ГЛАВА 7

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ

Введение

В примерах настоящей главы рассматривается равномерная и неравномерная сходимость последовательностей функций, заданных на некоторых множествах. Предполагается, что читатель знаком с основными определениями и теоремами (см. [36], стр. 441—462; [38], стр. 270—292, а также [52]*, т. II, стр. 422—453).

1. Последовательность всюду разрывных функций, сходящаяся равномерно к всюду непрерывной функции

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1/n, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

Ясно, что $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$ при $-\infty < x < +\infty$, причем сходимость является равномерной.

Этот простой пример может служить иллюстрацией следующего общего принципа: *равномерная сходимость сохраняет „хорошие" свойства и не сохраняет „плохие"*. Этот принцип будет неоднократно подтвержден последующими примерами.

2. Последовательность бесконечно дифференцируемых функций, которая равномерно сходится к нулю, а последовательность производных этих функций всюду расходится

Положим $f_n(x) \equiv (\sin nx)/\sqrt{n}$. Поскольку $|f_n(x)| \leqslant 1/\sqrt{n}$, то эта последовательность равномерно сходится к нулю. Чтобы убедиться в том, что последовательность $\{f_n'(x)\}$ расходится всюду, рассмотрим последовательность

$$b_n = f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx,$$

где x фиксировано. Если $x=0$, то $b_n=\sqrt{n}\to\infty$ при $n\to+\infty$. Докажем теперь, что для всякого $x\neq 0$ последовательность $\{b_n\}$ не ограничена и, следовательно, расходится. Для этого покажем, что существуют как угодно большие значения n, такие, что $|\cos nx|\geqslant 1/2$. В самом деле, для всякого натурального m, такого, что $|\cos mx|<1/2$, имеем

$$|\cos 2mx|=|2\cos^2 mx-1|=1-2\cos^2 mx>\frac{1}{2}.$$

Таким образом, существует номер $n>m$, для которого $|\cos nx|>1/2$.

3. Неограниченная функция, являющаяся пределом неравномерно сходящейся последовательности ограниченных функций

Положим

$$f_n(x)\equiv\begin{cases}\min\left(n,\ \dfrac{1}{x}\right), & \text{если}\quad 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{если}\quad x=0.\end{cases}$$

Тогда каждая функция $f_n(x)$ ограничена на замкнутом интервале $[0, 1]$, однако предельная функция $f(x)$, равная $1/x$, если $0<x\leqslant 1$, и равная 0, если $x=0$, не ограничена на этом интервале.

Следует отметить, что в подобном примере сходимость *не может* быть равномерной.

4. Разрывная функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций

Тривиальный пример такого типа доставляет последовательность,

$$f_n(x)\equiv\begin{cases}\min(1,\ nx), & \text{если}\quad x\geqslant 0,\\ \max(-1,\ nx), & \text{если}\quad x<0.\end{cases}$$

Ее пределом является функция $\operatorname{sgn} x$ (см. гл. 3, пример 3), которая разрывна в точке $x=0$.

Можно построить более интересный пример такого рода, рассматривая функцию f (гл. 2, пример 15), которая определяется следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ взаимно просты и } q > 0, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

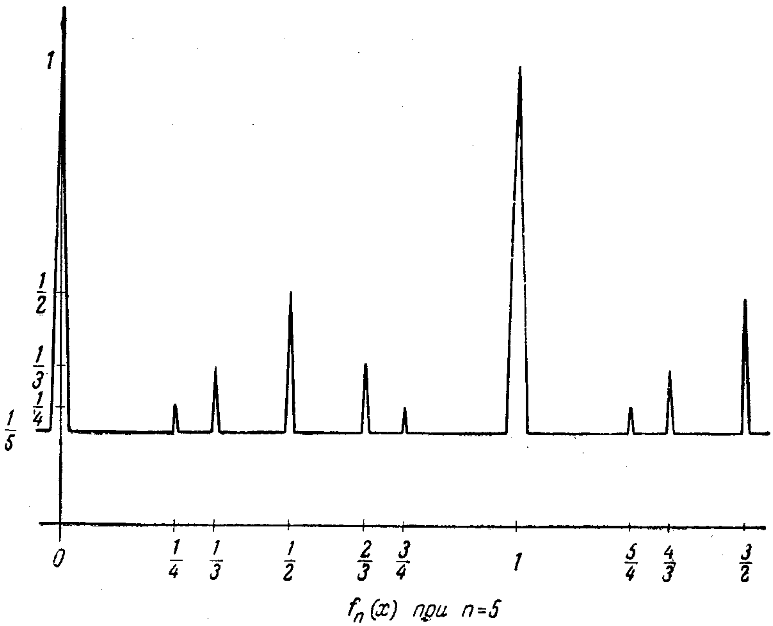

Рис. 2.

Определим теперь последовательность $f_n(x)$. Зафиксируем номер $n \geqslant 2$. На каждом интервале вида $\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{2n^2}, \frac{p}{q}\right)$, где $1 \leqslant q < n$, $0 \leqslant p \leqslant q$, положим

$$f_n(x) \equiv \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} + 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right),$$

а на интервале вида $\left(\frac{p}{q}, \frac{p}{q} + \frac{1}{2n^2}\right)$, где p и q находятся в тех же пределах, положим

$$f_n(x) \equiv \max\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{q} - 2n^2\left(x - \frac{p}{q}\right)\right).$$

В тех точках интервала $[0, 1]$, в которых $f_n(x)$ еще не определена, положим $f_n(x) \equiv 1/n$. Наконец, продолжим функцию $f_n(x)$ за пределы отрезка $[0, 1]$ периодически с периодом, равным единице. График функции $f_n(x)$ представляет собой бесконечную ломаную линию, звенья которой либо расположены на горизонтали $y = 1/n$, либо поднимаются к изолированным точкам графика функции f, причем угловой коэффициент наклона равен $\pm 2n^2$ (см. рис. 2). При возрастании n пики становятся все более узкими и крутыми, а горизонтальные звенья ломаной приближаются к оси x. Легко видеть, что для всякого $x \in \mathbf{R}$ и $n = 1, 2, \ldots$

$$f_n(x) \geqslant f_{n+1}(x)$$

и

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x).$$

При этом каждая функция f_n всюду непрерывна, а предельная функция f разрывна на всюду плотном множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел (см. пример 24 гл. 2).

5. Не интегрируемая по Риману функция, являющаяся пределом последовательности функций, интегрируемых по Риману. (См. пример 33 гл. 8.)

Каждая из функций g_n, определенных в примере 24 гл. 2, интегрируема по Риману на замкнутом интервале $[0, 1]$, поскольку каждая из этих функций ограничена на этом интервале и имеет конечное число точек разрыва. Последовательность $\{g_n\}$ является возрастающей последовательностью ($g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ для каждого x и $n = 1, 2, \ldots$), сходящейся к функции f примера 1 гл. 4, которая равна 1 на множестве $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ и равна 0 на множестве $[0, 1] \setminus \mathbf{Q}$.

