)} \frac{\sigma}{8K} |\theta_{(k)}(s, a) - \theta_{(k-1)}(s, a)| ds + \\ &+ K \int_t^\infty \frac{\sigma}{8K} |\theta_{(k)}(s, a) - \theta_{(k-1)}(s, a)| ds. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (2.21) с  $j = k$ , имеем

$$\begin{aligned} |\theta_{(k+1)}(t, a) - \theta_{(k)}(t, a)| &\leq \frac{K_1|a|}{2^{k-1}} \frac{\sigma}{8} \left[ e^{-\sigma t} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\sigma s} ds + \right. \\ &\left. + \int_t^\infty e^{-\frac{1}{2}\sigma s} ds \right] \leq \frac{K_1|a|}{2^k} e^{-\frac{1}{2}\sigma t}, \end{aligned}$$

что доказывает неравенство (2.21) по индукции. Из (2.21) вытекает, что последовательность  $\{\theta_{(j)}\}$  сходится равномерно для  $0 \leq t < \infty$  и  $|a| < \delta/2K_1$  к пределу  $\theta = \theta(t, a)$ , который удовлетворяет неравенству (2.20). В силу равномерной сходимости  $\theta$  — непрерывная функция по совокупности переменных  $(t, a)$  для  $0 \leq t < \infty$  и малых  $|a|$ . Это, а также применение оценки (2.20) в уравнении (2.17) показывает, что  $\theta$  есть решение уравнения (2.8), стремящееся к нулю равномерно по  $a$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Согласно представлению (2.11)  $Z(0) = \Psi(0)$ , так что первый столбец матрицы  $Z(0)$  есть  $e_1$ . Полагая в (2.17)  $t = 0$  и используя определение матрицы  $U_2$ , получаем

$$\theta(0, a) = \Psi(0) a - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^\infty Z^{-1}(s) f(s, \theta(s, a)) ds. \quad (2.22)$$

Интеграл в равенстве (2.22) ничего не вносит в последние  $n - 1$  компонент векторного уравнения. Беря последние  $n - 1$  компонент уравнения (2.22) и замечая, что алгебраическое дополнение первого элемента первого столбца матрицы  $\Psi(0)$  должно быть отлично от нуля, получаем, что компоненты  $\theta_j(0, a)$ ,  $j = 2, \dots, n$ , являются линейными комбинациями величин  $a_j$ ,  $j = 2, \dots, n$ , и наоборот. Если начальные значения  $\theta(0, a)$  представить как точки  $z$ -пространства, то в уравнение (2.22) следует вместо вектора  $\theta(0, a)$  подставить  $z$ . Беря первую компоненту уравнения (2.22), получаем, что начальные значения  $z_i = \theta_i(0, a)$  удовлетворяют уравнению

$$z_1 + \sum_{j=2}^n b_j z_j + \tilde{H}(a_2, \dots, a_n) = 0, \quad (2.23)$$

где  $b_j$  — постоянные и  $\tilde{H}$  — первая компонента интеграла, стоящего справа в (2.22). В силу (2.9) и (2.20)

$$\tilde{H}(a_2, \dots, a_n) = o(|a|) \quad (|a| \rightarrow 0). \quad (2.24)$$

Так как выражения  $a_j$ ,  $j \geq 2$ , относительно  $z_j$  линейны и однородны, то

$$\tilde{H}(a_2, \dots, a_n) = H(z_2, \dots, z_n).$$

Таким образом, уравнение (2.23) принимает вид

$$z_1 + \sum_{j=2}^n b_j z_j + H(z_2, \dots, z_n) = 0, \quad (2.25)$$

где  $H = o(|z_2| + \dots + |z_n|)$ . Уравнение (2.25) есть уравнение поверхности  $S$  в  $z$ -пространстве, из которой выходят решения при  $t = 0$ , стремящиеся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Эта поверхность определена лишь вблизи точки  $z = 0$ . Очевидно, что касательная плоскость к  $S$  в начале координат дается уравнением (2.25) с заменой  $H$  на 0. Так как  $x = z + p(t)$ , то в силу равенства  $p(0) = 0$  начальное многообразие в  $x$ -пространстве, которое мы также обозначим через  $S$ , имеет то же уравнение, что и в  $z$ -пространстве, т. е.

$$x_1 + \sum_{j=2}^n b_j x_j + H(x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Так как вектор  $p'(0)$  параллелен оси  $x_1$ , то кривая  $x = p(t)$  пересекает поверхность  $S$  при  $x = 0$  и не касательна к  $S$ .

Если решение  $\varphi$  системы (2.5) удовлетворяет неравенству  $|\varphi(t_1) - p(t_0)| < \varepsilon$  для некоторых  $t_1$  и  $t_0$ , то, поскольку  $\psi(t) =$

$\varphi(t - t_0 + t_1)$  — также решение,  $|\varphi(t_0) - p(t_0)| < \varepsilon$ . Так как решение  $p$  имеет период  $T$  и так как обе функции  $\varphi$  и  $p$  являются решениями системы (2.5), то величина  $|\varphi(t) - p(t)|$  остается малой для  $|t - t_0| < 2T$ , если  $\varepsilon$  мало. Таким образом, решение  $\varphi$  пересекает поверхность  $S$  для некоторого  $\tilde{t}$ , где  $|\tilde{t} - t_0| < 2T$ . Но решение  $\tilde{\varphi}$  системы (2.5), где  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + \tilde{t})$ , для которого  $\tilde{\varphi}(0)$  лежит на  $S$ , удовлетворяет условию  $\tilde{\varphi}(t) - p(t) \rightarrow 0$ . Значит,  $\varphi(t - t_0 + t_1 + \tilde{t}) - p(t) \rightarrow 0$ , так что получаем теорему 2.2, причем  $c = t_0 - t_1 - \tilde{t}$ .

Если функция  $F$  по  $x$  аналитична, то из равномерной сходимости последовательности  $\{\theta_{(j)}\}$  легко следует, что поверхность  $S$  аналитична вследствие аналитичности вектора  $\theta(0, a)$  по  $(a_2, \dots, a_n)$ ; отсюда следует аналитичность функции  $H$  по  $(x_2, \dots, x_n)$ .

### § 3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ОДНОЙ СИСТЕМЫ

**Теорема 3.1.** Пусть в системе

$$x' = Ax + f(t, x) + g(t, x) \quad (3.1)$$

матрицы  $f$  и  $g$  непрерывны для малых  $|x|$  и  $t \geq 0$ . Пусть для малых  $|x|$

$$g(t, x) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty \quad (3.2)$$

равномерно по  $x$ . Пусть характеристические корни матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части и для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta$  и  $t_\varepsilon$ , такие, что  $|f| \leq \varepsilon|x|$  для  $|x| \leq \delta$  и  $t \geq t_\varepsilon$ . Тогда существует такое  $T$ , что если  $|\varphi(T)|$  достаточно мало, то каждое решение  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

З а м е ч а н и е. Несмотря на то, что  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , функция  $\varphi = 0$  не является решением системы (3.1), исключая случай  $g(t, 0) \equiv 0$ . В частности, функция  $g$  может не зависеть от  $x$ .

Д о к а з а т е ль с т в о т е о р е м ы 3.1. Чтобы доказать сформулированный результат, понадобятся постоянные  $K$  и  $\sigma$  из неравенства (1.3). Выберем  $\delta$  и  $T$  так, что для  $|x| \leq \delta$

$$|f(t, x)| \leq \varepsilon|x| < \frac{\sigma|x|}{2K} \quad (t \geq T);$$

увеличим  $T$  в случае необходимости так, чтобы для  $t \geq T$  существовало  $a > 0$ , такое, что

$$|g(t, x)| \leq a < \frac{\sigma - K\varepsilon}{K} \delta. \quad (3.3)$$

Почти как в теореме 1.1, если  $\varphi$  — решение системы (3.1), то

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| \leq & K|\varphi(T)|e^{-\sigma(t-T)} + K\varepsilon \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} |\varphi(s)| ds + \\ & + K \int_T^t e^{-\sigma(t-s)} |g(s, \varphi(s))| ds, \end{aligned} \quad (3.4)$$

если только  $|\varphi(t)| \leq \delta$ . Обозначим  $\max|\varphi(s)|$  для  $T \leq s \leq t$  через  $M(t)$ . Тогда

$$M(t) \leq K|\varphi(T)| + \frac{K\varepsilon M(t)}{\sigma} + \frac{Ka}{\sigma},$$

или

$$M(t) \leq \frac{K\sigma}{\sigma - K\varepsilon} |\varphi(T)| + \frac{Ka}{\sigma - K\varepsilon}. \quad (3.5)$$

Так как  $Ka/(\sigma - K\varepsilon) < \delta$ , то, очевидно, при  $|\varphi(T)|$  достаточно малом  $M(t) < \delta$  для всех  $t \geq T$ .

Пусть

$$\gamma = \limsup_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)|.$$

Ясно, что  $0 \leq \gamma \leq \delta < \infty$  и существует последовательность  $\{t_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , такая, что  $t_j \rightarrow \infty$  и  $|\varphi(t_j)| \rightarrow \gamma$  при  $j \rightarrow \infty$ . Из (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} |\varphi(t_j)| &\leq K|\varphi(T)| e^{-\sigma(t_j-T)} + K\varepsilon \int_T^{t_j/2} e^{-\sigma(t_j-s)} |\varphi(s)| ds + \\ &+ K\varepsilon \int_{t_j/2}^{t_j} e^{-\sigma(t_j-s)} |\varphi(s)| ds + K \int_T^{t_j/2} e^{-\sigma(t_j-s)} |g(s, \varphi(s))| ds + \\ &+ K \int_{t_j/2}^{t_j} e^{-\sigma(t_j-s)} |g(s, \varphi(s))| ds. \end{aligned}$$

Каково бы ни было  $\eta > 0$ , существует целое число  $J_\eta$ , такое, что  $|\varphi(t_j)| > \gamma - \eta$  для всех  $j \geq J_\eta$  и  $|\varphi(t)| < \gamma + \eta$  для  $t \geq t_j/2$ . Таким образом, для  $j \geq J_\eta$

$$\begin{aligned} \gamma - \eta &\leq K|\varphi(T)| e^{-\sigma(t_j-T)} + \frac{K\varepsilon\delta}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sigma t_j} + \\ &+ \frac{K\varepsilon(\gamma + \eta)}{\sigma} + \frac{Ka}{\sigma} e^{-\frac{1}{2}\sigma t_j} + \frac{K}{\sigma} \max_{\frac{1}{2}t_j \leq s \leq t_j} |g(s, \varphi(s))|. \end{aligned}$$

Полагая  $j \rightarrow \infty$ , получаем

$$\gamma - \eta \leq (K\varepsilon/\sigma)(\gamma + \eta);$$

так как  $K\varepsilon/\sigma < 1/2$ , то  $\gamma < 3\eta$ , откуда следует, что  $\gamma = 0$ .

**З а м е ч а н и е.** Если функция  $g$  не обязательно удовлетворяет условию (3.2), но удовлетворяет неравенству (3.3), то из неравенства (3.5) следует, что  $\varphi$  существует и ограничена в интервале  $(T, \infty)$ , если величина  $|\varphi(T)|$  достаточно мала.

Теорема 3.1 может быть применена к случаю уравнения первого порядка, имеющего классический интерес. Пусть  $y$  и  $s$  — скаляры и пусть

$$\frac{dy}{ds} = s^{-m}[ay + bs + h(s, y)] \quad (3.6)$$

для малых  $s \geq 0$  и малых  $y$ . Пусть  $a > 0$  и  $b$  — постоянные и пусть  $h(s, y)$  — степенной ряд по  $s$  и  $y$ , содержащий члены второй и более высоких степеней. (Как будет видно из доказательства, на функцию  $h$  достаточно наложить гораздо менее ограничительные условия.) Предположим, что  $m > 1$  и пусть  $(m - 1)s^{m-1} = 1/t$ . Тогда (3.6) принимает вид

$$\frac{dy}{dt} = -ay + g(t) + f(t, y)$$

для больших  $t$  и малых  $y$ , где  $g$  и  $f$  (скаляры) удовлетворяют условиям, наложенным на систему (3.1) при  $t > 0$ . В самом деле, функция  $g(t)$  возникает из функции  $-bs - h(s, 0)$ , а функция  $f(t, y)$  — из функции  $-h(s, y) + h(s, 0)$ . Таким образом, каждое решение  $\varphi$  уравнения (3.6) с достаточно малым  $|\varphi(s_0)|$  для некоторого  $s_0 > 0$  удовлетворяет условию  $\varphi(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0+$ .

Случай  $m = 1$  исследуется при помощи подстановки  $s = e^{-t}$ . (Случай  $m < 1$  не является особым в начале координат, уравнение относится на самом деле к классу  $\text{Lip}(s)$  и, таким образом, в этом случае применима теорема существования задачи 4 гл. I.)

Ясно, что функция  $s^m$  в (3.6) может быть заменена на произвольную положительную функцию  $p(s)$  от  $s$ , определенную для  $s > 0$ , для которой

$$\int_s^1 \frac{ds}{p(s)} < \infty \quad (s > 0),$$

но

$$\int_0^1 \frac{ds}{p(s)} = \infty.$$

В этом случае можно сделать подстановку  $\int_s^1 ds/p(s) = t$ . Член  $bs$  в числителе правой части уравнения (3.6) может быть также заменен на член более общего вида.

#### § 4. УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Если некоторые, но не все, корни характеристического уравнения матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части, то некоторые, но не все, решения  $\varphi$  системы

$$x' = Ax + f(t, x), \quad (4.1)$$

для которых  $|\varphi(0)|$  мало, стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$  при условии, что на функцию  $f$  наложены надлежащие ограничения.

Здесь будет предполагаться, что функция  $f$  непрерывна по совокупности переменных  $(t, x)$  для малых  $|x|$  и  $t \geq 0$ ; кроме того, для заданного  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta$  и  $T$ , такие, что для  $t \geq T$

$$|f(t, \tilde{x}) - f(t, x)| \leq \varepsilon |\tilde{x} - x| \quad (4.2)$$

при  $|x| \leq \delta$ ,  $|\dot{x}| \leq \delta$ . Для того чтобы условие (4.2) выполнялось, достаточно, чтобы существовала матрица  $f_x$  и чтобы при  $|x| \rightarrow 0$

$$f_x = o(1)$$

равномерно по  $t \geq 0$ . Будем предполагать, что  $f(t, 0) = 0$ . Будем также предполагать, что  $A$  и  $f$  действительны, однако так же, как и в предыдущих результатах этой главы, это требование может быть опущено, если, например, функция  $f$  аналитична.

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены высказанные предположения и пусть  $k$  характеристических корней матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части, а  $n - k$  — положительные действительные части. Тогда для любого большого  $t_0$  в  $x$ -пространстве существует действительное  $k$ -мерное многообразие  $S$ , содержащее начало координат и такое, что каждое решение  $\varphi$  системы (4.1), для которого  $\varphi(t_0)$  лежит на многообразии  $S$ , удовлетворяет условию:  $\varphi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Кроме того, существует такое  $\eta$ , что каждое решение  $\varphi$ , находящееся при  $t = t_0$  вблизи начала координат, но не на многообразии  $S$ , не может удовлетворять условию  $|\varphi(t)| \leq \eta$ ,  $t \geq t_0$ . Если функция  $f$  аналитична по  $x$  для каждого  $t \geq 0$  и малых  $|x|$ , то  $S$  — аналитическое многообразие<sup>1</sup>.

Точнее, будет показано, что существует действительная неособая постоянная матрица  $P$ , такая, что если  $y = Px$ , то существуют  $n - k$  действительных непрерывных функций  $\psi_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k)$ , определенных для малых  $|y_i|$ ,  $i \leq k$ , и таких, что уравнения

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k) \quad (j = k + 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

определяют  $k$ -мерное многообразие  $\tilde{S}$  в  $y$ -пространстве. Многообразие  $S$  в  $x$ -пространстве получается из  $\tilde{S}$  применением преобразования  $P^{-1}$  к  $y$ , так что выражение

$$x = P^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \\ \psi_{k+1} \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$$

определяет многообразие  $S$  посредством  $k$  криволинейных координат  $y_1, \dots, y_k$ .

Если существует постоянная  $c$ , такая, что для каждого фиксированного  $t \geq t_0$  матрица  $f$  аналитична по  $x$  для  $|x| < c$ , где  $x$  — вектор с комплексными компонентами, то будет показано, что функции  $\psi_j$  аналитичны по  $(y_1, \dots, y_k)$ .

<sup>1</sup> См. также задачу 11.

