Б. ГЕЛБАУМ
Дж. ОЛМСТЕД

КОНТРПРИМЕРЫ В АНАЛИЗЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

BERNARD R. GELBAUM
University of California, Irvine

JOHN M. H. OLMSTED
Southern Illinois University

COUNTEREXAMPLES IN ANALYSIS

HOLDEN-DAY, SAN FRANCISCO, LONDON, AMSTERDAM, 1964

Б. ГЕЛБАУМ, ДЖ. ОЛМСТЕД

КОНТРПРИМЕРЫ В АНАЛИЗЕ

Перевод с английского
Б. И. ГОЛУБОВА

Под редакцией
П. Л. УЛЬЯНОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР • МОСКВА 1967

УДК 517.1

В книге рассматриваются многочисленные примеры из математического анализа и теории функций действительного переменного, цель которых — обратить внимание на ряд „опасных" вопросов, на которые неопытный читатель может дать неправильные ответы. Такие контрпримеры систематически подобраны авторами, и поэтому книга может служить очень хорошим дополнением к обычным учебным курсам. Часто авторы не дают подробных доказательств, ограничиваясь лишь основными идеями построения соответствующих примеров. Это позволит читателю активно включиться в изучение материала.

Книга будет полезна студентам университетов, пединститутов и втузов, изучающим математический анализ и теорию функций.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя книга „Контрпримеры в анализе“ написана американскими математиками Б. Р. Гелбаумом и Дж. М. Олмстедом. В ней приведены многочисленные примеры из математического анализа и теории функций действительного переменного, а также — в небольшом количестве — примеры из топологии и функционального анализа. Многие из них хорошо известны и могут быть найдены в тех или иных источниках. Однако главным достоинством книги является именно то, что в ней собрано вместе большое количество полезных и интересных примеров.

Авторы называют примеры, помещенные в книге, контрпримерами, поясняя в предисловии различие между этими понятиями. Однако эти пояснения довольно неопределенны, и если их придерживаться, то многие результаты по желанию можно отнести как к примерам, так и к контрпримерам. По нашему мнению, основная цель большинства разбираемых примеров (по терминологии авторов — контрпримеров) состоит в том, чтобы обратить внимание студентов (и вообще читателей), изучающих математический анализ и теорию функций, на ряд „опасных“ вопросов и моментов, при встрече с которыми, не имея достаточного опыта, легко можно дать неправильные ответы или же неправильно представлять себе истинную суть дела. Этим, в частности, объясняется и заглавие книги — „Контрпримеры в анализе“.

В книге наряду с совсем простыми примерами имеется довольно много и сложных. Изложение зачастую ведется так, что подробных доказательств авторы не дают, а указывают лишь основные моменты в построении соответствующих примеров, оставляя читателю подробные выкладки и доказательства. Следует также сказать, что авторы весьма часто используют те или иные определения без напоминания и указания их даже в том случае, когда они приведены в книге, но совсем в другой главе и значительно раньше. Поэтому от читателя книги требуется определенное знакомство с основами математического анализа и теории функций. Для понимания многих разделов книги достаточно знания втузовского курса математики, но некоторые другие разделы требуют математической подготовки в объеме первых трех курсов математических факультетов университетов. В силу сказанного предлагаемая книга не является учебником, по которому следует начинать изучение анализа.

Заметим еще, что в книге не всегда отмечаются авторы примеров, и это частично оправдывается тем, что иногда их вообще трудно установить. Тем не менее нам представляется, что авторов некоторых широко известных примеров следовало бы указать (например, назвать именами их авторов функции Дирихле и Римана, о которых часто говорится в книге). В связи с этим в некоторых местах мы сделали соответствующие примечания. Кроме того, часть наших примечаний относится также к замеченным неточностям, если их исправление не было внесено нами в текст. О содержании книги можно судить по оглавлению, в которое вынесены полные формулировки приводимых примеров.

Мы думаем, что предлагаемая книга будет полезна широкому кругу лиц, изучающих математический анализ и теорию функций, особенно студентам-математикам университетов и педагогических вузов. Она будет, вероятно, небезынтересна и специалистам-математикам, в той или иной степени интересующимся анализом.

П. Л. Ульянов

ПРЕДИСЛОВИЕ

„Истинно ли утверждение S?“ — это, пожалуй, наиболее типичный для математики вопрос, когда утверждение имеет вид: „Каждый элемент класса A принадлежит также классу B: $A \subset B$“. Доказать, что подобное утверждение *истинно*, — значит доказать включение $A \subset B$. Доказать, что оно *ложно*, — значит найти элемент класса A, *не* принадлежащий классу B, иными словами, привести *контрпример*. Например, если утверждение S таково: „Каждая непрерывная функция дифференцируема в некоторой точке“, то множества A и B состоят соответственно из всех непрерывных функций и всех функций, дифференцируемых в некоторых точках. Известный же пример Вейерштрасса непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции f (см. пример 8 гл. 3) является контрпримером для включения $A \subset B$, поскольку f является элементом A, не принадлежащим B. Рискуя впасть в чрезмерное упрощение, можно сказать, что математика (за исключением определений, утверждений и выкладок) состоит из двух частей — доказательств и контрпримеров, а математические открытия состоят в нахождении доказательств и построении контрпримеров. Бо́льшая часть математических книг посвящена доказательству верных утверждений. В настоящей книге мы обращаемся к контрпримерам для ложных утверждений.

Вообще говоря, примеры в математике бывают двух типов — иллюстративные примеры и контрпримеры. Первые показывают, почему то или иное утверждение имеет смысл, а вторые — почему то или иное утверждение лишено смысла. Можно утверждать, что *любой* пример является в то же время контрпримером для *некоторого* утверждения, а именно для утверждения, что такой пример невозможен. Мы не желаем придавать термину *контрпример* столь универсальный смысл, но допускаем, что его значение достаточно широко, чтобы включить в себя все примеры, роль которых не ограничивается иллюстрацией верных теорем. Так, например, полином как пример непрерывной функции *не* есть контрпример, но полином как пример неограниченной или непериодической функции *является* контрпримером. Подобным же образом класс всех монотонных функций на ограниченном замкнутом интервале как класс интегрируемых функций *не* есть контрпример, однако этот же самый класс как пример функционального, но не векторного пространства *является* контрпримером.

Круг лиц, для которых предназначается эта книга, довольно широк и разнообразен. Бо́льшая часть материала доступна студентам, которые еще не закончили изучение начального курса анализа, а также может быть полезной преподавателям для иллюстрации ошибок, возможных при изучении анализа. Студенты старших курсов найдут в ней тонкости, которые обычно не рассматриваются в учебниках. Студенты-дипломники, готовящиеся к выпускным экзаменам, могут пополнить свой запас важных примеров, ограничивающих область справедливости изученных ранее теорем. Мы надеемся, что и специалисты-математики найдут некоторые места книги достойными внимания.

Собранные в этой книге контрпримеры почти целиком ограничиваются областью анализа, известной под названием теории функций действительного переменного. Однако среди них есть несколько примеров из области метрических и топологических пространств. В некоторых примерах используются также комплексные числа. Мы отнюдь не претендуем на полноту. Несомненно, многие читатели не встретят своих любимых примеров в этой книге, которая, нужно признаться, составлена по *нашему* собственному вкусу. Некоторые пропуски сделаны нами умышленно и объясняются либо недостатком места, либо *нашими* вкусами, другие вызывают и у нас искренние сожаления.

Эту книгу нельзя считать учебником, хотя она может служить полезным дополнением к некоторым учебным курсам. Если какое-либо место книги покажется читателю слишком трудным, мы советуем пропустить его и поискать что-либо более интересное дальше. Нами была предпринята попытка расположить материал по степени трудности при помощи расположения глав, выделения подборок внутри глав и порядка примеров. Предполагается, что читатель знаком с затронутыми в книге вопросами, ввиду чего материал излагается с минимумом пояснений. Каждая глава начинается с введения, где приводятся обозначения, терминология и определения, а также даются формулировки важнейших теорем. В конце книги помещена обширная библиография, на которую делаются частые ссылки в тексте. Эти ссылки предназначаются как для того, чтобы помочь читателю в отыскании дальнейшей информации, так и для того, чтобы воздать дань уважения авторам упомянутых сочинений. Если указания на авторство того или иного контрпримера отсутствуют, мы искренне сожалеем об этом. Все эти пропуски носят непреднамеренный характер.

В заключение мы выражаем надежду, что читатели этой книги получат столько же удовольствия и пользы, как и ее авторы. Наш собственный опыт дает нам основание утверждать, что математическая задача, решенная при помощи контрпримера, столь же увлекательна, как острая захватывающая пьеса. По нашему мнению, многие из самых глубоких и изящных математических открытий относятся к этому жанру.

Б. Р. Г.
Дж. М. Х. О.

Эрвин, Калифорния
Карбондейл, Иллинойс

ГЛАВА 1

СИСТЕМА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Введение

Мы начинаем с введения некоторых основных определений и обозначений анализа, которые являются существенными для данной главы. Эти определения и обозначения даются в сокращенной форме с минимумом пояснений. Для более подробного ознакомления с ними следует обратиться к книгам [16], [17], [19] и [31] (см. библиографию).

Если A — произвольное множество элементов, то утверждение „*элемент a принадлежит множеству A*" символически записывается так: $a \in A$. Запись $a \notin A$ означает, что элемент a *не* принадлежит множеству A. Если A и B — множества, то утверждение „*A является подмножеством множества B*" (символически $A \subset B$) означает, что каждый элемент x множества A принадлежит и множеству B; последнее равносильно импликации $x \in A \Rightarrow x \in B$ [1]). Выражение *тогда и только тогда* мы часто будем заменять символом $\Leftrightarrow$. Для удобства элементы множеств часто будут называться *точками*. Запись $\{a, b, c, \ldots\}$ обозначает множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$. Символ $\{\ldots | \ldots\}$ используется для обозначения множества, общий элемент которого записывается между первой фигурной скобкой и вертикальной чертой, а определяющие это множество свойства записываются между вертикальной чертой и второй фигурной скобкой. Объединение и пересечение двух множеств A и B определяются следующим образом:

$$A \cup B \equiv \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\},$$

$$A \cap B \equiv \{x \mid x \in A,\ x \in B\},$$

---

1) Знак $\Rightarrow$ следует понимать как „влечет". — *Прим. перев.*

при этом запятая в последней формуле заменяет союз „*и*“. Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B \equiv \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}.$$

Если рассматриваются множества, которые все являются подмножествами некоторого основного, универсального множества S, то разность $S \setminus A$ называется дополнением множества A и обозначается символом A'. Вообще же разность $A \setminus B$ называется дополнением множества B относительно A.

