

5. Дифференцируемая функция, производная которой положительна в некоторой точке, но сама функция не монотонна ни в какой окрестности этой точки

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет производную, равную

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin \frac{1}{x} - 2 \cos \frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой окрестности нуля производная $f'(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные значения.

6. Функция, производная которой конечна, но не ограничена на замкнутом интервале

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не ограничена на $[-1, 1]$.

7. Функция, производная которой существует и ограничена, но не имеет (абсолютного) экстремума на замкнутом интервале

Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^4 e^{-\frac{1}{4}x^2} \sin \frac{8}{x^3}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет производную

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x^2/4} \left[\left(4x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right], & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

В любой окрестности нуля эта производная имеет значения, как угодно близкие к 24 и -24 . С другой стороны, для $0 < h \equiv |x| \leq 1$ (см. [36], стр. 83, упр. 29) имеем

$$0 < e^{-x^2/4} < 1 - \frac{1}{4} h^2 e^{-h^2/4} < 1 - \frac{3}{16} h^2,$$

и

$$\left| \left(4x^3 - \frac{x^5}{2}\right) \sin \frac{8}{x^3} - 24 \cos \frac{8}{x^3} \right| \leqslant 24 + \frac{9}{2} h^3.$$

Поэтому из неравенства $0 < h \leq 1$ следует, что

$$|f'(x)| < \left(1 - \frac{3}{16} h^2\right) \left(24 + \frac{9}{2} h^3\right) < 24 - \frac{9}{2} h^2 (1 - h) \leq 24.$$

Следовательно, множество значений функции f' на $[-1, 1]$ имеет точную верхнюю грань, равную 24, и точную нижнюю грань, равную -24 , и ни одна из этих граней не достигается.

8. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция

Функция $|x|$ всюду непрерывна, но не дифференцируема в точке $x = 0$. С помощью сдвига этой функции можно определить всюду непрерывную функцию, которая не дифференцируема в каждой точке произвольно заданного конечного множества. В этом параграфе мы приведем пример, использующий бесконечное множество сдвигов функции $|x|$.

Покажем, что функция примера 21 гл. 2 нигде не дифференцируема. Пусть a — произвольное действительное число, и пусть для всякого натурального n число h_n , равное 4^{-n} или -4^{-n} , выбрано так, что $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Тогда величина $|f_m(a + h_n) - f_m(a)|$ имеет одинаковое значение $|h_n|$ для всех $m \leq n$ и равна нулю для $m > n$. Тогда разностное отношение $(f(a + h_n) - f(a))/h_n$ является целым числом, которое четно при четном n и нечетно при нечет-

ном n . Отсюда следует, что предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(a + h_n) - f(a)}{h_n}$$

не существует, а поэтому не существует и $f'(a)$.

Приведенный пример¹⁾ является модификацией примера, построенного Б. Л. Ван дер Варденом в 1930 г. (см. [51], стр. 394). Первый же пример непрерывной нигде не дифференцируемой функции был построен К. В. Т. Вейерштрасом (немецкий математик, 1815—1897 г.):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где a — целое нечетное число, а число b таково, что $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi^2$. В настоящее время известны примеры непрерывных функций, которые ни в одной точке не имеют даже односторонней конечной или бесконечной производной. Эти примеры и дальнейшие ссылки можно найти в [51] (стр. 392—394), [19] (стр. 61—62, 115, 126), а также в [16] (т. II, стр. 401—412).

Как было показано ранее (см. пример 21 гл. 2), функция настоящего примера не является монотонной ни на каком интервале. Более того, существует пример функции всюду дифференцируемой и нигде не монотонной (см. [16], т. II, стр. 412—421). Конструкция этого примера очень сложна и приводит к функции, которая всюду дифференцируема и имеет плотное множество относительных максимумов и плотное множество относительных минимумов.

9. Дифференцируемая функция, для которой теорема о среднем не имеет места

В этом примере мы снова вынуждены обратиться к комплекснозначной функции. Функция

$$f(x) \equiv \cos x + i \sin x$$

¹⁾ Точно в таком же виде пример функции $f(x)$ изложен в книге П. С. Александрова „Введение в общую теорию множеств и функций”, 1948, стр. 223—225. — Прим. ред.

²⁾ На самом деле, как показал Г. Харди (Hardy G. H., Weierstrass's nondifferentiable function, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17 (1916), 301—325), эта функция нигде не дифференцируема лишь в предположении, что $0 < b < 1$ и $ab \geqslant 1$. — Прим. перев.

действительного переменного x всюду непрерывна и дифференцируема (см. [36], стр. 509—513). Однако не существует такого интервала $[a, b]$, $a < b$, для которого при некотором $\xi \in (a, b)$ справедливо равенство

$$(\cos b + i \sin b) - (\cos a + i \sin a) = (-\sin \xi + i \cos \xi)(b - a).$$

Если предположить, что это равенство возможно, то, приравнивая квадраты модулей (абсолютных значений) обеих его частей, мы получим равенство

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (b - a)^2,$$

которое после элементарных преобразований примет вид

$$\sin^2 \frac{b-a}{2} = \left(\frac{b-a}{2} \right)^2.$$

Но так как не существует положительного числа h , такого, что $\sin h = h$ (см. [36], стр. 78), то мы получили противоречие.

10. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, положительная при положительных x и равная нулю при отрицательных x

Функция

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема, а все ее производные в точке $x = 0$ равны 0 (см. [36], стр. 108, упр. 52).

11. Бесконечно дифференцируемая функция, положительная в единичном интервале и равная нулю вне его

$$f(x) \equiv \begin{cases} e^{-1/x^2(1-x)^2}, & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

12. Бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на $[1, +\infty)$, равная 0 на $(-\infty, 0]$ и строго монотонная на $[0, 1]$

$$f(x) \equiv \begin{cases} \exp \left[-\frac{1}{x^2} \exp \left(-\frac{1}{(1-x)^2} \right) \right], & \text{если } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{если } x \leq 0, \\ 1, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

13. Бесконечно дифференцируемая монотонная функция f , такая, что¹⁾ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$

Если не требовать монотонности, то тривиальным примером такой функции будет, например, $(\sin x^2)/x$. Построим пример монотонной функции, обладающей указанным свойством. Положим $f(x)$ равной 1 для $x \leq 1$ и равной $1/n$ на замкнутых интервалах $[2n - 1, 2n]$ для $n = 1, 2, \dots$. На оставшихся промежуточных интервалах вида $(2n, 2n+1)$ определим $f(x)$ с помощью функции примера 12, применяя горизонтальные и вертикальные сдвиги и умножение на соответствующие отрицательные множители²⁾.

¹⁾ В примерах такого типа предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ не существует (ни конечный, ни бесконечный), так как если бы он существовал, то из равенства $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ вытекало бы, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. — Прим. перев.

²⁾ Приведенные рассуждения не убедительны. В самом деле, если через $f_1(x)$ обозначим функцию из примера 12, то $f(x) = -\frac{1}{n(n+1)} f_1(x-2n) + \frac{1}{n}$ при $x \in (2n, 2n+1)$ и потому $\sup_{2n < x < 2n+1} |f'(x)| = \frac{1}{n(n+1)} \sup_{0 \leq t \leq 1} |f'_1(t)|$, что влечет $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. Для построения корректного примера достаточно положить $f(x) = 1$ при $x \leq 2$, $f(x) = \frac{1}{n}$ при $x \in \left[n + \frac{1}{n^3}, n+1\right] = [a_n, b_n]$ ($n \geq 2$) и $f(x) = -\frac{1}{n(n-1)} f_1(n^3(x-b_{n-1})) + \frac{1}{n-1}$ при $x \in (b_{n-1}, a_n)$ с $n \geq 2$. — Прим. ред.

ГЛАВА 4

ИНТЕГРАЛ РИМАНА

Введение

Определение интеграла Римана функции f , заданной на замкнутом интервале $[a, b]$, а также элементарные свойства этого интеграла предполагаются известными. То же самое предполагается относительно основных несобственных интегралов, а в примере 14 — относительно интеграла Римана — Стильтьеса.

В некоторых примерах настоящей главы важное значение имеет понятие множества меры нуль. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется множеством меры нуль, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие множества A счетной совокупностью открытых интервалов, длины которых образуют бесконечный сходящийся ряд с суммой, меньшей ε . Ядро всякого множества меры нуль пусто. Говорят, что некоторое утверждение справедливо для почти всех точек или почти всюду, если множество всех точек, для которых это утверждение не имеет места, является множеством меры нуль. Для того чтобы функция f , заданная на замкнутом конечном интервале $[a, b]$, была интегрируема по Риману на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена и почти всюду непрерывна (см. [38], стр. 153, упр. 54, а также [33]*, стр. 145).

1. Ограниченнaя функция, не интегрируемая по Риману на конечном замкнутом интервале

Характеристическая функция множества Q всех рациональных чисел, рассматриваемая на замкнутом интервале $[0, 1]$, не интегрируема по Риману на нем (см. [36], стр. 112)¹⁾.

¹⁾ Эта функция известна под названием „функции Дирихле“. — Прим. ред.

2. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая примитивной

Функция $\operatorname{sgn} x$ (пример 1 гл. 3), рассматриваемая на интервале $[-1, 1]$, интегрируема на нем, но не имеет примитивной.

3. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая примитивной ни на каком интервале

Если в примере 18 гл. 2 положить $A = Q \cap [0, 1]$, то функция f будет интегрируема на $[0, 1]$, так как она монотонна на этом интервале. Однако эта функция не имеет примитивной ни на каком подинтервале из $[0, 1]$, поскольку множество точек ее скачков всюду плотно в интервале $[0, 1]$ ¹⁾.

4. Функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману. (См. пример 35 гл. 8.)

Функция f примера 6 гл. 3 имеет (конечную) производную $g(x)$ в каждой точке x некоторого замкнутого интервала I . Следовательно, функция g имеет примитивную. Однако функция g не ограничена, а поэтому не интегрируема по Риману.