**Доказательство теоремы 4.1.** Существует действительная неособая постоянная матрица  $P$ , такая, что

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = B,$$

где  $B_1$  — квадратная матрица порядка  $k$ , все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части, и  $B_2$  — квадратная матрица порядка  $n - k$ , все характеристические корни которой имеют положительные действительные части. В результате подстановки  $y = Px$  система (4.1) принимает вид

$$y' = By + g(t, y), \quad (4.4)$$

где  $g = Pf(t, P^{-1}y)$ . Таким образом, из условия (4.2) следует, что, каково бы ни было  $\varepsilon$ , существуют  $\delta$  и  $T$ , не обязательно равные тем, которые фигурируют в (4.2), такие, что

$$|g(t, \tilde{y}) - g(t, y)| \leq \varepsilon |\tilde{y} - y| \quad (4.5)$$

для  $|\tilde{y}| \leq \delta$ ,  $|y| \leq \delta$ ,  $t \geq T$ . Пусть

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{tB_2} \end{pmatrix}. \quad (4.7)$$

Тогда  $e^{tB} = U_1(t) + U_2(t)$  и

$$U_j' = BU_j \quad (j = 1, 2). \quad (4.8)$$

Пусть  $\alpha > 0$  выбрано так, что действительные части характеристических корней матрицы  $B_1$  меньше  $-\alpha$ . Тогда существуют положительные постоянные  $K$  и  $\sigma$ , такие, что

$$|U_1(t)| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \quad (t \geq 0), \quad (4.9)$$

$$|U_2(t)| \leq Ke^{\sigma t} \quad (t \leq 0). \quad (4.10)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\theta(t, a) = U_1(t - t_0)a + \int_{t_0}^t U_1(t-s)g(s, \theta(s, a))ds - \\ - \int_t^\infty U_2(t-s)g(s, \theta(s, a))ds \quad (t_0 \geq T), \quad (4.11)$$

где  $a$  — постоянный вектор. Пусть  $\varepsilon$  в (4.5) выбрано так, что  $2\varepsilon K/\sigma < 1/2$ , и пусть величина  $|a|$  удовлетворяет неравенству  $2K|a| < \delta$ . Используя для решения уравнения (4.11) последовательные приближения с  $\theta_{(0)}(t, a) = 0$ , легко получаем, что

$$|\theta_{(l+1)}(t, a) - \theta_{(l)}(t, a)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha(t-t_0)}}{2^l}.$$

Эта оценка приводит к существованию для уравнения (4.11) решения  $\theta$ , удовлетворяющего неравенству

$$|\theta(t, a)| < 2K|a| e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (4.12)$$

Из (4.11) ясно, что последние  $n - k$  компонент вектора  $a$  не входят в решение и могут быть взяты равными нулю. То, что  $\theta$  есть решение уравнения (4.4) для малых  $|a|$ , получается непосредственно, ибо, в силу неравенства (4.10) интеграл в (4.11) сходится. Из равномерной сходимости последовательных приближений вытекает также, что функция  $\theta$  непрерывна по совокупности переменных  $(t, a)$  для  $t \geq t_0$  и малых  $|a|$ .

Из (4.11) следует, что первые  $k$  компонент  $\theta_j(t_0, a)$  имеют вид

$$\theta_j(t_0, a) = a_j \quad (j = 1, \dots, k),$$

а последующие компоненты даются равенствами

$$\theta_j(t_0, a) = - \left( \int_{t_0}^{\infty} U_2(t_0 - s) g(s, \theta(s, a)) ds \right)_j \quad (j = k + 1, \dots, n),$$

где символ  $(\ )_j$  обозначает  $j$ -ю компоненту. Если функции  $\psi_j$  определены для  $j = k + 1, \dots, n$  равенствами

$$\psi_j(a_1, \dots, a_k) = - \left( \int_{t_0}^{\infty} U_2(t_0 - s) g(s, \theta(s, a)) ds \right)_j,$$

то очевидно, что начальные значения  $y_j = \theta_j(t_0, a)$  удовлетворяют в  $y$ -пространстве уравнениям

$$y_j = \psi_j(y_1, \dots, y_k) \quad (j = k + 1, \dots, n),$$

которые определяют в  $y$ -пространстве многообразие  $\tilde{S}$ . Из условий (4.5) следует единственность решений системы (4.4), начинающихся вблизи начала. Поэтому, если  $p$  — любое решение системы (4.4), для которого  $|p(t_0)|$  мало и  $p(t_0)$  лежит на  $\tilde{S}$ , то  $p(t) = \theta(t, a)$  для некоторого  $a$ , где  $\theta$  — решение уравнения (4.11), удовлетворяющее условию  $\theta(t_0, a) = p(t_0)$ , и  $p(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Теперь мы покажем, что не существует решений  $p$  системы (4.4), для которых  $|p(t_0)|$  мало и  $p(t_0)$  не лежит на  $\tilde{S}$ , удовлетворяющих неравенству  $|p(t)| \leq \delta$  для  $t \geq t_0$ , где  $\delta$  — то же самое, которое было в неравенстве (4.5). В самом деле, предположим, что  $|p(t)| \leq \delta$  для  $t \geq t_0$ . Тогда из (4.4) легко следует, что

$$p(t) = e^{(t-t_0)B} p(t_0) + \int_{t_0}^t e^{(t-s)B} g(s, p(s)) ds.$$

Используя (4.6) и (4.7), можно записать это равенство в виде

$$\begin{aligned} p(t) = U_1(t - t_0)p(t_0) + U_2(t - t_0)c + \int_{t_0}^t U_1(t - s)g(s, p(s))ds - \\ - \int_t^\infty U_2(t - s)g(s, p(s))ds, \quad (4.13) \end{aligned}$$

где  $c$  — постоянный вектор,

$$c = \int_{t_0}^\infty U_2(t_0 - s)g(s, p(s))ds + p(t_0);$$

этот интеграл сходится в силу неравенства (4.10) и того обстоятельства, что, согласно (4.5), величина  $|g(s, p(s))|$  ограничена для  $|p(s)| \leq \delta$  и  $s \geq t_0$ .

Очевидно, что все члены правой части равенства (4.13) ограничены при  $t \rightarrow \infty$ , исключая, быть может, член  $U_2(t - t_0)c$ . Покажем, что если не все компоненты  $c_j$ ,  $j > k$ , вектора  $c$  обращаются в нуль, то этот член не ограничен при  $t \rightarrow \infty$ . Каждая компонента выражения  $U_2(t - t_0)c$  есть сумма многочленов, умноженных на экспоненциальные члены с возрастающим модулем. Таким образом, в силу результата задачи 26 гл. III каждая компонента не ограничена, если только она не обращается тождественно в нуль. В силу (4.7) все компоненты могут обращаться в нуль только тогда, когда все  $c_j$  равны нулю для  $j > k$ . Так как левая часть равенства (4.13) ограничена при  $t \rightarrow \infty$ , то правая часть должна быть также ограниченной, и, таким образом, все компоненты  $c_j$ ,  $j > k$ , вектора  $c$  равны нулю, так что функция  $p$  удовлетворяет уравнению (4.11).

Покажем теперь, что если  $\theta$  — решение уравнения (4.11), удовлетворяющее неравенству  $|\theta(t, a)| \leq \delta$  для  $t \geq t_0$ , то это решение единствено. Тем самым будет доказано, что если  $p$  — любое решение системы (4.4), для которого  $|p(t)| \leq \delta$ ,  $t \geq t_0$ , то  $p(t)$  совпадает с  $\theta(t, a)$  при некотором  $a$ , где  $\theta$  — построенное выше при помощи последовательных приближений решение уравнения (4.11). Таким образом, точка  $p(t_0)$  лежит на многообразии  $\tilde{S}$ , что противоречит предположению о том, что  $p(t_0)$  не лежит на  $\tilde{S}$ .

Чтобы доказать единственность решений уравнения (4.11), обозначим через  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  решения для одного и того же  $a$  и пусть  $|\theta(t, a)| \leq \delta$  и  $|\tilde{\theta}(t, a)| \leq \delta$ . Тогда уравнение (4.11) вместе с неравенством (4.5) дает

$$\begin{aligned} |\tilde{\theta}(t, a) - \theta(t, a)| \leq K\epsilon e^{-\alpha t} \int_{t_0}^t e^{\alpha s} |\tilde{\theta}(s, a) - \theta(s, a)| ds + \\ + K\epsilon e^{\alpha t} \int_t^\infty e^{-\alpha s} |\tilde{\theta}(s, a) - \theta(s, a)| ds. \end{aligned}$$

Если  $\sup |\tilde{\theta}(t, a) - \theta(t, a)| = M (t \geq t_0)$ , то  $M \leq 2K\varepsilon M/\sigma$ , откуда в силу неравенства  $\varepsilon < \sigma/2K$  следует, что  $M = 0$ , а это доказывает единственность.

В случае функции  $f$ , аналитической по  $x$  для каждого  $t \geq 0$  и малых  $|x|$ , из равномерной сходимости последовательных приближений для уравнения (4.11) обычным образом получаем, что функция  $\theta$  аналитична по  $a$  для фиксированного  $t$ , и поэтому  $\tilde{S}$  есть аналитическое многообразие. Это завершает доказательство теоремы 4.1.

В случае когда функция  $f$  имеет непрерывные первые производные по  $x_i$ , многообразие  $S$  будет класса  $C^1$ , как это показывает следующая

**Теорема 4.2.** *Многообразие  $S$  теоремы 4.1 дифференцируемо, если производные  $\partial f / \partial x_i$  существуют и непрерывны для  $i = 1, \dots, n$  и достаточно больших  $t_0$ . Точнее, функции  $\psi_j$ ,  $j = k + 1, \dots, n$ , принадлежат классу  $C^1$  для достаточно малых  $|y_l|$ ,  $l \leq k$ . Кроме того,  $\partial \psi_j / \partial y_l = 0$  при  $y_1 = \dots = y_k = 0$ .*

Доказательство сводится к проверке того, что производные  $(\partial \varphi / \partial a_i)(t_0, a)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , существуют и непрерывны для малых  $|a|$ .

Пусть  $h$  — скаляр и  $j$  фиксировано и пусть  $a + h$  применяется для обозначения вектора  $a + he_j$ . Пусть  $p(t) = |\theta(t, a + h) - \theta(t, a)|$ . Тогда, используя неравенство (4.5) в уравнении (4.11), получаем для малых  $|h|$

$$p(t) \leq K|h| + K\varepsilon \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} p(s) ds + K\varepsilon \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)} p(s) ds.$$

Пусть  $M = \sup |p(t)|$  для  $t \geq t_0$ . Тогда из предыдущего следует, что

$$M \leq K|h| + \frac{2K\varepsilon M}{\sigma}.$$

Так как  $2K\varepsilon/\sigma < 1/2$ , то  $M \leq 2K|h|$  или  $|p(t)| \leq 2K|h|$ . Пусть  $q(t, a, h) = [\theta(t, a + h) - \theta(t, a)]/h$ . Тогда предыдущий результат показывает, что

$$|q| \leq 2K.$$

Из уравнения (4.11) получаем

$$\begin{aligned} q(t, a, h) &= U_1(t - t_0) e_j + \int_{t_0}^t U_1(t-s) [g_y(s, \theta(s, a)) q(s, a, h) + A] ds - \\ &\quad - \int_t^\infty U_2(t-s) [g_y(s, \theta(s, a)) q(s, a, h) + A] ds, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $g_y$  — матрица  $(\partial g_i / \partial y_j)$  и

$$A = \frac{1}{h} [g(s, \theta(s, a + h)) - g(s, \theta(s, \theta(s, a)))] - g_y(s, \theta(s, a)) q(s, a, h).$$

Каково бы ни было  $\eta > 0$ , можно выбрать  $|h|$  настолько малым, что из теоремы о среднем, непрерывности  $g_y$  для малых  $s$  и из неравенств (4.5) и (4.12) для больших  $s$  будет следовать

$$\begin{aligned} |\Delta| &\leq \eta |q(s, a, h)|, \\ \text{а так как } |q| &\leq 2K, \text{ то} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$|\Delta| \leq 2K\eta.$$

Если  $|a|$  мало, то из неравенств (4.5) и (4.12) получаем

$$|g_y(s, \theta(s, a))| \leq \varepsilon n. \quad (4.16)$$

Пусть  $\varepsilon$  настолько мало, что  $2Kn/\sigma < 1/2$ . Пусть

$$\begin{aligned} \psi(t, a) = U_1(t - t_0) e_j + \int_{t_0}^t U_1(t - s) g_y(s, \theta(s, a)) \psi(s, a) ds - \\ - \int_t^\infty U_2(t - s) g_y(s, \theta(s, a)) \psi(s, a) ds. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Существование непрерывного решения  $\psi$  линейной системы (4.17) получаем, применяя последовательные приближения. Вычитая (4.17) из (4.14), обозначая  $\sup |q - \psi|$  для  $t \geq t_0$  через  $m(h)$  и используя (4.16), приходим к неравенству

$$m(h) \leq K \varepsilon n m(h) \frac{2}{\sigma} + 2K^2 \eta \frac{2}{\sigma},$$

причем последний член получается благодаря оценке (4.15). Так как  $2Kn/\sigma < 1/2$ , то

$$m(h) \leq \frac{8K^2 \eta}{\sigma}.$$

Так как  $\eta \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ , то  $m(h) \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ . Таким образом,  $q \rightarrow \psi$  при  $h \rightarrow 0$ . Это означает, что производная  $\partial \theta / \partial a$  существует и совпадает с решением  $\psi$  уравнения (4.17).

Из неравенства (4.12) и уравнения (4.11) следует, что

$$\sum_{j=k+1}^n |\theta_j(t_0, a)| \leq 2K^2 |a| \varepsilon \int_{t_0}^\infty e^{-\sigma(s-t_0)} ds \leq \frac{2K^2 |a| \varepsilon}{\sigma}.$$

Так как  $\varepsilon$  можно сделать произвольно малым, выбирая  $|a|$  достаточно малым, то в предположениях теоремы 4.1  $(\partial \psi_j / \partial y_i)(0, \dots, 0) = 0$ ,  $j > k$ . Это, разумеется, также верно при более ограничительных предположениях теоремы 4.2. Тем самым доказательство теоремы 4.2 завершено.

В следующей теореме условие (4.2) может быть заменено более слабым условием, которое есть не что иное, как условие (4.2) при  $\tilde{x} = 0$ . В этом случае решения системы 4.1 не обязательно единственны.

**Теорема 4.3.** Пусть  $\varphi$  — решение системы (4.1) и пусть

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} = b < 0. \quad (4.18)$$

Пусть для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta > 0$  и  $T$ , такие, что

$$|j(t, x)| \leq \varepsilon |x|$$

для  $|x| < \delta$  и  $t \geq T$ . Пусть  $k$  характеристических корней  $\lambda_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , матрицы  $A$  имеют отрицательные действительные части, а остальные  $n-k$  корней имеют неотрицательные действительные части. Пусть  $\operatorname{Re} \lambda_i = \mu_i$  и  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_k < 0$ . Тогда либо  $b = \mu_j$  для некоторого  $j \leq k$ , либо  $\varphi(t) \equiv 0$ .

**Доказательство.** Предположим, что  $\mu_m < b < \mu_{m+1}$  для некоторого  $m \leq k-1$ . Пусть матрица  $B_1$  имеет характеристические корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , а матрица  $B_2$  — остальные  $n-m$  характеристических корней с действительными частями, превосходящими  $\mu_m$ . Как и при доказательстве теоремы 4.1, существует матрица  $P$ , такая, что

$$PAP^{-1} = B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть  $\alpha > 0$  и  $\sigma > 0$  выбраны так, что

$$\mu_m < -\alpha - \sigma < -\alpha + \sigma < \mu_{m+1} \quad (4.19)$$

и

$$-\alpha - \frac{1}{2}\sigma < b < -\alpha. \quad (4.20)$$

При определенных выше  $B_1$  и  $B_2$  пусть матрицы  $U_1$  и  $U_2$  определяются равенствами (4.6) и (4.7). Тогда соотношение (4.8) выполняется, однако вместо (4.9) и (4.10) имеют место неравенства

$$\|U_1(t)\| \leq Ke^{-(\alpha+\sigma)t} \quad (t \geq 0), \quad (4.21)$$

$$\|U_2(t)\| \leq Ke^{-(\alpha-\sigma)t} \quad (t \leq 0). \quad (4.22)$$

Полагая  $y = Px$ , получаем аналог уравнения (4.4), и соответственно решению  $\varphi$  системы (4.1) решением аналога уравнения (4.4) является  $P\varphi = \tilde{\varphi}$ . Выберем  $\varepsilon$  так, что  $2K\varepsilon/\sigma < 1/2$ . Это фиксирует  $\delta$ . Из формулы вариации постоянных следует, что для каждого фиксированного  $t_1 \geq T$  существуют такие векторы  $c^{(1)}$  и  $c^{(2)}$ , причем последние  $n-m$  компонент вектора  $c^{(1)}$  и первые  $m$  компонент вектора  $c^{(2)}$  равны нулю, что

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t) = U_1(t - t_1) c^{(1)} + U_2(t - t_1) c^{(2)} + \int_{t_1}^t U_1(t-s) g(s, \tilde{\varphi}(s)) ds - \\ - \int_t^\infty U_2(t-s) g(s, \tilde{\varphi}(s)) ds. \quad (4.23) \end{aligned}$$

Простая оценка членов уравнения (4.23) показывает, что все члены, исключая  $U_2(t - t_1)c^{(2)}$ , имеют экспоненциальный рост не более чем  $e^{-at}$ , в то время как рост величины  $U_2(t - t_1)$  не менее чем  $e^{-(a-\sigma)t}$ . Таким образом, уравнение (4.23) может иметь место лишь в том случае, когда  $c^{(2)} = 0$ .