Для обозначения пустого множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента, используется символ $\varnothing$. Если A и B — два непустых множества, то их декартовым произведением $A \times B$ называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, а $b \in B$, так что

$$A \times B \equiv \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Если $(a, b) \in A \times B$, то a называется первой координатой элемента (a, b), а b — его второй координатой; первая и вторая координаты также называются проекциями. Любое подмножество ρ произведения $A \times B$ называется отношением из A в B. Такое отношение f называется функцией из A в B, если никакие два различных элемента из f не имеют одинаковых первых координат. Условимся обозначать выражения „*существует*“ или „*существуют*“ квантором существования $\exists$, а слова „*такие, что*“ — символом $\ni$. Тогда область (или множество) определения $D = D_f$ и область (или множество) значений $R = R_f$ функции f определяются так:

$$D = D_f \equiv \{x \mid \exists y \ni (x, y) \in f\},$$
$$R = R_f \equiv \{y \mid \exists x \ni (x, y) \in f\}.$$

Будем говорить, что функция f (или отображение) определена на A, если ее множество определения совпадает с A; в общем же случае будем говорить, что f определена в A. Будем называть f функцией со значениями на B, если ее множество значений совпадает с B; в общем же случае будем говорить о функции f со значениями в B.

Говорят, что функция f из A в B осуществляет взаимно однозначное соответствие между A и B, если она является функцией, определенной на A со значениями на B и притом такой, что никакие два различных элемента из f не имеют одинаковых вторых координат. **Значениями** функции f называются элементы множества R_f. Если функция f осуществляет взаимно однозначное отображение множества A на множество B, то функция

$$f^{-1} = \{(x, y) \mid (y, x) \in f\},$$

которая получается, если поменять местами область определения и область значений функции f, называется обратной к f.

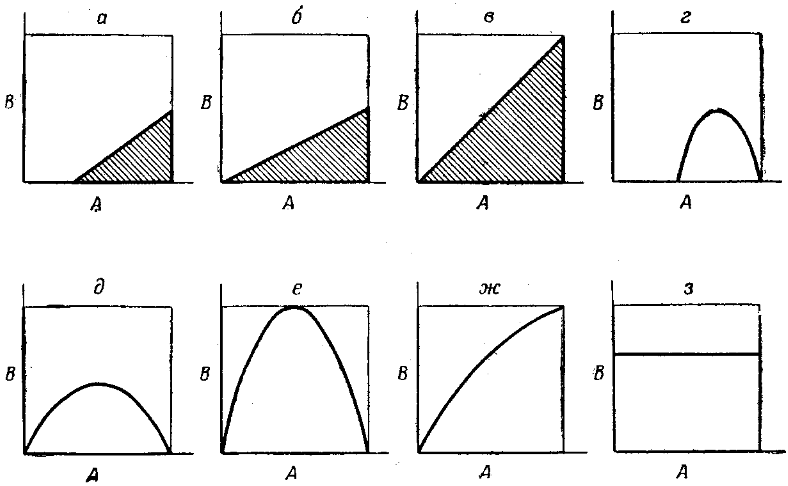

Рис. 1.

а — отношение из A со значениями в B; *б* — отношение на A со значениями в B; *в* — отношение на A со значениями на B; *г* — функция из A со значениями в B; *д* — функция на A со значениями в B; *е* — функция на A со значениями на B; *ж* — взаимно однозначное соответствие; *з* — постоянная функция.

Постоянной функцией называется функция, множество значений которой состоит из одной точки.

Различные типы отношений и функций указаны на рис. 1. Во всех случаях в качестве множеств A и B взят замкнутый единичный интервал $[0, 1]$, состоящий из всех действительных чисел x, таких, что $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть f — функция, определенная на A и принимающая значения в B. Мы будем записывать ее двумя следующими способами:

$$f\colon A \to B,$$

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Если x — произвольный элемент множества A, то существует в точности один элемент y множества B, такой, что $(x, y) \in f$. Этот элемент y множества B мы будем обозначать символом $f(x)$ и записывать

$$y = f(x).$$

Другие способы обозначения функции:

$$f\colon\ y = f(x), \quad x \in A, \quad y \in B$$

$$f\colon\ x \in A, \quad f(x) \in B;$$

$$y = f(x)\colon\ x \in A, \quad y \in B.$$

Если же из контекста ясно, что обозначение $f(x)$ представляет *функцию*, а не просто одно из ее значений, то мы будем пользоваться такой записью:

$$f(x)\colon\ x \in A.$$

Если f — функция с областью определения D, а S является подмножеством D, то **сужением** функции f на S называется функция g, область определения которой есть S и такая, что

$$x \in S \Rightarrow g(x) = f(x).$$

Множество значений сужения f на S мы будем обозначать символом $f(S)$. Таким образом,

$$f(S) = \{y \mid \exists x \in S \ni f(x) = y\}.$$

Если g является сужением f, то f мы будем называть **продолжением** g.

Пусть f и g — такие функции, что множество значений g является подмножеством области определения f. Тогда **композицией** $f \circ g$ функций f и g называется функция, значение которой во всякой точке x области определения функции g есть $f(g(x))$; короче, композицией *функции* $f(u)$ и *функции* $u = g(x)$ называется *функция* $y = f(g(x))$ [1]. (Следует

[1]) В советской математической литературе вместо термина „композиция" часто используется термин „суперпозиция".— *Прим. ред.*

заметить, что композиция f и g, вообще говоря, не совпадает с композицией g и f; контрпример: $(x+1)^2 \neq x^2+1$.)

Если A — непустое множество, то всякая функция, определенная в (на) $A \times A$ со значениями в A, называется бинарной операцией в (на) A. В классической арифметике существуют две основные бинарные операции: сложение и умножение. Многими свойствами этих арифметических операций обладают и операции в более абстрактных множествах, поэтому последние сохраняют те же названия. Если бинарная операция называется сложением и если $z = F((x, y))$, то используется и обычная запись $z = x + y$. Если бинарная операция G называется умножением и если $z = G((x, y))$, то z, как обычно, записывают в виде $z = xy$ или $z = x \cdot y$.

Определение I. *Непустое множество* $\mathbf{F}$ *называется* ***полем***, *если на* $\mathbf{F}$ *определены две бинарные операции, называемые сложением и умножением, причем*

A. для сложения:

(i) *справедлив закон ассоциативности*

$$x, y, z \in \mathbf{F} \Rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z,$$

(ii) $\exists$ *элемент* 0 *множества* $\mathbf{F}$, *такой, что*

$$x \in \mathbf{F} \Rightarrow x + 0 = x,$$

(iii) $x \in \mathbf{F} \Rightarrow \exists (-x) \in \mathbf{F} \ni x + (-x) = 0,$

(iv) *справедлив закон коммутативности*

$$x, y \in \mathbf{F} \Rightarrow x + y = y + x;$$

B. для умножения:

(i) *справедлив закон ассоциативности*

$$x, y, z \in \mathbf{F} \Rightarrow x(yz) = (xy)z,$$

(ii) $\exists$ *элемент* 1 *множества* $\mathbf{F}$, *такой, что* $1 \neq 0$ *и*

$$x \in \mathbf{F} \Rightarrow x \cdot 1 = x,$$

(iii) $x \in \mathbf{F}, \quad x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} \in \mathbf{F} \ni x \cdot x^{-1} = 1,$

(iv) *справедлив закон коммутативности*

$$x, y \in \mathbf{F} \Rightarrow xy = yx;$$

C. для сложения и умножения:

справедлив закон дистрибутивности (точнее умножение дистрибутивно относительно сложения)

$$x, y, z \in \mathbf{F} \Rightarrow x(y + z) = xy + xz.$$

Элемент 0 поля $\mathbf{F}$ из п. А (ii) называется нулем (или аддитивной единицей) поля $\mathbf{F}$. Элемент $(-x)$ поля $\mathbf{F}$ из п. А (iii) называется противоположным (или аддитивным обратным) для x. Бинарная операция $x-y$, определенная формулой $x-y\equiv x+(-y)$, называется вычитанием. Элемент 1 из п. В (ii) называется единицей (или мультипликативной единицей) поля $\mathbf{F}$. Элемент x^{-1} поля $\mathbf{F}$ из п. В (iii) называется обратным (или мультипликативным обратным) для x. Бинарная операция x/y, определенная формулой $x/y\equiv xy^{-1}$, где $y\neq 0$, называется делением. Деление является бинарной операцией в $\mathbf{F}$ и не является бинарной операцией на $\mathbf{F}$, так как „деление на нуль" исключается.

Непустое множество $\mathbf{G}$ называется группой, если на $\mathbf{G}$ определена бинарная операция, которую мы обозначим знаком $+$ и назовем сложением, причем эта операция обладает свойствами А (i), (ii) и (iii) (в этом случае группа называется *аддитивной*). Если же, кроме того, справедлив закон коммутативности А (iv), то $\mathbf{G}$ называется абелевой или коммутативной группой. Таким образом, всякое поле относительно сложения образует абелеву аддитивную группу. А множество ненулевых элементов поля образует абелеву *мультипликативную* группу относительно умножения.

Определение II. *Упорядоченным полем называется поле* $\mathbf{F}$, *содержащее подмножество* $\mathbf{P}$, *такое, что*

(i) $\mathbf{P}$ *замкнуто относительно сложения, т. е.*

$$x\in\mathbf{P},\quad y\in\mathbf{P}\Rightarrow x+y\in\mathbf{P};$$

(ii) $\mathbf{P}$ *замкнуто относительно умножения, т. е.*

$$x\in\mathbf{P},\quad y\in\mathbf{P}\Rightarrow xy\in\mathbf{P};$$

(iii) $x\in\mathbf{F}\Rightarrow$ *справедливость и притом только одного из следующих трех утверждений*:

$$x\in\mathbf{P};\quad x=0;\quad -x\in\mathbf{P}.$$

Элемент x поля $\mathbf{F}$ называется положительным, если $x\in\mathbf{P}$, и отрицательным, если $-x\in\mathbf{P}$.