Два предыдущих примера (примеры 3 и 4) представляют особый интерес в связи с основной теоремой интегрального исчисления. Первый вариант этой теоремы таков: если функция $f(x)$ (i) интегрируема на интервале $[a, b]$ и (ii) имеет примитивную $F(x)$ на этом интервале ($F'(x) = f(x)$ для $a \leq x \leq b$), то интеграл Римана функции $f(x)$ можно вычислить по формуле $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Второй вариант гласит: если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $[a, b]$, то справедливы утверждения (i) и (ii) с $G(x) \equiv \int_a^x f(t) dt$ в качестве некоторой примитивной, причем для

¹⁾ Если $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq 0$, то a называется точкой скачка функции $f(x)$. — Прим. перев.

всякой примитивной $F(x)$ имеет место формула $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Наконец, третий вариант этой теоремы можно сформулировать так: если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, а функция $F(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет производную $F'(x)$, равную $f(x)$ во всех точках интервала $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек, то интеграл Римана функции $f(x)$ можно вычислить по формуле $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ¹⁾.

5. Интегрируемая по Риману функция со всюду плотным множеством точек разрыва

Этим свойством обладает функция примера 3, которая к тому же является монотонной.

Функция примера 15 гл. 2 также обладает этим свойством, однако она нигде не монотонна. Для этой функции $\int_a^b f(x) dx = 0$ при всех a и b .

6. Функция f , для которой $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$ всюду дифференцируема, однако $g'(x) \neq f(x)$ на всюду плотном множестве

Если f — функция примера 15 гл. 2 (см. также предыдущий пример), то $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$ является тождественным нулем и, следовательно, $g'(x) = 0$ для всех x . Поэтому равенство $g'(x) = f(x)$ справедливо лишь для иррациональных x .

¹⁾ Нетрудно видеть, что эти три варианта основной теоремы интегрального исчисления не эквивалентны. — Прим. перев.

7. Две различные полунепрерывные функции, „расстояние“ между которыми равно нулю

В этом случае расстояние d между двумя функциями f и g , интегрируемыми на $[a, b]$, определяется как интеграл от абсолютной величины их разности:

$$d \equiv \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Если f — полунепрерывная функция предыдущего примера (см. пример 16 гл. 2), а функция g — тождественный нуль, то $f(x)$ и $g(x)$ не равны во всех рациональных точках x (и, следовательно, f и g , несомненно, являются различными функциями), в то время как определенное выше расстояние d между этими функциями равно нулю.

8. Интегрируемая по Риману функция, множество точек разрыва которой совпадает с произвольно заданным множеством типа F_σ и меры нуль. (См. пример 22 гл. 8.)

Этот пример несколько напоминает пример 23 гл. 2. Пусть A — заданное множество типа F_σ и меры нуль: $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots$, где A_1, A_2, \dots — замкнутые подмножества некоторого интервала $[a, b]$, причем $A_n \subset A_{n+1}$ для $n = 1, 2, \dots$. Далее, пусть A_0 обозначает пустое множество \emptyset . Определим функцию f следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} 2^{-n}, & \text{если } x \in A_n \setminus A_{n-1}, \\ 0, & \text{если } x \notin A. \end{cases}$$

Если $c \in A$, то f разрывна в этой точке. Действительно, пусть $c \in A_n \setminus A_{n-1}$. Поскольку $A_n \setminus A_{n-1}$ является множеством меры нуль, то у него нет внутренних точек, и, следовательно, c является предельной точкой множества, на котором f принимает значения, отличающиеся от 2^{-n} по крайней мере на 2^{-n-1} . Если же $c \notin A$, то f непрерывна в этой точке. В самом деле, пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем такое N , что $2^{-N} < \varepsilon$. После этого возьмем такую окрестность точки c , которая не содержит ни одной точки множеств A_1, A_2, \dots, A_N . Тогда в этой окрестности $|f(x) - f(c)| < 2^{-N} < \varepsilon$.

9. Две функции, интегрируемые по Риману, композиция которых не интегрируема по Риману. (См. пример 34 гл. 8.)

Пусть $f(x) \equiv 1$ для $0 < x \leq 1$ и $f(0) \equiv 0$. Далее, пусть g — сужение функции f примера 15 гл. 2 на замкнутый интервал $[0, 1]$. Тогда $f(g(x))$ является сужением на $[0, 1]$ характеристической функции множества \mathbf{Q} всех рациональных чисел. Эта функция равна 1, если x рационально, и равна 0, если x иррационально. (См. пример 1 этой главы.)

10. Не интегрируемая по Риману ограниченная функция, являющаяся пределом возрастающей последовательности интегрируемых по Риману функций. (См. пример 33 гл. 8.)

Рассмотрим последовательность $\{g_n\}$ функций, определенных в примере 24 гл. 2. Если ограничиться замкнутым интервалом $[0, 1]$, то эта последовательность является возрастающей последовательностью интегрируемых по Риману функций, т. е. для каждого $x \in [0, 1]$, $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ при $n = 1, 2, \dots$. Положим $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ для $x \in [0, 1]$.

Тогда g является сужением на замкнутый интервал $[0, 1]$ характеристической функции множества \mathbf{Q} всех рациональных чисел, и, следовательно, (см. пример 1) g не интегрируема по Риману на $[0, 1]$.

11. Расходящийся несобственный интеграл, имеющий конечное главное значение в смысле Коши

Несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} x dx$ расходится, но его главное значение в смысле Коши равно нулю:

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

(См. [36], стр. 145, упр. 30.)

12. Сходящийся несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$, подинтегральная функция которого положительна, непрерывна и не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$

Положим $g(n) \equiv 1$ для всякого целого $n > 1$, а на замкнутых интервалах $[n - n^{-2}, n]$ и $[n, n + n^{-2}]$ функцию g определим как линейную и равную нулю в концевых нецелых точках. Наконец, в тех точках $x \geq 1$, где $g(x)$ еще не определена, положим $g(x) \equiv 0$. Тогда функция

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

положительна и непрерывна для $x \geq 1$, равенство $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ не имеет места, а несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

сходится.

Если опустить требование положительности функции, то простым примером, который удовлетворяет оставшимся требованиям (см. [36], стр. 146, упр. 43), является интеграл

$$\int_1^{+\infty} \cos x^2 dx.$$

13. Сходящийся на интервале $[0, +\infty)$ несобственный интеграл, подинтегральная функция которого не ограничена на любом интервале вида $[a, +\infty)$, где $a > 0$

Этим условиям удовлетворяет несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x \cos x^4 dx$. (См. [36], стр. 146, упр. 43.)

Можно построить такой же пример с положительной и всюду непрерывной подинтегральной функцией. При этом можно воспользоваться методом, подобным тому, который был применен в предыдущем примере, полагая $g(n) \equiv n$ и рассматривая замкнутые интервалы $[n - n^{-3}, n]$ и $[n, n + n^{-3}]$.

14. Функции f и g , такие, что интеграл Римана — Стильтьеса от f относительно g существует на $[a, b]$ и $[b, c]$, но не существует на $[a, c]$

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 2, \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

и пусть $a = 0$, $b = 1$ и $c = 2$. Тогда

$$\int_0^1 f(x) dg(x) = 0, \quad \int_1^2 f(x) dg(x) = 1.$$

Но поскольку f и g имеют общую точку разрыва $x = 1$, то интеграл

$$\int_0^2 f(x) dg(x)$$

не существует (см. [36], стр. 151, упр. 10, а также [33]*, стр. 249).

ГЛАВА 5

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Введение

Понятия *последовательности*, *последовательности Коши*, *сходимости* и *расходимости* были определены во введении к гл. 1, а понятия верхнего и нижнего предела в (кoneчной) точке для функций даны во введении к гл. 2. Соответствующие определения для последовательностей действительных чисел предполагаются известными. Первые шесть примеров настоящей главы касаются только последовательностей действительных чисел. Следует подчеркнуть, что для этих последовательностей термин *предел* иногда употребляется и для обозначения бесконечных пределов. Однако под *сходящейся* последовательностью всегда понимается последовательность, имеющая *конечный* предел. В примере 7 предполагается, что читатель знаком с определением и элементарными свойствами *равномерной сходимости* последовательностей функций. В примере 8 сформулированы определения сходимости и расходимости *последовательностей множеств*, которые затем используются в примерах 8 и 9. Всюду в этой книге под словом *последовательность* понимается *бесконечная последовательность*, если не оговорено противное.

1. Ограничные расходящиеся последовательности

Простейшим примером ограниченной расходящейся последовательности, по-видимому, является последовательность

$$0, 1, 0, 1, \dots,$$

которую можно записать в виде $\{a_n\}$, где $a_n = 0$, если n нечетно, и $a_n = 1$, если n четно, т. е. $a_n = \frac{1}{2}[1 + (-1)^n]$.

Более сложным примером является последовательность $\{r_n\}$ всех рациональных чисел интервала $[0, 1]$, т. е. $\{r_n\}$ есть взаимно однозначное соответствие между множеством N и $Q \cap [0, 1]$.

2. Последовательность с произвольно заданным замкнутым множеством предельных точек

Всякая точка, которая является пределом некоторой подпоследовательности последовательности $\{a_n\}$, называется предельной точкой или частичным пределом последовательности $\{a_n\}$. Всякая предельная точка множества значений последовательности есть предельная точка самой последовательности, однако обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Контрпример: последовательность $0, 1, 0, 1, \dots$ имеет две предельные точки 0 и 1 , однако ее множество значений не имеет ни одной предельной точки.

Множество всех предельных точек любой последовательности $\{a_n\}$ всегда замкнуто, ибо оно является замыканием множества значений последовательности $\{a_n\}$ ¹⁾. Нижеследующий пример показывает, что таким путем можно получить любое замкнутое множество A , т. е. в действительности A является множеством предельных точек некоторой последовательности $\{a_n\}$, состоящей из различных точек. Отсюда будет следовать, что A является не только множеством предельных точек последовательности $\{a_n\}$, но и множеством предельных точек ее множества значений.