Используя (4.23), вспоминая, что  $c^{(2)} = 0$ , и обозначая  $|c^{(1)}|$  через  $c$ , получаем

$$\begin{aligned} |\tilde{\varphi}(t)| \leq cKe^{-(a+\sigma)(t-t_1)} + Ke \int_{t_1}^t e^{-(a+\sigma)(t-s)} |\tilde{\varphi}(s)| ds + \\ + Ke \int_t^\infty e^{(a-\sigma)(s-t)} |\tilde{\varphi}(s)| ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Пусть

$$\max_{s \geq t} e^{a(s-t_1)} |\tilde{\varphi}(s)| = M(t).$$

Тогда, согласно (4.20),  $M(t)$  существует и монотонно не возрастает. Для каждого  $t$  существует  $\tilde{t} \geq t$ , такое, что

$$M(t) = e^{a(\tilde{t}-t_1)} |\tilde{\varphi}(\tilde{t})| = M(\tilde{t}).$$

Таким образом, оценка (4.24) дает при  $t = \tilde{t}$

$$M(\tilde{t}) \leq cKe^{-\sigma(\tilde{t}-t_1)} + Ke \int_{t_1}^{\tilde{t}} e^{-\sigma(\tilde{t}-s)} M(s) ds + M(\tilde{t}) Ke \int_{\tilde{t}}^\infty e^{-\sigma(s-\tilde{t})} ds.$$

Так как  $M(s) = M(t) = M(\tilde{t})$  для  $t \leq s \leq \tilde{t}$ , то отсюда следует, что

$$M(t) \leq cKe^{-\sigma(t-t_1)} + Ke \int_{t_1}^t e^{-\sigma(t-s)} M(s) ds + \frac{2KeM(t)}{\sigma}.$$

Так как  $2K\varepsilon/\sigma < 1/2$ , то

$$M(t) e^{at} \leq 2cKe^{at_1} + 2Ke \int_{t_1}^t e^{\sigma s} M(s) ds.$$

Используя неравенство, полученное в задаче 1 гл. I, имеем

$$M(t) e^{at} \leq 2cKe^{at_1} e^{2K\varepsilon(t-t_1)}.$$

Так как  $2K\varepsilon < (1/2)\sigma$ , то отсюда получаем

$$M(t) \leq 2cKe^{-\frac{1}{2}\sigma(t-t_1)},$$

или

$$|\tilde{\varphi}(t)| \leq 2cKe^{-(a+\frac{1}{2}\sigma)(t-t_1)},$$

откуда, согласно (4.18), следует неравенство  $b \leq -\left(a + \frac{1}{2}\sigma\right)$ , противоречащее неравенству (4.20). Это доказывает, что  $b \leq \mu_m$ , что противоречит предположению  $\mu_m < b < \mu_{m+1}$ . Поэтому, если  $\mu_1 \leq b \leq \mu_k$ , то  $b = \mu_j$  для некоторого  $j \leq k$ .

В случае  $b < 0$  легко находим, что

$$b \leq \mu_k < 0, \quad (4.25)$$

а в случае  $b < \mu_1$  — что  $\varphi = 0$ .

Следующее обобщение теоремы 4.1 получается при помощи лишь небольших изменений в доказательстве.

**Теорема 4.4.** Обозначим действительные части характеристических корней  $\lambda_i$  матрицы  $A$  через  $\mu_i$  и пусть  $\mu_i \leq \mu_{i+1}$ . Пусть  $t$  таково, что

$$\mu_m < \mu_{m+1} < 0, \quad (4.26)$$

а в остальном пусть выполняются условия теоремы 4.1. Тогда для каждого большого  $t_0$  существует действительное  $t$ -мерное открытое многообразие  $S_m$ , содержащее начало координат и такое, что каждое решение  $\varphi$  системы (4.1), для которого  $\varphi(t_0)$  лежит на многообразии  $S_m$ , удовлетворяет условию

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} \leq \mu_m < 0. \quad (4.27)$$

Кроме того, существует  $\eta > 0$ , такое, что каждое решение, удовлетворяющее неравенству  $|\varphi(t)| < \eta$  при  $t \geq t_0$ , но не лежащее на  $S_m$  при  $t = t_0$ , удовлетворяет неравенству

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} \geq \mu_{m+1} > \mu_m. \quad (4.28)$$

Если для каждого  $i$  существует производная  $\partial f / \partial x_i$ , непрерывная по совокупности переменных  $(t, x)$  при  $t \geq t_0$  и малых  $|x|$ , то имеет место аналог теоремы 4.2 для многообразия  $S_m$ . Если для каждого  $t$  функция  $f$  аналитична по  $x$  для малых  $|x|$ , то  $S_m$  — аналитическая поверхность.

**Доказательство.** Следует изменить доказательство теоремы 4.1, определив матрицы  $B_1$  и  $B_2$  как в доказательстве теоремы 4.3. Предполагается также, что выполняется неравенство (4.19). При  $U_1$  и  $U_2$ , определенных выше, выполняются также неравенства (4.21) и (4.22). Рассмотрим теперь уравнение (4.11), где  $U_1$  и  $U_2$  — определенные выше матрицы и вектор  $a$  таков, что последние  $n-m$  его компонент равны нулю. Как и прежде, последовательные приближения легко приводят к решению  $\theta = \theta(t, a)$ . Аналогом (4.12) является оценка

$$|\theta(t, a)| \leq 2K|a|e^{-a(t-t_0)}, \quad (4.29)$$

где  $|a|$  достаточно мало, так что  $2K|a| < \delta$ . Существование многообразий  $\tilde{S}_m$  и, следовательно,  $S_m$  получается как прежде.

Так как  $-a < \mu_{m+1}$ , то теорема 4.3 показывает, что из (4.29) следует неравенство (4.27) для  $\theta$ . В силу теоремы единственности решение системы (4.4), выходящее при  $t = t_0$  из многообразия  $\tilde{S}_m$ ,

совпадает при некотором выборе  $a$  с функцией  $\theta(t, a)$ . Это завершает доказательство неравенства (4.27).

Предположим, что решение  $\varphi$  системы (4.1) при  $t = t_0$  не лежит на многообразии  $S_m$  и что неравенство (4.28) не выполняется. Тогда, по теореме 4.3, должно выполняться неравенство (4.27), а поэтому, как было доказано ранее (ниже (4.23)), решение  $\tilde{\varphi} = P\varphi$  системы (4.4) должно удовлетворять уравнению (4.23) с  $c^{(2)} = 0$ . Выберем в (4.23)  $t_1$  равным  $t_0$ . Тогда  $\tilde{\varphi}$  будет решением интегрального уравнения (4.11) (где  $U_1, U_2$  и  $a$  модифицированы как указано выше). Так как  $|\varphi(t)| < \eta$  и  $\eta$  можно выбрать достаточно малым,

$$2K|\tilde{\varphi}(t_0)| < \delta \quad \text{и} \quad |\tilde{\varphi}(t)| < \delta \quad (t \geq t_0).$$

Пусть первая компонента вектора  $a$  в (4.11) равна первой компоненте вектора  $\tilde{\varphi}(t_0)$ . Предположим теперь, что интегральное уравнение (4.11) имеет два решения  $\theta$  и  $\tilde{\theta}$  для одного и того же  $a$ , причем  $|\theta|$  и  $|\tilde{\theta}|$  меньше  $\delta$  для  $t \geq t_0$ . Тогда, вычитая из одного равенства другое и используя (4.21) и (4.22), получаем

$$|\theta - \tilde{\theta}| e^{at} \leq K \int_{t_0}^t e^{-\sigma(t-s)} |\theta - \tilde{\theta}| e^{as} ds + K \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)} |\theta - \tilde{\theta}| e^{as} ds.$$

Обозначая  $\sup |\theta - \tilde{\theta}| e^{as}, s \geq t_0$ , через  $M$ , находим, что  $M \leq 2K\varepsilon M/\sigma$ , откуда следует, что  $M = 0$ , ибо  $2K\varepsilon/\sigma < 1$ . Итак, решение  $\tilde{\varphi}(t)$  совпадает с  $\theta(t, a)$  и поэтому лежит на многообразии  $\tilde{S}_m$  при  $t = t_0$ . Это доказывает неравенство (4.28).

Доказательство аналога теоремы 4.2 получается теперь непосредственно. Замечание об аналитичности получается так же, как и в конце доказательства теоремы 4.1.

**Теорема 4.5.** Пусть выполняются условия теоремы 4.3 и существует  $\Delta > 0$ , такое, что для малых  $|x|$

$$f(t, x) = O(|x|^{1+\Delta}) \quad (4.30)$$

равномерно при  $t \geq 0$ . По теореме 4.3 существуют целые числа  $p$  и  $q$ ,  $1 \leq p \leq q \leq k$ , такие, что

$$\operatorname{Re} \lambda_{p-1} < \operatorname{Re} \lambda_p = \operatorname{Re} \lambda_{p+1} = \dots = \operatorname{Re} \lambda_q = b < \operatorname{Re} \lambda_{q+1}.$$

Существует такое  $\delta > 0$  и такое решение  $\psi$  системы  $x' = Ax$ :

$$\psi(t) = \sum_{j=p}^q Q_j(t) e^{\lambda_j t}, \quad (4.31)$$

где  $Q_j(t)$  — векторы-столбцы, не все равные нулю, являющиеся многочленами относительно  $t$ , что при  $t \rightarrow \infty$

$$\varphi(t) = \psi(t) + O(e^{(b-\delta)t}). \quad (4.32)$$

Наоборот, если выполняется условие (4.2), то соответственно каждому решению  $\varphi$  системы  $x' = Ax$  вида (4.31) существует решение  $\varphi$  системы (4.1), удовлетворяющее соотношению (4.32). Кроме того, если  $p = 1$ , то  $\varphi$  однозначно определяется через  $\psi$ .

Таким образом, соотношение (4.32) показывает, что решения системы (4.1), стремящиеся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , равны с точностью до экспоненциально убывающих членов решениям системы  $x' = Ax$ .

**Доказательство теоремы 4.5.** Существует действительная неособая матрица  $P$ , такая, что

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{pmatrix} = B,$$

где действительные части характеристических корней матриц  $B_1, B_2$  и  $B_3$  соответственно меньше, равны и больше  $b$ .

Пусть  $z = Px$ . Тогда система (4.1) принимает вид

$$z' = Bz + g(t, z), \quad (4.33)$$

где  $g(t, z) = Pf(t, P^{-1}z)$ . В силу (4.30)

$$g(t, z) = O(|z|^{1+\delta}). \quad (4.34)$$

Пусть  $\tilde{\varphi} = P\varphi$ . Тогда  $\tilde{\varphi}$  есть решение системы (4.33) и

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\tilde{\varphi}(t)|}{t} = b = \mu_p, \quad (4.35)$$

где  $\mu_p = \operatorname{Re} \lambda_p$ . В силу соотношений (4.34) и (4.35) существует  $\eta > 0$ , такое, что для больших  $t$

$$g(t, \tilde{\varphi}(t)) = O(e^{(b-\eta)t}). \quad (4.36)$$

Пусть

$$U_1(t) = \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$U_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{tB_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и аналогично для  $U_3(t)$ , так что  $e^{tB} = U_1 + U_2 + U_3$ . Кроме того,

$$U'_j = BU_j \quad (j = 1, 2, 3).$$

Из определения матриц  $B_1, B_2$  и  $B_3$  следует, что существует  $\delta, 0 < \delta < \eta$ , такое, что

$$U_1(t) = O(e^{(b-\delta)t}) \quad (t > 0), \quad (4.37)$$

$$U_j(t) = O(e^{(b-\delta)t}) \quad (t < 0, j = 2, 3). \quad (4.38)$$

Так как  $\tilde{\varphi}$  — решение системы (4.33), то легко видеть, что

$$\tilde{\varphi}(t) = e^{tB} c_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)B} g(s, \tilde{\varphi}(s)) ds,$$

где  $c_0 = e^{-t_0 B} \tilde{\varphi}(t_0)$  — постоянная. Это может быть записано в виде

$$\tilde{\varphi}(t) = U_1(t) c_0 + U_2(t) c + J_1 + J_2 + J_3, \quad (4.39)$$

где  $c$  — постоянный вектор и

$$\begin{aligned} J_1 &= U_3(t) c, \\ J_2 &= \int_{t_0}^t U_1(t-s) g(s, \tilde{\varphi}(s)) ds, \\ J_3 &= - \int_t^\infty [U_2(t-s) + U_3(t-s)] g(s, \tilde{\varphi}(s)) ds. \end{aligned}$$

Из (4.36) и (4.37) легко следует, что

$$J_2 = O(e^{(b-\delta)t})$$

при  $t \rightarrow \infty$ , а из (4.36) и (4.38) — что

$$J_3 = O(e^{(b-\eta)t}).$$

Член  $J_1$ , стоящий справа в равенстве (4.39), либо тождественно равен нулю, либо

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |J_1|}{t} > b.$$

Это, последнее, однако, невозможно в силу оценки всех остальных членов в правой части равенства (4.39), так что  $J_1$  тождественно равен нулю. Таким образом, в силу оценки (4.37) и оценок для  $J_2$  и  $J_3$

$$\tilde{\varphi}(t) = U_2(t) c + O(e^{(b-\delta)t}) \quad (4.40)$$

при  $t \rightarrow \infty$ . Так как  $\varphi = P^{-1} \tilde{\varphi}$ , то получаем соотношение (4.32). То, что не все  $Q_j(t)$  могут обращаться в нуль, следует из теоремы 4.3.

Каково бы ни было решение  $\psi$ , матрица  $P\psi(t)$  совпадает с  $U_2(t)c$  при некотором выборе вектора  $c$ . Так же, как при доказательстве существования решения уравнения (4.11), можно доказать, что существует решение уравнения (4.39), такое, что  $J_1 \equiv 0$ , и, как прежде, соотношение (4.40) следует отсюда. Это доказывает, что существует по крайней мере одно решение  $\varphi$ , соответствующее данному решению  $\psi$ .

Наконец,  $U_1 \equiv 0$  в случае  $p = 1$ . Каждое решение системы (4.1), удовлетворяющее соотношению (4.32), должно удовлетворять интегральному уравнению (4.39) при  $J_1 \equiv 0$ . Теперь невозможность существования двух решений интегрального уравнения получается почти так же, как при доказательстве единственности в конце рассуждения, относящегося к теореме 4.4.

## § 5. ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ВНЕ УСТОЙЧИВОГО МНОГООБРАЗИЯ

В этом параграфе необходимо ввести действительную каноническую форму действительной матрицы  $A$ . Существует действительная неособая матрица  $P$ , такая, что

$$PAP^{-1} = B,$$

где

$$B = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D_m \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$D_j$  — действительные квадратные матрицы и остальные элементы матрицы  $B$  равны нулю. Каждая матрица  $D_j$  представима либо в виде

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & \lambda_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & \lambda_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma & \lambda_j \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

где  $\gamma$  может быть любым не равным нулю действительным числом, либо в виде

$$\begin{pmatrix} S_j & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma E_2 & S_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma E_2 & S_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma E_2 & S_j \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где матрицы  $S_j$  действительны,

$$S_j = \begin{pmatrix} a_j & -\beta_j \\ \beta_j & a_j \end{pmatrix}$$

и  $E_2$  — единичная матрица второго порядка.

Матрица (5.2) может состоять из одного элемента. Она соответствует, разумеется, характеристическому корню  $\lambda_j$ , в то время как матрица (5.3) соответствует сопряженным характеристическим корням  $\alpha_j \pm i\beta_j$ . В простейшем случае матрица (5.3) совпадает с  $S_j$ .

Очевидно, что

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{tD_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{tD_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{tD_m} \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Для случая матрицы (5.2)

$$e^{tD_j} = e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(\gamma t)^2}{2!} & \gamma t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \gamma t & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

а для (5.3)

$$e^{tD_j} = \begin{pmatrix} e^{tS_j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma t e^{tS_j} & e^{tS_j} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{(\gamma t)^2}{2!} e^{tS_j} & \gamma t e^{tS_j} & e^{tS_j} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & e^{tS_j} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

где

$$e^{tS_j} = e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} \cos \beta_j t & -\sin \beta_j t \\ \sin \beta_j t & \cos \beta_j t \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Доказательство формулы (5.6) легко следует из равенства

$$D_j = \begin{pmatrix} S_j & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_j & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & S_j \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_2 & 0 \end{pmatrix},$$

из того факта, что две выписанные матрицы коммутируют, и из равенств

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ E_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & E_2 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ E_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

и т. д.

Большой интерес представляет случай, когда  $f(t, x)$  в (4.1) является функцией только  $x$ . В этом случае  $k$ -мерное многообразие начальных значений, существование которого показано в теореме 4.1, очевидно инвариантно относительно  $t$ , и, более того, каждая точка многообразия, достаточно близкая к началу, остается на многообразии при возрастании  $t$ . В случае когда  $f$  зависит только от  $x$ , система называется *автономной* и решения могут рассматриваться как кривые в  $x$ -пространстве с параметром  $t$ . Через каждую точку  $x$ -пространства проходит единственная интегральная кривая. В автономном случае при выполнении условий теоремы 4.1, изменяя знак  $t$ , убеждаемся, что существует  $(n-k)$ -мерное многообразие, содержащее начало и такое, что каждая точка многообразия, близкая к началу, стремится при  $t \rightarrow -\infty$  к началу; каждое решение, начинаяющееся вне этого многообразия, не может сколь угодно близко приближаться к началу при  $t \rightarrow -\infty$ . Высказанный результат можно сформулировать более точно. Это будет сделано для автономного случая, но может быть также обобщено на случай, когда  $f$  зависит как от  $t$ , так и от  $x$ .