6. Последовательность функций, для которой предел интегралов не равен интегралу от предельной функции

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2n^2 x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2n}, \\ n - 2n^2\left(x - \dfrac{1}{2n}\right), & \text{если } \dfrac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

однако

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx=0.$$

Другим примером подобного типа является последовательность $\{f_n(x)\}$, где $f_n(x)=n^2xe^{-nx}$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

Еще более замечательным свойством обладает последовательность функций

$$f_n(x)=\begin{cases} 2n^3x, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2n}, \\ n^2-2n^3\left(x-\frac{1}{2n}\right), & \text{если} \quad \frac{1}{2n}\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}, \\ 0, & \text{если} \quad \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

В этом случае

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^b f_n(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}=+\infty$$

для всякого $b\in(0,\ 1]$, в то время как

$$\int_0^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)\,dx=\int_0^b 0\,dx=0.$$

7. Последовательность функций, для которой предел производных не равен производной от предельной функции

Положим $f_n(x)\equiv x/(1+n^2x^2)$ для $-1\leqslant x\leqslant 1$ и $n=1,\ 2,\ \ldots$. Тогда предельная функция $f(x)\equiv\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$ существует и равна 0 для всех $x\in[-1,\ 1]$ (при этом сходимость является равномерной, поскольку наибольшее и наименьшее значения функции $f_n(x)$ на интервале $[-1,\ 1]$ равны соответственно $1/2n$ и $-1/2n$). Производная предельной функции тождественно равна 0. Однако предел последовательности производных

$$\lim_{n\to+\infty} f'_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x=0, \\ 0, & \text{если} \quad 0<|x|\leqslant 1. \end{cases}$$

8. Последовательность функций, равномерно сходящаяся на каждом замкнутом подинтервале, но не сходящаяся равномерно на всем интервале

Положим $f_n(x) \equiv x^n$ на открытом интервале $(0, 1)$.

9. Последовательность $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к нулю на интервале $[0, +\infty)$ и такая, что $\int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \not\to 0$

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant n, \\ 0, & \text{если} \quad x>n. \end{cases}$$

Тогда f_n равномерно сходится к нулю на $[0, +\infty)$, однако

$$\int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1 \to 1.$$

Еще более замечательный пример доставляет последовательность функций

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad 0\leqslant x\leqslant n^2, \\ 0, & \text{если} \quad x>n^2. \end{cases}$$

В этом случае $\int\limits_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = n \to +\infty$.

10. Неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно

Этим свойством на полуинтервале $[0, 1)$ обладает ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n$. Так как общий член этого ряда мажорируется на $[0, 1)$ числом $1/n$, он стремится к нулю равномерно на $[0, 1)$. Сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n/n$ вытекает из того, что он мажорируется рядом $\sum x^n$, сходящимся на $[0, 1)$. Однако исходный ряд сходится неравномерно. Это следует из того факта, что его частичные суммы не являются равномерно ограниченными (гармонический ряд расходится; см. [36], стр. 447, упр. 31, 32).

11. Неравномерно сходящаяся последовательность, обладающая равномерно сходящейся подпоследовательностью

Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} \dfrac{x}{n}, & \text{если} \quad n \text{ нечетно}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если} \quad n \text{ четно}, \end{cases}$$

причем все функции определены на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$. Эта последовательность сходится к нулю неравномерно, но подпоследовательность $\{f_{2n}(x)\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$ сходится равномерно.

12. Неравномерно сходящиеся последовательности, удовлетворяющие любым трем из четырех условий теоремы Дини

Теорема Дини утверждает, что если $\{f_n\}$ — последовательность определенных на множестве A функций, сходящаяся на A к функции f, и если

(i) f_n непрерывна на A, $n = 1, 2, \ldots$,
(ii) f непрерывна на A,
(iii) последовательность $\{f_n(x)\}$ монотонна,
(iv) A компактно,

то данная последовательность сходится к функции f равномерно.

Никакие три из этих условий не обеспечивают равномерной сходимости. Другими словами, ни одно из этих четырех условий не может быть опущено. Этот факт подтверждается следующими четырьмя примерами:

$$\text{(i)}\quad f_n(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0 \text{ или } \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{если } 0 < x < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Тогда $\{f_n(x)\}$ — убывающая при каждом фиксированном x последовательность, которая на компактном множестве $[0, 1]$ неравномерно сходится к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$.

(ii) Убывающая последовательность $\{x^n\}$ на компактном множестве $[0, 1]$ неравномерно сходится к разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если } x = 1. \end{cases}$$

(iii) См. пример 6.

(iv) Последовательность $\{x^n\}$ на $[0, 1)$.

ГЛАВА 8

МНОЖЕСТВА И МЕРА НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Введение

Если не оговорено противное, то все рассматриваемые в настоящей главе множества предполагаются подмножествами системы действительных чисел $\mathbf{R}$. Непустой класс $\mathfrak{A}$ множеств называется σ-кольцом, или сигма-кольцом, если он замкнут относительно операции объединения, примененной счетное множество раз, и относительно операции разности множеств $\left(A_1, A_2, \ldots, \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathfrak{A} \quad \text{и} \quad A_1 \setminus A_2 \in \mathfrak{A}\right)$. Если $\mathfrak{A}$ — какой-либо непустой класс множеств, то σ-кольцом, порожденным классом $\mathfrak{A}$, называется пересечение всех σ-колец, содержащих $\mathfrak{A}$ (σ-кольцо, порожденное классом $\mathfrak{A}$, всегда существует, так как всегда существует по крайней мере *одно* σ-кольцо, содержащее $\mathfrak{A}$, а именно класс *всех* подмножеств $\mathbf{R}$). Естественно представлять себе σ-кольцо, порожденное классом $\mathfrak{A}$, как *наименьшее* σ-кольцо, содержащее $\mathfrak{A}$. Сигма-кольцо, порожденное классом $\mathfrak{C}$ всех компактных подмножеств $\mathbf{R}$, называется классом $\mathfrak{B}$ борелевских множеств (таким образом, множество является борелевским, если оно есть элемент σ-кольца, порожденного классом $\mathfrak{C}$).

Если A — произвольное подмножество $\mathbf{R}$, а x — какое-либо действительное число, то сдвигом множества A на число x называется множество, обозначаемое символом $x + A$, которое определяется следующим образом:

$$x + A \equiv \{y \mid y = x + a,\ a \in A\} = \{x + a \mid a \in A\}.$$

Класс $\mathfrak{A}$ множеств называется замкнутым относительно сдвигов, если

$$A \in \mathfrak{A},\ x \in \mathbf{R} \Rightarrow x + A \in \mathfrak{A}.$$

Если $\mathfrak{S}$ есть σ-кольцо подмножеств пространства X, то функция множества ρ с областью определения $\mathfrak{S}$ называется неотрицательной функцией в широком смысле, если ее значения для множеств $S \in \mathfrak{S}$ удовлетворяют неравенству $0 \leqslant \rho(S) \leqslant +\infty$. Неотрицательная функция в широком смысле, заданная на σ-кольце $\mathfrak{S}$, называется мерой на $\mathfrak{S}$, если $\rho(\varnothing) = 0$ и ρ счетно аддитивна на $\mathfrak{S}$:

$$S_1, S_2, \ldots \in \mathfrak{S}, \quad S_m \cap S_n = \varnothing \text{ для } m \neq n \Rightarrow$$

$$\rho\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} S_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \rho(S_n).$$

Если ρ есть мера на σ-кольце $\mathfrak{S}$ подмножеств пространства X и если $X \in \mathfrak{S}$, то упорядоченная пара $(X, \mathfrak{S})$ называется пространством с мерой, а ρ — мерой на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$. Если из контекста ясно, о каком классе множеств $\mathfrak{S}$ идет речь, то пространство с мерой будет обозначаться одной буквой X. Пусть ρ и σ — две меры на одном и том же пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$. Мера ρ называется абсолютно непрерывной относительно σ (это обозначается так: $\rho \ll \sigma$), если

$$A \in \mathfrak{S}, \quad \sigma(A) = 0 \Rightarrow \rho(A) = 0.$$

Если ρ — какая-либо мера на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$, то нуль-множеством для ρ называется любое подмножество элемента A из $\mathfrak{S}$, имеющего нулевую меру, т. е. $\rho(A) = 0$. Мера ρ на $(X, \mathfrak{S})$ называется полной, если всякое нуль-множество для ρ является элементом класса $\mathfrak{S}$.