Если A — пустое множество, то положим $a_n \equiv n$ для $n = 1, 2, \dots$. Пусть теперь A — произвольное непустое замкнутое множество (действительных чисел), и пусть $\{r_n\}$ — последовательность всех рациональных чисел, среди членов которой нет равных ($\{r_n\}$ — взаимно однозначное отображение множества N на Q). Последовательность $\{a_n\}$, для которой A будет множеством предельных точек, мы определим рекуррентным способом. Сначала разобьем множество R на четыре

¹⁾ Это утверждение не точно. Множество предельных точек любой последовательности $\{a_n\}$ замкнуто, но оно не обязано совпадать с замыканием множества значений последовательности $\{a_n\}$.

Так будет, например, если $a_n = \frac{1}{n}$ ($n \geq 1$). — Прим. ред.

непересекающихся интервала: $(-\infty, -1)$, $[-1, 0)$, $[0, 1)$ и $[1, +\infty)$. Если $A \cap (-\infty, -1) \neq \emptyset$, то в качестве a_1 возьмем первый член последовательности $\{r_n\}$ (т. е. член с наименьшим номером n), принадлежащий интервалу $(-\infty, -1)$; если $A \cap (-\infty, -1) = \emptyset$, а $A \cap [-1, 0) \neq \emptyset$, то в качестве a_1 возьмем первый член последовательности, принадлежащий интервалу $[-1, 0)$; если же $A \cap (-\infty, 0) = \emptyset$, но $A \cap [0, 1) \neq \emptyset$, то в качестве a_1 возьмем первый член последовательности, принадлежащий $[0, 1)$; наконец, если $A \cap (-\infty, 1) = \emptyset$, то в качестве a_1 возьмем первый член последовательности, принадлежащий $[1, +\infty)$. Пусть элемент a_1 выбран. В случае если $A \cap [-1, +\infty) \neq \emptyset$, подобным же образом выбираем $a_2 \neq a_1$, рассматривая последовательно интервалы $[-1, 0)$, $[0, 1)$ и $[1, +\infty)$. Если же $A \cap [-1, +\infty) = \emptyset$, то на этой стадии другие члены не выбираются. Таким образом, на первой стадии определяется по крайней мере один член a_1 , но не более четырех членов a_1, a_2, a_3, a_4 последовательности $\{a_n\}$. На второй стадии R разбивается на $2 \cdot 2^2 + 2 = 10$ интервалов $(-\infty, -2)$, $[-2, -3/2)$, ..., $[3/2, 2)$, $[2, +\infty)$. На каждом шаге, после того как a_1, a_2, \dots, a_n выбраны, элемент a_{n+1} выбирается из некоторого интервала I , а именно если $A \cap I \neq \emptyset$, то a_{n+1} есть первый член $\{r_n\}$, отличный от уже выбранных и принадлежащий I . На k -й стадии R разбивается на $k \cdot 2^k + 2$ интервалов: $(-\infty, -k)$, $[-k, -k + 2^{-k+1})$, ..., ..., $[k - 2^{-k+1}, k)$, $[k, +\infty)$. Нетрудно показать, что последовательность $\{a_n\}$, определенная таким образом, рекуррентно, обладает требуемыми свойствами. Заметим, что если $A = R$, то $\{a_n\}$ является взаимно однозначным соответствием между N и Q , которое, возможно, отлично от $\{r_n\}^1$.

¹⁾ Построение последовательности $\{a_n\}$ можно осуществить проще. Именно, так как множества $I(A)$ и $B = (-\infty, \infty) - A$ открыты, то они суть суммы не более чем счетного числа непересекающихся интервалов: $I(A) = \bigcup_k (b_k, c_k)$, $B = \bigcup_m (d_m, e_m)$. Пусть

$\{r'_n(k)\} = (b_k, c_k) \cap Q$, а $\{r''_n(m)\} \subset (d_m, e_m) \cap Q$ — такая последовательность различных точек, предельными точками которой являются лишь d_m и e_m . Занумеровав в одну последовательность множества последовательностей $\{r'_n(k)\}$ и $\{r''_n(m)\}$ ($k = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$), мы и получим искомую последовательность $\{a_n\}$. — Прим. ред.

3. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$, для которой
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ **при любом натуральном p**

Пусть a_n обозначает n -ю частичную сумму гармонического ряда

$$a_n \equiv 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Тогда последовательность $\{a_n\}$ расходится, однако для $p > 0$ имеем

$$a_{n+p} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \leq \frac{p}{n+1} \rightarrow 0.$$

Заметим, что предельное соотношение $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ выполняется неравномерно относительно p . В самом деле, утверждение, что это предельное соотношение выполняется равномерно относительно p , эквивалентно критерию Коши для сходимости последовательности ([36], стр. 447, упр. 43).

Основную идею предыдущего абзаца можно высказать и в следующей форме: если $\{a_n\}$ расходится, то существует строго возрастающая последовательность $\{p_n\}$ натуральных чисел, таких, что $a_{n+p_n} - a_n \not\rightarrow 0$. Для последовательности частичных сумм гармонического ряда в качестве $\{p_n\}$ можно взять последовательность $\{n\}$, поскольку в этом случае

$$a_{n+p_n} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Следующий пример связан с другим аспектом этого вопроса (при $\varphi(n) \equiv n + p_n$).

4. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$, такая, что для заданной строго возрастающей последовательности $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ натуральных чисел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$.

Пользуясь индукцией, легко установить, что $\varphi(n) \geq n$ для всех $n = 1, 2, \dots$; более того, $\varphi(n+k) \geq n + \varphi(k)$ для всех n и $k = 1, 2, \dots$ Следовательно, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(n) = +\infty$.

Рассмотрим два случая.

Если последовательность $\varphi(n) - n$ ограничена, например $\varphi(n) - n \leq K$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то в качестве после-

довательности $\{a_n\}$ можно взять последовательность частичных сумм гармонического ряда, так как

$$a_{\varphi(n)} - a_n = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{\varphi(n)} \leq \frac{K}{n+1} \rightarrow 0.$$

Если же последовательность $\varphi(n) - n$ не ограничена, то поступим следующим образом. Пусть k — наименьшее натуральное число, такое, что $\varphi(k) > k$. Положим $a_n = 1$, если $n = k, \varphi(k), \varphi(\varphi(k)), \dots$, и $a_n = 0$ в противном случае. Поскольку $\{\varphi(n)\}$ строго возрастает, то существует подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, состоящая из единиц, а поскольку $\varphi(n) - n$ не ограничена, то существует подпоследовательность последовательности $\{a_n\}$, состоящая из нулей. Следовательно, $\{a_n\}$ расходится. С другой стороны, $a_{\varphi(n)} = a_n$ для каждого $n = 1, 2, \dots$, и потому $a_{\varphi(n)} - a_n \rightarrow 0$.

Этот пример можно обобщить в различных направлениях. Например, достаточно лишь предположить, что $\varphi(n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, при этом можно потребовать, чтобы последовательность $\{a_n\}$ была неограниченной. Однако мы не будем вдаваться в подробности.

5. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, такие, что $\underline{\lim} a_n + \underline{\lim} b_n < \underline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \overline{\lim}(a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$

Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности с периодами, состоящими из четырех цифр:

$$\{a_n\} : 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, 0, 1, 2, 1, \dots$$

$$\{b_n\} : 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, 2, 1, 1, 0, \dots$$

Тогда требуемые неравенства примут следующий вид:

$$0 < 1 < 2 < 3 < 4.$$

6. Последовательности $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$, такие, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) > \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$

Положим $a_{mn} = 1$, если $m = n$, и $a_{mn} = 0$, если $m \neq n$, $m, n = 1, 2, \dots$. При этом оба ряда, входящие в формулировку утверждения, сходятся, и требуемое неравенство принимает следующий вид: $1 > 0$.

Следует отметить, что неравенство, установленное в этом примере, невозможно в случае, если имеется лишь конечное число последовательностей. Например, всегда справедливо неравенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n.$$

(См. [36], стр. 59, упр. 19.)

7. Две равномерно сходящиеся последовательности функций, последовательность произведений которых не сходится равномерно

Пусть функция f определена и не ограничена на множестве $D^1)$, которое мы примем за область определения всех функций настоящего примера. Определим последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ следующим образом:

$$f_n(x) \equiv f(x), \quad g_n(x) \equiv \frac{1}{n}.$$

Тогда $f_n \rightarrow f$ и $g_n \rightarrow 0$ равномерно на D , однако $f_n g_n \rightarrow 0$ неравномерно на D . В частности, в этом примере можно положить $D = \mathbf{R}$, $f(x) = x$.

Следует заметить, что если обе последовательности ограничены и равномерно сходятся на D , то их произведение также равномерно сходится на D .

8. Расходящаяся последовательность множеств

Верхний предел $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$ и нижний предел $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$ последовательности множеств $\{A_n\}$ определяются следующими формулами:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \right], \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n \equiv \bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right].$$

Последовательность $\{A_n\}$ называется сходящейся, если $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$. В таком случае говорят, что она сходится.

¹⁾ Отсюда следует, что множество D бесконечно. — Прим. перев.

дится к этому общему значению верхнего и нижнего пределов. Если же последовательность множеств не сходится, то она называется расходящейся. Поскольку $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in \text{бесконечно многим } A_n\}$, а $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n = \{x | x \in \text{всем } A_n\}$, за исключением, быть может, конечного их числа}, то верхний предел осциллирующей последовательности A, B, A, B, A, B, \dots равен объединению $A \cup B$, а ее нижний предел равен пересечению $A \cap B$. Следовательно, последовательность такого типа сходится тогда и только тогда, когда $A = B$.

Следует обратить внимание на тесную аналогию между этим примером и примером последовательности чисел $\{a, b, a, b, \dots\}$ (см. пример 1).