Будем предполагать, что преобразование  $y = Rx$  уже было выполнено и система имеет вид

$$y' = By + g(y), \quad (5.8)$$

где

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

и матрица  $B$  имеет вид (5.1).  $k$  характеристических корней матрицы  $B_1$  имеют отрицательные действительные части и  $n-k$  корней матрицы  $B_2$  — положительные действительные части. Постоянная  $\gamma$  будет выбрана позже.

Нам будет удобно положить

$$y = y_{(1)} + y_{(2)},$$

где  $y_{(1)}$  — вектор, первые  $k$  компонент которого совпадают с первыми  $k$  компонентами вектора  $y$  и  $y_{(2)} = y - y_{(1)}$ . Устойчивое многообразие, введенное при доказательстве теоремы 4.1, может быть задано векторным уравнением

$$y_{(2)} = \psi(y_{(1)}), \quad (5.9)$$

так как оно не зависит от  $t_0$ . Заметим, что первые  $k$  компонент  $\psi$  равны нулю. Рассмотрим теперь любое решение  $\varphi$  системы (5.8), для которого  $|\varphi(0)|$  мало. Пусть  $\varphi = \varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}$  и

$$\xi(t) = \varphi_{(2)}(t) - \psi(\varphi_{(1)}(t)). \quad (5.10)$$

**Теорема 5.1.** Пусть  $f$  в системе (4.1) является функцией только  $x$  и пусть выполняются условия теорем 4.1 и 4.2. Пусть  $|\varphi(0)|$  мало и предположим, что решение  $\varphi$  не лежит при  $t=0$  на многообразии (5.9). Тогда, если только  $|\varphi(t)|$  остается малым, евклидова длина вектора  $\xi(t)$ , определенного выражением (5.10), есть экспоненциально возрастающая функция  $t$ .

Эта теорема показывает, что расстояние решения  $\varphi(t)$  от устойчивого многообразия, измеренное по нормали к поверхности  $y_{(2)} = 0$ , есть экспоненциально возрастающая функция  $t$ .

Доказательство теоремы 5.1. Очевидно,

$$\xi'(t) = \varphi'_{(2)}(t) - \psi_y(\varphi_{(1)}(t))\varphi'_1(t),$$

где  $\psi_y$  — квадратная матрица порядка  $n$  со столбцами  $\partial\psi/\partial y_j$ . Заметим, что последние  $n-k$  столбцов матрицы  $\psi_y$  равны нулю. Если  $g = g_{(1)} + g_{(2)}$ , то из (5.8) следует, что

$$\varphi'_{(j)} = B\varphi_{(j)} + g_{(j)}(\varphi) \quad (j = 1, 2).$$

Таким образом,

$$\xi' = B\varphi_{(2)} + g_{(2)}(\varphi) - \psi_y(\varphi_{(1)})(B\varphi_{(1)} + g_{(1)}(\varphi)). \quad (5.11)$$

Для решений, лежащих на устойчивом многообразии,  $\xi$  тождественно равно нулю. Для таких решений  $\theta$  имеет место равенство (5.11) при  $\xi' = 0$ , что дает

$$0 = B\psi(\theta_{(1)}) + g_{(2)}(\theta_{(1)} + \psi(\theta_{(1)})) - \psi_y(\theta_{(1)})[B\theta_{(1)} + g_{(1)}(\theta_{(1)} + \xi(\theta_{(1)}))]. \quad (5.12)$$

Ввиду того что это равенство выполняется для всех решений  $\theta$  на многообразии и существует решение, проходящее через каждую точку многообразия, оно является тождеством и выполняется, таким образом, если  $\theta_{(1)}$  заменить на  $y_{(1)}$  с малым  $|y_{(1)}|$ . Подставляя в равенство (5.11)  $\varphi = \varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}$  и вычитая из него равенство (5.12), в котором  $\theta_{(1)}$  заменено на  $\varphi_{(1)}$ , получаем

$$\begin{aligned} \xi' = B\xi + g_{(2)}(\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}) - g_{(2)}(\varphi_{(1)} + \psi(\varphi_{(1)})) - \\ - \psi_y(\varphi_{(1)})(g_{(1)}(\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}) - g_{(1)}(\varphi_{(1)} + \psi(\varphi_{(1)}))) . \end{aligned} \quad (5.13)$$

Если  $\xi^*$  — транспонированный вектор для вектора  $\xi$ , то  $J = \xi^*\xi$  есть квадрат евклидовой длины вектора  $\xi$ , и, очевидно,  $J' = \xi^*\xi' + \xi'^*\xi$ . Так как  $\varphi_{(2)} = \xi + \psi(\varphi_{(1)})$ , то

$$|g_{(j)}(\varphi_{(1)} + \varphi_{(2)}) - g_{(j)}(\varphi_{(1)} + \psi(\varphi_{(1)}))| \leq \varepsilon |\xi| \quad (j = 1, 2)$$

для  $|\varphi| \leq \delta$ , почти как в неравенстве (4.5). Используя это в (5.13), получаем

$$J' = \xi^*(B + B^*)\xi + J_1, \quad (5.14)$$

где

$$|J_1| \leq K\varepsilon J \quad (5.15)$$

для некоторой постоянной  $K$ . Так как первые  $k$  компонент векторов  $\xi$  и  $\xi^*$  равны нулю, в оценку выражения  $\xi^*(B + B^*)\xi$  входят только матрицы  $B_2$  и  $B_2^*$ . Элементы главной диагонали матрицы  $B_2 + B_2^*$  все действительны, положительны и превосходят некоторое число  $2d$ . Остальными отличными от нуля элементами матрицы  $B_2 + B_2^*$  являются не более чем  $2(n-k-1)$  постоянных  $\gamma$ . Итак, из (5.14) и (5.15) получаем

$$J' \geq (2d - 2(n-k-1)\gamma - K\varepsilon)J.$$

Таким образом, если при помощи подходящего выбора матрицы  $P$  постоянная  $\gamma$  сделана малой и при помощи подходящего выбора  $\delta$  число  $\varepsilon$  сделано малым, имеем

$$J' \geq dJ,$$

что доказывает результат, если только  $|\varphi(t)| \leq \delta$ .

**Следствие из теоремы 5.1.** В предположениях теоремы 5.1 существует  $(n-k)$ -мерное многообразие

$$y_{(1)} = \chi(y_{(2)})$$

решений, устойчивых при  $t \rightarrow -\infty$ . При помощи изменения знака  $t$  теорема 5.1 дает: для решения  $\varphi$ , такого как прежде, вектор

$$\varphi_{(1)}(t) = \chi(\varphi_{(2)}(t))$$

имеет убывающую при возрастании  $t$  евклидову длину, если только  $|\varphi(t)|$  остается малым.

### Задачи

1. Пусть все решения линейной системы с постоянными коэффициентами  $y' = Ay$  ограничены для  $t \geq 0$ , т. е. пусть  $|e^{tA}| \leq M$ ,  $t \geq 0$ , для некоторой постоянной  $M$ . Пусть  $f$  — функция класса  $C$  и пусть существуют постоянная  $a$  и функция  $g(t)$ , такие, что  $|f(t, x)| \leq g(t)|x|$  для  $|x| \leq a$  и  $t \geq 0$ ; пусть также  $\int_0^\infty g(t) dt < \infty$ . Показать, что существует постоянная  $M_1$ , такая, что любое решение  $\varphi$  системы  $x' = Ax + f(t, x)$  удовлетворяет неравенству  $|\varphi(t)| \leq M_1 |\varphi(0)|$ , если  $|\varphi(0)| \leq a/M_1$ .

Указание. Показать, что  $|\varphi(t)| \leq M|\varphi(0)| \exp [M \int_0^t g(s) ds]$ .

2. Ясно, что в задаче 1  $e^{tA} = U_1(t) + U_2(t)$ , где матрица  $U_1(t)$  содержит элементы, которые являются суммами экспоненциальных членов  $e^{i\lambda_j t}$  для действительных  $\lambda_j$ ,  $|U_1(t)| \leq K_1$ ,  $-\infty < t < \infty$ , а  $|U_2(t)| \leq K_2 e^{-\sigma t}$ ,  $0 \leq t < \infty$ , для некоторого  $\sigma > 0$ ; здесь  $K_1$  и  $K_2$  — постоянные. Показать, что решению  $\varphi$  соответствует постоянный вектор  $p$ , такой, что  $\varphi(t) = U_1(t)p \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Указание. Показать, что существует вектор  $p$ , такой, что

$$\varphi(t) = e^{tA}p + \int_0^t U_1(t-s) f(s, \varphi(s)) ds - \int_t^\infty U_2(t-s) f(s, \varphi(s)) ds.$$

3. Другой метод изучения уравнения (3.6) и даже получения дальнейших результатов основан на формуле вариации постоянных

$$\varphi(s) = cE(s) - bE(s) \int_s^1 \frac{\sigma^{1-m}}{E(\sigma)} d\sigma - E(s) \int_s^1 \frac{h(\sigma, \varphi(\sigma)) \sigma^{-m}}{E(\sigma)} d\sigma,$$

где  $E(s) = e^{-as-m+1/(m-1)}$  для  $m > 1$  и, аналогично,  $E(s) = s^a$  для  $m = 1$ . Это уравнение используется с малой постоянной  $c$  и применяется метод последовательных приближений, получающийся при замене  $\varphi(\sigma)$  в правой части на  $\varphi_{n-1}(\sigma)$  и  $\varphi(s)$  в левой части на  $\varphi_n(s)$ . Член  $\varphi_0(s)$  полагаем тождественно равным нулю. Показать, что процесс сходится для малых  $c$  и  $s > 0$  и приводит к доказательству существования  $\varphi(s)$ , а значит, и к тому факту, что  $\varphi(s) \rightarrow 0$  при  $s \rightarrow 0+$ .

4. Показать, что результаты § 3 и 4 применимы к тому случаю, когда постоянная матрица  $A$  заменена на действительную периодическую матрицу  $P$  периода  $\omega$ .

Указание. Положить  $x = Z(t)y$ , где  $Z(t)e^{tB}$  — решение системы  $x' = P(t)x$ , а матрица  $B$  и периодическая матрица  $Z(t)$  могут быть выбраны действительными для действительных  $P(t)$ . Другой подход состоит в том, что в качестве матрицы  $Z(t)e^{tB}$ , о которой идет речь, принимают ту, которая имеет начальное значение  $E$ , и разбивают матрицу  $e^{tB}$ , если необходимо, на несколько частей, например  $U_1(t) + U_2(t)$ , причем каждая часть определяется порядком роста экспоненциальных членов, входящих в нее. Так как матрица  $Z e^{tB}$  действительная, то действительны и матрицы  $ZU_1$  и  $ZU_2$ . Следовательно, в формуле вариации постоянных появляются члены

$$V_j(t, \tau) = Z(t) U_j(t - \tau) Z^{-1}(\tau) \quad (j = 1, 2).$$

5. Рассмотрим действительную систему

$$x'_i = a_i x_i + f_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2),$$

где  $a_1 < a_2 < 0$ . Пусть  $f_i$  — функции класса  $C^1$  и пусть  $f_i$  и их частные производ-

ные первого порядка обращаются в нуль в точке  $(0, 0)$ . Используя теорему 4.4, показать, что, исключая переносы по оси  $t$ , система имеет точно одно решение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , удовлетворяющее условию

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \ln \frac{(|\varphi_1(t)| + |\varphi_2(t)|)}{t} = a_1.$$

Кроме того, показать, используя обобщение теоремы 4.2 на случай теоремы 4.4, что это решение лежит на кривой  $x_2 = \psi(x_1)$  класса  $C^1$  с  $\psi'(0) = 0$  и что  $\psi$  — аналитическая функция, если функции  $f_i$  аналитичны.

6. Показать, опираясь на теорему 4.5, что если

$$f_i = O[|x_1| + |x_2|^{1+\Delta}] \quad (\Delta > 0),$$

то для каждого выбора постоянной  $c$  дифференциальное уравнение задачи 5 имеет решение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , удовлетворяющее условиям  $\varphi_1(t) = O(e^{(a_2-\delta)t})$  и  $\varphi_2(t) = ce^{a_2 t} + O(e^{(a_2-\delta)t})$  для некоторого  $\delta > 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Так как случай  $c = 0$  должен совпадать с разобранным в задаче 5, то показать, что все другие решения должны удовлетворять предыдущим уравнениям. Показать, опираясь на это, что для всех решений, отличных от решений задачи 5,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)} = 0.$$

Выразить результаты задач 5 и 6 в терминах геометрического расположения решений как кривых в  $(x_1, x_2)$ -плоскости в окрестности начала.

7. Используя теоремы 4.1 и 4.2, показать, что действительная система, рассмотренная в задаче 5, но с  $a_2 > 0 > a_1$ , имеет, исключая переносы по  $t$ , в точности одно решение, стремящееся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , и что это решение лежит на кривой  $x_2 = \psi(x_1)$  класса  $C^1$ ,  $\psi'(0) = 0$ . Показать, что для  $t \rightarrow -\infty$  имеет место аналогичная ситуация, но  $x_1$  и  $x_2$  меняются ролями. Это случай *седла*. Выяснить, что изложенное в § 5 для этого случая имеет место. Показать, что  $\psi$  — аналитическая функция, если функции  $f_i$  аналитичны.

8. Рассмотрим действительную систему

$$x'_1 = -\alpha x_1 + \beta x_2 + f_1(x_1, x_2),$$

$$x'_2 = -\beta x_1 - \alpha x_2 + f_2(x_1, x_2),$$

где  $\alpha > 0$  и  $f_i$  — функции класса  $C^1$ , исчезающие вместе со своими частными производными первого порядка в начале. Пусть  $f_i = O[|x_1| + |x_2|^{1+\Delta}]$  для некоторого  $\Delta > 0$ . Используя теорему 4.5, показать, что существует  $\delta > 0$ , такое, что соответственно любому выбору постоянных  $c$  и  $\gamma$  существует единственное решение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , где

$$\varphi_1(t) = ce^{-\alpha t} \cos(\beta t + \gamma) + O(e^{-(\alpha+\delta)t}),$$

$$\varphi_2(t) = ce^{-\alpha t} \sin(\beta t + \gamma) + O(e^{-(\alpha+\delta)t})$$

при  $t \rightarrow \infty$ . Для  $\beta \neq 0$  это случай *фокуса* и для  $\beta = 0$  — случай *узла* в начале.

9. В задаче 8 показать, что если  $\omega = \operatorname{arctg}(\varphi_2/\varphi_1)$  и если  $\varrho = (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^{1/2}$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \omega(t) + \frac{\beta}{\alpha} \ln \varrho(t) \right] = \gamma + \frac{\beta}{\alpha} \ln c.$$

Показать, что, исключая переносы по  $t$ , постоянная, стоящая справа, определяет решение задачи 8 однозначно. Заметим, что случай  $\beta = 0$  также возможен. Показать, что знак предела можно опустить, если  $f_1 = f_2 = 0$ .

10. Рассмотрим действительную систему

$$x'_1 = -\lambda x_1 + f_1(x_1, x_2),$$

$$x'_2 = x_1 - \lambda x_2 + f_2(x_1, x_2),$$

где  $\lambda > 0$  и функции  $f_i$  такие же, как в задаче 8. Показать, что для любого выбора постоянных  $c_1$  и  $c_2$  существует единственное решение  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ , где

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= c_1 e^{-\lambda t} + O(e^{-(\lambda+\delta)t}), \\ \varphi_2(t) &= c_1 t e^{-\lambda t} + c_2 e^{-\lambda t} + O(e^{-(\lambda+\delta)t})\end{aligned}$$

и  $\delta > 0$ . Наоборот, показать, что для каждого решения существуют постоянные  $c_1, c_2$ , для которых выполняются предыдущие соотношения. Показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} + \frac{\ln \varphi_1}{\lambda} \right) = \frac{c_2}{c_1} + \frac{\ln c_1}{\lambda}$$

и что, исключая переносы по  $t$ , постоянная, стоящая справа, определяет решение однозначно. Показать, что знак предела может быть опущен, если  $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ .

11. Пусть условия теоремы 4.1 видоизменены так, что  $n - k$  характеристических корней матрицы  $A$ , имевших положительные действительные части, имеют теперь неотрицательные действительные части. Показать, что заключения, теоремы 4.1 остаются в силе со следующим изменением: не существует решений  $\varphi$ , не лежащих при  $t = t_0$  на многообразии  $S$  и удовлетворяющих неравенствам  $|\varphi(t)| < \eta$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln |\varphi(t)|}{t} < 0.$$

Указание.  $|U_1| \leq K e^{-(\alpha+\sigma)t}$  при  $t > 0$ ,  $|U_2| \leq K e^{-\sigma t}$  при  $t < 0$ .

12. Пусть функция  $F = F(t, x)$  по  $t$  имеет период  $T$ . Пусть уравнение  $x' = F(t, x)$  [(2.1)] имеет периодическое решение  $p$  периода  $T$  и пусть функции  $F$  и  $F_x$  принадлежат классу  $C$  в области  $(t, x)$ -пространства, которая содержит кривую  $(t, p(t))$ ,  $0 \leq t < \infty$ . Пусть  $\varphi = \varphi(t, a)$  — решение уравнения (2.1) с  $\varphi(0, a) = p(0) + a$ , где  $a$  — вектор с  $n$  компонентами. Показать, что уравнение первой вариации (2.4) имеет матрицу  $\varphi_a(t, 0)$  своим фундаментальным решением.