Мерой Бореля называется мера μ на пространстве с мерой $(\mathbf{R}, \mathfrak{B})$, которая каждому ограниченному замкнутому интервалу сопоставляет его длину:

$$\mu([a, b]) = b - a, \quad \text{если} \quad a \leqslant b.$$

Этим условием мера Бореля определяется вполне однозначно. Классом $\tilde{\mathfrak{B}}$ измеримых по Лебегу множеств называется σ-кольцо, порожденное объединением класса $\mathfrak{B}$ и класса всех нуль-множеств для меры Бореля на $\mathfrak{B}$. Мера Лебега есть полная мера на $\tilde{\mathfrak{B}}$, которая однозначно определяется тем, что ее сужение на $\mathfrak{B}$ является мерой Бореля; другими словами, мера Лебега является *пополнением* или *полным продолжением* на $\tilde{\mathfrak{B}}$ меры Бореля, заданной на $\mathfrak{B}$.

Так как длина компактного интервала $[a, b]$ инвариантна относительно сдвигов, то σ-кольца $\mathfrak{B}$ и $\tilde{\mathfrak{B}}$ замкнуты относительно сдвигов, а меры Бореля и Лебега инвариантны относительно сдвигов:

$$A \in \mathfrak{B},\quad x \in \mathbf{R} \Rightarrow x + A \in \mathfrak{B},\quad \mu(x+A) = \mu(A),$$
$$A \in \tilde{\mathfrak{B}},\quad x \in \mathbf{R} \Rightarrow x + A \in \tilde{\mathfrak{B}},\quad \mu(x+A) = \mu(A).$$

Для всякого множества $E \subset \mathbf{R}$ определим внутреннюю меру Лебега $\mu_*(E)$ и внешнюю меру Лебега $\mu^*(E)$ следующим образом:

$$\mu_*(E) \equiv \sup\{\mu(A) \mid A \subset E,\ A \in \tilde{\mathfrak{B}}\},$$
$$\mu^*(E) \equiv \inf\{\mu(A) \mid A \supset E,\ A \in \tilde{\mathfrak{B}}\}.$$

Эти определения эквивалентны следующим:

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(A) \mid A \subset E,\ A \in \mathfrak{B}\} =$$
$$= \sup\{\mu(A) \mid A \subset E,\ A \text{ компактно}\},$$
$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \supset E,\ A \in \mathfrak{B}\} =$$
$$= \inf\{\mu(A) \mid A \supset E,\ A \text{ открыто}\}.$$

Доказательства этих фактов и дальнейшие подробности можно найти в [17], [31], [32] и [53].

Иногда мы будем ссылаться на аксиому выбора или на такие ее варианты, как теорема о полном упорядочении или лемма Цорна. Их иногда объединяют под общим названием *принципа максимального элемента*. По поводу этого круга вопросов отсылаем читателя к [17], [31] и [49].

Мы предполагаем также, что читатель знаком с понятиями *отношения эквивалентности* и *класса эквивалентности*. Эти понятия и связанные с ними вопросы рассматриваются в [17] и [19].

1. Совершенное нигде не плотное множество

Совершенным множеством называется замкнутое множество, каждая точка которого является предельной точкой этого множества. Фундаментальный результат, относящийся к совершенным множествам, состоит в том, что всякое непустое совершенное множество A действительных чисел (или, более общо, всякое непустое совершенное множество в полном сепарабельном метрическом пространстве) несчетно; на самом же деле мощность множества A равна $\mathfrak{c}$ — мощности множества $\mathbf{R}$, т. е. между $\mathbf{R}$ и A существует взаимно однозначное соответствие. (Доказательство и подробности см. в [54], стр. 153—162.)

Нигде не плотным множеством называется множество A, замыкание которого $\bar{A}$ не имеет внутренних точек, т. е. $I(\bar{A}) = \varnothing$. Ясно, что множество нигде не плотно тогда и только тогда, когда его замыкание нигде не плотно, и что любое подмножество нигде не плотного множества нигде не плотно. Менее очевидным является тот факт, что объединение любой конечной совокупности нигде не плотных множеств нигде не плотно. Доказательство этого факта можно провести по индукции, рассмотрев сначала следующий частный случай: *если A и B замкнуты и нигде не плотны, то $A \cup B$ нигде не плотно.* (Если U — непустое открытое подмножество множества $A \cup B$, то $U \setminus B$ — непустое открытое подмножество множества A.)

Знаменитый пример совершенного нигде не плотного множества был построен Г. Кантором (немецкий математик, 1845—1918 г.) и известен под названием **канторова множества**. Это множество C получается из замкнутого единичного интервала $[0, 1]$ последовательным удалением открытых интервалов, называемых „средними третями", следующим образом. Сначала удалим все точки x, лежащие между 1/3 и 2/3. Затем удалим средние трети (1/9, 2/9) и (7/9, 8/9) (двух оставшихся замкнутых интервалов [0, 1/3] и [2/3, 1] соответственно. После этого удалим средние части (1/27, 2/27), (7/27, 8/27), (19/27, 20/27) и (25/27, 26/27) четырех оставшихся замкнутых интервалов [0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9] и [8/9, 1] соответственно. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы удалим в результате из интервала [0, 1] множество, являющееся объединением последовательности открытых интервалов, т. е. открытое множество. Оставшееся замкнутое множество и есть множество C. Поскольку каждую точку множества C можно сколь угодно точно приблизить концевыми точками удаленных интервалов (все эти концевые точки принадлежат C), то множество C совершенно. А так как внутри [0, 1] не существует открытого интервала, который не имел бы общих точек по крайней мере с одним из интервалов, точки которого были удалены на некоторой стадии, то (замкнутое) множество C нигде не плотно.

Канторово множество C можно определить при помощи троичной (с основанием 3) системы счисления. Точка $x \in C$ тогда и только тогда, когда x можно представить троичной дробью, используя лишь цифры 0 и 2. Например, 0,022222 ... и 0,200000 ... являются концевыми точками первого удаленного интервала, т. е. соответственно точками 1/3 и 2/3 в десятичной системе. По поводу этого описания множества C см. [32], [53] и [33]*, стр. 57, а также следующий пример 2.

2. Несчетное множество меры нуль

Канторово множество C примера 1 несчетно, ибо оно является непустым совершенным множеством, а его мера равна нулю, поскольку множество точек, удаленных из замкнутого интервала $[0, 1]$, имеет меру

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\ldots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

Можно воспользоваться троичными разложениями для точек канторова множества и показать, что мощность множества C равна $\mathfrak{c}$, т. е. мощности множества $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. (Этот метод доказательства не зависит от указанного выше метода, основанного на свойствах совершенных множеств.) С одной стороны, точки множества C находятся во взаимно однозначном соответствии с троичными разложениями, использующими лишь цифры 0 и 2, и, следовательно, с *двоичными* разложениями, использующими цифры 0 и 1. С другой стороны, *бесконечные* двоичные разложения находятся во взаимно однозначном соответствии с точками полуоткрытого интервала $(0, 1]$ и, следовательно, с множеством всех действительных чисел. Это показывает, что множество *всех* двоичных разложений (а потому и множество C) несчетно и его мощность *не меньше* $\mathfrak{c}$. Чтобы доказать, что эта мощность в точности *равна* $\mathfrak{c}$, нам остается лишь заметить, что множество *конечных* двоичных разложений счетно (или еще проще, что $C \subset \mathbf{R}$). Дальнейшие приложения только что описанного отображения можно найти в примере 14 этой главы.