9. Последовательность $\{A_n\}$ множеств, которая сходится к пустому множеству, но кардинальные числа этих множеств $\rightarrow +\infty$

Пусть A_n — множество n натуральных чисел, каждое из которых больше или равно n , но меньше $2n$:

$$A_n = \{m | m \in \mathbb{N}, n \leq m < 2n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда, поскольку никакое натуральное число не принадлежит бесконечному множеству членов последовательности $\{A_n\}$, то ее верхний и нижний пределы пусты.

Предыдущий пример можно наглядно пояснить следующим образом. Пусть у нас имеются биллиардные шары, которые занумерованы числами 0, 1, 2, Будем помещать в ящик по два шара и одновременно вынимать из него один. Например, за минуту до полудня поместим в ящик шары с номерами 0 и 1 и удалим из него шар с номером 0. За $1/2$ минуты до полудня поместим в ящик шары с номерами 2 и 3, а шар с номером 1 удалим. За $1/3$ минуты до полудня добавим шары с номерами 4 и 5 и вытащим шар с номером 2. Продолжая этот процесс, естественно задать вопрос: „Сколько шаров будет в ящике в полдень?“ Ответ: „Ни одного“.

Поскольку натуральные числа можно привести во взаимно однозначное соответствие с обратными им, а все конечные множества, как подмножества \mathbb{R} , компактны (замкнуты и ограничены), то все множества A_n этого примера компактны

и даже можно предположить, что они *равномерно* ограничены (все они заключены в одном ограниченном интервале). Если предположить, что последовательность $\{A_n\}$ является убывающей ($A_{n+1} \subset A_n$ для $n = 1, 2, \dots$), то предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ будет

равен пересечению $\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n$ и может быть пустым множеством,

в то время как кардинальное число каждого множества A_n бесконечно. В то же время каждое множество A_n может быть ограничено (пример: $\{1/n, 1/(n+1), \dots\}$) или замкнуто (пример: $\{n, n+1, \dots\}$). Однако оба эти условия (ограниченность и замкнутость) не могут быть выполнены одновременно (см. [36], стр. 201).

ГЛАВА 6

БЕСКОНЕЧНЫЕ РЯДЫ

Введение

Если не оговорено противное, то все рассматриваемые в настоящей главе ряды предполагаются действительными, т. е. их члены являются действительными числами. Пусть $\{s_n\}$ — последовательность частичных сумм бесконечного ряда $\sum a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$, т. е. $s_n = a_1 + \dots + a_n$ для $n = 1, 2, \dots$. Если $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ существует и конечен, то говорят, что ряд $\sum a_n$ сходится. Этот предел s называют суммой ряда $\sum a_n$ и пишут

$$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = s.$$

Если же ряд $\sum a_n$ не сходится, т. е. предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n$ бесконечен или не существует, то говорят, что ряд расходится. Утверждение $\sum a_n = +\infty$ означает, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = +\infty$.

Ряд $\sum a_n$ называется неотрицательным (соответственно положительным), если $a_n \geqslant 0$ (соответственно $a_n > 0$) для всякого n . Аналогичные определения даются для последовательности $\{a_n\}$. Для неотрицательного ряда $\sum a_n$ утверждение $\sum a_n < +\infty$ означает, что ряд сходится, а утверждение $\sum a_n = +\infty$ означает, что этот ряд расходится.

Иногда удобно, чтобы ряд начинался с члена a_0 . В этом случае запись $\sum a_n$ обозначает ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ или сумму этого ряда. Для степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ член $a_0 x^0$ считается равным a_0 , даже если $x = 0$, т. е. мы здесь полагаем $0^0 \equiv 1$.

Для ряда Маклорена

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

член, соответствующий $n = 0$, считается равным $f(0)$; другими словами, $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$.

- 1. Расходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю**

Гармонический ряд $\sum 1/n$.

- 2. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $a_n \geq b_n$, $n = 1, 2, \dots$**

Положим $a_n \equiv 0$ и $b_n \equiv -1/n$, $n = 1, 2, \dots$.

- 3. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $|a_n| > |b_n|$, $n = 1, 2, \dots$**

В качестве $\sum a_n$ можно взять условно сходящийся знакочередующийся гармонический ряд $\sum (-1)^{n+1}/n$, а в качестве $\sum b_n$ — расходящийся гармонический ряд $\sum 1/n$.

- 4. Для произвольно заданного положительного ряда существует либо мажорируемый им расходящийся, либо мажорирующий его сходящийся ряд**

Говорят, что неотрицательный ряд $\sum a_n$ мажорирует ряд $\sum b_n$, если $a_n \geq |b_n|$ для $n = 1, 2, \dots$. Пусть задан положительный ряд $\sum b_n$. Положим $a_n \equiv b_n$ для $n = 1, 2, \dots$. Тогда, если ряд $\sum b_n$ расходится, то он мажорирует расходящийся ряд $\sum a_n$; если же ряд $\sum b_n$ сходится, то он мажорируется сходящимся рядом $\sum a_n$. При этом с помощью множителей $1/2$ и 2 можно добиться, чтобы все неравенства в определении мажорирующего ряда стали строгими.

Этот простой результат можно высказать в следующей форме: *не существует положительного ряда, который одновременно мог бы служить для установления сходимости и расходимости рядов при помощи сравнения их с данным рядом.* (См. ниже пример 19.)

5. Об условно сходящихся рядах

У всякого условно сходящегося ряда $\sum a_n$, например у знакочередующегося гармонического ряда $\sum (-1)^{n+1}/n$, члены можно переставить таким образом, чтобы новый ряд сходился к любой наперед заданной сумме или стал расходящимся. Среди расходящихся рядов, полученных этим способом, существуют такие, что последовательность $\{s_n\}$ их частичных сумм имеет предел $+\infty$, $-\infty$ или вообще не имеет предела. Более того, последовательность $\{s_n\}$ можно определить таким образом, что множество ее предельных точек будет совпадать с произвольно заданным замкнутым интервалом, ограниченным или нет (см. пример 2 гл. 5). Это объясняется тем, что ряд из положительных и ряд из отрицательных членов ряда $\sum a_n$ расходятся.

В качестве примера укажем перестановку ряда $\sum (-1)^{n+1}/n$, такую, что последовательность $\{s_n\}$ частичных сумм имеет своим множеством предельных точек замкнутый интервал $[a, b]$. Начнем с первого члена 1 и будем добавлять к нему отрицательные члены

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots - \frac{1}{2j}$$

до тех пор, пока не получим первую сумму $< a$. Затем будем добавлять к этой сумме неиспользованные положительные члены до тех пор, пока не получим первую сумму

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2j} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2k+1},$$

которая превосходит b . Продолжая этот процесс, мы будем добавлять к полученной сумме неиспользованные отрицательные члены до тех пор, пока не получим первую сумму

$< a$, а затем будем добавлять к ней неиспользованные положительные члены до тех пор, пока не получим первую сумму $> b$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим некоторый ряд с частичными суммами s_n . Поскольку абсолютная величина $1/n$ общего члена $(-1)^{n+1}/n$ стремится к нулю, то каждое число замкнутого интервала $[a, b]$ при некоторых достаточно больших n приближается частичными суммами s_n с как угодно большой точностью. Более того, этим свойством не обладает никакое число вне интервала $[a, b]$.

Если изменить только что описанное построение так, чтобы суммы сначала стали больше 1, затем меньше — 2, на следующем шаге стали больше 3, а затем меньше — 4 и т. д., то последовательность частичных сумм так полученного ряда будет иметь своим множеством предельных точек всю систему действительных чисел.

В. Серпинский (см. [46]) показал, что если $\sum a_n$ — условно сходящийся ряд с суммой s и $s' < s$, то при помощи некоторой перестановки, использующей лишь положительные члены (отрицательные члены остаются на их первоначальных местах), можно получить ряд, сходящийся к сумме s' . Такое же замечание справедливо для чисел $s'' > s$ и перестановок, использующих только отрицательные члены. Ясно, что это есть обобщение замечательной „теоремы Римана о перестановках“ (см. [38], стр. 232, теорема III), все существенные детали которой иллюстрируются построением, описанным в настоящем примере.

Существует обобщение этой теоремы и в другом направлении. Пусть $\sum a_n$ — условно сходящийся ряд комплексных чисел. Тогда множество сумм всех сходящихся (или расходящихся к ∞) рядов, полученных из ряда $\sum a_n$ с помощью всевозможных перестановок его членов, является либо прямой на комплексной плоскости (включающей бесконечно удаленную точку), либо всей комплексной плоскостью (также включающей бесконечно удаленную точку). Более того, если $\sum v_n$ — условно сходящийся ряд векторов в конечномерном пространстве, то суммы, которые можно получить всевозможными перестановками, составляют множество, являющееся линейным многообразием в этом пространстве (см. [57]).

6. Для произвольного условно сходящегося ряда $\sum a_n$ и произвольного действительного числа x существует последовательность $\{\varepsilon_n\}$, где $|\varepsilon_n|=1$ ($n=1, 2, \dots$), такая, что $\sum \varepsilon_n a_n = x$ ¹⁾

Используемое здесь построение аналогично тому, которое применялось в примере 5. Поскольку $\sum |a_n| = +\infty$, множители ε_n , по абсолютной величине равные 1, можно выбрать таким образом, чтобы $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n = |a_1| + \dots + |a_n| > x$. Пусть n_1 — наименьший из номеров n , для которых выполняется это неравенство. Затем мы выбираем множители ε_n , по абсолютной величине равные 1, так, чтобы выполнялось условие

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{n_2} a_{n_2} &= |a_1| + \dots + |a_{n_1}| - \\ &\quad - |a_{n_1+1}| - \dots - |a_{n_2}| < x \end{aligned}$$

(где n_2 — наименьшее из возможных n). Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим ряд $\sum \varepsilon_n a_n$, частичные суммы которого попеременно то больше, то меньше x . Поскольку $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, то этот ряд сходится к x .