13. Предположим, что  $F$  и  $p$  такие, как в задаче 12. Пусть  $\xi = h(x)$  — однодоминичное преобразование с неисчезающим якобианом области  $x$ -пространства, содержащей замкнутую кривую  $x = p(t)$ , в  $\xi$ -пространство. Пусть  $x = g(\xi)$  и пусть  $h$  и  $g$  — функции класса  $C^2$ . Тогда уравнению (2.1) соответствует уравнение

$$\xi' = h_x(g(\xi)) F(t, g(\xi)), \quad (*)$$

которое имеет периодическое решение  $h(p(t))$ . Показать, что  $h(\varphi(t, a))$  есть решение уравнения (\*) для малых  $|a|$ . Показать, что  $h_x(\varphi(t, a)) \varphi_a(t, a)$  для  $a = 0$  есть фундаментальное решение уравнения первой вариации для уравнения (\*) относительно решения  $h(p(t))$ . Показать, что характеристические показатели одни и те же для преобразованного и первоначального случаев.

Указание. Так как  $h_x(p(t)) \varphi_a(t, 0)$  — фундаментальная матрица, то характеристические показатели получаются из логарифма матрицы

$$\varphi_a^{-1}(0, 0) h_x^{-1}(p(0)) h_x(p(T)) \varphi_a(T, 0),$$

которая совпадает с матрицей  $\varphi_a^{-1}(0, 0) \varphi_a(T, 0)$ .

14. Пусть  $V$  — функция класса  $C^1$  в  $x$ -пространстве для малых  $|x|$ . Пусть  $V(x) > 0$  для  $x \neq 0$  и  $V(0) = 0$ . Показать, что если  $|\xi|$  мало, то решения задачи

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = \xi$$

стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , если существует постоянная  $k > 0$ , такая, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) f_i(t, x) \leq -kV(x)$$

для  $t \geq 0$  и малых  $|x|$ .

Указание. Пусть  $\varphi$  — решение системы  $x' = f(t, x)$ . Пусть  $F(t) = V(\varphi(t))$ . Тогда  $dF/dt \leq -kF$ .

## Глава XIV

### ВОЗМУЩЕНИЯ СИСТЕМ, ИМЕЮЩИХ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ

#### § 1. НЕАВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Большое значение имеет изучение поведения системы

$$x' = g(t, x) + \mu h(t, x, \mu) \quad (1.1)$$

при малых  $|\mu|$ , основывающееся на известном поведении этой системы для  $\mu = 0$ . Система (1.1) является частным случаем системы

$$x' = f(t, x, \mu). \quad (1.2)$$

В системе (1.2)  $\mu$  может быть действительным вектором. Общая характеристика зависимости решений от параметра  $\mu$  была рассмотрена в § 7 гл. I. Здесь будет рассмотрен случай особой важности, в котором система (1.2) при  $\mu = 0$  имеет действительное периодическое решение  $p$  с периодом  $T$ . Предполагается, что функция  $f$  по  $t$  периодична с периодом  $T$ . (Заметим, что  $T$  не обязательно наименьший период  $p$  или  $f$ . Заметим также, что  $f$  не обязательно зависит от  $t$ .)

В теореме 7.5 гл. I, в которой доказано существование частных производных  $\partial\varphi/\partial\xi_i$  решения  $\varphi$  относительно начальных значений  $\xi_i$ , предполагалось, что производная  $f_\mu$  непрерывна, точно так же как производная  $f_x$ . Однако если использовать метод теоремы 7.2 гл. I, то существование производной  $\varphi_\xi$  получается при единственном предположении, что производная  $f_x$  непрерывна. Здесь мы сделаем это предположение, хотя на практике производная  $f_\mu$  обычно существует и более того, обычно функция  $f$  аналитична по совокупности переменных  $(x, \mu)$ .

Будем предполагать, что функция  $f$  непрерывна по совокупности переменных  $(t, x, \mu)$ , когда точка  $(t, x)$  находится в некоторой области  $V$   $(t, x)$ -пространства, содержащей кривую  $(t, p(t))$ , и когда  $|\mu|$  мало. Предполагается также, что  $f$  имеет частные производные первого порядка относительно компонент  $x_i$  вектора  $x$ , которые непрерывны по  $(t, x, \mu)$ .

В этой главе будет встречаться первая вариация, определенная в § 2 гл. XIII.

**Теорема 1.1.** *Если функция  $f$  удовлетворяет высказанным условиям и если первая вариация системы (1.2) для  $\mu = 0$  относительно решения  $p$  не имеет решений с периодом  $T$ , то для малых  $|\mu|$  си-*

система (1.2) имеет решение  $q = q(t, \mu)$ , периодическое по  $t$  с периодом  $T$ , непрерывное по совокупности переменных  $(t, \mu)$  и такое, что  $q(t, 0) = p(t)$ . Существует только одно такое решение.

Первая вариация есть линейная система с периодическими коэффициентами

$$y' = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(t, p(t), 0) y_j = f_x(t, p(t), 0) y, \quad (1.3)$$

где матрица  $f_x(t, p(t), 0)$  имеет период  $T$ . Условие, что система (1.3) не имеет решений с периодом  $T$ , эквивалентно тому, что линейная система (1.3) не имеет характеристических показателей, кратных  $2\pi i/T$ .

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим через

$$\varphi = \varphi(t, a, \mu)$$

решение системы (1.2), которое принимает при  $t = 0$  начальное значение  $p(0) + a$ , где  $|a|$  мало. Из единственности решения  $\varphi$  следует, что для того, чтобы оно имело период  $T$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi(T, a, \mu) = \varphi(0, a, \mu)$ , или

$$\varphi(T, a, \mu) - p(0) - a = 0.$$

Для  $\mu = 0$  эта система имеет решение  $a = 0$ . Если якобиан этой системы, взятый относительно  $a$ , не обращается в нуль при  $\mu = 0$ ,  $a = 0$ , то эта система в окрестности точки  $\mu = 0$ ,  $a = 0$  имеет единственное решение  $a = a(\mu)$ , причем функция  $a$  непрерывна по  $\mu$  и  $a(0) = 0$ . Якобиан является определителем матрицы

$$\varphi_a(T, 0, 0) - E. \quad (1.4)$$

Если якобиан не обращается в нуль, то существование периодического решения  $q$  системы (1.2) для малых  $|\mu|$  получим, положив  $\varphi(t, a(\mu), \mu) = q(t, \mu)$ . Кроме того, в окрестности кривой  $x = p(t)$  это решение определяется однозначно, ибо функция  $a(\mu)$  единственна. Важным обстоятельством является то, что якобиан зависит только от  $f(t, x, 0)$ , ибо в (1.4)  $\mu = 0$ . Таким образом, в случае системы (1.1) якобиан не зависит от  $h$ .

Якобиан тесно связан с первой вариацией (1.3) системы (1.2) относительно решения  $p$ . В самом деле, если уравнение

$$\varphi'(t, a, \mu) = f(t, \varphi(t, a, \mu), \mu)$$

продифференцировать относительно компонент  $a_i$  вектора  $a$ , то получим при  $\mu = 0$ ,  $a = 0$

$$\varphi'_a(t, 0, 0) = f_x(t, \varphi(t, 0, 0), 0) \varphi_a(t, 0, 0),$$

или, так как  $\varphi(t, 0, 0) = p(t)$ ,

$$\varphi'_a(t, 0, 0) = f_x(t, p(t), 0) \varphi_a(t, 0, 0).$$

Таким образом, матрица  $\Psi$ , определяемая равенством

$$\Psi(t) = \varphi_a(t, 0, 0), \quad (1.5)$$

есть матрица-решение системы (1.3), и, так как  $\varphi_a(0, 0, 0) = E$ , эта матрица фундаментальная. Следовательно, соответствующие (1.3) мультиплликаторы являются корнями уравнения

$$\det(\Psi(T) - \lambda E) = 0. \quad (1.6)$$

Но, согласно (1.5), матрица  $(\Psi(T) - E)$  в точности совпадает с матрицей (1.4), определитель которой равен якобиану. Таким образом, якобиан обращается в нуль в том и только в том случае, когда уравнение (1.6) имеет своим корнем  $\lambda = 1$ . Необходимое и достаточное условие того, что уравнение (1.3) имеет решение с периодом  $T$ , состоит как раз в том, что  $\lambda = 1$  есть корень уравнения (1.6), так что теорема установлена.

Если характеристические показатели системы (1.3) все имеют отрицательные действительные части, то решение  $p$  системы (1.2) для  $\mu = 0$  асимптотически устойчиво. Имеет место следующий результат.

**Теорема 1.2.** *Если действительные части характеристических показателей системы (1.3) — первой вариации системы (1.2) для  $\mu = 0$  относительно решения  $p$  — все отрицательны, то система (1.3) не может иметь периодических решений, так что заключение теоремы 1.1 справедливо. Кроме того, в этом случае периодическое решение  $q = q(t, \mu)$  системы (1.2) асимптотически устойчиво, если только  $|\mu|$  мало.*

Доказательство. Первая часть теоремы очевидна. Чтобы доказать устойчивость решения  $q$ , заметим, что первая вариация в этом случае является системой с периодическими коэффициентами

$$y' = f_x(t, q(t, \mu); \mu) y, \quad (1.7)$$

причем система (1.7) при  $\mu = 0$  принимает вид (1.3). Таким образом, если  $\Psi = \Psi(t, \mu)$  — фундаментальное решение системы (1.7), удовлетворяющее условию  $\Psi(0, \mu) = E$ , то мультиплликаторы системы (1.7) являются характеристическими корнями матрицы  $\Psi(T, \mu)$ . Так как матрица  $\Psi$  при малых  $|\mu|$  по  $\mu$  непрерывна, то, поскольку характеристические корни матрицы  $\Psi(T, 0)$  по абсолютной величине меньше единицы, это же самое заключение верно для матрицы  $\Psi(T, \mu)$  при малых  $|\mu|$ . Теперь доказательство теоремы 1.2 получим, используя теорему 2.1 гл. XIII.

Пусть, далее, функция  $f$  для каждого  $t$  аналитична по переменным  $(x, \mu)$  для точки  $(t, x)$  из  $V$  и малых  $|\mu|$ . Тогда из теоремы существования 8.4 гл. I следует, что функция  $\varphi = \varphi(t, \alpha, \mu)$  аналитична по  $\alpha$  и  $\mu$  для малых  $|\alpha|$  и  $|\mu|$  на интервале  $0 \leq t \leq T$ . Не обращение в нуль якобиана матрицы (1.4) теперь обеспечивает не только существование и единственность функции  $\alpha = \alpha(\mu)$ , но также аналитичность  $\alpha$  по  $\mu$ . Таким образом, функция  $q$  аналитична по  $\mu$  для малых  $|\mu|$  и любого  $t$ .

Для упрощения предположим теперь, что вектор  $\mu$  имеет только одну компоненту, т. е. является скаляром. В силу аналитичности

функция  $q$  разлагается в ряд по степеням  $\mu$  с непрерывными по  $t$  коэффициентами, ибо  $q$  непрерывна по совокупности переменных  $(t, \mu)$ . Степенной ряд имеет вид

$$q(t, \mu) = p^{(0)}(t) + \mu p^{(1)}(t) + \mu^2 p^{(2)}(t) + \dots, \quad (1.8)$$

где  $p^{(0)}(t) = p(t)$  и в силу периодичности  $q$  коэффициенты  $p^{(j)}$  для всех  $j$  также имеют период  $T$ .

Используя ряд (1.8) в дифференциальном уравнении (1.2), получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{dp^{(j)}}{dt}(t) \mu^j = f(t, q(t, \mu), \mu).$$

Так как правая часть для малых  $|\mu|$  аналитична по  $\mu$ , то ее можно разложить по степеням  $\mu$ . Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получаем при  $p^{(0)}(t) = p(t)$  последовательность уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dp^{(0)}}{dt}(t) &= f(t, p^{(0)}(t), 0), \\ \frac{dp^{(1)}}{dt}(t) &= f_x(t, p^{(0)}(t), 0) p^{(1)}(t) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, p^{(0)}(t), 0), \\ \frac{dp^{(2)}}{dt}(t) &= f_x(t, p^{(0)}(t), 0) p^{(2)}(t) + F^{(2)}(t), \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.9)$$

где функция  $F^{(2)}$  определяется через коэффициенты  $p^{(0)}$  и  $p^{(1)}$  и, вообще, функция  $F^{(m)}$  определяется через коэффициенты  $p^{(j)}$ ,  $j = 0, 1, \dots, m-1$ . Таким образом, эта процедура ведет к формальному процессу определения каждого коэффициента  $p^{(k)}$  через коэффициенты  $p^{(j)}$ ,  $j < k$ , при помощи решения линейной системы дифференциальных уравнений.

Так как существование  $q$  как аналитической функции  $\mu$  было доказано, то система (1.9) имеет своими решениями нужные периодические функции  $p^{(j)}$ ,  $j \geq 1$ . Справедливо также, что не существует других решений с периодом  $T$  для системы (1.9); докажем это по индукции. Так как  $p^{(0)}(t) = p$ , что является одним из предположений, то здесь не возникает вопроса о единственности. Предположим, что следующее уравнение системы (1.9) имеет два различных решения  $p^{(1)}$  и  $\tilde{p}^{(1)}$  периода  $T$ . Тогда очевидно, что разность  $p^{(1)} - \tilde{p}^{(1)}$  есть решение уравнения (1.3) первой вариации. Но, по предположению, это уравнение не имеет периодических решений периода  $T$ . Таким образом,  $p^{(1)} = \tilde{p}^{(1)}$ .

Предположим теперь, что функции  $p^{(j)}$  определены для всех  $j < m$  для некоторого  $m$ . Тогда

$$\frac{dp^{(m)}}{dt}(t) = f_x(t, p^{(0)}(t), 0) p^{(m)}(t) + F^{(m)}(t), \quad (1.10)$$

где функция  $F^{(m)}$  однозначно определяется через функции  $p^{(j)}$ ,  $j < m$ . Таким образом, из тех же соображений, как и в случае  $m = 1$ ,

следует, что функция  $p^{(m)}(t)$  однозначно определяется посредством уравнения (1.10) и того обстоятельства, что она периодична с периодом  $T$ . Это доказывает утверждение о том, что система (1.9) имеет одну и только одну систему периодических решений  $p^{(j)}$ ,  $j \geq 1$ , периода  $T$  и что эти решения могут быть получены при помощи решения последовательности линейных дифференциальных уравнений (1.9) для  $j = 1, 2, \dots$ .

## § 2. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ

Примером изучаемых здесь систем является

$$x' = f(x) + \mu g(x, \mu), \quad (2.1)$$

где  $|\mu|$  мало. Более общая постановка, в которой  $\mu$  может быть вектором, такова :

$$x' = f(x, \mu). \quad (2.2)$$

Система (2.2) действительна для действительных  $x$  и  $\mu$ . Здесь предполагается, что для  $\mu = 0$  система (2.2) имеет периодическое решение  $p$  с периодом  $T_0$ . Это решение  $x = p(t)$  может рассматриваться как замкнутая кривая в  $x$ -пространстве. Пусть  $V$  — область в  $x$ -пространстве, содержащая кривую  $x = p(t)$ . Пусть  $f$  — функция класса  $C^1$  по  $(x, \mu)$  для  $x$  из  $V$  и малых  $|\mu|$ . На самом деле достаточно существования и непрерывности производной  $f_x$  для  $x$  из  $V$  и малых  $|\mu|$ .

Первая вариация системы (2.2) для  $\mu = 0$  относительно решения  $p$  имеет вид

$$y' = f_x(p(t), 0)y. \quad (2.3)$$

Система (2.3) имеет периодическое решение с периодом  $T_0$ , а именно  $p'$ . Таким образом, в случае системы (2.2) условия теоремы 1.1 не могут выполняться и требуется другой результат.

Пусть  $\Psi$  — фундаментальная матрица для системы (2.3), удовлетворяющая условию  $\Psi(0) = E$ . Факт наличия у системы (2.3) решения с периодом  $T_0$  эквивалентен тому, что для матрицы  $\Psi(T_0)$  единица является характеристическим корнем.

**Теорема 2.1.** *Если функция  $f$  удовлетворяет сформулированным выше условиям и если для системы (2.3) матрица  $\Psi(T_0)$  имеет единицу простым корнем, то для малых  $|\mu|$  уравнение (2.2) имеет решение  $q = q(t, \mu)$  с периодом  $T(\mu)$ . Как  $q$ , так и  $T$  по  $\mu$  непрерывны для малых  $|\mu|$ ;  $q(t, 0) = p(t)$  и  $T(0) = T_0$ . Функции  $q(t, \mu)$  и  $T(\mu)$  определяются однозначно.*

Чтобы пояснить излагаемое ниже доказательство, приведем следующую геометрическую интерпретацию. При помощи вращения и переноса  $x$ -пространства можно добиться того, что касательный вектор  $p'(0)$  будет параллелен оси  $x_1$  и первая компонента  $p_1(0)$  вектора  $p(0)$  будет равняться нулю. Таким образом,  $p_1(0) = 0$  и

$p'_j(0) = 0, j = 2, \dots, n$ . Решение системы (2.2) для малых  $|\mu|$ , близкое к некоторой точке кривой  $x = p(t)$ , будет оставаться в силу непрерывности решения относительно начальных значений и параметра  $\mu$  вблизи  $x = p(t)$  на интервале изменения  $t$  длины  $2T_0$ . Так как кривая  $p$  должна пересечь плоскость  $x_1 = 0$  в этой области изменения  $t$ , то это же произойдет и с решением системы (2.2). Так как система (2.2) не содержит явно  $t$ , то интегральная кривая в  $x$ -пространстве однозначно определяется координатами точки пересечения с плоскостью  $x_1 = 0$ . Таким образом, чтобы определить при фиксированном  $\mu$  решение системы (2.2) как кривую в  $x$ -пространстве, следует задать только  $n-1$  параметров.