3. Множество меры нуль, разностное множество которого содержит некоторую окрестность нуля

Если A — произвольное непустое множество, то его разностным множеством $D(A)$ называется множество всех разностей между его элементами:

$$D(A) \equiv \{x - y \mid x \in A, \ y \in A\}.$$

Важным фактом в теории меры является то, что если A — измеримое множество положительной меры, то точка $x = 0$ является внутренней для разностного множества $D(A)$ (см. [53], стр. 72). Канторово множество C примера 1 является множеством *нулевой* меры, которое обладает таким же свойством. В самом деле, его разностное множество $D(C)$ есть замкнутый интервал $[-1, 1]$. Простейший способ убедиться в этом состоит в следующем. Рассмотрим множество $C \times C$ и покажем, что для всякого числа α, такого, что $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, прямая $y = x + \alpha$ пересекает множество $C \times C$ по крайней мере в одной точке (см. [9], стр. 110; там же указаны дальнейшие ссылки). Так как множество C получено последовательным удалением „средних третей", то множество $C \times C$ можно представить в виде пересечения счетного семейства замкнутых множеств C_1, C_2, ..., где каждое из множеств C_n есть объединение „угловых квадратов" (см. рис. 3). Множество C_1 состоит из четырех замкнутых квадратов со сторонами, равными 1/3, расположенных по углам полного квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$: $[0, 1/3] \times [0, 1/3]$, $[0, 1/3] \times [2/3, 1]$, $[2/3, 1] \times [0, 1/3]$ и $[2/3, 1] \times [2/3, 1]$; множество C_2 состоит из шестнадцати замкнутых квадратов со сторонами, равными 1/9, расположенных по углам четырех квадратов множества C_1 (по четыре в каждом квадрате); множество C_3 состоит из шестидесяти четырех замкнутых квадратов со сторонами, равными 1/27, расположенных по углам шестнадцати квадратов множества C_2 (по четыре в каждом квадрате) и т. д. Для всякого данного $\alpha \in [-1, 1]$ прямая $y = x + \alpha$ пересекает по крайней мере один из четырех квадратов множества C_1. Выберем один такой квадрат и обозначим его через S_1. Эта прямая должна пересечь по крайней мере один из четырех квадратов множества C_2, лежащих внутри S_1. Выберем один такой квадрат и обозначим его через S_2. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность замкнутых квадратов $\{S_n\}$, такую, что $S_{n+1} \subset S_n$ для $n = 1, 2, \ldots$. Так как длина стороны квадрата S_n равна 3^{-n}, то существует в точности одна точка

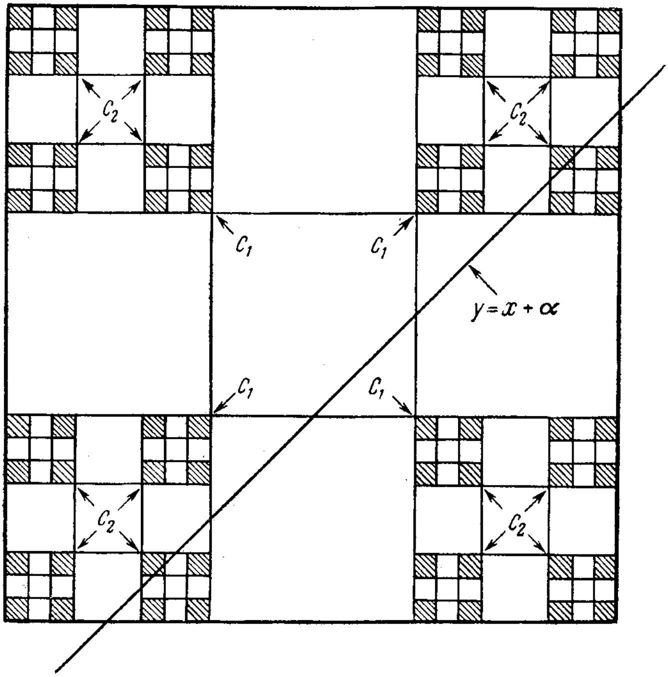

Рис. 3.

(x, y), которая принадлежит *каждому* квадрату последовательности $\{S_n\}$ (см. [36], стр. 201, упр. 30). Следовательно, точка (x, y) должна принадлежать множеству $C \times C$, а так как эта точка должна принадлежать и прямой $y = x + \alpha$, то мы получили элементы x и y множества C, разность между которыми равна данному числу α.

4. Совершенное нигде не плотное множество положительной меры

Метод, использованный в примере 1 для построения канторова множества C, можно в измененном виде применить для построения полезного семейства совершенных нигде не плотных множеств. Каждое из этих множеств, которые мы также назовем *канторовыми*, есть множество точек, остающихся на интервале $[0, 1]$ после удаления из него последовательности интервалов следующим образом. Пусть α — произвольное положительное число < 1. Сначала удалим из $[0, 1]$ все точки открытого интервала $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha\right)$ длины $\frac{1}{2}\alpha$ с центром в точке $\frac{1}{2}$. Из двух оставшихся замкнутых интервалов $\left[0, \frac{1}{2}-\frac{1}{4}\alpha\right]$ и $\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\alpha, 1\right]$, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\alpha\right)$, удалим средние открытые интервалы, длина каждого из которых равна $\frac{1}{8}\alpha$. Затем из оставшихся четырех замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha\right)$, удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{32}\alpha$. Из восьми оставшихся замкнутых интервалов, длина каждого из которых равна $\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{4}\alpha-\frac{1}{8}\alpha\right)$, удалим средние открытые интервалы, каждый из которых имеет длину $\frac{1}{128}\alpha$. После n шагов мера удаленных открытых интервалов будет равна $\alpha\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+2^{-n}\right)$, и, следовательно, мера совокупности удаленных открытых интервалов после бесконечной последовательности удалений будет равна α. Мера оставшегося канторова множества будет равна $1-\alpha$. По этой причине построенные таким способом канторовы множества часто называют *канторовыми множествами положительной меры*. Все они являются совершенными нигде не плотными множествами. Ниже, в примере 23, будет показано, что все канторовы множества положительной или нулевой меры гомеоморфны (см. введение к гл. 12). Тогда из второй части примера 2 будет следовать, что *любое канторово множество имеет мощность* $\mathfrak{c}$, *равную мощности множества* $\mathbf{R}$.

Третий способ построения канторовых множеств таков: пусть $0<\beta<1$, и пусть $\{\beta_n\}$ — последовательность положительных чисел, такая, что $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n\beta_n = \beta$. Удалим из $[0,1]$ открытый интервал I_0 длины β_0 с центром в точке 1/2. Затем из $[0, 1] \setminus I_0$ удалим два открытых интервала I_1^1, I_1^2, каждый из которых имеет длину β_1 и расположен в центре одного из двух непересекающихся замкнутых интервалов, объединение которых совпадает с множеством $[0, 1] \setminus I_0$. Продолжим этот процесс, как и в предыдущих построениях: на n-м шаге будут удалены 2^n открытых интервалов I_n^1, I_n^2, ..., $I_n^{2^n}$, каждый из которых имеет длину β_n и расположен должным образом на замкнутых интервалах, составляющих остаточное множество после $(n-1)$-го шага, $n = 1, 2, \ldots$.

5. Совершенное нигде не плотное множество иррациональных чисел

Можно построить пример совершенного нигде не плотного множества, используя последовательность $\{r_n\}$, члены которой составляют множество всех рациональных чисел интервала (0, 1). Поступим как и при построении канторова множества C, однако расширим открытый интервал так, чтобы его центр находился в точке 1/2, концы были иррациональными и чтобы он содержал точку r_1. На следующем шаге удалим из каждого из двух оставшихся замкнутых интервалов открытый интервал таким образом, чтобы его центр находился в центре соответствующего замкнутого интервала, концевые точки были иррациональными и чтобы было удалено второе рациональное число r_2[1]). Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим в результате совершенное нигде не плотное множество D. А так как все рациональные числа, заключенные между 0 и 1, были удалены, то это „канторово“ множество D содержит, за исключением двух точек 0 и 1, только иррациональные числа. Если концевые точки первоначального интервала выбрать иррациональными, то подобным же образом можно построить совершенное нигде не плотное множество, состоящее только из иррациональных чисел.