7. Об условиях теоремы Лейбница для знакочередующихся рядов

Теорема Лейбница о знакочередующихся рядах утверждает, что ряд $\sum \varepsilon_n c_n$, где $|\varepsilon_n|=1$ и $c_n > 0$, $n=1, 2, \dots$, сходится, если

- (i) $\varepsilon_n = (-1)^{n+1}$, $n=1, 2, \dots$,
- (ii) $c_{n+1} \leq c_n$, $n=1, 2, \dots$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = 0$.

Никакие два из этих трех условий сами по себе не обеспечивают сходимости, т. е. ни одно из этих трех условий нельзя опустить. Этот факт подтверждается следующими тремя примерами.

¹⁾ В этом примере члены ряда можно считать комплексными числами. Разумеется, множители ε_n тогда также должны быть комплексными. — Прим. перев.

(i) Положим $\varepsilon_n \equiv 1$, $c_n \equiv 1/n$, $n = 1, 2, \dots$. С другой стороны, существенно именно чередование знаков у членов ряда. В этом можно убедиться на том же примере, если в качестве $\{\varepsilon_n\}$ взять следующую последовательность из троек чисел: 1, 1, —1, 1, 1, —1, 1, 1, —1, \dots .

(ii) Положим $c_n \equiv 1/n$, если n нечетно, и $c_n \equiv 1/n^2$, если n четно.

(iii) Положим $c_n \equiv (n+1)/n$ (или, что еще проще, $c_n \equiv 1$), $n = 1, 2, \dots$.

8. Расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, который при подходящей расстановке скобок становится сходящимся к наперед заданной сумме

Расставить скобки у бесконечного ряда — это значит сгруппировать его последовательные члены в конечные группы (каждая такая конечная группа состоит по крайней мере из одного члена) и получить новый ряд, последовательность частичных сумм которого будет, таким образом, подпоследовательностью частичных сумм исходного ряда. Например, у знакочередующегося гармонического ряда можно расставить скобки следующим образом:

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots \\ \dots + \frac{1}{(2n-1)2n} + \dots$$

Любой ряд, полученный из сходящегося ряда расстановкой скобок, сходится и имеет сумму, равную сумме исходного ряда.

Требуемым свойством обладает последний из рядов, которые описаны в примере 5, поскольку подходящая расстановка скобок в нем дает ряд, сходящийся к наперед заданному действительному числу.

9. Для произвольно заданной положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует расходящийся ряд $\sum a_n$, общий член которого стремится к нулю, причем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$

Возьмем подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$, такую, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} b_{n_k} = 0$, причем $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$ не являются последовательными членами последовательности $\{b_n\}$, и положим

$a_{n_k} \equiv b_{n_k}^2$ для $k = 1, 2, \dots$. Для остальных значений n : $n = m_1, m_2, m_3, \dots, m_j, \dots$, положим $a_{m_j} \equiv 1/j$. Тогда $a_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, ряд $\sum a_n$ расходится и $a_{n_k}/b_{n_k} = b_{n_k} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$.

Этот пример показывает, в частности, что как бы быстро ни стремилась к нулю положительная последовательность $\{b_n\}$, всегда существует положительная последовательность $\{a_n\}$, которая стремится к нулю столь медленно, что ряд $\sum a_n$ расходится, и все же последовательность $\{a_n\}$ имеет подпоследовательность, стремящуюся к нулю быстрее, чем соответствующая подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$.

10. Для всякой положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует положительный сходящийся ряд $\sum a_n$, такой, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$$

Выберем из последовательности $\{b_n\}$ подпоследовательность $b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k}, \dots$, такую, что $b_{n_k} < k^{-3}$ для всякого натурального k , и положим $a_{n_k} \equiv k^{-2}$ для $k = 1, 2, \dots$. Для остальных значений n положим $a_n \equiv n^{-2}$. Тогда $\sum a_n < +\infty$, в то время как $a_{n_k}/b_{n_k} = k \rightarrow +\infty$.

Этот пример показывает, в частности, что как бы медленно ни стремилась к нулю положительная последовательность $\{b_n\}$, всегда существует положительная последовательность $\{a_n\}$, которая стремится к нулю столь быстро, что ряд $\sum a_n$ сходится, и все же последовательность $\{a_n\}$ имеет подпоследовательность, стремящуюся к нулю медленнее, чем соответствующая подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$.

11. Для всякой положительной последовательности $\{c_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существуют положительный сходящийся ряд $\sum a_n$ и положительный расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $a_n/b_n = c_n$, $n = 1, 2, \dots$

Выберем из последовательности $\{c_n\}$ подпоследовательность $c_{n_1}, c_{n_2}, \dots, c_{n_k}, \dots$, такую, что $c_{n_k} < k^{-2}$ для всякого

натурального k и положим $a_{n_k} \equiv c_{n_k}$, $b_{n_k} \equiv 1$ для $k = 1, 2, \dots$. Для остальных значений n положим $a_n \equiv n^{-2}$, $b_n \equiv (n^2 c_n)^{-1}$. Тогда ряд $\sum a_n$ сходится, ряд $\sum b_n$ расходится, поскольку $b_n \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, и $a_n/b_n = c_n$ для $n = 1, 2, \dots$.

Этот пример показывает, в частности, что как бы медленно ни стремилась к нулю положительная последовательность $\{c_n\}$, всегда существуют два положительных ряда, один из которых сходящийся, а другой расходящийся, такие, что отношение их n -х членов равно c_n .

12. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция,
 такая, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$
 расходится

См. пример 12 гл. 4.

13. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция,
 такая, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а ряд
 $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится

Для каждого $n > 1$ положим $g(n) \equiv 0$, а на замкнутых интервалах $[n - n^{-1}, n]$ и $[n, n + n^{-1}]$ определим функцию g как линейную и равную единице в нецелых концевых точках. Наконец, в тех точках $x \geq 1$, в которых функция $g(x)$ еще не определена, положим ее равной 1. Тогда функция

$$f(x) \equiv g(x) + \frac{1}{x^2}$$

положительна и непрерывна при $x \geq 1$, $\int_1^{+\infty} f(x) dx = +\infty$,

$$\text{а } \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-2} < +\infty.$$

14. Ряды, к которым не применим признак Даламбера

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho,$$

то положительный ряд $\sum a_n$, согласно признаку Даламбера (см. [36], стр. 390, а также [52]*, т. II, стр. 273),

(i) сходится, если $0 < \rho < 1$,

и

(ii) расходится, если $1 < \rho < +\infty$.

При $\rho = 1$ этот признак не решает вопроса о сходимости или расходимости ряда. Точнее, существуют как сходящиеся, так и расходящиеся положительные ряды, для каждого из которых $\rho = 1$. Соответствующими примерами являются

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}.$$

Признак Даламбера не решает вопроса о сходимости и в том случае, когда предел ρ не существует. В этом случае положительный ряд также может быть как сходящимся, так и расходящимся. Например, ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^5} + \dots$$

где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{8},$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n-(-1)^n} = 2^2 + 2^1 + 2^4 + 2^3 + 2^6 + 2^5 + \dots,$$

где

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 8, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2},$$

расходится.

Признак Даламбера можно усилить следующим образом:

(iii) если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится;

(iv) если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится¹⁾.

Признак Даламбера в такой форме не решает вопроса о сходимости, если выполнены неравенства

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1 \leqslant \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Соответствующие примеры, когда оба эти неравенства выполнены и даже в строгой форме, были приведены выше.

15. Ряды, к которым не применим признак Коши

Если существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sigma \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant +\infty),$$

то неотрицательный ряд $\sum a_n$, согласно простейшей форме признака Коши (см. [36], стр. 392, а также [52]*, т. II, стр. 272),

(i) сходится при $0 \leqslant \sigma < 1$

и

(ii) расходится при $1 < \sigma \leqslant +\infty$.

Признак Даламбера и признак Коши связаны между собой: если существует конечный или бесконечный предел

$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+1}/a_n)$, то существует и равен ему предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ (см. [36], стр. 394, упр. 31, а также [52]*, т. II, стр. 274). Следовательно, если можно применить признак Даламбера в форме (i) или (ii) (пример 14), то можно воспользоваться и признаком Коши. Более того, первые два примера, для которых не применим признак Даламбера (пример 14), могут служить примерами, к которым по той же причине не приме-

¹⁾ Предполагается, что члены ряда либо все положительны, либо все отрицательны. — Прим. перев.

ним и признак Коши. Напротив, последние два примера показывают, что иногда можно применить признак Коши (см. пример 16) и в том случае, когда признак Даламбера не применим.

Признак Коши в сформулированной выше форме не применим к сходящемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2} \right)^{-n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^6} + \dots,$$

так как $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/2$, а $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1/3$. Его также нельзя применять и к расходящемуся ряду

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{5+(-1)^n}{2} \right)^n,$$

ибо $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$, а $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 2$.

Признак Коши может быть усилен следующим образом:

(iii) если $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, то ряд $\sum a_n$ сходится,

(iv) если же $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, то ряд $\sum a_n$ расходится.

В этой форме признак Коши не слабее (на самом же деле он сильнее: см. пример 16), чем признак Даламбера в его усиленной форме (пример 14), поскольку (см. [36], стр. 394, упр. 31)

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Признак Коши в усиленной форме позволяет установить сходимость и соответственно расходимость двух предыдущих рядов, поскольку для первого из этих рядов верхний предел $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ равен $1/2$, а для второго он равен 3 .

Признак Коши в усиленной форме не решает вопроса о сходимости или расходимости лишь в том случае, если $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. Примеры такого типа уже отмечались ранее.

16. Ряды, для которых эффективен признак Коши, но не эффективен признак Даламбера

Для сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{(-1)^n - n}$ признак Даламбера не эффективен (пример 14), однако для него эффективен признак Коши. В самом деле,

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{(-1)^n - n}{n}} \rightarrow 2^{-1} = \frac{1}{2} < 1.$$

Подобным же образом для расходящегося ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{n - (-1)^n}$ примера 14 имеем

$$\sqrt[n]{a_n} = 2^{\frac{n - (-1)^n}{n}} \rightarrow 2^1 = 2 > 1.$$

17. Два сходящихся ряда, произведение которых расходится

Произведением (по Коши) двух рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ называется ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, где

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Согласно теореме Мертенса (см. [38], стр. 239, упр. 20), если ряд $\sum a_n$ сходится к A , а ряд $\sum b_n$ сходится к B , причем по крайней мере один из этих рядов сходится абсолютно, то их произведение $\sum c_n$ сходится к AB .