Неравенства в упорядоченном поле определяются в терминах принадлежности к $\mathbf{P}$. Например,

$$x<y\Leftrightarrow y-x\in\mathbf{P};$$

$$x\geqslant y\Leftrightarrow x-y\in\mathbf{P}\quad\text{или}\quad x=y.$$

Если $\mathbf{F}$ — упорядоченное поле, то функция f, определенная в $\mathbf{F}$ и принимающая значения в $\mathbf{F}$, называется возрастающей (или неубывающей) на некотором подмножестве A своей области определения, если

$$x, y \in A, \ x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y).$$

Функция f называется строго возрастающей на A, если

$$x, y \in A, \ x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Термины убывающая (или невозрастающая) и строго убывающая функция определяются аналогично. Функция называется монотонной на некотором множестве, если она является возрастающей или убывающей на этом множестве. Нетрудно дать и определение строго монотонной функции.

Если $\mathbf{F}$ — упорядоченное поле, то абсолютная величина $|x|$ элемента $x \in \mathbf{F}$ полагается равной x в случае $x \geqslant 0$ и $-x$ в случае $x < 0$.

Ниже приводится несколько стандартных свойств абсолютной величины (где x, y, ε — элементы упорядоченного поля $\mathbf{F}$):

(i) $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$;

(iii) если $\varepsilon > 0$, то $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon$;

(iv) неравенство треугольника:

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|;$$

(v) $|x| = \sqrt{x^2}$, т. е. $|x|$ есть единственный элемент множества $\mathbf{P} \cup \{0\}$, квадрат которого равен x^2;

(vi) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$.

Если $\mathbf{F}$ — упорядоченное поле и a, $b \in \mathbf{F}$, $a < b$, то следующие множества называются конечными или ограниченными интервалами:

открытый:	$(a, b) \equiv \{x \mid x \in \mathbf{F}, \ a < x < b\}$,
замкнутый:	$[a, b] \equiv \{x \mid x \in \mathbf{F}, \ a \leqslant x \leqslant b\}$,
полуоткрытый (или полузамкнутый):	$[a, b) \equiv \{x \mid x \in \mathbf{F}, \ a \leqslant x < b\}$,
полуоткрытый (или полузамкнутый):	$(a, b] \equiv \{x \mid x \in \mathbf{F}, \ a < x \leqslant b\}$.

2 Зак. 587

Бесконечные или неограниченные интервалы определяются подобным же образом:

открытый: $(a, +\infty) \equiv \{x \mid x > a\}$,

открытый: $(-\infty, a) \equiv \{x \mid x < a\}$,

замкнутый: $[a, +\infty) \equiv \{x \mid x \geqslant a\}$,

замкнутый: $(-\infty, a] \equiv \{x \mid x \leqslant a\}$,

открытый и замкнутый: $(-\infty, +\infty) \equiv \mathbf{F}$.

Окрестностью точки a упорядоченного поля $\mathbf{F}$ называется открытый интервал вида $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, где ε — положительный элемент поля $\mathbf{F}$. Эту окрестность можно записать также в терминах абсолютных величин:

$$N(a, \varepsilon) \equiv (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \equiv \{x \mid |x-a| < \varepsilon\}.$$

Проколотой окрестностью точки a называется окрестность точки a, из которой исключена сама точка a. Таким образом, проколотая окрестность $D(a, \varepsilon)$ точки a для некоторого $\varepsilon > 0$ определяется так:

$$D(a, \varepsilon) \equiv \{x \mid 0 < |x-a| < \varepsilon\}.$$

Бинарные операции max и min на $\mathbf{F}$ определяются следующим образом:

$$\max(x, y) \equiv \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \geqslant y, \\ y, & \text{если} \quad x < y; \end{cases}$$

$$\min(x, y) \equiv \begin{cases} y, & \text{если} \quad x \geqslant y, \\ x, & \text{если} \quad x < y. \end{cases}$$

Если $\mathbf{F}$ — упорядоченное поле, $u \in \mathbf{F}$ и $x \leqslant u$ для всякого элемента x непустого множества A точек поля $\mathbf{F}$, то u называется верхней гранью A. Непустое множество в $\mathbf{F}$ называется ограниченным сверху в $\mathbf{F}$, если в $\mathbf{F}$ существует элемент, который является верхней гранью этого множества. Если s является верхней гранью A и если s меньше всякой другой верхней грани A, то s называется точной верхней гранью A и обозначается так: $s = \sup(A) = \sup A$. Аналогично определяются нижняя грань, ограниченность снизу и точная нижняя грань, обозначаемая через $i = \inf(A) = \inf A$, непустого множества A.

Определение III. *Полным упорядоченным полем называется упорядоченное поле* $\mathbf{F}$, *в котором для каждого непустого подмножества, ограниченного сверху в* $\mathbf{F}$, *существует точная верхняя грань.*

Любые два полных упорядоченных поля $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}'$ изоморфны в том смысле, что существует взаимно однозначное соответствие $x \longleftrightarrow x'$, где $x \in \mathbf{F}$ и $x' \in \mathbf{F}'$, сохраняющее бинарные операции и порядок, т. е.

$$(x+y)' = x' + y', \quad (xy)' = x'y', \quad x < y \Leftrightarrow x' < y'.$$

(Доказательство см. в [37], стр. 128—131.) С точки зрения *структуры* система действительных чисел однозначно описывается следующим определением:

Определение IV. *Системой действительных чисел* $\mathbf{R}$ *называется полное упорядоченное поле.*

Функция, отображающая множество A на B, называется действительнозначной, если $B \subset \mathbf{R}$; если же $A \subset \mathbf{R}$, то эта функция называется функцией действительного переменного.

Функция $\operatorname{sgn} x$ является действительнозначной функцией действительного переменного и определяется следующим образом: $\operatorname{sgn} x \equiv 1$, если $x > 0$; $\operatorname{sgn} x \equiv -1$, если $x < 0$; $\operatorname{sgn} 0 \equiv 0$.

Если S — произвольное непустое множество, а A — любое его подмножество, то характеристическая функция χ_A множества A является действительнозначной функцией и определяется следующим образом: $\chi_A(x) \equiv 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) \equiv 0$, если $x \in A' = S \setminus A$.

Определение V. *Индуктивным множеством в упорядоченном поле* $\mathbf{F}$ *называется множество* A, *обладающее следующими двумя свойствами*:

(i) $1 \in A$;
(ii) $x \in A \Rightarrow x + 1 \in A$.

Определение VI. *Элемент* n *упорядоченного поля* $\mathbf{F}$ *называется натуральным числом, если* n *является элементом каждого индуктивного множества поля* $\mathbf{F}$. *Множество всех натуральных чисел поля* $\mathbf{F}$ *обозначается символом* $\mathbf{N}$.

Из этого определения вытекают известные свойства натуральных чисел (см. [37], стр. 17—18), в том числе

Основная теорема индукции. Если $\mathbf{S}$ является индуктивным множеством, состоящим из натуральных чисел, то $\mathbf{S}=\mathbf{N}$.

Если $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$ — множества всех натуральных чисел двух упорядоченных полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{F}^*$ соответственно, то $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}^*$ изоморфны (см. [37], стр. 34—35).

Определение VII. *Элемент x упорядоченного поля $\mathbf{F}$ называется целым числом, если $x \in \mathbf{N}$, $x=0$ или $-x \in \mathbf{N}$. Элемент x упорядоченного поля называется рациональным числом, если существуют целые числа m и n, $n \neq 0$, такие, что $x = m/n$.*

Множество всех рациональных чисел упорядоченного поля $\mathbf{F}$ вместе с операциями сложения и умножения и порядком поля $\mathbf{F}$ также является упорядоченным полем. Оно обозначается символом $\mathbf{Q}$. (Любые два упорядоченных поля рациональных чисел изоморфны; см. [37], стр. 67.)

Определение VIII. *Кольцом называется непустое множество $\mathbf{B}$ вместе с двумя бинарными операциями на $\mathbf{B}$, называемыми сложением и умножением, такими, что выполнены требования пунктов* A(i), (ii), (iii), (iv), B(i), C *из определения* I, *а также второй закон дистрибутивности*

C′. $\qquad x,\ y,\ z \in \mathbf{B} \Rightarrow (x+y)\,z = xz + yz.$

Определение IX. *Областью целостности называется кольцо $\mathbf{D}$, в котором выполнены требования* B(ii) *и* (iv) *из определения* I, *а также требование*

D. $\qquad x \in \mathbf{D},\ y \in \mathbf{D},\ x \neq 0,\ y \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0.$

Иными словами, выполнены все аксиомы определения I, *за исключением* B(iii), *которая заменена ослабленным требованием* D.

Тот факт, что требование D является ослабленной формой (т. е. следствием) требования B(iii), можно доказать следующим образом. Предположим, что существуют $x \neq 0$ и $y \neq 0$, такие, что $xy = 0$. Тогда $x^{-1}(xy) = (x^{-1}x)\,y = 1y = y \neq 0$, в то время как $x^{-1}0 = 0$. (Противоречие.)

В любом кольце требование D равносильно следующему утверждению:

D′. Закон сокращения. $xy = xz,\ x \neq 0 \Rightarrow y = z.$

(В самом деле, $D \Rightarrow D'$, так как $xy = xz \Leftrightarrow x(y - z) = 0$; обратно, $D' \Rightarrow D$, ибо равенство $xy = 0$ можно записать в виде $xy = x0$.)

Множество всех целых чисел упорядоченного поля **F** вместе с операциями сложения и умножения этого поля является областью целостности и обозначается символом **I**. Всякие две области целостности, состоящие из целых чисел, изоморфны (см. [37], стр. 64).

Пусть f — функция, определенная в упорядоченном поле **F** и принимающая значения в нем же, и пусть $a \in \mathbf{F}$. Тогда f называется непрерывной в точке a, если a принадлежит области определения D функции f и для всякого положительного элемента ε поля **F** $\exists$ положительный элемент δ этого поля, такой, что неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ справедливо для каждого x из области D, удовлетворяющего неравенству $|x - a| < \delta$. С помощью символа $\forall$, называемого квантором общности и заменяющего слова „*для всех, для произвольного, для любого* или *для каждого*“, определение непрерывности функции f в точке a области D в терминах окрестностей можно записать следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni f(D \cap N(a, \delta)) \subset N(f(a), \varepsilon).$$

Точка p упорядоченного поля **F** называется предельной точкой его непустого подмножества A, если всякая проколотая окрестность точки p содержит по крайней мере одну точку множества A, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in D(p, \varepsilon) \cap A.$$

Пусть f — функция, области определения и значений которой содержатся в **F**, a — предельная точка ее области определения D и $b \in \mathbf{F}$. Тогда говорят, что предел $f(x)$, когда x стремится к a, существует и равен b и пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset N(b, \varepsilon).$$

Односторонние пределы определяются подобным же образом и обозначаются соответственно $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$.