Доказательство теоремы 2.1. Как и прежде, предположим, что вектор  $p'(0)$  параллелен оси  $x_1$ . Рассмотрим для малых  $|\mu|$  решение системы (2.2), которое принимает при  $t = 0$  значение  $p(0) + \alpha$ , где  $|\alpha|$  мало и  $\alpha_1 = 0$ . Обозначим это решение через  $\varphi = \varphi(t, \alpha, \mu)$ . Чтобы это решение было периодическим с периодом  $T = T_0 + \tau$ , где  $|\tau|$  мало, необходимо и достаточно, чтобы

$$\varphi(T_0 + \tau, \alpha, \mu) - p(0) - \alpha = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) имеет при  $\mu = 0$  решение  $\alpha = 0, \tau = 0$ . Если якобиан относительно переменных  $(\tau, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  не обращается в нуль при  $\alpha = 0, \tau = 0, \mu = 0$ , то (2.4) имеет единственное решение для малых  $|\mu|, |\alpha|$  и  $|\tau|$ . Так как  $(\partial\varphi/\partial t)(T_0, 0, 0) = p'(T_0) = p'(0)$ , то якобиан равен определителю матрицы

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{dp_1}{dt}(0) & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial\alpha_n} \\ 0 & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_2} - 1 & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial\alpha_n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial\alpha_n} - 1 \end{array} \right), \quad (2.5)$$

где производная  $\partial\varphi_i/\partial\alpha_j$  берется в точке  $(T_0, 0, 0)$ . Если якобиан не обращается в нуль, то  $\alpha$  и  $\tau$  однозначно определяются как непрерывные функции  $\mu$  для малых  $|\mu|$ . Далее,  $\alpha(0) = 0, \tau(0) = 0$ . Таким образом,  $\varphi(t, \alpha(\mu), \mu) = q(t, \mu)$  есть периодическая функция с периодом  $T_0 + \tau(\mu)$ . Так как  $p'_1(0) \neq 0$ , то не обращение в нуль якобиана эквивалентно не обращению в нуль алгебраического дополнения элемента  $dp_1/dt$  матрицы (2.5).

Если  $\alpha_1$  не фиксируется, то фундаментальное решение  $\Psi$  дается матрицей  $\varphi_a(t, 0, 0)$  с элементами  $\partial\varphi_i/\partial\alpha_j$ . Таким образом, уравнение для определения характеристических корней матрицы  $\Psi(T_0)$  имеет вид

$$\det(\varphi_a(T_0, 0, 0) - \lambda E) = 0. \quad (2.6)$$

Так как  $(\partial\varphi_j/\partial\alpha_1)(0, 0, 0) = 0$  для  $j \geq 2$  и так как  $(\partial\varphi/\partial\alpha_1)(t, 0, 0)$  есть решение системы (2.3), то решение  $(\partial\varphi/\partial\alpha_1)(t, 0, 0)$  есть некоторое кратное  $p'$  и поэтому периодично с периодом  $T_0$ , так что

$(d\varphi_j/d\alpha_1)(T_0, 0, 0) = 0, j \geq 2$ . Значит, только первый элемент в первом столбце матрицы, стоящей слева в уравнении (2.6), не равен нулю. Так как  $(\partial\varphi_1/\partial\alpha_1)(0, 0, 0) = 1 = (\partial\varphi_1/\partial\alpha_1)(T_0, 0, 0)$ , то алгебраическое дополнение элемента  $dp_1/dt$  матрицы (2.5) может обращаться в нуль лишь в том случае, когда  $\lambda = 1$  является кратным корнем уравнения (2.6). Это доказывает теорему.

Так как  $r'$  — решение уравнения первой вариации (2.3), то 1 есть характеристический корень матрицы  $\Psi(T_0)$ , что уже было установлено. Если остальные  $n-1$  характеристических корней все по абсолютной величине меньше единицы, то решение  $r$  имеет асимптотически устойчивую траекторию (асимптотически орбитально устойчиво) и справедлив следующий результат.

**Теорема 2.2.** *Если  $n-1$  характеристических корней, соответствующих первой вариации (2.3) системы (2.2) с  $\mu = 0$ , по абсолютной величине меньше 1, то, очевидно, утверждение теоремы 2.1 должно выполняться. Кроме того, периодическое решение  $q = q(t, \mu)$  системы (2.2) для малых  $|\mu|$  имеет асимптотически устойчивую траекторию.*

Доказательство очень похоже на доказательство теоремы 1.2. Вкратце, если  $\Psi = \Psi(t, \mu)$  — решение системы  $y' = f_x(q(t, \mu), \mu)y$  с  $\Psi(0, \mu) = E$ , то матрица  $\Psi(T(\mu), \mu)$  для малых  $\mu$  непрерывна и  $\Psi(T_0, 0) = \Psi(T_0)$  для  $\mu = 0$ . Поэтому, так как матрица  $\Psi(T_0)$  имеет  $n-1$  характеристических корней, меньших по абсолютной величине единицы, это же должно выполняться в силу соображений непрерывности для матрицы  $\Psi(T(\mu), \mu)$ .

В случае если функция  $f$  в (2.2) аналитична по переменным  $(x, \mu)$  для  $x$  из  $V$  и малых  $|\mu|$ , из теоремы 8.1 гл. I следует, что функция  $r$  аналитична по  $t$ , и при помощи легкой модификации теоремы 8.4 гл. I получаем, что функция

$$\varphi = \varphi(t, a, \mu)$$

аналитична по переменным  $(t, a, \mu)$  для малых  $|a|$ ,  $|\mu|$  и фиксированного конечного интервала изменения  $t$ . Из необращения в нуль якобиана [определителя матрицы (2.5)] следует, что функции  $a$  и  $\tau$  аналитичны по  $\mu$ . Итак,  $q$  аналитично по переменным  $(t, \mu)$  и  $T$  аналитичен по  $\mu$  для малых  $|\mu|$ .

Для упрощения предположим, начиная отсюда, что  $\mu$  — скаляр. В силу аналитичности функций  $q$  и  $T$ , если  $t = sT(\mu)$ , то функция

$$q(sT(\mu), \mu) = r(s, \mu)$$

по  $\mu$  аналитична для малых  $|\mu|$  и по  $s$  периодична с периодом 1. Таким образом,

$$r(s, \mu) = r^{(0)}(s) + \mu r^{(1)}(s) + \mu^2 r^{(2)}(s) + \dots, \quad (2.7)$$

$$T(\mu) = T_0 + \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \dots, \quad (2.8)$$

где коэффициенты  $r^{(i)}(s)$  периодичны с периодом 1, ибо такова функ-

ция  $r$ . Полагая  $\mu \rightarrow 0$ , получаем, что  $r^{(0)}(s) = p(sT_0)$ . Система (2.2) принимает вид

$$\frac{dx}{ds} = T(\mu) f(x, \mu).$$

Так как  $r$  — решение, то для малых  $|\mu|$

$$\frac{dr^{(0)}}{ds}(s) + \mu \frac{dr^{(1)}}{ds}(s) + \mu^2 \frac{dr^{(2)}}{ds}(s) + \dots = (T_0 + \mu T_1 + \dots) f(r(s, \mu), \mu).$$

Разлагая правую часть по степеням  $\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{dr^{(0)}}{ds} &= T_0 f(r^{(0)}, 0), \\ \frac{dr^{(1)}}{ds} &= T_0 f_x(r^{(0)}, 0) r^{(1)} + T_1 f(r^{(0)}, 0) + T_0 \frac{\partial f}{\partial \mu}(r^{(0)}, 0), \\ &\vdots \\ \frac{dr^{(m)}}{ds} &= T_0 f_x(r^{(0)}, 0) r^{(m)} + T_m f(r^{(0)}, 0) + F^{(m)}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функция  $F^{(m)}$  зависит только от  $r^{(j)}$ ,  $j < m$ , и  $T_j$ ,  $j < m$ . Кроме (2.9), имеем равенство  $r_1(0, \mu) = p_1(0)$ . Таким образом,  $r_1^{(j)}(0) = 0$ ,  $j = 1, 2, \dots$

Выражения  $r(s, \mu)$  и  $T(\mu)$ , определяемые равенствами (2.7) и (2.8), являются решениями системы (2.9). Покажем, что система (2.9) определяет функции  $r^{(j)}$  и  $T_j$  однозначно. Таким образом, если функции  $r^{(j)}$  и  $T_j$ ,  $j \geq 1$ , найдены как решения системы (2.9) при условии, что  $r_1^{(j)}(0) = 0$  и  $r^{(j)}$  — периодическая функция с периодом 1, то в результате получаем  $r$  и  $T$ . Система представляет собой, следовательно, удобное средство для получения функций  $r$  и  $T$ .

Так как  $r^{(0)}$  и  $T_0$  даны, то доказательство начинается с  $r^{(1)}$  и  $T_1$ . Пусть существуют два решения системы (2.9) для  $m = 1$ :  $(r^{(1)}, T_1)$  и  $(\tilde{r}^{(1)}, \tilde{T}_1)$ . Обозначим разность  $r^{(1)} - \tilde{r}^{(1)}$  через  $h$  и разность  $T_1 - \tilde{T}_1$  через  $aT_0$ . Тогда  $h$  периодична с периодом 1 и  $h_1(0) = 0$ . Вычитание соответствующих уравнений показывает, что  $h$  является решением уравнения

$$\frac{dw}{ds} = P(s) w + aT_0 f(r^{(0)}(s), 0), \quad (2.10)$$

где  $P(s) = T_0 f_x(r^{(0)}(s), 0)$  — матрица коэффициентов уравнения первой вариации для системы (2.2) с заменой  $t$  на  $sT_0$ . В самом деле, уравнение первой вариации имеет вид

$$\frac{dy}{ds} = P(s) y, \quad (2.11)$$

и периодическим решением системы (2.11) является  $\psi^{(1)} = dr^{(0)}/ds$ . Кроме того, по предположению, характеристический корень 1, соответствующий периодическому решению, является простым. Осталь-

ные  $n-1$  корней все отличны от единицы. Используя первое уравнение (2.9), придадим уравнению (2.10) вид

$$\frac{dw}{ds} = P(s) w + a \psi^{(1)}(s), \quad (2.12)$$

где  $w = h(s)$  будет решением. Поскольку  $\psi^{(1)}$  — решение уравнения (2.11), легко проверить, что если

$$\psi(s) = h(s) - as\psi^{(1)}(s), \quad (2.13)$$

то  $\psi$  — решение уравнения (2.11).

Если решениями уравнения (2.11) в канонической форме являются  $\psi^{(i)}$ , где  $\psi^{(1)}$  уже определено, и

$$\psi^{(i)}(1) = \lambda_i \psi^{(i)}(0) + d_i \psi^{(i-1)}(0) \quad (i = 2, \dots, n),$$

то  $d_2 = 0$ , так как  $\lambda_1 = 1$  — простой характеристический корень. Используя, что

$$\psi = \sum_{i=1}^n k_i \psi^{(i)},$$

и периодичность функции  $h$ , получаем

$$\sum_{i=2}^n k_i (\lambda_i - 1) \psi^{(i)}(0) + \sum_{i=3}^n k_i d_i \psi^{(i-1)}(0) + a \psi^{(1)}(0) = 0. \quad (2.14)$$

Так как решения линейно независимы, то отсюда следует, что  $a = 0$ . Таким образом, из (2.13) находим, что  $h = \psi$ . В силу периодичности  $h$  это означает, что  $\psi$  должно совпадать с  $k\psi^{(1)}$  для некоторой постоянной  $k$ . Так как  $h_1(0) = 0$  и  $\psi_1^{(1)}(0) \neq 0$ , то  $k = 0$ . Таким образом,  $h(s) \equiv 0$  и единственность решений  $r^{(1)}$  и  $T_1$  доказана. Единственность решений  $r^{(2)}$  и  $T_2$  и т. д. получается аналогичным образом, и доказательство проводится по индукции.

### § 3. ВОЗМУЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ РЕШЕНИЕМ В НЕАВТОНОМНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$u'' + u = \mu f(t, u, u', \mu), \quad (3.1)$$

где  $f$  — периодическая функция по  $t$  с периодом  $2\pi$ . Первая вариация для случая  $\mu = 0$  есть просто уравнение  $u'' + u = 0$ , которое имеет два независимых решения периода  $2\pi$ . Таким образом, если записать (3.1) как систему, то ни теорема 1.1, ни теорема 2.1 (в случае, если функция  $f$  не зависит явно от времени) не может быть применена, так как соответствующий якобиан обращается в нуль. Тем не менее уравнение (3.1) имеет большое значение.

Вначале будет намечен метод для изучения уравнения (3.1), а затем будет рассмотрен случай общей системы. Небольшое упрощение может быть сделано при помощи переноса по  $t$  в (3.1)

на  $\gamma$ , где постоянная  $\gamma$  будет выбрана позже. Таким образом, (3.1) принимает вид

$$u'' + u = \mu f(t + \gamma, u, u', \mu). \quad (3.2)$$

Пусть  $a$  — постоянная, и рассмотрим решение  $\varphi(t) = \varphi(t, a, \gamma, \mu)$  уравнения (3.2), удовлетворяющее условиям  $\varphi(0) = a$ ,  $\varphi'(0) = 0$ . Очевидно, что из (3.2) получаем уравнение

$$\varphi(t) = a \cos t + \mu \int_0^t \sin(t-s) f(s + \gamma, \varphi(s), \varphi'(s), \mu) ds. \quad (3.3)$$

Для того чтобы функция  $\varphi$  имела по  $t$  период  $2\pi$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\varphi(2\pi) = a$  и  $\varphi'(2\pi) = 0$  или чтобы

$$H_j(a, \gamma, \mu) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (3.4)$$

где

$$H_1(a, \gamma, \mu) = \int_0^{2\pi} \sin s f(s + \gamma, \varphi(s, a, \gamma, \mu), \varphi'(s, a, \gamma, \mu), \mu) ds;$$

выражение для  $H_2$  аналогично, но с заменой  $\sin s$  на  $\cos s$ .

Предположим, что уравнения (3.4) для  $\mu = 0$  имеют решение  $a = a_0$  и  $\gamma = \gamma_0$ , так что  $H_j(a_0, \gamma_0, 0) = 0$ ,  $j = 1, 2$ . Тогда, если якобиан удовлетворяет условию

$$\frac{\partial(H_1, H_2)}{\partial(a, \gamma)}(a_0, \gamma_0, 0) \neq 0, \quad (3.5)$$

то  $a$  и  $\gamma$  однозначно определяются как непрерывные функции  $\mu$  вблизи точки  $\mu = 0$ . Так как якобиан вычисляется при  $\mu = 0$ , то явный вид функций  $H_1$  и  $H_2$  для использования в уравнении (3.5) находится из (3.3) при  $\mu = 0$ . Таким образом,

$$H_1(a, \gamma, 0) = \int_0^{2\pi} \sin s f(s + \gamma, a \cos s, -a \sin s, 0) ds, \quad (3.6)$$

и аналогичное выражение имеем для  $H_2(a, \gamma, 0)$ .

Если  $f(t, u, u', \mu) = au + \beta u^3 + c \cos t$ , где  $a$ ,  $\beta$  и  $c$  — действительные постоянные, то  $a$  и  $\gamma$  являются функциями от  $a$ ,  $\beta$  и  $c$  и также от  $\mu$ . Легко видеть, что уравнение  $H_1 = 0$  при этом выборе  $f$  дает  $\gamma_0 = 0$  и уравнение  $H_2 = 0$  принимает вид

$$aa + \frac{3\beta}{4} a^3 + c = 0, \quad (3.7)$$

что является уравнением для определения  $a_0$ . Легко проверить, что (3.5) теперь эквивалентно условию:  $a_0$  есть простой корень уравнения (3.7).

Уравнение (3.1) есть частный случай системы

$$x' = Ax + \mu f(t, x, \mu), \quad (3.8)$$

где  $A$  — постоянная действительная матрица с характеристическим корнем  $iN$  для некоторого целого  $N$  и  $f$  — действительная функция, периодическая по  $t$  с периодом  $2\pi$ . (Заметим, что  $2\pi$  не обязательно наименьший период функции  $f$ .) Невозмущенная система при  $\mu = 0$

$$x' = Ax \quad (3.9)$$

имеет тогда решение периода  $2\pi$ , так что теорема 1.1 неприменима. Пусть  $\varphi^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , — решения системы (3.9) периода  $2\pi$ . Тогда для любых постоянных  $c_j$  и  $\gamma_j$  сумма

$$\sum_{j=1}^k c_j \varphi^{(j)}(t + \gamma_j) \quad (3.10)$$

также является периодическим решением для (3.9). Не очевидно, для каких  $c_j$  и  $\gamma_j$  система (3.8) может иметь периодическое решение, стремящееся при  $\mu \rightarrow 0$  к выражению (3.10), если вообще такие  $c_j$  и  $\gamma_j$  существуют. Сейчас будут указаны достаточные условия для того, чтобы система (3.8) имела периодическое решение.