[1]) Если оно не было удалено на предыдущем шаге. — *Прим. перев.*

6. Всюду плотное открытое множество, дополнение которого имеет положительную меру

Пусть A — канторово множество положительной меры на $[0, 1]$. Положим $B \equiv A' = \mathbf{R} \setminus A$. Тогда B будет всюду плотным открытым множеством, а его дополнение A имеет положительную меру.

7. Множество второй категории

Говорят, что множество A есть множество *первой категории*, если оно является объединением счетного числа нигде не плотных множеств. Любое подмножество множества первой категории есть множество первой категории, и всякое объединение счетного множества множеств первой категории является снова множеством первой категории. Например, множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является множеством первой категории. Если множество не является множеством первой категории, то говорят, что это множество *второй категории*. Примером множества второй категории является множество $\mathbf{R}$ всех действительных чисел. Более общо, любое полное метрическое пространство есть множество второй категории (см. [38], стр. 338, упр. 33 и [45]*, стр. 87). Этот общий результат принадлежит Р. Бэру (см. [2], стр. 108; [54], стр. 162—165 и [27], стр. 425). Из него следует, что множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ иррациональных чисел является множеством второй категории. Сейчас независимо от только что упомянутой общей теоремы мы приведем краткое доказательство того факта, что любое множество A действительных чисел с непустым ядром $I(A)$ есть множество второй категории. Предположим противное. Тогда найдется непустой замкнутый интервал $C = [a, b]$, содержащийся в ядре A, который можно представить в виде $C = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где множества F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ *замкнуты* и нигде не плотны. Пусть C_1 — замкнутый интервал $[a_1, b_1] \subset (a, b) \setminus F_1$; далее пусть C_2 — замкнутый интервал $[a_2, b_2] \subset (a_1, b_1) \setminus F_2$; вообще для $n > 1$ пусть $C_n = [a_n, b_n] \subset (a_{n-1}, b_{n-1}) \setminus F_n$. Тогда существует точка p, принадлежащая *каждому* C_n, $n = 1, 2, \ldots$ (см. [36], стр. 201, упр. 30 и [33]*, стр. 44—45), и, следовательно, $p \in C$. Но это невозможно, так как p не принадлежит ни одному множеству F_n, $n = 1, 2, \ldots$. (Противоречие.)

8. Множество, не являющееся множеством типа F_σ

Напомним (гл. 2, пример 23), что множеством типа F_σ называется множество, являющееся объединением счетного множества замкнутых множеств. Можно привести много примеров множеств типа F_σ: конечные множества, замкнутые интервалы, открытые интервалы (например, интервал $(0, 1)$ является объединением множеств $[1/n, (n-1)/n]$), полуоткрытые интервалы, множество всех рациональных чисел (если рациональные числа расположить в последовательность $r_1, r_2, \ldots$, то $\mathbf{Q}$ есть объединение одноточечных замкнутых множеств $\{r_1\}, \{r_2\}, \ldots, \{r_n\}, \ldots$). Примером множества, которое не является множеством типа F_σ, может служить множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всех иррациональных чисел. Чтобы доказать это, предположим противное. Тогда $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$, где каждое C_n замкнуто ($n = 1, 2, \ldots$). Но так как никакое подмножество множества $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всех иррациональных чисел не имеет внутренних точек, то каждое замкнутое подмножество этого множества нигде не плотно. Отсюда следует, что множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ первой категории. (Противоречие; см. пример 7.)

9. Множество, не являющееся множеством типа G_δ

Множество A называется *множеством типа* G_δ, если оно является пересечением счетного множества открытых множеств. Для дополнений множеств справедлив закон двойственности (*закон де Моргана*):

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)' = \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n', \quad \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)' = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n'.$$

Из этого закона следует, что множество A является множеством типа G_δ тогда и только тогда, когда его дополнение $A' = \mathbf{R} \setminus A$ является множеством типа F_σ. Поэтому, учитывая, что множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всех иррациональных чисел не является множеством типа F_σ, заключаем, что множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел не является множеством типа G_δ.

Если рассмотреть объединение счетного множества множеств типа G_δ и пересечение счетного множества множеств типа F_σ, то мы получим два новых класса множеств, называемых множествами типа $G_{\delta\sigma}$ и $F_{\sigma\delta}$ соответственно. Подобным же образом можно составить две бесконечные последовательности классов множеств, которые обозначают соответственно через F_σ, $F_{\sigma\delta}$, $F_{\sigma\delta\sigma}$, ... и G_δ, $G_{\delta\sigma}$, $G_{\delta\sigma\delta}$, ... Дальнейшие подробности об этих множествах см. в [54].

10. Множество A, не являющееся множеством точек разрыва никакой функции

Пусть A — множество $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ всех иррациональных чисел. Так как A не является множеством типа F_σ, то не существует действительнозначной функции действительного переменного, множество точек разрыва которой совпадает с A (см. последнее замечание к примеру 23 гл. 2). Другими словами, не существует функции, отображающей $\mathbf{R}$ в $\mathbf{R}$, которая непрерывна в каждой рациональной точке и разрывна в каждой иррациональной точке. (См. пример 15 гл. 2.)

11. Неизмеримое множество

Используя аксиому выбора, можно построить множество, не измеримое по Лебегу. В действительности же множество, построенное этим способом, не может быть измеримым относительно *любой* нетривиальной счетно аддитивной меры, которая инвариантна относительно сдвигов. Точнее, если μ — мера, определенная для всех множеств A действительных чисел, принимающая конечные значения на ограниченных множествах и такая, что

$$\mu(x + A) = \mu(A)$$

для каждого $x \in \mathbf{R}$ и $A \subset \mathbf{R}$, то $\mu(A) = 0$ для всякого $A \subset \mathbf{R}$. Сейчас мы докажем этот результат.

Определим на $(0, 1] \times (0, 1]$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$, если $x - y \in \mathbf{Q}$. Этим отношением эквивалентности полуоткрытый интервал $(0, 1]$ разбивается на непересекающиеся классы эквивалентности C. Если применить аксиому выбора к этому семейству классов эквивалентности, то мы получим множество A, обладающее следующими двумя свойствами: (1) никакие две различные точки из A не принадлежат одному и тому же классу эквивалентности C; (2) каждый класс эквивалентности C содержит некоторую точку A. В терминах отношения эквивалентности эти два свойства принимают такую форму: (1) никакие два различных элемента из A не эквивалентны друг другу; (2) каждая точка x интервала $(0, 1]$ эквивалентна некоторому элементу множества A. Далее для всякого $r \in (0, 1]$ определим на множестве A операцию, называемую сдвигом по модулю 1:

$$(r+A)(\mathrm{mod}\ 1) \equiv [(r+A) \cup ((r-1)+A)] \cap (0, 1] =$$
$$= \{(r+A) \cap (0, 1]\} \cup \{((r-1)+A) \cap (0, 1]\}.$$

Для сдвига по модулю 1 из установленных выше свойств множества A следует, что (1) любые два множества $(r+A)$ (mod 1) и $(s+A)$ (mod 1) при различных рациональных числах r и s из $(0, 1]$ не пересекаются; (2) каждое действительное число x интервала $(0, 1]$ является элементом некоторого множества $(r+A)$ (mod 1) для некоторого рационального числа r из $(0, 1]$. Другими словами, полуоткрытый интервал $(0, 1]$ является объединением счетной совокупности попарно непересекающихся множеств $\{(r+A)(\mathrm{mod}\ 1)\}$, где $r \in \mathbf{Q} \cap (0, 1]$. Важное свойство множеств, полученных из A сдвигами по модулю 1, состоит в том, что (на основании предположений, сделанных относительно μ) все они имеют ту же меру, что и A:

$$\mu((r+A)(\mathrm{mod}\ 1)) =$$
$$= \mu((r+A) \cap (0, 1]) + \mu(((r-1)+A) \cap (0, 1]) =$$
$$= \mu((r+A) \cap (0, 1]) + \mu((r+A) \cap (1, 2]) =$$
$$= \mu((r+A) \cap (0, 2]) = \mu(r+A) = \mu(A).$$