Функция f с областью определения и областью значений, содержащимися в упорядоченном поле $\mathbf{F}$, называется равномерно непрерывной на некотором подмножестве A ее области определения D, если

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ni$$
$$x_1, \ x_2 \in A, \ |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Если f — функция с областью определения и областью значений в упорядоченном поле $\mathbf{F}$, a — точка области определения D функции f, то символ $f'(a)$ обозначает элемент поля $\mathbf{F}$, определяемый равенством

$$f'(a) \equiv \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

при условии, что последний предел существует. Функция $f'(x)$, если она имеет смысл для всех x из области определения D, называется производной функции f.

Говорят, что функция f из упорядоченного поля $\mathbf{F}$ в $\mathbf{F}$ обладает свойством Коши на некотором интервале I, содержащемся в ее области определения, если

$$\forall a, \ b \in I, \ d \in \mathbf{F} \ni a < b$$
$$\text{и либо } f(a) < d < f(b), \text{ либо } f(a) > d > f(b), \text{ то}$$
$$\exists c \ni a < c < b, \ f(c) = d.$$

Последовательностью называется функция, определенная на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Ее значение, или член последовательности для данного натурального n, обычно обозначается через a_n, а сама последовательность — символом $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$, члены которой принадлежат некоторому упорядоченному полю $\mathbf{F}$, называется сходящейся к элементу b поля $\mathbf{F}$, если

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{P} \, \exists N \in \mathbf{N} \ni n > N \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon,$$

где $\mathbf{P}$ — множество всех положительных элементов поля $\mathbf{F}$. В этом случае говорят также, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел b. Последовательность называется расходящейся, если она не является сходящейся, т. е. если у нее нет предела. Последовательность $\{a_n\}$, члены которой являются элементами некоторого упорядоченного поля **F**, называется фундаментальной или последовательностью Коши, если

$$\forall\varepsilon\in\mathbf{P}\ \exists N\in\mathbf{N}\ni m,\ n>N\Rightarrow|a_m-a_n|<\varepsilon.$$

Каждая сходящаяся последовательность является фундаментальной, а если $\mathbf{F}=\mathbf{R}$, то всякая фундаментальная последовательность сходится (см. [36], стр. 57, а также [52]*, т. 1, стр. 84) [1]).

Комплексным числом называется упорядоченная пара $(x,\ y)$ действительных чисел x и y. Сложение и умножение комплексных чисел определяются следующим образом:

$$(x,\ y)+(u,\ v)\equiv(x+u,\ y+v),$$

$$(x,\ y)(u,\ v)\equiv(xu-yv,\ xv-yu).$$

Комплексные числа образуют поле **C** (см. [36], стр. 497) с нулем (0, 0) и единицей (1, 0). В дальнейшем для записи комплексного числа $(x,\ y)$ будет употребляться обычное обозначение $x+iy$.

1. Бесконечное поле, которое нельзя упорядочить

Если поле **F** не содержит подмножества **P**, обладающего тремя свойствами определения II, данного во введении, то говорят, что поле **F** нельзя упорядочить. Предварительно отметим, что, поскольку всякое упорядоченное поле бесконечно, никакое конечное поле не может быть упорядочено ([37], стр. 38).

Примером *бесконечного* поля, которое нельзя упорядочить, является поле **C** комплексных чисел. В самом деле, предположим, что существует подмножество **P** поля **C**, удовлетворяющее определению II. Рассмотрим число $i\equiv(0,\ 1)$. Так как $i\neq(0,\ 0)$, то существуют две взаимно исключающие друг друга возможности. Первая из них состоит в том, что $i\in\mathbf{P}$. В этом случае $i^2=(-1,\ 0)\in\mathbf{P}$ и, следовательно, $i^4=(1,\ 0)\in\mathbf{P}$. Но элементы i^2 и i^4 являются противоположными и, поскольку такие элементы не могут одновременно

[1]) Звездочкой отмечены работы, включенные в библиографию переводчиком. — *Прим. перев.*

принадлежать **P** (см. определение II, (iii)), то мы получаем противоречие, что и требовалось. Вторая возможность состоит в том, что $-i=(0,-1)\in \mathbf{P}$. В этом случае $(-i)^2=$ $=(-1,\ 0)\in \mathbf{P}$ и, следовательно, $(-i)^4=(1,\ 0)\in \mathbf{P}$, и мы получаем такое же противоречие, как и выше.

2. Поле, которое можно упорядочить двумя различными способами

Рассмотрим множество **F** всех чисел вида $r+s\sqrt{2}$, где r и s — рациональные числа, и пусть операции сложения и умножения в **F** те же, что и в системе действительных чисел **R**, для которой **F** является подмножеством. Тогда **F** будет упорядоченным полем, если в качестве подмножества **P** определения II взять множество всех элементов из **F**, которые являются положительными элементами в **R**, т. е. положительными действительными числами. Рассмотрим теперь другой способ упорядочения поля **F**. Для этого определим множество **B** следующим образом:

$$r+s\sqrt{2}\in \mathbf{B}\Leftrightarrow r-s\sqrt{2}\in \mathbf{P}.$$

Легко проверить, что множество **B** удовлетворяет всем требованиям определения II.

Поле **Q** рациональных чисел и поле **R** действительных чисел являются упорядоченными полями, причем ни одно из них нельзя упорядочить двумя различными способами ([37], стр. 146).

3. Неполное упорядоченное поле

Упорядоченное поле **Q** рациональных чисел не является полным. В этом можно убедиться следующим образом: множество A всех положительных рациональных чисел, квадраты которых меньше 2,

$$A\equiv\{r\mid r\in \mathbf{Q},\ r>0,\ r^2<2\},$$

не пусто ($1\in A$) и ограничено сверху рациональным числом 2. Предположим, что **Q** полно. Тогда должно существовать положительное рациональное число c, которое должно быть точной верхней гранью множества A. Но так как не существует рационального числа, квадрат которого равен 2 (см.

[37], стр. 126, а также [52]*, т. I, стр. 18), то либо $c^2 < 2$, либо $c^2 > 2$. Предположим сначала, что $c^2 < 2$ и определим положительное число d следующим образом [1]):

$$d = \frac{1}{2}\min\left(\frac{2-c^2}{(c+1)^2},\ 1\right).$$

Тогда $c+d$ будет положительным рациональным числом, которое больше c и квадрат которого меньше 2:

$$(c+d)^2 < c^2 + d(c+1)^2 < 2.$$

Но это означает, что $c+d \in A$, в то время как c является верхней гранью множества A. (Противоречие.) Теперь предположим, что $c^2 > 2$ и определим положительное число d следующей формулой:

$$d = \frac{c^2-2}{2(c+1)^2}.$$

Тогда $c-d$ будет положительным рациональным числом, которое меньше c и квадрат которого больше 2:

$$(c-d)^2 > c^2 - d(c+1)^2 > 2.$$

Следовательно, $c-d$ будет верхней гранью множества A, которая меньше точной верхней грани c, и мы снова получили противоречие.

4. Упорядоченное неархимедово поле

Упорядоченное поле $\mathbf{F}$ называется архимедовым, если множество $\mathbf{N}$ натуральных чисел поля $\mathbf{F}$ не ограничено сверху в $\mathbf{F}$ (т. е. если $a, b \in \mathbf{F}$, $a > 0$, $b > 0$, то существует натуральное число n, такое, что $na > b$). Пусть f — полином, отображающий $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \qquad a_k \in \mathbf{R},\ k = 0, 1, \ldots, n,$$

и пусть g — ненулевой полином (это значит, что $g(x)$ не равняется *тождественно* нулю). Далее, пусть f/g — рацио-

---

[1]) Так как $1 \in A$, то $c \geqslant 1$ и потому $d = \frac{1}{2}\frac{2-c^2}{(c+1)^2}$. — *Прим. ред.*

нальная функция h, определенная формулой $h(x)=f(x)/g(x)$; ее область определения состоит из всех действительных чисел x, для которых $g(x)\neq 0$. Пусть $\mathbf{H}$ — множество, состоящее из всех несократимых рациональных функций (f и g могут иметь в качестве общих множителей лишь константы). Сложение и умножение в $\mathbf{H}$ определяются равенствами

$$\frac{f}{g}+\frac{r}{s}\equiv\frac{fs+gr}{gs}, \qquad \frac{f}{g}\cdot\frac{r}{s}\equiv\frac{fr}{gs},$$

правые части которых приводятся к несократимым рациональным функциям. Тогда множество $\mathbf{H}$ будет полем ([37], стр. 104). Если определить подмножество $\mathbf{P}$ поля $\mathbf{H}$ как множество, состоящее из всех ненулевых функций f/g, таких, что старшие коэффициенты (т. е. коэффициенты при членах наивысшей степени) полиномов f и g имеют одинаковый знак, то $\mathbf{P}$ будет удовлетворять всем требованиям определения II и $\mathbf{H}$ превратится в упорядоченное поле. Но любая рациональная функция $f/1$, где f — полином с положительным старшим коэффициентом, является верхней гранью множества $\mathbf{N}$ натуральных чисел поля $\mathbf{H}$ (натуральными числами поля $\mathbf{H}$ являются постоянные рациональные функции вида $n/1$, где n — полином, тождественно равный натуральному числу n). Более детальное изложение читатель сможет найти в [37] (см. стр. 99—108).

5. Упорядоченное поле, которое нельзя пополнить

Говорят, что упорядоченное поле $\mathbf{F}$ нельзя пополнить, если не существует полного упорядоченного поля $\mathbf{R}$, содержащего $\mathbf{F}$ и такого, что операции сложения и умножения и отношение порядка поля $\mathbf{F}$ совпадают с соответствующими операциями и отношением порядка поля $\mathbf{R}$. Поле $\mathbf{H}$ рациональных функций предыдущего примера нельзя пополнить в этом смысле, другими словами, его нельзя *вложить* в систему действительных чисел (см. определение IV). Причина, вкратце, состоит в том, что если бы $\mathbf{H}$ *можно* было вложить в $\mathbf{R}$, то натуральные числа поля $\mathbf{H}$ должны были бы, очевидно, совпадать с натуральными числами поля $\mathbf{R}$. А так как $\mathbf{N}$ ограничено сверху в $\mathbf{H}$ и не ограничено в $\mathbf{R}$ ([37], стр. 122), то мы получили бы противоречие.