Полагая  $x = Py$ , где  $P$  — действительная неособая постоянная матрица, можно заменить систему (3.8) на систему для  $y$ , в которой матрица коэффициентов  $B = P^{-1}AP$  при  $\mu = 0$  имеет действительную каноническую форму. Более того, эта новая система удовлетворяет тем же условиям, что и (3.8). Поэтому будет предполагаться, что матрица  $A$  уже имеет следующую действительную каноническую форму:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_k & \\ & & & & B_1 \\ & & & & & B_2 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & B_m \\ & & & & & & & C \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

где неуказанные элементы равны нулю. Каждая матрица  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , есть квадратная матрица четного порядка  $\alpha_j$  вида

$$A_j = \begin{pmatrix} S_j & 0_2 & \cdots & 0_2 & 0_2 \\ E_2 & S_j & \cdots & 0_2 & 0_2 \\ 0_2 & E_2 & \cdots & 0_2 & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_2 & 0_2 & \cdots & E_2 & S_j \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

где  $O_2$  — нулевая квадратная матрица второго порядка,

$$S_j = \begin{pmatrix} 0 & -N_j \\ N_j & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$N_j$  — положительное целое число. (В дальнейшем  $E_k$  всегда будет обозначать  $k$ -мерную единичную матрицу,  $0 < k < n$ , и  $E = E_n$ .) Матрица  $A_j$  может иметь только две строки и два столбца; в этом случае она равна  $S_j$ . Каждая матрица  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , есть квадратная матрица порядка  $\beta_j$  и имеет вид

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

причем  $B_j$  может иметь только одну строку и только один столбец — в этом случае  $B_j$  состоит из одного элемента 0. Матрица  $C$  есть квадратная матрица порядка  $\gamma = n - \sum_{j=1}^k a_j - \sum_{j=1}^m \beta_j$  и не имеет характеристических корней вида  $iN$ , каково бы ни было целое число  $N$ , включая  $N = 0$ . Полезно заметить, что матрица  $C$  не обязана иметь каноническую форму.

Фундаментальная матрица для системы (3.9) имеет вид

$$e^{tA} = \left[ \begin{array}{c} e^{tA_1} \\ e^{tA_2} \\ \vdots \\ e^{tA_k} \\ e^{tB_1} \\ e^{tB_2} \\ \vdots \\ e^{tB_m} \\ e^{tC} \end{array} \right]. \quad (3.14)$$

Здесь

$$e^{tA_j} = \begin{pmatrix} e^{tS_j} & O_2 & \cdots & O_2 \\ te^{tS_j} & e^{tS_j} & \cdots & O_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{p_j-1} e^{tS_j}}{(p_j-1)!} & \frac{t^{p_j-2} e^{tS_j}}{(p_j-2)!} & \cdots & e^{tS_j} \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

где  $a_j = 2p_j$  и

$$e^{tS_j} = \begin{pmatrix} \cos N_j t & -\sin N_j t \\ \sin N_j t & \cos N_j t \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

в то время как

$$e^{tB_j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t^{\beta_j-1}}{(\beta_j-1)!} & \frac{t^{\beta_j-2}}{(\beta_j-2)!} & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Что касается матрицы  $e^{tC}$ , то из того факта, что характеристические корни  $C$  не имеют вида  $iN$ , где  $N$  — целое, следует, что

$$\det(e^{2\pi C} - E_\gamma) \neq 0. \quad (3.18)$$

Предположим теперь, что система (3.8) имеет единственное решение  $\varphi = \varphi(t, \mu, c)$ , где  $\varphi(0, \mu, c) = c$ , которое существует для  $t$  из некоторого интервала, содержащего интервал  $0 \leq t \leq 2\pi$ , и непрерывно по  $\mu$  для  $\mu$ , достаточно близких к  $\mu = 0$ . Используя формулу вариации постоянных, получаем из (3.8)

$$\varphi(t, \mu, c) = e^{tA}c + \mu \int_0^t e^{(t-s)A} f(s, \varphi(s, \mu, c), \mu) ds. \quad (3.19)$$

Из (3.19) и из единственности непосредственно следует, что необходимым и достаточным условием периодичности функции  $\varphi$  с периодом  $2\pi$  является условие

$$(e^{2\pi A} - E)c + \mu \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f(s, \varphi(s, \mu, c), \mu) ds = 0. \quad (3.20)$$

Это — система  $n$  уравнений для  $n$  неизвестных компонент вектора  $c$ . Для того чтобы указать достаточные условия для существования вектора  $c$ , необходимо проанализировать более детально структуру системы (3.20). Если бы существовала функция  $c = c_\mu$ , непрерывная по  $\mu$  для малых  $|\mu|$  и такая, что  $\varphi(t, \mu, c_\mu)$  имеет период  $2\pi$ , то из (3.20) при  $\mu \rightarrow 0$  мы получили бы

$$(e^{2\pi A} - E)c_0 = 0. \quad (3.21)$$

Таким образом, условие (3.21) необходимо для существования такого периодического решения  $\varphi = \varphi(t, \mu, c_\mu)$ . Заметим, что из (3.19) мы имеем  $\varphi(t, 0, c_0) = e^{tA}c_0$ , и, значит, (3.21) выражает необходимое и достаточное условие того, что  $\varphi(t, 0, c_0)$  есть периодическое решение системы (3.9) с периодом  $2\pi$ .

Из (3.15) и (3.16) имеем

$$e^{2\pi A_j} - E_{a_j} = \begin{pmatrix} 0_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ 2\pi E_2 & 0_2 & \cdots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{(2\pi)^{p_j-1} E_2}{(p_j-1)!} & \frac{(2\pi)^{p_j-2} E_2}{(p_j-2)!} & \cdots & 0_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

и из (3.17) —

$$e^{2\pi B_j} - E_{\beta_j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\pi & 0 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{(2\pi)^{\beta_j-1}}{(\beta_j-1)!} & \frac{(2\pi)^{\beta_j-2}}{(\beta_j-2)!} & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Как показывают теперь соотношения (3.22), (3.23) и (3.18), из (3.21) следует, что все компоненты  $c_{0i}$  вектора  $c_0$  равны нулю, за исключением, возможно, компонент с индексами  $i$ , соответствующими двум последним строкам каждой матрицы  $A_j$  или последней строке каждой матрицы  $B_j$ . Все эти индексы имеют следующий вид :

$$i = a_1 - 1, a_1,$$

$$i = a_1 + a_2 - 1, a_1 + a_2,$$

.

$$i = a_1 + \dots + a_k - 1, a_1 + \dots + a_k, \quad (3.24)$$

$$i = a_1 + \dots + a_k + \beta_1,$$

$$i = a_1 + \dots + a_k + \beta_1 + \beta_2,$$

.

$$i = a_1 + \dots + a_k + \beta_1 + \dots + \beta_m.$$

Индексы  $i$ , имеющие вид (3.24), будут называться *исключительными индексами*, а соответствующие компоненты любого вектора будут называться *исключительными компонентами*. Их число равно  $2k + m$  и исключительные компоненты  $c_{0i}$  вектора  $c_0$  не определяются равенством (3.21).

Чтобы пойти дальше, рассмотрим компоненты вектора, стоящего слева в уравнении (3.20), с индексами

$$\begin{aligned} j &= 1, 2, \\ j &= a_1 + 1, a_1 + 2, \\ &\vdots \\ j &= a_1 + \dots + a_{k-1} + 1, a_1 + \dots + a_{k-1} + 2, \\ j &= a_1 + \dots + a_k + 1, \\ j &= a_1 + \dots + a_k + \beta_1 + 1, \\ &\vdots \\ j &= a_1 + \dots + a_k + \beta_1 + \dots + \beta_{m-1} + 1, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Эти  $2k + m$  индексов будут называться *сингулярными индексами* и соответствующие компоненты вектора — *сингулярными компонентами*. Из (3.22) и (3.23) очевидно, что все сингулярные компоненты вектора  $(e^{2\pi A} - E)c_u$  равны нулю. Таким образом, все сингулярные

компоненты интеграла в (3.20) должны обращаться в нуль для всех  $\mu$ , достаточно близких к  $\mu = 0$ . Это дает уравнения

$$\left[ \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f(s, \varphi(s, \mu, c), \mu) ds \right]_j = 0 \quad (3.26)$$

для  $j$  из множества (3.25), где  $[ \dots ]_j$  обозначает  $j$ -ю компоненту. В частности, если  $\mu = 0$ , то  $\varphi(s, 0, c_0) = e^{sA} c_0$ , и таким образом, для сингулярных индексов

$$H_j(c_0) = \left[ \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f(s, e^{sA} c_0, 0) ds \right]_j = 0. \quad (3.27)$$

Если использовать периодичность  $e^{sA} c_0$  и  $f$ , то (3.27) можно заменить равенством

$$H_j(c_0) = \left[ \int_0^{2\pi} e^{sA} f(-s, e^{-sA} c_0, 0) ds \right]_j = 0.$$

Для  $\mu = 0$  все компоненты вектора  $c_0$ , отличные от исключительных, равны нулю. Таким образом, (3.27) есть система  $2k + m$  уравнений с  $2k + m$  неизвестными, а именно с компонентами  $c_{0i}$  вектора  $c$  с исключительными индексами  $i$ . Если  $\varphi = \varphi(t, \mu, c_\mu)$  существует как периодическое решение, то необходимо, чтобы уравнение (3.27) имело решение. Заметим, что уравнение (3.27) может быть явно выписано без решения нелинейной системы (3.8).

Предположим, что система (3.27) имеет решение для исключительных компонент вектора  $c_0$ , скажем  $c_{0i} = a_i$ . Обозначая через  $a$  вектор с компонентами  $a_i$  для исключительных индексов и нулями для остальных, получаем, что функция

$$p(t) = \varphi(t, 0, a)$$

есть периодическое решение системы (3.9) с периодом  $2\pi$ .

Чтобы доказать существование периодического решения системы (3.8) для малых  $|\mu|$ , сделаем следующие предположения:

(i)  $A$  — действительная постоянная матрица с канонической формой (3.11) — (3.13), по меньшей мере с одним характеристическим корнем вида  $iN$ , где  $N$  — целое.

(ii) Параметр  $\mu$  и функция  $f$  действительны и  $f$  имеет по  $t$  период  $2\pi$ .

(iii) Существует вектор  $a$ , удовлетворяющий уравнениям (3.21) и (3.27) для  $c_0 = a$ .

(iv) Функции  $f$ ,  $f_x$  непрерывны по совокупности переменных  $(t, x, \mu)$  для  $(t, x)$  из области  $V$ , содержащей внутри себя периодическое решение  $p(t) = e^{tA} a$  системы (3.9),  $0 \leq t \leq 2\pi$ , и для  $|\mu| < \delta$  при некотором  $\delta > 0$ <sup>1</sup>.

(v) Якобиан  $2k + m$  функций  $H_j$ , определенных в (3.27), где  $j$  — сингулярные индексы, относительно  $2k + m$  переменных  $c_{0i}$ , у которых  $i$  — исключительные индексы, при  $c_{0i} = a_i$  не равен нулю.

<sup>1</sup> См. второй абзац § 1.

**Теорема 3.1.** При предположениях (i) — (v) существует единственное периодическое решение  $q = q(t, \mu)$  системы (3.8) периода  $2\pi$  по  $t$ , которое непрерывно по совокупности переменных  $(t, \mu)$  для всех  $t$  и достаточно малых  $|\mu|$  и которое для  $\mu = 0$  сводится к решению  $q(t, 0) = p(t)$ .

З а м е ч а н и е. Если предположение (v) не выполняется, то необходим более детальный анализ, который здесь не проводится.

Д о к а з а т е льс т в о т е о р е м ы 3.1. Будет показано, что для достаточно малых  $|\mu|$  система (3.20) имеет единственное решение  $c = c_\mu$ , непрерывное по  $\mu$  и такое, что  $c_0 = a$ . Отсюда непосредственно следует, что  $q(t, \mu) = \varphi(t, \mu, c_\mu)$  — нужное решение. Существование и единственность решения  $\varphi(t, \mu, c)$  системы (3.8) для достаточно малых  $|\mu|$  и  $|c - c_0|$  такого, что  $\varphi(0, \mu, c) = c$ , прямо следует из предположения (iv).

Чтобы показать существование  $c = c_\mu$ , заменим систему уравнений (3.20) системами  $S_1(\mu, c)$  и  $S_2(\mu, c)$ , где  $S_1(\mu, c)$  состоит из компонент уравнения (3.20) с несингулярными индексами, а  $S_2(\mu, c)$  — из уравнений (3.26) с сингулярными индексами. Как было установлено выше, после формулы (3.23),  $S_1(0, c)$  — линейная однородная система для неисключительных компонент  $c_i$  вектора  $c$ , и так как определитель  $\Delta$  из коэффициентов не обращается в нуль, то единственным решением будет  $c_{0i} = 0$ , где  $i$  — неисключительные индексы. Система  $S_2(0, c)$  — это в точности система уравнений (3.27) с  $c = c_0$ , и, по предположению, эта система имеет решение  $c_{0i} = a_i$ , где  $i$  — исключительные индексы. Частные производные первого порядка левой части системы  $S_1(\mu, c)$  относительно исключительных компонент вектора  $c$  все равны нулю при  $\mu = 0$ ,  $c = a$ . Таким образом, совместный якобиан  $D(\mu, c)$  левых частей систем  $S_1(\mu, c)$  и  $S_2(\mu, c)$  относительно компонент вектора  $c$ , вычисленный при  $\mu = 0$  и  $c = a$ , есть произведение якобиана  $D_1(\mu, c)$  левой части системы  $S_1(\mu, c)$  относительно неисключительных компонент вектора  $c$ , вычисленного при  $\mu = 0$ ,  $c = a$ , и якобиана  $D_2(\mu, c)$  левой части системы (3.26) относительно исключительных компонент вектора  $c$ , вычисленного при  $\mu = 0$ ,  $c = a$ . Но  $D_1(0, a)$  — это в точности определитель  $\Delta$ , который не равен нулю, и  $D_2(0, a)$  — в точности якобиан, о котором говорится в предположении (v) и который не равен нулю. Поэтому, по теореме о неявной функции, комбинированная система  $S_1(\mu, c)$ ,  $S_2(\mu, c)$  имеет для достаточно малых  $|\mu|$  единственное решение  $c = c_\mu$ , непрерывное по  $\mu$  и, такое, что  $c_0 = a$ . Это завершает доказательство.

Что касается аналитических возмущений  $f$ , то ситуация такова :

**Теорема 3.2.** Предположим, что условия (i)–(v) выполнены, и в дополнение пусть  $f$  — аналитическая функция по переменным  $(x, \mu)$  для  $(t, x) \in V$  и  $|\mu| < \delta$ . Тогда функция  $q$  по  $\mu$  аналитична для достаточно малых  $|\mu|$ .

Д о к а з а т е льс т в о. Для  $(\mu, c)$ , достаточно близких к  $(0, c_0)$ , решение  $\varphi = \varphi(t, \mu, c)$  системы (3.8) аналитично по  $\mu$  и  $c$ , согласно

теореме существования для таких систем. Далее, функция  $c_\mu$  аналитична по  $\mu$ , согласно теореме о неявных функциях для аналитических систем. Таким образом, функция  $q(t, \mu) = \varphi(t, \mu, c_\mu)$  аналитична по  $\mu$ .

С точки зрения практики важно знать (в аналитическом случае), могут ли быть периодические коэффициенты  $q^{(i)}(t)$  (с периодом  $2\pi$ ) сходящегося степенного ряда

$$q(t, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i q^{(i)}(t) \quad (3.28)$$

вычислены рекуррентно. Как будет показано, это действительно так. Обозначим  $j$ -ю компоненту вектора  $q^{(i)}$  через  $q_j^{(i)}$ . Подставляя выражение (3.28) в (3.8) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , получаем

$$\begin{aligned} q^{(0)}(t) &= e^{tA} a, \\ \frac{dq^{(1)}}{dt}(t) &= Aq^{(1)}(t) + f(t, q^{(0)}(t), 0), \\ \frac{dq^{(2)}}{dt}(t) &= Aq^{(2)}(t) + f_x(t, q^{(0)}(t), 0) q^{(1)}(t) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(t, q^{(0)}(t), 0), \dots, \\ \frac{dq^{(j)}}{dt}(t) &= Aq^{(j)}(t) + f_x(t, q^{(0)}(t), 0) q^{(j-1)}(t) + F^{(j)}(t), \dots, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где функция  $F^{(j)}$  зависит только от  $q^{(l)}$  для  $0 \leq l \leq j-2$ . То, что существуют решения  $q^{(i)}$  системы дифференциальных уравнений (3.29), следует из существования решения  $q$ .