Пусть ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ совпадают, причем

$$a_n = b_n = (-1)^n (n+1)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Тогда, согласно признаку Лейбница, ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ сходятся (пример 7), однако ряд $\sum c_n$ расходится. Действительно, пользуясь тем, что функция $\sqrt{(1+x)(n+1-x)}$ на замкнутом интервале $[0, n]$ достигает максимума при $x = n/2$, имеем

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{n-1}} + \dots \\ &+ \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \geq \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \frac{2}{n+2} + \dots + \frac{2}{n+2} = \\ &= \frac{2(n+1)}{n+2} \geq 1, \quad n = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

18. Два расходящихся ряда, произведение которых сходится абсолютно

Произведением (по Коши) следующих двух рядов:

$$\begin{aligned} 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \\ -1 + 1 + 1 + 1 + \dots + 1^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

является ряд

$$-2 + 0 + 0 + 0 + \dots + 0^n + \dots, \quad n = 1, 2, \dots.$$

В более общей форме, если $a_n = a^n$ и $b_n = b^n$ для $n \geq 1$, причем $a \neq b$, то член c_n ряда, являющегося произведением рядов $\sum a_n$ и $\sum b_n$, равен (при $n \geq 1$)

$$\begin{aligned} c_n &= a_0 b^n + b_0 a^n + a^{n-1} b + a^{n-2} b^2 + a^{n-3} b^3 + \dots + a b^{n-1} = \\ &= a_0 b^n + b_0 a^n - a^n - b^n + (a^{n+1} - b^{n+1})/(a - b) = \\ &= \{a^n [a + (b_0 - 1)(a - b)] - b^n [b + (1 - a_0)(a - b)]\}/(a - b). \end{aligned}$$

Следовательно, $c_n = 0$, если $a = (1 - b_0)(a - b)$ и $b = (a_0 - 1)(a - b)$. Если при этом a и b связаны равенством $a - b = 1$, то a_0 и b_0 вычисляются по формулам $a_0 = b + 1 = a$, $b_0 = 1 - a = -b$.

19. Для произвольной последовательности $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$, $n = 1, 2, \dots$, положительных сходящихся рядов существует положительный сходящийся ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$, не сравнимый ни с одним из рядов $\left\{ \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$.

Утверждение, что ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ можно сравнить с рядом $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ при некотором фиксированном натуральном n , означает, что

$$\exists M \in \mathbb{N} \exists m > M \Rightarrow a_m \leq a_{mn},$$

и потому утверждение, что такое сравнение *невозможно*, записывается следующим образом:

$$\forall M \in \mathbb{N} \exists m > M \exists a_m > a_{mn}.$$

Для всевозможных натуральных M и n положим

$$S_n \equiv \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}, \quad S_{Mn} \equiv \sum_{m=1}^M a_{mn}, \quad R_{Mn} \equiv \sum_{m=M+1}^{+\infty} a_{mn}.$$

Тогда числа S_n , S_{Mn} и R_{Mn} положительны. Далее для каждого $n \in \mathbb{N}$ выберем $M(n)$ так, чтобы $1 \leq M(1) < M(2) < \dots$ и

$$\begin{aligned} R_{M(1), 1} &< 2^{-1}, \\ \max(R_{M(2), 1}, R_{M(2), 2}) &< 2^{-2}, \\ &\dots \\ \max(R_{M(n), 1}, \dots, R_{M(n), n}) &< 2^{-n}. \end{aligned}$$

Теперь для всякого натурального m положим

$$a_m = \begin{cases} 2a_{m1}, & \text{если } 1 \leq m \leq M(2), \\ (k+1) \max(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mk}), & \text{если } M(k) < m \leq M(k+1) \text{ для } k > 1. \end{cases}$$

Чтобы доказать сходимость ряда $\sum a_m$, установим сначала следующее неравенство для (конечных) сумм членов этого ряда при $M(k) < m \leq M(k+1)$, где $k > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m &\leq \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} [(k+1) \sum_{n=1}^k a_{mn}] = \\ &= (k+1) \sum_{n=1}^k \left[\sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_{mn} \right] \leq (k+1) \sum_{n=1}^k R_{M(k), n} \leq \\ &\leq (k+1) \sum_{n=1}^k 2^{-k} < (k+1)^2 2^{-k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{+\infty} a_m &= \sum_{m=1}^{M(2)} a_m + \sum_{m=M(2)+1}^{M(3)} a_m + \dots \leq \\ &\leq 2 \sum_{m=1}^{M(2)} a_{m1} + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{m=M(k)+1}^{M(k+1)} a_m < \\ &< 2S_{M(2), 1} + \sum_{k=2}^{+\infty} (k+1)^2 2^{-k} < +\infty. \end{aligned}$$

С другой стороны, для всякого фиксированного n при $k \geq n$ и $m > M(k)$ имеем $a_m/a_{mn} \geq k+1$, откуда $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m/a_{mn} = +\infty$. Таким образом, ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ нельзя сравнить с рядом $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$. На самом же деле ряд $\sum_{m=1}^{+\infty} a_m$ нельзя сравнить с рядом $\sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn}$ даже в том случае, если сравнение определить следующим образом:

$$\exists M \text{ и } K \in \mathbb{N} \exists m > M \Rightarrow a_m \leq K a_{mn}.$$

В этом случае отрицание возможности сравнения выглядит так:

$$\forall M \text{ и } K \in \mathbb{N} \exists m > M \exists a_m > K a_{mn}.$$

Последовательность положительных сходящихся рядов назовем универсальной последовательностью сравнения, если произвольный положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда его можно сравнить по крайней мере с одним из рядов этой последовательности.

Другими словами, последовательность положительных сходящихся рядов является универсальной последовательностью сравнения тогда и только тогда, когда сходимость или расходимость любого положительного ряда можно установить сравнением его с каким-либо рядом этой последовательности. Пример 19 показывает, что таких *универсальных последовательностей сравнения не существует*.

20. Матрица Теплица T и расходящаяся последовательность, преобразуемая матрицей T в сходящуюся последовательность

Бесконечной матрицей называется функция, принимающая действительные или комплексные значения с областью определения $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, обозначаемая через $T = (t_{ij})$, где i и $j \in \mathbf{N}$. Если бесконечный ряд $\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j$, где $\{a_j\}$ — заданная последовательность чисел, сходится для каждого $i \in \mathbf{N}$, то последовательность $\{b_i\}$, определяемая равенствами

$$b_i \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} a_j,$$

называется преобразованием последовательности $\{a_j\}$ посредством матрицы T . Бесконечная матрица $T = (t_{ij})$ называется матрицей Теплица¹⁾, если для всякой сходящейся последовательности $\{a_j\}$ последовательность $\{b_i\}$ имеет смысл, причем предел $\lim_{i \rightarrow +\infty} b_i$ существует и равен пределу $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j$.

Важнейшая теорема теории матриц Теплица состоит в следующем: для того чтобы бесконечная матрица $T = (t_{ij})$ была матрицей Теплица, необходимо и достаточно, чтобы были выполнены следующие три условия (доказательство см. в [50] или в [26]*, стр. 79):

- (1) $\exists M \in \mathbf{R} \exists \forall i \in \mathbf{N}, \sum_{j=1}^{+\infty} |t_{ij}| \leq M,$
- (2) $\lim_{i \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1,$
- (3) $\forall j \in \mathbf{N}, \lim_{i \rightarrow +\infty} t_{ij} = 0.$

¹⁾ В честь немецкого математика Отто Теплица (1881—1940 г.).

Пусть T — матрица Тэплица (t_{ij}) , где $t_{ij} \equiv 1/i$, если $1 \leq j \leq i$, и $t_{ij} \equiv 0$, если $i < j$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Последовательность $\{a_j\} = 1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$ не сходится, но ее преобразование посредством матрицы T дает последовательность

$$\{b_i\} = 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots, \frac{1 + (-1)^{i+1}}{2i}, \dots,$$

которая сходится к нулю.

Вообще, если $\{a_n\}$ — произвольная расходящаяся последовательность, каждый член которой есть либо 1, либо -1 , то существует матрица Тэплица T , которая преобразует $\{a_n\}$ в сходящуюся последовательность¹⁾. В самом деле, матрицу T в этом случае можно определить так, что $\{a_n\}$ преобразуется в последовательность, состоящую лишь из нулей. Такую матрицу $T = (t_{ij})$ можно построить следующим образом: пусть $\{n_i\}$ — строго возрастающая последовательность целых положительных чисел, такая, что a_{n_i} и a_{n_i+1} имеют противоположные знаки для $i = 1, 2, \dots$. Положим

$$t_{ij} \equiv \begin{cases} 1/2, & \text{если } j = n_i \text{ или } j = n_i + 1, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда T будет матрицей Тэплица, преобразующей последовательность $\{a_n\}$ в последовательность $0, 0, \dots$

¹⁾ Этот результат справедлив и в том случае, если $\{a_n\}$ — произвольная расходящаяся ограниченная последовательность. — Прим. перев.

21. Для всякой матрицы Теплица $T = (t_{ij})$ существует последовательность $\{a_j\}$, каждый член которой есть либо 1, либо -1 , такая, что преобразование $\{b_i\}$ последовательности $\{a_j\}$ посредством матрицы T расходится¹⁾

Используя условия (1) — (3) примера 20, выберем две последовательности $i_1 < i_2 < i_3 < \dots, j_1 < j_2 < j_3 < \dots$ следующим образом. Пусть номер i_1 таков, что при $i \geq i_1$ имеем

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{1i}, \quad |e_{1i}| < 0,05.$$

Это возможно в силу условия (2). Затем, на основе условий (1) и (2), выберем номер j_1 так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_1} t_{i_1 j} = 1 + d_1 \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_1+1}^{+\infty} |t_{i_1 j}| < 0,05,$$

причем $|d_1| < 0,1$.