6. Упорядоченное поле, в котором множество рациональных чисел не плотно

Множество „рациональных чисел“ упорядоченного поля **H** примера 4 не плотно в **H**. Это означает, что существуют два различных элемента поля **H**, между которыми нет ни одного рационального числа. В самом деле, всякое упорядоченное поле **F**, в котором множество рациональных чисел плотно, является архимедовым. Чтобы убедиться в этом, предположим, что a—произвольный положительный элемент поля **F**, а m/n—рациональное число, расположенное между 0 и $1/a$. Мы можем предположить, не теряя общности, что m и n оба положительны. Тогда

$$0 < \frac{1}{n} \leqslant \frac{m}{n} < \frac{1}{a},$$

откуда $n > a$. Следовательно, a не является верхней гранью **N**, и так как a произвольно, то **N** не ограничено сверху. Но в поле **H** аксиома Архимеда *не* выполнена, поэтому множество рациональных чисел поля **H** *не может* быть плотным в **H**. Примером двух различных элементов поля **H**, между которыми нет ни одного рационального числа, могут служить любые два (различных) полинома, не являющиеся тождественно постоянными, с положительными старшими коэффициентами.

7. Неполное упорядоченное поле, полное в смысле Коши

Если упорядоченное поле **H** рациональных функций (пример 4) расширить при помощи классов эквивалентности фундаментальных последовательностей, то в результате получится упорядоченное поле, в котором каждая фундаментальная последовательность сходится. Однако, согласно примеру 5, это пополнение в смысле Коши не может быть полным в смысле определения в терминах точных верхних граней, которое было дано во введении. (О пополнении в смысле Коши см. [54], стр. 152, и [16].)

8. Область целостности, допускающая различные факторизации

Единицей области целостности **D** называется такой ее элемент u, для которого в **D** существует обратный элемент v, т. е. $uv = 1$. (Единицами области целостности **I** целых чисел являются 1 и -1.) Каждый элемент из $\mathbf{D}$, являющийся произведением двух ненулевых элементов из $\mathbf{D}$, ни один из которых не совпадает с единицей, называется *составным*. Ненулевой элемент из $\mathbf{D}$, не являющийся ни единицей, ни составным числом, называется *простым*. Будем говорить, что область целостности $\mathbf{D}$ допускает *единственную факторизацию*, если каждый элемент из $\mathbf{D}$, не совпадающий с нулем или единицей, можно представить как произведение конечного числа простых элементов из $\mathbf{D}$, причем такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей и умножения их на единицы.

В системе действительных чисел $\mathbf{R}$ определим множество Φ всех чисел вида $a+b\sqrt{5}$, где a, $b \in \mathbf{I}$. Тогда Φ будет областью целостности. Далее нетрудно доказать следующие два факта (см. [37], стр. 144):

(i) Единицами Φ являются все числа вида $a+b\sqrt{5}$, такие, что $|a^2-5b^2|=1$.

(ii) Если $a+b\sqrt{5}$ не совпадает ни с нулем, ни с единицей, то $|a^2-5b^2|\geqslant 4$. Следовательно, если $1<|a^2-5b^2|<16$, то число $a+b\sqrt{5}$ является простым. В частности, 2, $1+\sqrt{5}$, $-1+\sqrt{5}$ являются простыми числами в Φ, так как для каждого из них $|a^2-5b^2|=4$. Более того, следующие два разложения числа 4 на множители

$$2\cdot 2=(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})$$

являются различными в указанном выше смысле: ни один из сомножителей левой части не совпадает (с точностью до умножения на единицу) ни с каким сомножителем правой части. (См. также [37], стр. 145.)

9. Два числа без наибольшего общего делителя

Элемент m называется *делителем* элемента n в области целостности $\mathbf{D}$ (символически $m \mid n$), если существует элемент p из $\mathbf{D}$, такой, что $mp=n$. Элемент d из $\mathbf{D}$ называется *наибольшим общим делителем* двух элементов a и b из $\mathbf{D}$, если

(i) $d \mid a$ и $d \mid b$;

(ii) $c \mid a,\ c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

В области целостности Ф предыдущего примера числа 4 и $2(1+\sqrt{5})$ не имеют наибольшего общего делителя. (Подробное изложение см. в [37], стр. 145—146.)

10. Дробь, не допускающая единственного представления в виде несократимой дроби

Рассмотрим дроби, состоящие из пар элементов области целостности Ф примера 8. Тогда дробь $2(1+\sqrt{5})/4$ можно представить в виде несократимой дроби двумя следующими способами:

$$\frac{2(1+\sqrt{5})}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}.$$

Эти представления различны в указанном выше смысле.

11. Функции, непрерывные на замкнутом интервале и не обладающие известными свойствами, если система чисел не полна

Мы закончим эту главу примерами функций, определенных на замкнутом интервале $[a, b]\subset \mathbf{Q}$ и принимающих значения, принадлежащие множеству $\mathbf{Q}$. Эти примеры станут невозможными, если неполную систему рациональных чисел $\mathbf{Q}$ (см. пример 3) заменить полной системой действительных чисел $\mathbf{R}$. Упорядоченное поле $\mathbf{Q}$ мы будем считать вложенным в $\mathbf{R}$, чтобы иметь возможность пользоваться такими символами, как $\sqrt{2}$. Буквой x мы будем обозначать рациональные числа.

(a) *Функция, непрерывная на замкнутом интервале и не ограниченная на нем (поскольку интервал ограничен, эта функция не является на нем равномерно непрерывной)*:

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2},\quad 0\leqslant x\leqslant 2.$$

(b) *Функция, непрерывная и ограниченная на замкнутом интервале, но не являющаяся равномерно непрерывной на нем*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<\sqrt{2},\\ 1, & \sqrt{2}<x\leqslant 2.\end{cases}$$

(c) *Функция, равномерно непрерывная (и, следовательно, ограниченная) на замкнутом интервале, но не имеющая на нем максимума:*

$$f(x) = x - x^3, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

(d) *Функция, непрерывная на замкнутом интервале, но не обладающая свойством Коши.*

Пример b или $f(x) = x^2$ на $[1, 2]$. Последняя функция не принимает значения 2, которое расположено между 1 и 4.

(e) *Дифференцируемая функция, не являющаяся постоянной, производная которой обращается в нуль всюду на замкнутом интервале.*

Пример b.

(f) *Дифференцируемая функция, для которой не справедлива теорема Ролля (и, следовательно, теорема о среднем).*

Пример c.

(g) *Монотонная равномерно непрерывная функция, которая не является постоянной и обладает свойством Коши, а ее производная обращается в нуль всюду на интервале.*

Этот пример более трудный, чем предыдущие. Его можно построить с помощью канторова множества, определенного в гл. 8. Подробности см. в примере 15 гл. 8.

ГЛАВА 2

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

Введение

В этой главе необходимо расширить некоторые определения гл. 1 и ввести новые. Если не оговорено противное, то все рассматриваемые множества будут являться подмножествами системы действительных чисел $\mathbf{R}$, а все функции будут предполагаться действительнозначными функциями действительного переменного.

Сначала распространим понятия объединения и пересечения на бесконечные совокупности множеств $A_1, A_2, \ldots$:

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ по крайней мере для одного } n = 1, 2, \ldots\},$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \equiv \{x \mid x \in A_n \text{ для каждого } n = 1, 2, \ldots\}.$$

Множество A называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки; другими словами, ни одна точка множества A' не является предельной точкой множества A. Множество A называется *открытым*, если всякая точка этого множества имеет окрестность, целиком содержащуюся в множестве A. Точка p называется *граничной точкой* множества A, если каждая окрестность точки p содержит по крайней мере одну точку множества A и по крайней мере одну точку множества A'. Множество всех граничных точек множества A называется *границей* A и обозначается символом $F(A)$. Точка p называется *внутренней точкой* множества A, если существует окрестность точки p, целиком лежащая в A. Множество всех внутренних точек множества A называется *ядром* A и обозначается через $I(A)$. Любое замкнутое множество A является объединением своего ядра и границы:

$A = I(A) \cup F(A)$. Замыканием $\bar{A}$ множества A называется объединение множества A и множества всех предельных точек A. Открытым покрытием множества A называется любое семейство $\{U_\alpha\}$ открытых множеств U_α, объединение которых содержит A; в этом случае говорят, что семейство $\{U_\alpha\}$ покрывает A. Множество A называется компактным, если каждое его открытое покрытие содержит конечное подсемейство, которое покрывает A[1]). В пространстве $\mathbf{R}$ множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. (Первая часть этого утверждения есть теорема Гейне — Бореля; см. [36], стр. 202, а также [33]*, стр. 43.)

Множество A называется счетным, если оно либо конечно, либо существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел $\mathbf{N}$ и множеством A.

Важное свойство системы действительных чисел состоит в том, что для любого действительного числа x существует единственное целое число n, такое, что

$$n \leqslant x < n+1 \quad \text{или} \quad x-1 < n \leqslant x.$$

Поскольку n определяется однозначно как наибольшее целое число, не превосходящее x, мы получаем тем самым функцию, которая обозначается символом $[x]$[2]). Функция $f(x)=[x]$ определяется, таким образом, одним из неравенств

$$[x] \leqslant x < [x]+1 \quad \text{или} \quad x-1 < [x] \leqslant x,$$

где $[x]$ — целое число. В дальнейшем квадратные скобки будут обозначать целую часть числа лишь в том случае, если будет сделано соответствующее пояснение.

Функция f, являющаяся отображением множества $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, называется периодической с периодом p, если $f(x+p) = f(x)$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Функцию называют периодической, если она является периодической с некоторым отличным от нуля периодом p.