Если предположить, что A имеет положительную меру, то из счетной аддитивности μ мы получим, что

$$\mu((0, 1]) = \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap (0, 1]} \mu((r+A)(\mathrm{mod}\ 1)) =$$
$$= \sum_{r \in \mathbf{Q} \cap (0, 1]} \mu(A) = +\infty,$$

но это невозможно, так как множество (0, 1] ограничено. Следовательно, $\mu(A)=0$ и

$$\mu((0,\ 1])=\sum_{r\in\mathbf{Q}\cap(0,\,1]}\mu((r+A)(\mathrm{mod}\ 1))=\sum_{r\in\mathbf{Q}\cap(0,\,1]}\mu(A)=0,$$

и потому

$$\mu(\mathbf{R})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu((n,\ n+1])=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mu((0,\ 1])=0.$$

Отсюда вытекает, что μ — тривиальная мера, для которой любое множество имеет меру нуль.

Наконец, если принять во внимание, что мера Лебега — нетривиальная инвариантная относительно сдвигов мера, для которой ограниченные интервалы имеют положительную конечную меру, то предыдущие рассуждения показывают, что *множество A не измеримо по Лебегу.*

Так как все множества типа F_σ и все множества типа G_δ являются борелевскими множествами и потому измеримы, то построенное неизмеримое множество дает пример множества, которое не является ни множеством типа F_σ, ни множеством типа G_δ.

Описанную выше конструкцию можно применить и к множествам на окружности. Рассмотрим единичную окружность $\mathbf{I}\equiv\{z\mid z\in\mathbf{C},\ |z|=1\}$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ как группу относительно умножения. Для каждого $z\in\mathbf{I}$ существует единственное θ, $0\leqslant\theta<1$, такое, что $z=e^{2\pi i\theta}$. Положим $\mathbf{I}_0\equiv\{z\mid z=e^{2\pi i\theta},\ \theta\in\mathbf{Q},\ 0\leqslant\theta<1\}$. Тогда $\mathbf{I}_0$ будет нормальной подгруппой, и существует факторгруппа $\mathbf{S}=\mathbf{I}/\mathbf{I}_0$. Пусть $\tilde{\mathbf{S}}$ — полное множество представителей всех классов смежности группы $\mathbf{S}$ в $\mathbf{I}$ (при этом из каждого класса смежности в $\mathbf{I}$ входит лишь один элемент), полученное применением аксиомы выбора, и пусть мера Лебега μ на $[0,\ 1)$ преобразуется в меру $\tilde{\mu}$ на $\mathbf{I}$ по следующему правилу:

$E\subset\mathbf{I}$ *измеримо* тогда и только тогда,

когда $F\equiv\{\theta\mid e^{2\pi i\theta}\in E,\ 0\leqslant\theta<1\}$

измеримо по Лебегу и $\tilde{\mu}(E)\equiv2\pi\mu(F)$.

Тогда $\tilde{S}$ не измеримо. В самом деле, $\bigcup_{\theta \in \mathbf{Q} \cap [0, 1)} e^{2\pi i\theta}\tilde{S}$ есть объединение счетного множества непересекающихся множеств, каждое из которых измеримо и имеет ту же меру, что и $\tilde{S}$. Более того, это объединение совпадает с $\mathbf{I}$, так как $\tilde{S}$ — полное множество представителей, откуда следует, что если $\tilde{S}$ измеримо, то $\mathbf{I}$ является объединением счетного множества непересекающихся измеримых множеств одинаковой меры. Так как $\tilde{\mu}(\mathbf{I}) = 2\pi$, то мера $\tilde{\mu}(\tilde{S})$ не может быть положительной. Но если $\tilde{\mu}(\tilde{S}) = 0$, то $\tilde{\mu}(\mathbf{I}) = 0$.

Описанный выше процесс можно распространить на более общие топологические группы, например на компактные группы, имеющие счетное множество нормальных подгрупп. (Определения и подробности относительно групп, нормальных подгрупп и т. д. см. в [19], относительно топологических групп см. [29].)

12. Множество D, такое, что для всякого измеримого множества A справедливы равенства $\mu_*(D \cap A) = 0$, $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$

Множество D, обладающее такими свойствами, является, так сказать, крайне неизмеримым — оно настолько неизмеримо, насколько может быть неизмеримо множество вообще! Множество D, как и неизмеримое множество A примера 11, строится при помощи аксиомы выбора, однако в этом случае построение несколько сложнее. Его можно найти в книге [53], стр. 74. Этот пример показывает, что всякое измеримое множество A содержит подмножество, внутренняя мера которого равна нулю, а внешняя мера равна мере A. Он также показывает, что *всякое множество положительной меры содержит неизмеримое подмножество.*

Ф. Гельвин построил семейство $\{E_t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, попарно непересекающихся подмножеств интервала $[0, 1]$, каждое из которых имеет внешнюю меру, равную 1.

13. Множество A меры нуль, для которого любое действительное число является его точкой конденсации

Точка p называется *точкой конденсации* множества A, если всякая окрестность p содержит несчетное множество точек из A. Пусть C — канторово множество примера 1. Для любого замкнутого интервала $[\alpha, \beta]$, где $\alpha < \beta$, определим множество $C(\alpha, \beta)$ следующим образом:

$$C(\alpha, \beta) \equiv \{\alpha + (\beta - \alpha)x \mid x \in C\}.$$

Тогда $C(\alpha, \beta)$ — совершенное нигде не плотное множество меры нуль. Далее, пусть множество B является объединением всех множеств $C(\alpha, \beta)$ для всех рациональных α и β, таких, что $\alpha < \beta$. Так как B есть объединение счетного семейства множеств меры нуль, то оно также является множеством меры нуль. С другой стороны, так как *всякий* открытый интервал I содержит некоторое множество $C(\alpha, \beta)$ и так как *каждое* множество $C(\alpha, \beta)$ несчетно, то любое действительное число должно быть точкой конденсации множества B. (См. [22], стр. 287.)

14. Нигде не плотное множество A действительных чисел и его непрерывное отображение на замкнутый единичный интервал [0, 1]

В качестве множества A можно взять *любое* канторово множество (примеры 1 и 4), поскольку все канторовы множества гомеоморфны (пример 23). Мы опишем специальное отображение φ, используя в качестве A канторово множество примера 1. Рассмотрим отображение, описанное во второй части примера 2. Пусть $0, c_1c_2c_3 \ldots$ — троичное разложение произвольного числа $x \in C$, где $c_n = 0$ или 2 $(n = 1, 2, \ldots)$. Положим

$$\varphi(x) \equiv 0, \frac{c_1}{2}\frac{c_2}{2}\frac{c_3}{2} \ldots$$

и будем рассматривать правую часть как *двоичное* разложение некоторого числа, использующее лишь цифры 0 и 1. Очевидно, что образом C при отображении φ является некоторое подмножество интервала [0, 1]. Покажем теперь, что $[0, 1] \subset \varphi(C)$. Для этого возьмем произвольное $y \in [0, 1]$ и рассмотрим его двоичное разложение

$$y = 0, b_1b_2b_3 \ldots {}^{1)}.$$

Положим

$$x \equiv 0, (2b_1)(2b_2)(2b_3) \ldots,$$

[1]) Если число y допускает два разложения в двоичную дробь, то можно рассматривать оба разложения. — *Прим. перев.*

где правая часть рассматривается как разложение числа x в троичную дробь. Тогда $x \in C$, причем $\varphi(x) = y$. Следовательно, $[0, 1] \subset \varphi(C)$. Таким образом, $\varphi(C) = [0, 1]$. Нетрудно доказать и непрерывность отображения φ. Однако это удобнее установить из геометрических соображений так, как это сделано в следующем примере, где рассматривается непрерывное продолжение отображения φ на весь единичный интервал $[0, 1]$.