Покажем, что каждое уравнение в системе (3.29) имеет не более одного решения периода  $2\pi$ , и, таким образом, формальный процесс рекуррентного отыскания  $q^{(i)}$  дает  $q$ . Очевидно,  $q^{(1)}$  определяется вторым уравнением (3.29) с точностью до периодического решения однородного уравнения (3.9). Однако требование, что следующее уравнение системы (3.29) имеет периодическое решение  $q^{(2)}$ , определяет  $q^{(1)}$  однозначно. В самом деле, предположим противное. Тогда существуют два различных решения  $q^{(1)}$ , каждое из которых позволяет получить из следующего уравнения периодическое решение  $q^{(2)}$ . Обозначая разность между двумя  $q^{(1)}$  через  $\tilde{q}^{(1)}$  и между двумя  $q^{(2)}$  — через  $\tilde{q}^{(2)}$ , получаем, вычитая одно из уравнений для  $q^{(1)}$  из другого и поступая так же с уравнениями для  $q^{(2)}$ ,

$$\frac{d\tilde{q}^{(1)}}{dt}(t) = A\tilde{q}^{(1)}(t), \quad (3.30)$$

$$\frac{d\tilde{q}^{(2)}}{dt}(t) = A\tilde{q}^{(2)}(t) + f_x(t, e^{tA} a, 0) \tilde{q}^{(1)}(t). \quad (3.31)$$

Если  $\tilde{q}^{(2)}(0) = \tilde{a}^{(2)}$ , то из (3.31) следует, что

$$\tilde{q}^{(2)}(t) = e^{tA} \tilde{a}^{(2)} + \int_0^t e^{(t-s)A} f_x(s, e^{sA} a, 0) \tilde{q}^{(1)}(s) ds.$$

Так как  $\tilde{q}^{(2)}$  имеет период  $2\pi$ , то отсюда получаем

$$(e^{2\pi A} - E) \tilde{a}^{(2)} + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f_x(s, e^{sA} a, 0) \tilde{q}^{(1)}(s) ds = 0.$$

Беря компоненты этого равенства с сингулярными индексами  $j$  имеем

$$\left[ \int_0^{2\pi} e^{(2\pi-s)A} f_x(s, e^{sA} a, 0) \tilde{q}^{(1)}(s) ds \right]_j = 0. \quad (3.32)$$

Очевидно, что  $\tilde{q}^{(1)}(s)$ , будучи периодическим решением системы (3.30), имеет вид

$$\tilde{q}^{(1)}(s) = e^{sA} \tilde{a}^{(1)},$$

где неравными нулю компонентами  $\tilde{a}_j^{(1)}$  вектора  $\tilde{a}^{(1)}$  являются компоненты с исключительными индексами. Далее, система (3.32) относительно этих компонент  $\tilde{a}_j^{(1)}$  линейна и однородна; определитель из коэффициентов левой части системы (3.32) относительно  $a_j^{(1)}$  — это в точности якобиан  $2k+m$  функций  $H_j$  теоремы 3.1, который, по предположению, не равен нулю. Следовательно,  $\tilde{a}^{(1)} = 0$ , а значит, и  $\tilde{q}^{(1)}(t) \equiv 0$ . В точности такие же соображения показывают, что если векторы  $q^{(l)}$  однозначно определены для  $l \leq j$ , где  $j \geq 1$ , то вектор  $q^{(j+1)}$  также однозначно определен, что и дает результат по индукции.

**Теорема 3.3.** Если выполняются условия теоремы 3.2, то аналитическое решение  $q$  системы (3.8) может быть получено рекуррентно при помощи решения системы (3.29) для периодических коэффициентов  $q^{(i)}$  периода  $2\pi$  сходящегося степенного ряда (3.28). Каждый коэффициент  $q^{(i)}$ ,  $i \geq 1$ , определяется однозначно  $i$ -м уравнением системы (3.29) и тем фактом, что  $(i+1)$ -е уравнение имеет периодическое решение.

#### § 4. ВОЗМУЩЕНИЕ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ С ОБРАЩАЮЩИМСЯ В НУЛЬ ЯКОБИАНОМ

Здесь будет рассматриваться действительная система

$$x' = Ax + \mu f(x, \mu), \quad (4.1)$$

где  $A$  — действительная постоянная матрица,  $|\mu|$  мало и  $f$  — действительная функция, непрерывная по совокупности переменных  $(x, \mu)$  для малых  $|\mu|$  и  $x$  из области  $V$ , которая будет описана позже. В действительности будет предполагаться, что производная  $f_x$  непрерывна по совокупности переменных  $(x, \mu)$  для  $x$  из  $V$  и малых  $|\mu|$ . При  $\mu = 0$  система (4.1) принимает вид

$$x' = Ax. \quad (4.2)$$

Предполагается, что система (4.2) имеет периодическое решение периода  $2\pi$ . Заметим, что  $2\pi$  не обязательно наименьший период решения. Предполагается также, что матрица  $e^{2\pi A}$  не имеет единицу простым характеристическим корнем. Это последнее требование эквивалентно обращению в нуль якобиана, соответствующего матрице (2.5).

Как и в § 3, можно предполагать без ограничения общности, что матрица  $A$  имеет действительную каноническую форму, определяемую формулами (3.11)–(3.13). Таким образом, соотношения (3.14)–(3.18) также выполняются. Как и прежде, матрица  $C$  не обязательно имеет канонический вид.

Пусть система (4.1) имеет единственное решение  $\varphi = \varphi(t, \mu, c)$ , где  $\varphi(0, \mu, c) = c$ , которое существует для  $t$  в некотором конечном интервале и непрерывно по  $\mu$  для  $\mu$ , близких к  $\mu = 0$ . Тогда, как прежде,

$$\varphi(t, \mu, c) = e^{tA} c + \mu \int_0^t e^{(t-s)A} f(\varphi(s, \mu, c), \mu) ds. \quad (4.3)$$

Чтобы функция  $\varphi$  была периодической с периодом  $2\pi + \tau$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(e^{(2\pi+\tau)A} - E)c + \mu \int_0^{2\pi+\tau} e^{(2\pi+\tau-s)A} f(\varphi(s, \mu, c), \mu) ds = 0,$$

или

$$(e^{2\pi A} - E)c + e^{2\pi A}(e^{\tau A} - E)c + \mu \int_0^{2\pi+\tau} e^{(2\pi+\tau-s)A} f(\varphi(s, \mu, c), \mu) ds = 0. \quad (4.4)$$

Если функция  $\varphi = \varphi(t, \mu, c)$  периодическая с периодом  $2\pi + \tau$  и если функции  $c = c_\mu$  и  $\tau = \tau(\mu)$  непрерывны для малых  $|\mu|$  и  $\tau(0) = 0$ , то, так как  $\varphi(t, 0, c_0) = e^{tA}c_0$ ,

$$(e^{2\pi A} - E)c_0 = 0. \quad (4.5)$$

Как и в § 3, отсюда следует, что только компоненты вектора  $c_0$  с исключительными индексами могут быть отличны от нуля. (Очевидно, что в действительности  $\tau$  и  $\mu$  должны существовать лишь для малых  $\mu > 0$  и иметь пределы при  $\mu \rightarrow 0+$ .)

Предположим, что в канонической форме матрицы  $A$  встречается хотя бы одна матрица типа  $A_j$ . Исключительными индексами, соответствующими  $A_1$ , являются  $\alpha_1 - 1$  и  $\alpha_1$ . Компонента вектора  $e^{tA}c_0$  с индексом  $\alpha_1$  равна  $(c_0)_{\alpha_1-1} \sin N_1 t + (c_0)_{\alpha_1} \cos N_1 t$  и, следовательно, для каждого частного выбора коэффициентов  $(c_0)_{\alpha_1-1}$  и  $(c_0)_{\alpha_1}$  эта синусоида обращается в нуль при некотором  $t$  и имеет для этого значения не равную нулю первую производную; в противном случае оба коэффициента  $(c_0)_{\alpha_1-1}$  и  $(c_0)_{\alpha_1}$  обратились бы в нуль. В силу непрерывности компонента  $\varphi_{\alpha_1}$  вектора  $\varphi(t, \mu, c_\mu)$  также должна пересекать ось  $t$  для некоторого значения  $t$ . Система

(4.1) инвариантна относительно переносов по  $t$ . В дальнейшем будем предполагать, что компонента  $\varphi_{a_1}$  обращается в нуль при  $t = 0$ . Это означает, что

$$\varphi_{a_1}(0, \mu, c_\mu) = (c_\mu)_{a_1} = 0$$

для достаточно малых  $|\mu|$ , включая  $\mu = 0$ . Таким образом, задача сводится к отысканию условий, достаточных для существования функций  $c = c_\mu$  и  $\tau = \tau(\mu)$  с  $(c_\mu)_{a_1} = 0$ , удовлетворяющих уравнению (4.4).

Как в § 3, все компоненты вектора  $(e^{2\pi A} - E)c_\mu$  с сингулярными индексами равны нулю. Таким образом, уравнение (4.4) дает для компонент с этими индексами

$$\left[ e^{2\pi A} \left( \frac{e^{\tau A} - E}{\tau} \right) c_\mu \left( \frac{\tau}{\mu} \right) + \int_0^{2\pi + \tau} e^{(2\pi + \tau - s)A} f(\varphi(s, \mu, c_\mu), \mu) ds \right]_j = 0. \quad (4.6)$$

Пусть в (4.6)  $\mu \rightarrow 0$ ; член с интегралом стремится к пределу и, следовательно, другой член также приближается к пределу. Так как  $\tau \rightarrow 0$  при  $\mu \rightarrow 0$ , то (4.6) дает для компонент с сингулярными индексами

$$\left[ e^{2\pi A} A c_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{\tau}{\mu} \right) + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(e^{sA} c_0, 0) ds \right]_j = 0. \quad (4.7)$$

Заменяя  $s$  на  $2\pi - s$  и используя периодичность матрицы  $e^{sA} c_0$ , получаем равенство

$$\left[ e^{2\pi A} A c_0 \lim_{\mu \rightarrow 0} \left( \frac{\tau}{\mu} \right) + \int_0^{2\pi} e^{sA} f(e^{-sA} c_0, 0) ds \right]_j = 0,$$

которое может быть использовано вместо равенства (4.7).

Если хотя бы одна сингулярная компонента вектора  $e^{2\pi A} A c_0$  отлична от нуля, то из (4.7) следует существование предела отношения  $\tau/\mu$  при  $\mu \rightarrow 0$ , в то время как существование этого предела не следует из (4.7), если все компоненты вектора  $e^{2\pi A} A c_0$  с сингулярными индексами равны нулю. Систему (4.7), которая содержит уравнения только для сингулярных индексов, можно рассматривать как систему  $2k + m$  уравнений для  $2k + m$  неизвестных, которыми являются  $2k + m - 1$  компонент вектора  $c_0$  с исключительными индексами ( $(c_0)_{a_1} = 0$ ) и неизвестный предел отношения  $\tau/\mu$  при  $\mu \rightarrow 0$ .

Пусть  $\tau = \mu\nu$  и пусть

$$H_j(c_0, \nu) = \left[ \nu e^{2\pi A} A c_0 + \int_0^{2\pi} e^{(2\pi - s)A} f(e^{sA} c_0, 0) ds \right]_j, \quad (4.8)$$

где  $j$  пробегает сингулярные индексы. [Заметим, что  $H_j$  дается явно формулой (4.8) как функция  $c_0$  и  $\nu$ , причем не требуется, чтобы система (4.1) была решена.]

Для следующей теоремы существования *предполагается*:

(*1*)  $A$  — действительная постоянная матрица с канонической формой (3.11)–(3.13).

(*ii*) Параметр  $\mu$  и функция  $f = f(x, \mu)$  действительны.

(*iii*) Существуют вектор  $a$ , такой, что  $a_{a_1} = 0$ , с равными нулю неисключительными компонентами и число  $v_0$ , удовлетворяющие уравнениям  $H_j(a, v_0) = 0$ , где  $j$  — сингулярные индексы.

(*iv*) Функции  $f, f_x$  непрерывны по совокупности переменных  $(x, \mu)$  для  $x$  из области  $V$ , содержащей периодическое решение  $e^{tA}a$  периода  $2\pi$  системы (4.2), и для  $|\mu| < \delta$  при некотором  $\delta > 0$ .<sup>1</sup>

(*v*) Якобиан  $2k + m$  функций  $H_j$  [(4.8)] относительно  $2k + m - 1$  переменных  $(c_0)_i$ , где  $i$  — исключительные индексы ( $i \neq a_1$ ), и относительно переменной  $v$  не обращается в нуль для  $(c_0)_i = a_i$  ( $(c_0)_{a_1} = 0$ ) и  $v = v_0$ .

**Теорема 4.1.** В *предположениях* (*i*)–(*v*) существует *периодическое решение*  $q = q(t, \mu)$  *системы* (4.1) *с периодом*  $2\pi + \pi(\mu)$ , *причем функция*  $q$  *непрерывна по совокупности переменных*  $(t, \mu)$  *для всех*  $t$  *и достаточно малых*  $|\mu|$ , *функция*  $\tau = \tau(\mu)$  *непрерывна по*  $\mu$ ,  $q(t; 0) = e^{tA}a$ ,  $\tau(\mu)/\mu \rightarrow v_0$  *при*  $\mu \rightarrow 0$  *и*  $q_{a_1}(0, \mu) = 0$ . *Не существует другого периодического решения системы* (4.1), *которое при*  $\mu \rightarrow 0$  *обращается в*  $e^{tA}a$ .

**Замечание.** Роль  $a_1$  может играть сумма  $a_1 + \dots + a_j$  для любого  $j \leq k$ .

**Доказательство теоремы 4.1.** Так как  $v$  входит в  $H_j$  линейно, то якобиан будет, очевидно, обращаться в нуль, если коэффициенты  $(e^{2\pi A} Aa)_j = 0$ , где  $j$  — сингулярный индекс. Заметим, что так же, как и в § 3, все  $a_j$  с неисключительными индексами должны обращаться в нуль. Отсюда следует, что члены  $(e^{2\pi A} Aa)_j$ , где  $j$  — сингулярные индексы, могут отличаться от нуля только для тех индексов  $j$ , которые соответствуют матрицам  $A_i$ , имеющим в точности две строки и два столбца, и равны нулю, если индекс  $j$  соответствует любой матрице  $B_i$ . Таким образом, из *предположения* (*v*) *действительно следует, что существует по крайней мере одна матрица*  $A_i$ , *которая должна иметь две строки и два столбца*.

Доказательство в дальнейшем тесно примыкает к доказательству теоремы 3.1 и поэтому опускается.

**Теорема 4.2.** Пусть  $f$  — аналитическая функция по переменным  $(x, \mu)$  для  $x$  из  $V$ ,  $|\mu| < \delta$ , и предположим, что выполняются *предположения* теоремы 4.1. Тогда периодическое решение  $q$  аналитично по переменным  $(t, \mu)$  для всех  $t$  и для достаточно малых  $|\mu|$ , а функция  $\tau$  аналитична по  $\mu$  для достаточно малых  $|\mu|$ .

**Доказательство** очень похоже на доказательство теоремы 3.2.

<sup>1</sup> См. второй абзац § 1.

В аналитическом случае коэффициенты степенных рядов для  $q$  и  $\tau$  могут быть вычислены рекуррентно. Удобно будет заменить  $t$  на  $s$ , где  $t = s(1 + \tau/2\pi)$ , и пусть  $q(s(1 + \tau/2\pi), \mu) = p(s, \mu)$ . Очевидно, функция  $p$  аналитична по  $\mu$  для малых  $|\mu|$  и периодична по  $s$  с периодом  $2\pi$ . Поэтому существуют разложения

$$p(s, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^i p^{(i)}(s), \quad (4.9)$$

$$\frac{\tau}{2\pi} = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i b_i, \quad (4.10)$$

причем оба ряда сходятся для достаточно малых  $|\mu|$ . Ясно, что  $2 \cdot b_1 = v_0$  и  $p^{(0)}(s) = e^{sA}a$ . Так как компонента вектора  $q(0, \mu)$  с индексом  $a_1$  обращается в нуль, то должны обращаться в нуль компоненты с этим же индексом векторов  $p^{(i)}(0)$  для всех  $i > 0$ .

Дифференциальное уравнение (4.1) принимает вид

$$\frac{dx}{ds} = \left(1 + \frac{\tau}{2\pi}\right)(Ax + \mu f(x, \mu)). \quad (4.11)$$

Если выражения (4.9) и (4.10) подставить в уравнение (4.11) и сравнить затем коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu$ , то получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dp^{(0)}}{ds} = Ap^{(0)}, \quad (4.12)$$

$$\frac{dp^{(1)}}{ds} = Ap^{(1)} + b_1Ap^{(0)} + f(p^{(0)}, 0),$$

$$\frac{dp^{(2)}}{ds} = Ap^{(2)} + b_1Ap^{(1)} + b_2Ap^{(0)} + b_1f(p^{(0)}, 0) + f_x(p^{(0)}, 0)p^{(1)} + \frac{\partial f}{\partial \mu}(p^{(0)}, 0),$$

$$\frac{dp^{(j)}}{ds} = Ap^{(j)} + b_1Ap^{(j-1)} + b_jAp^{(0)} + f_x(p^{(0)}, 0)p^{(j-1)} + F^{(j)},$$

где функция  $F^{(j)}$  зависит от переменных  $p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(j-2)}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_{j-1}$ . Ясно, что система (4.12) имеет решения относительно  $p^{(j)}$  и  $b_j$ .

**Теорема 4.3.** В предположениях теоремы 4.2 аналитическое решение  $q$  системы (4.1) может быть получено с помощью последовательного решения уравнений (4.12) для периодических коэффициентов  $r_i$  периода  $2\pi$  степенного ряда (4.9) функции

$$p(s, \mu) = q\left(s\left(1 + \frac{\tau}{2\pi}\right), \mu\right)$$