Пусть a является предельной точкой области определения D некоторой функции f, и пусть $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a для $x \in D$. Верхний пре-

---

[1]) Такие множества часто называют компактами. — *Прим. ред.*

[2]) $[x]$ называется целой частью числа x. — *Прим. перев.*

дел и нижний предел функции f в точке a, которые обозначаются соответственно $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$ и $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x)$, определяются следующим образом. Для $\delta > 0$ положим

$$\varphi(\delta) \equiv \sup \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\},$$
$$\psi(\delta) \equiv \inf \{f(x) \mid x \in D \cap D(a, \delta)\}.$$

Тогда

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x) \equiv \lim_{\delta\to+0} \varphi(\delta) = \inf \{\varphi(\delta) \mid \delta > 0\},$$
$$\underline{\lim_{x\to a}} f(x) \equiv \lim_{\delta\to+0} \psi(\delta) = \sup \{\psi(\delta) \mid \delta > 0\}.$$

Функция f называется **полунепрерывной сверху** в точке $a \in D$, если $\overline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) \leqslant f(a)$; если же $\underline{\lim\limits_{x\to a}} f(x) \geqslant f(a)$, то f называется **полунепрерывной снизу** в точке a; наконец, f называется **полунепрерывной** в точке a, если она либо полунепрерывна сверху, либо полунепрерывна снизу в точке a.

Функцию f назовем **локально ограниченной в точке** a (которая либо принадлежит, либо является предельной точкой области определения функции f), если существует окрестность точки a, в которой f ограничена. Функция f называется **локально ограниченной** на некотором подмножестве A ее области определения, если f локально ограничена в каждой точке множества A.

Бесконечные пределы $\pm\infty$ и пределы $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ определяются, как и в случае $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, только в качестве окрестностей бесконечности используются

$$D(+\infty, N) \equiv (N, +\infty),$$
$$D(-\infty, N) \equiv (-\infty, N).$$

Например,

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \text{ если } \forall K\, \exists \delta > 0 \ni f(D \cap D(a, \delta)) \subset$$
$$\subset D(+\infty, K),$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b, \text{ если } \forall \varepsilon > 0\, \exists N \ni f(D \cap D(-\infty, N)) \subset$$
$$\subset N(b, \varepsilon).$$

Основные определения сходимости и равномерной сходимости, а также признак Вейерштрасса для равномерной сходимости бесконечных рядов предполагаются известными (см. [36], стр. 381, 444, 445, а также [52]*, т. II, стр. 423—425 и 430).

1. Всюду разрывная функция, абсолютное значение которой есть всюду непрерывная функция

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

2. Функция, непрерывная лишь в одной точке (см. пример 22)

$$f(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Единственной точкой непрерывности этой функции является 0.

3. Непрерывная и неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве

(a) Если A — неограниченное множество действительных чисел, то положим

$$f(x) \equiv x, \quad x \in A.$$

(b) Если A — ограниченное, но не замкнутое множество действительных чисел, то положим

$$f(x) = \frac{1}{x-c}, \quad x \in A,$$

где c — предельная точка множества A, не принадлежащая A.

Если же f непрерывна на *компактном* множестве A, то f ограничена на нем (см. [38], стр. 80).

4. Неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и локально ограниченная на нем

Пример 3.

Если же f локально ограничена на компактном множестве A, то она ограничена на нем.

5. Функция, всюду конечная и всюду локально неограниченная

Пусть x — рациональное число, равное m/n, где m и n — целые числа, такие, что дробь m/n несократима и $n > 0$. Тогда m и n определяются однозначно (см. [37], стр. 53), и потому следующая функция определена корректно:

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x \text{ рационально, } x = m/n \text{ — несократимая дробь, } n > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Если бы f была ограничена в $N(a, \varepsilon)$, то для всех дробей m/n в $N(a, \varepsilon)$ знаменатели n были бы ограничены, а, следовательно, были бы ограничены и числители m. Но отсюда следовало бы, что в интервале $N(a, \varepsilon)$ существует лишь конечное число рациональных чисел. (Противоречие.) (См. пример 27 гл. 8, где определена функция, обладающая еще более сильными патологическими свойствами. См. также пример 29 гл. 8.)

6. Непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и не имеющая экстремальных значений

(а) Если A — неограниченное множество действительных чисел, то положим

$$f(x) \equiv \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in A.$$

Функция $f(x)$ не имеет наибольшего значения на множестве A. Если же $f(x)$ определить формулой

$$f(x) \equiv (-1)^{[|x|]} \frac{x^2}{x^2+1}, \quad x \in A,$$

где $[|x|]$ — целая часть числа $|x|$, то $f(x)$ не будет иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения на множестве A[1]).

---

[1]) Пример, приведенный в пункте 6 (а), не корректен. Именно, если $A = \{2n\}$, где $n = 1, 2, \ldots$, то функция $f(x)$ имеет наименьшее значение при $x = 2$. Если же взять $A = (-\infty, +\infty)$, то функция $f(x)$ будет разрывной, например, в точке $x = 1$. — *Прим. ред.*

(b) Если A — ограниченное, но не замкнутое множество действительных чисел, то положим

$$f(x) \equiv -|x-c|, \quad x \in A,$$

где c — предельная точка множества A, не принадлежащая этому множеству. Функция $f(x)$ не имеет наибольшего значения на A. Если же $f(x)$ определить формулой

$$f(x) = (-1)^{[1/|x-c|]} \{L - |x-c|\},$$

где L — длина некоторого интервала, содержащего множество A, а квадратные скобки обозначают целую часть заключенного между ними числа, то $f(x)$ не будет иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения на A[1]).

7. Ограниченная функция, не имеющая относительных экстремумов на компактном множестве

Возьмем в качестве компактного множества замкнутый интервал $[0, 1]$ и для $x \in [0, 1]$ положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}, & \text{если } x \text{ рационально, } x = m/n, \text{ где } m/n \text{ —} \\ & \text{несократимая дробь и } n > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Тогда в каждой окрестности любой точки из $[0, 1]$ найдутся значения функции f, как угодно близкие к числам 1 и -1, однако все значения функции f лежат строго между этими числами (см. [22], стр. 127).

---

[1]) Пример, приведенный в пункте 6(b), не корректен даже для множества $A = (0, 1)$, так как в этом случае можно взять $L = 1$, $c = 0$, для которых функция $f(x)$ разрывна в точке $x = \frac{1}{2}$. Если же $A = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то при $L = 1$, $c = 0$ функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения при $x = \frac{1}{2}$. — *Прим. ред.*

8. Ограниченная функция, не являющаяся полунепрерывной ни в одной точке

Функция примера 7 не является полунепрерывной сверху ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, так как $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$ всюду равен 1, и, следовательно, ни в одной точке a не может быть выполнено неравенство $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x) \leqslant f(a)$. Подобным же образом устанавливается, что эта функция не является полунепрерывной снизу ни в одной точке. (Заметим, что функция примера 1 полунепрерывна сверху в каждой рациональной точке и полунепрерывна снизу в каждой иррациональной точке.)

9. Периодическая функция, отличная от постоянной и не имеющая наименьшего периода

Периодами функции примера 1 являются все рациональные числа.

Периоды любой действительнозначной функции с областью определения $\mathbf{R}$ образуют аддитивную группу (т. е. множество периодов замкнуто относительно вычитания). Эта группа или плотна (как в настоящем примере), или дискретна, и тогда она состоит из всех целых кратных наименьшего положительного элемента. Последний случай имеет место для всякой периодической функции с областью определения $\mathbf{R}$, если она отлична от постоянной и имеет по крайней мере *одну* точку непрерывности. (См. [38], стр. 549.)

10. Иррациональные функции

Функция $\sqrt{x}$ не является рациональной (см. пример 4 гл. 1), так как она не определена для $x < 0$.

Функция $[x]$ также не является рациональной, поскольку она имеет разрывы в некоторых точках ее области определения.

Функция $|x|$ является иррациональной по той причине, что она не имеет производной в некоторой точке ее области определения.

Функция $\sqrt{x^2+1}$ также иррациональна. В этом можно убедиться следующим образом. Если $\sqrt{x^2+1} = f(x)/g(x)$

для всех x, то $\sqrt{x^2+1}/x = f(x)/xg(x)$ для $x \neq 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)/xg(x) = 1$. Отсюда вытекает, что $f(x)$ и $xg(x)$ являются полиномами одинаковой степени и потому $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)/xg(x) = 1$, в то время как $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1}/x = -1$. (Противоречие.)

11. Трансцендентные функции

Функция f называется **алгебраической**, если $\exists$ полином $p(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x) u^k$, коэффициентами которого служат действительные полиномы $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$ (т. е. все их коэффициенты действительны), одновременно не обращающиеся тождественно в нуль, такой, что композиция $p(f(x))$ обращается тождественно в нуль в области определения функции f. Функция называется **трансцендентной**, если она не является алгебраической.

Примером трансцендентной функции может служить функция e^x, ибо если предположить, что

$$a_0(x) + a_1(x)e^x + \ldots + a_n(x)e^{nx} \equiv 0,$$

где $a_0(x) \not\equiv 0$, то, переходя к пределу в обеих частях этого тождества при $x \to -\infty$ и пользуясь правилом Лопиталя, мы получим равенство

$$\lim_{x \to -\infty} a_0(x) = 0,$$

которое невозможно в силу предположения $a_0(x) \not\equiv 0$.

Другим примером может служить функция $\sin x$, ибо если

$$b_0(x) + b_1(x)\sin x + \ldots + b_n(x)\sin^n x \equiv 0,$$

где полином $b_0(x) \not\equiv 0$, то $b_0(k\pi) = 0$ для всех целых k. (Противоречие.)

Дальнейшими примерами трансцендентных функций (по тем же причинам) являются $\ln x$ (функция, обратная к e^x) и остальные тригонометрические функции.

Примерами алгебраических функций могут служить следующие иррациональные функции примера 10: $\sqrt{x}$, $|x|$ $(|x| = \sqrt{x^2})$ и $\sqrt{x^2+1}$.

12. Функции $y=f(u)$, $u\in\mathbf{R}$, и $u=g(x)$, $x\in\mathbf{R}$, композиция которых $y=f(g(x))$ всюду непрерывна и такова, что $\lim\limits_{u\to b}f(u)=c$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=b$, $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))\neq c$

Если

$$f(u)\equiv\begin{cases}0 & \text{при} \quad u\neq 0, \quad u\in\mathbf{R},\\ 1 & \text{при} \quad u=0,\end{cases}$$

то $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$. Если же $g(x)\equiv 0$ для всех $x\in\mathbf{R}$, то $f(g(x))=1$ для всех x и, следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}f(g(x))=1$.