Следует заметить, что отображение φ не является взаимно однозначным. В самом деле, в этом случае взаимно однозначное непрерывное отображение вообще невозможно, ибо C и $[0, 1]$ не гомеоморфны, а любое взаимно однозначное непрерывное отображение одного компактного множества на другое есть гомеоморфизм. (См. [36], стр. 192.) (Множество C вполне несвязно, так как связными являются лишь его одноточечные подмножества, в то время как его полный образ $[0, 1]$ есть связное множество.) Примером двух точек множества C, имеющих один и тот же образ, могут служить точки $0{,}022000000 \ldots$ и $0{,}020222222 \ldots$, ибо их образами являются соответственно $0{,}011000000 \ldots$ и $0{,}010111111 = 0{,}011000000 \ldots$. Вообще две точки x_1 и x_2 множества C имеют один и тот же образ при отображении φ тогда и только тогда, когда они имеют вид

$$x_1 = 0, c_1c_2 \ldots c_n2000 \ldots, \quad \text{а} \quad x_2 = 0, c_1c_2 \ldots c_n0222 \ldots .$$

Другими словами, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ тогда и только тогда, когда x_1 и x_2 являются концевыми точками одного из интервалов, которые были удалены при построении множества C. Таким образом, φ — возрастающая функция на C и притом строго возрастающая, если исключить указанные пары концевых точек. (Ср. пример 30.)

Усилением предыдущей „теоремы существования“ является следующая общая теорема, указывающая на возможные в метрических пространствах непрерывные и гомеоморфные (топологические) образы канторова множества (а на самом деле *любого* канторова множества, см. пр. 23) и его подмножеств (определение см. во введении к гл. 12): *каждое сепарабельное метрическое пространство есть непрерывный образ некоторого подмножества канторова множества. Каждое компактное метрическое пространство есть непрерывный образ канторова множества. Каждое ком-*

пактное вполне несвязное метрическое пространство есть гомеоморфный образ некоторого замкнутого подмножества канторова множества. Каждое компактное вполне несвязное совершенное метрическое пространство есть гомеоморфный образ канторова множества. (См. [2], стр. 119—122.)

15. Непрерывная монотонная функция, производная которой равна нулю почти всюду

Продолжим функцию предыдущего примера на весь единичный интервал [0, 1] следующим образом. Если $x \in [0, 1] \setminus C$, то x принадлежит одному из открытых интервалов (a, b), удаленных из [0, 1] при построении множества C, и потому $\varphi(a) = \varphi(b)$; положим $\varphi(x) \equiv \varphi(a) = \varphi(b)$. Другими словами, φ постоянна на замыкании каждого интервала, удаленного при построении множества C. Точнее $\varphi(x) = 1/2$ на интервале [1/3, 2/3]. На интервалах [1/9, 2/9] и [7/9, 8/9] значения φ равны соответственно 1/4 и 3/4. На интервалах [1/27, 2/27], [7/27, 8/27], [19/27, 20/27] и [25/27, 26/27] значения φ равны соответственно 1/8, 3/8, 5/8 и 7/8. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим возрастающую функцию, определенную на [0, 1] и (локально) постоянную в *некоторой* окрестности *каждой* точки множества $[0, 1] \setminus C$ (см. рис. 4). Поскольку φ возрастает на [0, 1] и множество ее значений составляет полный интервал [0, 1], то φ не имеет скачков. А так как монотонная функция не может иметь других разрывов, кроме скачков (см. [36], стр. 52, упр. 24, а также [33], стр. 238), то φ непрерывна. Наконец, поскольку φ локально постоянна на открытом множестве $[0, 1] \setminus C$, мера которого равна 1, заключаем, что $\varphi'(x) = 0$ почти всюду на [0, 1]. Определенная выше функция называется к а н т о р о в о й ф у н к ц и е й.

Аналогично тому как канторова функция была определена с помощью канторова множества, можно определить подобные „канторовы функции“, исходя из других канторовых множеств (положительной меры). Вероятно, простейший способ определения канторовой функции g, соответствующей заданному на [0, 1] канторову множеству A, состоит в том, что сначала g определяют на замыканиях последовательно удаляемых интервалов: на центральном интервале $g(x) \equiv 1/2$;

на следующих двух интервалах значения g полагаются соответственно равными $1/4$ и $3/4$; на следующих четырех интервалах значения g полагаются равными соответственно $1/8$, $3/8$, $5/8$, $7/8$ и т. д. Тогда на плотном подмножестве $[0, 1] \setminus A$ интервала $[0, 1]$ функция g является возрастающей, а ее множество значений (на этом подмножестве) плотно

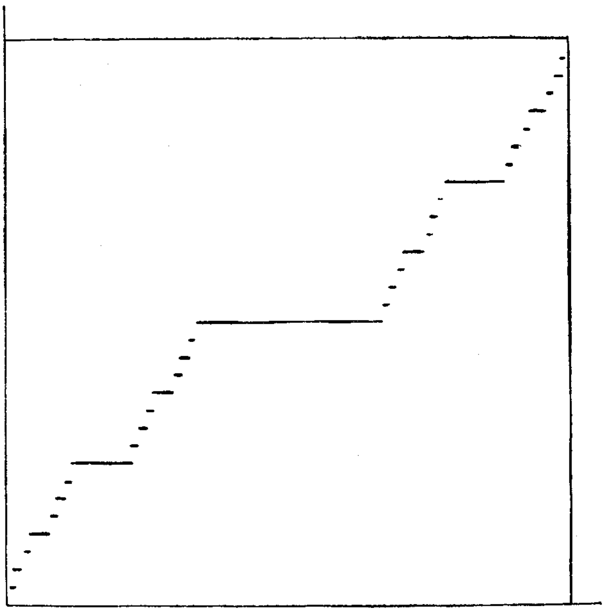

Рис. 4.

в $[0, 1]$. Следовательно, функцию g можно продолжить, определив ее на всем интервале $[0, 1]$ так, что она станет возрастающей и непрерывной на $[0, 1]$, а ее множество значений совпадет с $[0, 1]$.

Используя пример 5 „канторова множества" из иррациональных чисел, можно построить функцию h, возрастающую и непрерывную на $[0, 1]$, множество значений которой совпадает с $[0, 1]$, при этом $h'(x) = 0$ для *каждого* рационального числа $x \in [0, 1]$. На самом деле, множество значений $h(x)$ для рациональных $x \in [0, 1]$ можно сделать равным множеству $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ всех рациональных точек интервала $[0, 1]$

вместо множества точек вида $m/2^n$, как в предыдущих случаях. Таким образом, мы получим функцию, удовлетворяющую требованиям примера 11 (g) гл. 1.

Непрерывная *строго* монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду, рассматривается в примере 30.