После этого, используя условия (2) и (3), выберем $i_2 > i_1$ так, чтобы для $i \geq i_2$

$$\sum_{j=1}^{j_1} |t_{ij}| < 0,05 \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{+\infty} t_{ij} = 1 + e_{2i}, \quad |e_{2i}| < (0,05)^2.$$

Затем снова воспользуемся условиями (1) и (2) и выберем $j_2 > j_1$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_2} t_{i_2 j} = 1 + d_2 \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_2+1}^{+\infty} |t_{i_2 j}| < (0,05)^2,$$

где $|d_2| < 2 \cdot (0,05)^2$.

Если $i_1 < i_2 < \dots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_k$ уже выбраны, то, опираясь на условия (2) и (3), выберем $i_{k+1} > i_k$ так, чтобы для $i \geq i_{k+1}$

$$\sum_{j=1}^{j_k} |t_{ij}| < (0,05)^k$$

¹⁾ Это утверждение и следующий ниже метод его доказательства фактически принадлежат Штейнгаузу (см. [26]*, стр. 93). — Прим. ред.

и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} t_{l_j} = 1 + e_{k+1, l}, \quad |e_{k+1, l}| < (0,05)^{k+1}.$$

Затем, используя (1) и (2), выберем $j_{k+1} > j_k$ так, чтобы

$$\sum_{j=1}^{j_{k+1}} t_{l_{k+1} j} = 1 + d_{k+1} \quad \text{и} \quad \sum_{j=j_{k+1}+1}^{+\infty} |t_{l_{k+1} j}| < (0,05)^{k+1},$$

где $|d_{k+1}| < 2(0,05)^{k+1}$.

Теперь определим последовательность $\{a_j\}$:

$$a_j = \begin{cases} 1 & \text{для } 1 \leq j \leq j_1, \quad j_2 < j \leq j_3, \dots, \\ -1 & \text{для } j_1 < j \leq j_2, \quad j_3 < j \leq j_4, \dots \end{cases}$$

Если k нечетно и $k > 1$, то

$$\begin{aligned} b_{l_k} &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} - \sum_{j=j_1+1}^{j_2} t_{l_k j} + \sum_{j=j_2+1}^{j_3} t_{l_k j} - \dots \\ &\quad \dots + \sum_{j=j_{k-1}+1}^{j_k} t_{l_k j} + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j = \\ &= \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} - \left(\sum_{j=1}^{j_2} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_1} t_{l_k j} \right) + \left(\sum_{j=1}^{j_3} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_2} t_{l_k j} \right) - \dots \\ &\quad \dots + \left(\sum_{j=1}^{j_k} t_{l_k j} - \sum_{j=1}^{j_{k-1}} t_{l_k j} \right) + \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j. \end{aligned}$$

Все суммы $\sum_{j=1}^{j_r} t_{l_k j}$, за исключением $\sum_{j=1}^{j_k} t_{l_k j} = 1 + d_k$, по абсолютной величине меньше, чем $(0,05)^{k-1}$. Таким образом, учитывая, что

$$\left| \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} t_{l_k j} a_j \right| \leq \sum_{j=j_k+1}^{+\infty} |t_{l_k j}| < (0,05)^k,$$

получаем

$$\begin{aligned} b_{l_k} &> 1 - 2(0,05)^{k-1} - 2(k-1)(0,05)^{k-1} - (0,05)^k = \\ &= 1 - [2(k-1) + 2,05](0,05)^{k-1}. \end{aligned}$$

Из последнего неравенства вытекает, что $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} b_i \geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{i_k} \geq 1$. Рассматривая четные значения k , мы получим, что $\overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} b_i \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} b_{i_k} \leq -1$ и потому последовательность $\{b_i\}$ расходится.

Примеры 20 и 21 показывают, что, хотя некоторые матрицы Тэплица преобразуют некоторые последовательности, члены которых равны ± 1 , в сходящиеся последовательности, однако не существует матрицы Тэплица, которая преобразует все такие последовательности в сходящиеся последовательности.

Усложненная технику, которой мы пользовались выше, можно прийти к следующему заключению: если $\{T_m\}$ — последовательность матриц Тэплица, то существует такая последовательность $\{a_n\}$, что $|a_n| = 1$ при $n = 1, 2, \dots$, причем для каждого m преобразование последовательности $\{a_n\}$ посредством матрицы T_m расходится. В самом деле, при выборе строго возрастающих последовательностей натуральных чисел $\{i_k\}$ и $\{j_k\}$ будем в отличие от вышеизложенного поступать следующим образом. Выберем сначала i_1 и j_1 так, чтобы выполнялись соответствующие условия для матрицы T_1 ; затем выберем i_2 и j_2 так, чтобы соответствующие условия выполнялись как для матрицы T_1 , так и для матрицы T_2 и т. д. Последовательность $\{a_n\}$ определим так же, как это сделано выше. Для всякого фиксированного m последовательность $\{a_n\}$ преобразуется в некоторую подпоследовательность $\{b_{mn}\}$. Но поскольку числа i_k и j_k при $k > m$ образуют последовательность, для которой справедливы все условия предыдущего контрпримера в применении к матрице T_m , то отсюда следует, что предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_{mn}$ не существует ни при каком m .

22. Степенной ряд, сходящийся лишь в одной точке. (См. пример 24.)

Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ сходится при $x = 0$ и расходится при $x \neq 0$.

23. Функция, ряд Маклорена которой сходится всюду, однако представляет функцию лишь в одной точке

Функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

бесконечно дифференцируема, а все ее производные при $x = 0$ равны 0 (см. пример 10 гл. 3). Следовательно, ее ряд Маклорена

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0$$

сходится при всех x к функции, тождественно равной нулю, а потому он представляет данную функцию f (т. е. сходится к ней) лишь в одной точке $x = 0$.

24. Функция, ряд Маклорена которой сходится лишь в одной точке

Функция с таким свойством описана в [9] (стр. 153).
Функция

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} \cos n^2 x$$

всюду бесконечно дифференцируема, поскольку множители e^{-n} , которые присутствуют во всех рядах, получаемых последовательным почленным дифференцированием исходного ряда, обеспечивают равномерную сходимость всех этих рядов. Ряд Маклорена этой функции содержит лишь члены четной степени. Для абсолютной величины члена порядка $2k$ этого ряда справедливо неравенство

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2k} e^{-n} n^{4k}}{(2k)!} > \left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n} \quad (x \neq 0)$$

при любом $n = 0, 1, 2, \dots$ и, в частности, при $n = 2k$. Для этого значения n и любого $x \neq 0$ имеем

$$\left(\frac{n^2 x}{2k}\right)^{2k} e^{-n} = \left(\frac{2kx}{e}\right)^{2k} > 1,$$

если только $k > |e/2x|$. Отсюда следует, что ряд Маклорена функции f расходится при всяком $x \neq 0$.

Как было указано в примере 22, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ сходится лишь в точке $x = 0$. Естественно задать вопрос, является ли этот ряд рядом Маклорена какой-либо функции $f(x)$. Утвердительный ответ на этот вопрос привел бы к другому примеру функции такого же типа, как и функция, уже рассмотренная в настоящем примере. Мы покажем, что, действительно, можно построить бесконечно дифференцируемую функцию $f(x)$, для которой данный ряд будет рядом Маклорена. Для этой цели определим функцию $\varphi_{n0}(x)$ следующим образом. Для $n = 1, 2, \dots$ положим

$$\varphi_{n0}(x) \equiv \begin{cases} ((n-1)!)^2, & \text{если } 0 \leq |x| \leq 2^{-n}/(n!)^2, \\ 0, & \text{если } |x| \geq 2^{-n+1}/(n!)^2. \end{cases}$$

Затем функцию $\varphi_{n0}(x)$ доопределим на оставшихся интервалах так, чтобы она стала бесконечно дифференцируемой всюду. Это можно сделать при помощи функции из примера 12 гл. 3. Далее пусть $f_1(x) \equiv \varphi_{10}(x)$; положим для $n = 2, 3, \dots$

$$\varphi_{n1}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n0}(t) dt,$$

$$\varphi_{n2}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n1}(t) dt,$$

⋮

$$f_n(x) \equiv \varphi_{n, n-1}(x) \equiv \int_0^x \varphi_{n, n-2}(t) dt.$$

Таким образом, $f'_n(x) = \varphi_{n, n-2}(x)$, $f''_n(x) = \varphi_{n, n-3}(x)$, ..., $f_n^{(n-1)}(x) = \varphi_{n0}(x)$, $f_n^{(n)}(x) = \varphi'_{n0}(x)$. Принимая во внимание неравенства

$$|\varphi_{n1}(x)| \leq 2^{-n+1}/n^2,$$

$$|\varphi_{n2}(x)| \leq [2^{-n+1}/n^2] \cdot |x|,$$

⋮

$$|\varphi_{n, n-1}(x)| \leq (2^{-n+1}/n^2) \cdot |x|^{n-2}/(n-2)!,$$

получаем оценку

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq (2^{-n+1}/n^2) |x|^{n-k-2} / (n-k-2)!,$$

справедливую для любого x при $0 \leq k \leq n-2$. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x)$ сходится равномерно на любом замкнутом конечном интервале при $k = 0, 1, 2, \dots$. В самом деле, если $|x| \leq K$, то

$$|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{K^{n-k-2}}{n^2 2^{n-1} (n-k-2)!} \text{ при } n = k+2, k+3, \dots$$

и равномерная сходимость вытекает из признака Вейерштрасса (см. [36], стр. 445, а также [52]*, т. II, стр. 430). Следовательно, функция

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

бесконечно дифференцируема, и для $k = 0, 1, 2, \dots$ справедливы равенства

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x).$$

Но для $k \geq n \geq 1$ имеют место равенства $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}^{(k-n+1)}(0) = 0$, а для $n \geq 1$ и $k = n-1$ справедливы равенства $f_n^{(k)}(0) = \varphi_{n0}(0) = ((n-1)!)^2$. Наконец, для $0 \leq k < n-1$ имеем $f_n^{(k)}(0) = 0$. Таким образом, ряд Маклорена функции $f(x)$ совпадает с рядом $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$.