Этот контрпример будет невозможным, если добавить следующее условие: $x\neq a\Rightarrow g(x)\neq b$.

13. Две равномерно непрерывные функции, произведение которых не является равномерно непрерывной функцией

Функции x и $\sin x$ равномерно непрерывны на $\mathbf{R}$, так как их производные ограничены, но их произведение $x\sin x$ не является равномерно непрерывной функцией на $\mathbf{R}$.

Если же *обе* функции f и g ограничены на общей области определения D и равномерно непрерывны на ней, то их произведение fg также равномерно непрерывно на D. Так как функция, равномерно непрерывная на ограниченном множестве, ограничена на нем, то пример, подобный настоящему, возможен лишь в том случае, если общая область определения не ограничена и по крайней мере одна из функций не ограничена.

14. Непрерывное на некотором интервале, взаимно однозначное отображение, обратное к которому разрывно

Для этого примера необходимо, чтобы интервал *не* был замкнутым и ограниченным (см. [36], стр. 192) и чтобы функция принимала *не* только действительные значения (см. [36], стр. 50 и 52, упр. 25). В качестве примера мы используем комплекснозначную функцию $z=f(x)$ действительного переменного x. При этом непрерывность определяется точно так же, как и в случае действительной функции действительного переменного, только под абсолютной величиной комплексного числа $z=(a, b)$ следует понимать его модуль

$$|z|=|(a, b)|=(a^2+b^2)^{1/2}.$$

Определим функцию $z=f(x)$ следующим образом:

$$z=f(x)\equiv(\cos x, \sin x), \quad 0\leqslant x<2\pi.$$

Тогда f отобразит полуоткрытый интервал $[0, 2\pi)$ непрерывно и взаимно однозначно на единичную окружность $|z|=1$. Но так как единичная окружность является компактом, то обратное отображение не может быть непрерывным (см. [36], стр. 192), а именно оно разрывно в точке $(1, 0)$.

15. Функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках

Если x — рациональное число вида m/n, где m и n — целые числа, дробь m/n несократима и $n>0$, то положим $f(x)=1/n$. Если же x иррационально, положим $f(x)\equiv 0$. (См. [36], стр. 124.)[1])

В примере 10 гл. 8 будет показано, что не существует функции, непрерывной во всех рациональных точках и разрывной во всех иррациональных точках.

16. Полунепрерывная функция с плотным множеством точек разрыва

Функция примера 15 полунепрерывна сверху в каждой точке a, поскольку

$$\overline{\lim_{x\to a}} f(x)=0\leqslant f(a).$$

17. Функция с плотным множеством точек разрыва, каждая из которых устранима

Пусть a — рациональное число. Переопределим функцию примера 15, положив $f(a)=0$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x)=0=f(a),$$

т. е. функция f становится непрерывной в точке a.

[1]) Построенная функция $f(x)$ известна под названием функции Римана. — *Прим. ред.*

18. Монотонная функция, точки разрыва которой образуют произвольное счетное (возможно, плотное) множество

Пусть A — произвольное непустое счетное множество действительных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, и пусть $\sum p_n$ — конечный или сходящийся бесконечный ряд положительных чисел с суммой p (ряд конечен тогда и только тогда, когда конечно множество A, и имеет столько же членов, сколько элементов в множестве A). Если A ограничено снизу и x меньше любого элемента множества A, положим $f(x) \equiv 0$. В противном случае положим $f(x) \equiv \sum\limits_{a_n \leqslant x} p_n$, т. е. $f(x)$ равна сумме всех членов p_m ряда $\sum p_n$, таких, что $a_m \leqslant x$. Тогда f возрастает на $\mathbf{R}$, непрерывна в каждой точке, не принадлежащей A, и разрывна со скачком, равным p_n, во всякой точке a_n $\left(\text{т. е.} \lim\limits_{x \to a_n+0} f(x) - \lim\limits_{x \to a_n-0} f(x) = p_n\right)$.

Следует отметить, что для монотонных функций этот пример не допускает дальнейших усилений, ибо для всякой монотонной функции множество точек разрыва счетно (см. [38], стр. 59, упр. 29, а также [33]*, стр. 223). Пример 1 показывает, что если не требовать монотонности, то множество точек разрыва может совпадать с $\mathbf{R}$.

19. Функция с плотным множеством точек непрерывности и плотным множеством точек разрыва, ни одна из которых не является устранимой

Для этого достаточно в примере 18 в качестве множества A взять множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел.

20. Нигде не монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя интервалами

Определим $f(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$ следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 1 - x, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Тогда на $[0, 1]$ не существует подинтервала, на котором f монотонна. Множество значений f есть снова интервал $[0, 1]$, причем отображение f взаимно однозначно.

Следующая функция обладает тем же свойством и отображает интервал $[a, b]$ на интервал $[c, d]$:

$$g(x) \equiv \begin{cases} c + (d-c)\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } \dfrac{x-a}{b-a} \text{ рационально,} \\ d + (c-d)\dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } \dfrac{x-a}{b-a} \text{ иррационально.} \end{cases}$$

21. Непрерывная нигде не монотонная функция

Положим $f_1(x) \equiv |x|$ для $|x| \leqslant 1/2$ и продолжим эту функцию периодически с периодом 1, т. е. положим $f_1(x+n) = f_1(x)$ для всякого действительного числа x и всякого целого n. Далее для $n > 1$ положим $f_n(x) \equiv 4^{-n+1} f_1(4^{n-1}x)$. Таким образом, для всякого натурального n функция f_n — периодическая с периодом 4^{-n+1} и максимальным значением $\frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$. Наконец, определим на $\mathbf{R}$ функцию f так[1]):

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f_1(4^{n-1}x)}{4^{n-1}}.$$

Так как $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4^{-n+1}$, то по признаку Вейерштрасса этот ряд равномерно сходится на $\mathbf{R}$ и функция f всюду непрерывна. Если точка a имеет вид $a = k \cdot 4^{-m}$, где k — целое, а m — натуральное, то $f_n(a) = 0$ для $n > m$. Следовательно, $f(a) = f_1(a) + \ldots + f_m(a)$. Пусть $h_m = 4^{-2m-1}$, где m — произвольное натуральное число. Тогда $f_n(a + h_m) = 0$ при $n > 2m + 1$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} f(a+h_m) - f(a) = [f_1(a+h_m) - f_1(a)] + \ldots \\ \ldots + [f_m(a+h_m) - f_m(a)] + \\ + f_{m+1}(a+h_m) + \ldots + f_{2m+1}(a+h_m) \geqslant \\ \geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0. \end{aligned}$$

Аналогично

$$f(a-h_m) - f(a) \geqslant -mh_m + (m+1)h_m = h_m > 0.$$

---

[1]) Пример функции $f(x)$ был фактически рассмотрен Ван дер Варденом в связи с другим вопросом (см. гл. III, пример 8). — *Прим. ред.*

Но так как точки вида $a = k \cdot 4^{-m}$ всюду плотны в $\mathbf{R}$, то отсюда следует, что не существует открытого интервала, на котором f монотонна.

Конструкции, подобные описанной выше, приводят к сгущению особенностей.

22. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное замкнутое множество

Пусть A — замкнутое множество. Определим множество B следующим образом:

$$x \in B, \quad \text{если} \quad x \in F(A) \quad \text{или} \quad x \in I(A) \cap \mathbf{Q}.$$

Далее положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in B, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin B. \end{cases}$$

Если $c \in A$, то f разрывна в этой точке. В самом деле, если $c \in F(A)$, то $f(c) = 1$, в то время как c является предельной точкой множества $\mathbf{R} \setminus A$, на котором f тождественно равна 0; если же $c \in I(A) \cap \mathbf{Q}$, то $f(c) = 1$, причем c является предельной точкой множества $I(A) \setminus \mathbf{Q}$, на котором f равна 0; наконец, если $c \in I(A) \setminus \mathbf{Q}$, то $f(c) = 0$, в то время как c является предельной точкой множества $I(A) \cap \mathbf{Q}$, на котором f тождественно равна 1. Отметим, что на множестве $\mathbf{R} \setminus A$ функция f непрерывна, поскольку это множество открыто и функция f постоянна на нем.

23. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное множество типа F_σ. (См. пример 8 гл. 4 и примеры 8, 10 и 22 гл. 8.)

Множество A называется *множеством типа* F_σ, если оно является объединением счетного множества замкнутых множеств (см. пример 8 гл. 8). Пусть $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ есть заданное множество типа F_σ, причем $A_1, A_2, \ldots$ замкнуты и $A_n \subset A_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Обозначив через A_0 пустое множество $\varnothing$, определим последовательность непересекающихся множеств B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ следующим образом:

$$x \in B_n, \quad \text{если} \quad \begin{cases} x \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1}) \\ \text{или} \ x \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \mathbf{Q}. \end{cases}$$

И наконец, определим искомую функцию f, положив

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-n}, & \text{если} \quad x \in B_n, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin B_1 \cup B_2 \cup \ldots . \end{cases}$$

Покажем, что если $c \in A$, то f разрывна в точке c. В самом деле, если $c \in (A_n \setminus A_{n-1}) \setminus I(A_n \setminus A_{n-1})$, то $f(c) = 2^{-n}$, причем c является предельной точкой некоторого множества, на котором f принимает значения, отличающиеся от 2^{-n} по крайней мере на 2^{-n-1}; если же $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus \mathbf{Q}$, то $f(c) = 2^{-n}$, причем c является предельной точкой множества $I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus \mathbf{Q}$, на котором f тождественно равна 0; наконец, если $c \in I(A_n \setminus A_{n-1}) \setminus \mathbf{Q}$, то $f(c) = 0$, в то время как c является предельной точкой множества $I(A_n \setminus A_{n-1}) \cap \mathbf{Q}$, на котором f тождественно равна 2^{-n}. Остается показать, что если $c \notin A$, то f непрерывна в c. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Возьмем N, такое, что $2^{-N} < \varepsilon$, а затем выберем окрестность точки c, не имеющую общих точек с множествами $A_1, A_2, \ldots, A_N$. Тогда в этой окрестности $f(x) < 2^{-N} < \varepsilon$, и непрерывность функции f в точке c доказана.

Следует отметить, что для *любой* функции f, отображающей $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, множество точек разрыва является множеством типа F_σ (см. [38], стр. 84, упр. 30—33; стр. 332, упр. 41, а также [1]*, стр. 152).

24. Функция, не являющаяся пределом последовательности непрерывных функций. (См. пример 10 гл. 4.)

Функция f примера 1 обладает тем свойством, что не существует последовательности $\{f_n\}$ непрерывных функций, такой, что $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x)$ для всех действительных x. Однако доказательство этого факта не является элементарным, подробности и дальнейшие ссылки см. в [9], стр. 99—103. Идея доказательства состоит в том, что f всюду разрывна, в то время как функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций, должна иметь плотное множество точек непрерывности.

Покажем, однако, что характеристическая функция множества **Q** всех рациональных чисел является пределом последовательности $\{g_n\}$ функций, каждая из которых есть предел последовательности $\{h_n\}$ непрерывных функций. Действительно, пусть $\{r_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел. Положим

$$g_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x = r_1, r_2, \ldots, \text{ или } r_n, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Всякая функция g_n является пределом последовательности непрерывных функций, каждую из которых можно выбрать в виде ломаной. Эти ломаные строятся следующим образом. Каждая из них равна 1 в тех точках, где $g_n(x) = 1$, равна 0 на замкнутых подинтервалах, являющихся внутренними для интервалов, образованных двумя соседними точками, в которых $g_n(x) = 1$, и линейна на оставшихся интервалах. Построение ведется таким образом, чтобы основания пиков стягивались к точкам, в которых $g_n(x) = 1$.

Заметим, что для каждого x последовательность $\{g_n(x)\}$ возрастает, в то время как последовательность, которая сходится к $g_n(x)$, может быть выбрана убывающей.

25. Функция, определенная на [0, 1], множество значений которой на каждом невырожденном подинтервале совпадает с [0, 1]. (См. пример 27 гл. 8.)

Функция, обладающая этим свойством, впервые была построена А. Лебегом (см. [28], стр. 85). Описание этого построения можно найти в [9] (см. стр. 71, а также [22], стр. 228).

Пусть x — произвольное число из [0, 1], и пусть

$$x = 0,a_1a_2a_3 \ldots$$

— его десятичное разложение. В случае, если x допускает два различных разложения, одно из которых является конечной десятичной дробью, другое же имеет цифру 9 в периоде, то можно взять любое из этих разложений. Для определенности условимся брать лишь конечные разложения. Значения функции $f(x)$ будут зависеть от того, является ли дробь $0,a_1a_3a_5 \ldots$ периодической или нет, т. е. является ли число

$0, a_1a_3a_5 \ldots$ рациональным или нет (см. [37], стр. 178):

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0{,}a_1a_3a_5 \ldots \text{ иррационально,} \\ 0{,}a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4} \ldots, & \text{если } 0{,}a_1a_3a_5 \ldots \text{ рационально} \\ & \text{и периодическое повторение совокупности цифр} \\ & \text{начинается с } a_{2n-1}. \end{cases}$$

Пусть I — произвольный подинтервал из $[0, 1]$. Выберем цифры $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ так, чтобы числа $0{,}a_1a_2 \ldots a_{2n-2}0$ и $0{,}a_1a_2 \ldots a_{2n-1}1$ принадлежали I, а цифра a_{2n-3} была отлична от 0 и 1. Далее положим $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots$ $\ldots = a_{4n-5} = 0$, а $a_{4n-3} = 1$. Затем эти n цифр будем периодически повторять, располагая их на местах с нечетными индексами. Таким образом, мы определим все a_{2k-1}. Если теперь $y = 0{,}b_1b_2b_3 \ldots$ — произвольная точка из $[0, 1]$, то положим

$$x = 0\, a_1a_2a_3 \ldots a_{2n-1}b_1a_{2n+1}b_2a_{2n+3} \ldots .$$

Число x принадлежит интервалу I и таково, что разложение

$$0{,}a_1a_3a_5 \ldots a_{2n-3}a_{2n-1}a_{2n+1} \ldots$$

является периодической десятичной дробью, первый период которой начинается с a_{2n-1}. Следовательно,

$$f(x) = 0{,}b_1b_2b_3 \ldots .$$

Точки графика функции f расположены всюду плотно в единичном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, хотя каждый вертикальный отрезок $\{x\} \times [0, 1]$ пересекает график лишь в одной точке.

В примере 27 гл. 8 определяется функция, множество значений которой на каждом непустом открытом интервале совпадает с $\mathbf{R}$ и которая равна нулю почти всюду (а следовательно, измерима). (См. также следующий пример 26.)

Так как единичный интервал $[0, 1]$ содержит бесконечное множество непересекающихся открытых интервалов (например $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$), то функция f настоящего примера принимает каждое свое значение бесконечное множество раз. Еще одна функция, которая каждое свое значение принимает бесконечное множество раз, определена в примере 9 гл. 10.

26. Разрывная линейная функция

Функция f, отображающая $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, называется линейной, если $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для всех $x, y \in \mathbf{R}$. Линейная функция, которая *не* является непрерывной, должна быть „очень сильно" разрывной. В самом деле, ее график должен быть всюду плотным на плоскости $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. Эти вопросы рассматриваются в [9] (стр. 108—113), где приведены дальнейшие ссылки. В случае же, если f непрерывна и линейна, она должна иметь вид $f(x)=cx$. В этом можно убедиться, рассматривая последовательно классы чисел $\mathbf{N}$, $\mathbf{I}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$.

Построение разрывной линейной функции можно осуществить, используя базис Хамеля в линейном пространстве $\mathbf{R}$ вещественных чисел над полем $\mathbf{Q}$ рациональных чисел (см. ссылки [29], [30] и [32] из [9]). Идея состоит в том, что этот процесс приводит к множеству $S=\{r_\alpha\}$ действительных чисел r_α, таких, что всякое действительное число x является *единственной* линейной комбинацией конечного числа элементов из S с рациональными коэффициентами $p_\alpha: x = p_{\alpha_1} r_{\alpha_1} + \ldots + p_{\alpha_k} r_{\alpha_k}$. Функцию f можно определить так:

$$f(x) \equiv p_{\alpha_1} + \ldots + p_{\alpha_k},$$

поскольку представление числа x в виде линейной комбинации единственно. Линейность функции f следует непосредственно из ее определения, а тот факт, что f не является непрерывной, вытекает из того, что все ее значения рациональны, но не все одинаковы (f не обладает свойством Коши, т. е. не принимает некоторые промежуточные значения).

27. Теорема Колмогорова: для каждого $n \in \mathbf{N}$ существуют $n(2n+1)$ функций $\varphi_{ij}(x_j)$ ($j=1, 2, \ldots, n$, $i=1, 2, \ldots, 2n+1$), таких, что

(a) все функции $\varphi_{ij}(x_j)$ непрерывны на $[0, 1]$;

(b) для любой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, непрерывной на $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$, существуют $2n+1$ функций ψ_i, $i=1, 2, \ldots, 2n+1$, каждая из которых непрерывна на $\mathbf{R}$, причем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{i=1}^{2n+1} \psi_i\left(\sum_{j=1}^{n} \varphi_{ij}(x_j)\right).$$

Эта теорема принадлежит А. Н. Колмогорову [25]. Она разрешает знаменитую седьмую[1]) проблему Д. Гильберта и формулируется в этом случае следующим образом: *каждую непрерывную функцию* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *n действительных переменных,* $0 \leqslant x_1, x_2, \ldots, x_n \leqslant 1$, *можно представить в виде суммы (внешняя сумма приведенной выше формулы)* $2n+1$ *суперпозиций непрерывных функций одного переменного и суммы (внутренняя сумма указанной формулы) n непрерывных функций одного переменного.*

Доказательство этой теоремы в высшей степени остроумно, но доступно каждому читателю, который готов терпеливо проследить за довольно длинной цепью индуктивных рассуждений.

Отметим лишь, что функции φ_{ij} являются универсальными, т. е. они не зависят от f. Функции ψ_i, напротив, однозначно определяются функцией f. Подробное доказательство можно найти в цитированной работе.

---

[1]) Здесь речь должна идти, вероятно, о тринадцатой проблеме Гильберта, а не о седьмой. — *Прим. ред.*

ГЛАВА 3

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Введение

В некоторых примерах этой главы термин *производная* будет применяться и к бесконечным пределам

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=+\infty, \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\infty.$$

Однако термин *дифференцируемая функция* используется лишь в том случае, если функция имеет конечную производную в каждой точке своей области определения. Функция называется бесконечно дифференцируемой, если она имеет (конечную) производную любого порядка в каждой точке области определения.

Показательная функция с основанием e будет обозначаться символом e^x или $\exp(x)$.

Как и в предыдущей главе, предполагается, что все множества, включая области определения и множества значений функций, являются подмножествами $\mathbf{R}$. В противном случае будет сделано соответствующее уточнение. Это предположение будет оставаться в силе вплоть до гл. 8.

1. Функция, не являющаяся производной

Функция $\operatorname{sgn} x$ (см. введение, гл. 1) и вообще всякая функция с разрывом в виде скачка не имеет примитивной, т. е. не является производной никакой функции, поскольку она не обладает свойством Коши принимать все промежуточные значения, а это свойство присуще не только непрерывным функциям, но и производным (см. [36], стр. 84, упр. 40, а также [52]*, т. I, стр. 224). Ниже приводится пример разрывной производной.

2. Дифференцируемая функция с разрывной производной

Рассмотрим функцию

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

Ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$.

3. Разрывная функция, всюду имеющая производную (не обязательно конечную)

Для того чтобы такой пример стал возможен, надо расширить определение производной так, чтобы оно включало значения $\pm\infty$. Тогда разрывная функция $\operatorname{sgn} x$ (пример 1) имеет производную

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x \neq 0, \\ +\infty, & \text{если} \quad x = 0. \end{cases}$$

4. Дифференцируемая функция, производная которой не сохраняет знака ни в какой односторонней окрестности экстремальной точки

Функция

$$f(x) \equiv \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right), & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

имеет абсолютный минимум в точке $x = 0$. А ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} x^2 \left[4x \left(2 + \sin \frac{1}{x}\right) - \cos \frac{1}{x}\right], & \text{если} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \end{cases}$$

в любой односторонней окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения. Функция f не является монотонной ни в какой односторонней окрестности точки $x = 0$.