25. Сходящийся тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье

Мы приведем два примера, в первом из которых интегрирование производится по Риману, во втором — по Лебегу.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^a}$, где $0 < a \leq 1/2$ сходится при любом действительном x . В этом можно убедиться (см. [36], стр. 533,

а также [52]*, т. II, стр. 432), применяя признак сходимости, принадлежащий Н. Х. Абелю (норвежский математик, 1802—1829 г.). Однако этот ряд не может быть рядом Фурье никакой интегрируемой по Риману функции $f(x)$. В самом деле, если бы это было не так, то, согласно неравенству Бесселя (см. [36], стр. 532, а также [52]*, т. III, стр. 586), мы бы имели

$$\frac{1}{1^{2\alpha}} + \frac{1}{2^{2\alpha}} + \dots + \frac{1}{n^{2\alpha}} \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx,$$

где $n = 1, 2, \dots$. Но так как $f(x)$ интегрируема по Риману, то $[f(x)]^2$ также интегрируема по Риману. Отсюда следует, что правая часть предыдущего неравенства конечна, в то время как при $\alpha < 1/2$ левая часть этого неравенства не ограничена при $n \rightarrow +\infty$. (Противоречие.)

Ряд¹⁾ $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ также сходится при любом действительном x . Положим

$$f(x) \equiv \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Если предположить, что этот ряд является рядом Фурье — Лебега функции $f(x)$, то функция

$$F(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$$

должна быть периодической и абсолютно непрерывной. Но так как $f(x)$ — нечетная функция ($f(x) = -f(-x)$), то функция $F(x)$ является четной ($F(x) = F(-x)$). Поэтому ряд Фурье функции $F(x)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos nx,$$

¹⁾ В связи с исследуемым вопросом этот ряд впервые был рассмотрен Фату. — Прим. ред.

где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(x) dx$, а для $n \geq 2$ коэффициенты

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos nx dx = \\ &= \frac{2}{\pi} F(x) \frac{\sin nx}{n} \Big|_0^\pi - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F'(x) \frac{\sin nx}{n} dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \frac{\sin nx}{n} dx = -\frac{1}{n \ln n}. \end{aligned}$$

(Производная $F'(x)$ почти всюду существует и почти всюду равна $f(x)$.) Поскольку функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию, ее ряд Фурье сходится в каждой точке, в частности в точке $x = 0$. Отсюда следует, что ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ сходится. А так как $a_n = -1/n \ln n$ и ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1/n \ln n)$ расходится, то мы приходим к противоречию с предположением, что $f(x)$ интегрируема по Лебегу.

Наконец, нам остается показать, что тригонометрический ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье некоторой функции g , интегрируемой по Лебегу, и если он сходится почти всюду к некоторой функции f , то $f(x) = g(x)$ почти всюду, и, следовательно, функция f интегрируема по Лебегу, а данный тригонометрический ряд является ее рядом Фурье.

26. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, не являющаяся преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу, и такая, что

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Пусть $\{c_n\}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, есть последовательность, бесконечная в обе стороны и такая, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

сходится для всех x , но не является рядом Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу на $[-\pi, \pi]$ (см. пример 25). Мы покажем, что если $h(x)$ — произвольная бесконечно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ и такая, что $h(0) = 2\pi$, то в качестве искомой функции можно взять функцию

$$f(x) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h(x - n).$$

Так как функция $h(x)$ обращается в нуль вне интервала $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, то ряд, представляющий функцию $f(x)$, при любом фиксированном x имеет лишь конечное число отличных от нуля членов. Следовательно, этот ряд сходится при всех x и представляет некоторую функцию $f(x)$. По той же причине на любом конечном интервале этот ряд и все ряды, которые получаются из него почлененным дифференцированием конечное число раз, сходятся равномерно. Более того,

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n h^{(k)}(x - n), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Пусть функция $F(t)$ интегрируема по Лебегу и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-itx} dt = f(x).$$

Положим

$$g(t) \equiv \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F(t + 2\pi m).$$

Так как $F(t)$ интегрируема по Лебегу, то $g(t)$ определена для почти всех t и для этих значений t справедливо равенство $g(t+2\pi)=g(t)$, причем

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g(t)| dt &\leq \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |F(t+2\pi m)| dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| dt < +\infty. \end{aligned}$$

(Обоснование этих фактов, а также равенства, которое используется ниже, см. в [29], стр. 179 и 192—193.) Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-int} dt &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+2\pi m) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+2\pi m) e^{-in(t+2\pi m)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} f(n) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k h(n-k) = \frac{c_n}{2\pi} h(0) = c_n. \end{aligned}$$

Таким образом, c_n являются коэффициентами Фурье интегрируемой по Лебегу функции $g(t)$. Это противоречие и доказывает тот факт, что $f(x)$ не является преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу.

27. Для произвольного счетного множества $E \subset [-\pi, \pi]$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке $x \in E$ и сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$

Идея этого примера принадлежит Фейеру и Лебегу. Подробности можно найти в книге [20], т. I, стр. 474, где даются также ссылки на первоначальные работы.

28. Функция, интегрируемая (по Лебегу) на $[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой расходится всюду

Этот пример принадлежит А. Н. Колмогорову. Подробности и нужные ссылки см. в [20], т. I, стр. 488—494.

29. Последовательность $\{a_n\}$ рациональных чисел, обладающая тем свойством, что для всякой функции f , непрерывной на $[0, 1]$ и равной 0 при $x=0$ ($f(0)=0$), существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_v\}$ ($n_0=0$), такая, что

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем сходимость является равномерной на $[0, 1]$

Предварительно сделаем следующее замечание:

Для всякого натурального m множество всех полиномов с рациональными коэффициентами, которые содержат лишь степени x^n с $n \geq m$, плотно в пространстве $C_0([0, 1])$ всех функций, непрерывных на $[0, 1]$ и обращающихся в нуль в точке $x=0$. При этом плотность понимается в смысле „равномерной топологии“, которая задается формулой

$$\rho(f, g) = \|f - g\| \equiv \max \{ |f(x) - g(x)|, \quad 0 \leq x \leq 1 \}.$$

Это следует из теоремы Стоуна — Вейерштрасса (см. [44], стр. 182, и [29], стр. 19).

Пусть теперь $\{f_n\}$ — счетное множество функций, всюду плотное в $C_0([0, 1])$. Например, в качестве $\{f_n\}$ можно взять последовательность, состоящую из всех полиномов с рациональными коэффициентами, которые обращаются в нуль при $x=0$. Пусть P_1 — один из таких полиномов, и пусть для него $\rho(f_1, P_1) = \|f_1 - P_1\| < 1$. Далее, пусть P_2 — полином такого же типа, у которого все его члены с ненулевыми коэффициентами имеют степень, превышающую порядок полинома P_1 , и для которого, кроме того, выполнено неравенство $\rho(f_2 - P_1, P_2) = \|f_2 - (P_1 + P_2)\| < 1/2$. Пусть полиномы P_1, P_2, \dots, P_n , принадлежащие $C_0([0, 1])$

и имеющие рациональные коэффициенты, определены так, что

(а) степень любого ненулевого члена полинома P_{k+1} больше порядка полинома P_k , $k = 1, 2, \dots, n - 1$,

$$(b) \left\| f_k - \sum_{i=1}^k P_i \right\| < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда в качестве P_{n+1} в $C_0([0, 1])$ возьмем полином с рациональными коэффициентами, такой, что

(а') степень любого ненулевого члена полинома P_{n+1} больше порядка полинома P_n ,

$$(b') \left\| f_{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} P_i \right\| < \frac{1}{n+1}.$$

Пусть m_j — наименьшая из степеней ненулевых членов полинома P_j , а M_j — порядок полинома P_j . Тогда $m_j \leq M_j < m_{j+1}$ для всякого $j \in \mathbb{N}$. Определим теперь последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_1 = a_2 = \dots = a_{m_1-1} \equiv 0$, a_{m_1} равен коэффициенту при x^{m_1} в полиноме P_1 , a_{m_1+1} равен коэффициенту при x^{m_1+1} в P_1 , ..., a_{M_1} равен коэффициенту при x^{M_1} в P_1 . Вообще, если $M_j < n < m_{j+1}$, то полагаем $a_n \equiv 0$; если же $m_{j+1} \leq n \leq M_{j+1}$, то a_n равен коэффициенту при x^n в полиноме P_{j+1} . Пусть $f \in C_0([0, 1])$, а последовательность $0 < k_1 < k_2 < \dots$ такова, что $\|f - f_{k_\mu}\| < 1/\mu$ для каждого $\mu \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| \leq \|f - f_{k_\mu}\| + \left\| f_{k_\mu} - \sum_{i=1}^{k_\mu} P_i \right\| < \frac{1}{\mu} + \frac{1}{k_\mu} \leq \frac{2}{\mu}.$$

Следовательно, если положить $n_0 \equiv 0$ и $n_v \equiv M_{k_v}$ для $v \in \mathbb{N}$, то

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем ряд в правой части сходится равномерно (членами ряда считаются суммы, заключенные в скобки).

Этот поразительный результат принадлежит В. Серпинскому. Следует отметить его большое сходство с примером 5 настоящей главы. В последнем случае в результате некоторой перестановки был получен ряд, обладающий тем свойством, что для произвольно заданного действительного числа x существует подпоследовательность частичных сумм (т. е. способ расстановки скобок у этого ряда), которая сходится к x . В настоящем же случае мы имеем степенной ряд, обладающий тем свойством, что для произвольной функции f из пространства $C_0([0, 1])$ существует подпоследовательность частичных сумм (т. е. способ расстановки скобок у этого ряда), равномерно сходящаяся к f .