16. Топологическое отображение замкнутого интервала, не сохраняющее измеримость и нулевую меру

Пусть φ — канторова функция примера 15. Определим на $[0, 1]$ функцию ψ следующим образом:

$$\psi(x) = x + \varphi(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

Множество значений этой функции есть интервал $[0, 2]$. Так как φ возрастает и непрерывна на $[0, 1]$, то отображение ψ *строго* возрастает и является топологическим на $[0, 1]$ (т. е. непрерывно, взаимно однозначно и имеет непрерывное обратное отображение, определенное на множестве значений ψ). Далее, поскольку всякий открытый интервал, удаленный из $[0, 1]$ при построении канторова множества C, отображается функцией ψ на некоторый интервал такой же длины из $[0, 2]$, то $\mu(\psi(I \setminus C)) = \mu(I \setminus C) = 1$ [1]), откуда $\mu(\psi(C)) = 1$. Но мера множества C равна нулю, и мы получили, таким образом, пример топологического отображения ψ, которое отображает множество меры нуль на некоторое множество положительной меры. Пусть теперь D — неизмеримое подмножество множества $\psi(C)$ (см. пример 12). Тогда $\psi^{-1}(D)$ — подмножество множества C меры нуль, и потому оно также имеет меру нуль. Следовательно, ψ является примером топологического отображения, которое отображает измеримое множество на неизмеримое.

Ниже будет рассмотрен еще один подобный пример (см. пример 23).

17. Измеримое неборелевское множество

Множество $\psi^{-1}(D)$ примера 16 измеримо, но поскольку оно является образом неборелевского множества D при топологическом отображении, то $\psi^{-1}(D)$ не является борелевским множеством (см. [54]).

---

[1]) Здесь $I = [0, 1]$. — *Прим. перев.*

18. Две непрерывные функции, разность которых не является постоянной, но их производные (конечные или бесконечные) совпадают всюду

Этот пример построил Рей Пастор [40] (см. также [9], стр. 133). Пусть φ — канторова функция примера 15. На единичном интервале $[0, 1]$ определим функцию $h(x)$ следующим образом. На канторовом множестве C положим ее равной нулю, а на каждом открытом интервале (a, b), удаленном при построении множества C, определим $h(x)$ так, чтобы ее график состоял из двух конгруэнтных полуокружностей с диаметром на оси x, причем одна полуокружность расположена над осью x на левой половине (a, b), а другая—под осью x на правой половине (a, b):

$$h(x) \equiv \begin{cases} \left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \dfrac{3a+b}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & \text{если } a < x \leqslant \dfrac{a+b}{2}, \\ -\left[\left(\dfrac{b-a}{4}\right)^2 - \left(x - \dfrac{a+3b}{4}\right)^2\right]^{1/2}, & \text{если } \dfrac{a+b}{2} \leqslant x < b. \end{cases}$$

Функция h непрерывна всюду на интервале $[0, 1]$. Далее положим $f(x) \equiv 2\varphi(x) + h(x)$ и $g(x) \equiv \varphi(x) + h(x)$. Тогда $f'(x) = g'(x)$ для $0 \leqslant x \leqslant 1$. В самом деле, если x принадлежит канторову множеству C, то $f'(x) = g'(x) = +\infty$. Если же x — средняя точка некоторого интервала, удаленного при построении множества C, то $f'(x) = g'(x) = -\infty$. Наконец, для остальных точек $x \in [0, 1] \setminus C$ имеем $f'(x) = g'(x) = h'(x)$. С другой стороны, $f(x) - g(x) = \varphi(x)$, а функция $\varphi(x)$ не является постоянной.

19. Множество полной меры[1]) и первой категории на [0, 1]

Первый пример: пусть A_n — канторовы множества на $[0, 1]$ меры $(n-1)/n$, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть $A \equiv A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Так как множества A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ нигде не плотны, то множество A первой категории. С другой стороны, поскольку

$$\mu(A_n) = \frac{n-1}{n} \leqslant \mu(A) \leqslant 1$$

для $n = 1, 2, \ldots$, то $\mu(A) = 1$.

[1]) Если мера множества $E \subset [a, b]$ равна $b - a$, то говорят, что это множество *полной меры* на $[a, b]$. — *Прим. перев.*

Второй пример: множеством такого же типа является дополнение до единичного интервала множества из второго примера п. 20.

20. Множество меры нуль и второй категории на [0, 1]

Первый пример: пусть A — множество первого примера из п. 19. Тогда его дополнение $A' = [0, 1] \setminus A$ есть множество второй категории (если бы оно было множеством первой категории, то интервал $[0, 1]$ являлся бы объединением двух множеств первой категории и потому также был бы множеством первой категории) и меры нуль ($\mu([0, 1] \setminus A) + \mu(A) = 1$).

Второй пример: пусть $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ есть множество значений последовательности $\{r_n\}$, и пусть через I_{kn}, где k и n — произвольная пара натуральных чисел, обозначен открытый интервал длины $< 2^{-k-n}$, содержащий точку r_n. Положим $A_k \equiv \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} I_{kn}$ и $B_k \equiv [0, 1] \setminus A_k$. Тогда A_k—открытое множество, содержащее $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ и имеющее меру $\mu(A_k) < 2^{-k}$, и потому B_k—компактное нигде не плотное множество меры $\mu(B_k) > 1 - 2^{-k}$. (Мера A_k не превосходит суммы длин интервалов I_{kn}, $n = 1, 2, \ldots$, а B_k не имеет внутренних точек, ибо оно состоит лишь из иррациональных точек.) Следовательно, множество $B \equiv \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} B_k$ есть подмножество $[0, 1]$ полной меры и первой категории, и потому множество $A \equiv \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k = [0, 1] \setminus B$ есть подмножество $[0, 1]$ меры нуль и второй категории.

21. Множество меры нуль, не являющееся множеством типа F_σ

Первый пример: рассмотрим множество первого примера из п. 20. Оно не может быть объединением счетного множества замкнутых множеств $F_1, F_2, \ldots$. В самом деле, в противном случае каждое множество F_n было бы замкнутым множеством меры нуль и, следовательно, нигде не плотным.

Но это означало бы, что рассматриваемое множество было бы множеством первой категории. (Противоречие.)

Второй пример: множество второго примера из п. 20 (по тем же причинам) также обладает требуемыми свойствами.

Третий пример: неборелевское множество примера 17 имеет меру нуль, однако оно не может быть множеством типа F_σ, ибо всякое множество типа F_σ является борелевским.

22. Множество меры нуль, такое, что не существует функции (интегрируемой по Риману или нет), для которой это множество является множеством точек разрыва

Любое множество примера 21 обладает требуемым свойством, поскольку для всякой функции, отображающей **R** в **R**, множество точек разрыва является множеством типа F_σ (см. гл. 2, пример 23, а также гл. 4, пример 8).

Настоящий пример представляет особый интерес в связи со следующей теоремой: *действительная функция, определенная и ограниченная на компактном интервале, интегрируема на нем по Риману тогда и только тогда, когда множество ее точек разрыва имеет меру нуль* (см. [38], стр. 153, а также [33]*, стр. 145). Невнимательное чтение этой теоремы может привести к неправильному представлению, будто *каждое* множество меры нуль может быть множеством точек разрыва некоторой интегрируемой по Риману функции, поскольку это условие и необходимо, и достаточно.

23. Два совершенных нигде не плотных гомеоморфных множества на [0, 1], лишь одно из которых имеет меру нуль

Мы докажем несколько больше, а именно если C — канторово множество меры нуль на [0, 1] и A — *любое* канторово множество положительной меры на [0, 1], то существует гомеоморфизм f интервала [0, 1] на [0, 1], такой, что $f(C) = A$. Непосредственным следствием этого результата является утверждение, что *все канторовы множества гомеоморфны*.

Идея, лежащая в основе построения этого отображения, подобна той, которая использовалась при построении канторовой функции (пример 15). Расположим „в одинаковом порядке“ интервалы $I_1, I_2, \ldots$ и интервалы $J_1, J_2, \ldots$, удаленные из $[0, 1]$ при построении множеств C и A соответственно. Это означает, что I_1 и J_1 являются средними интервалами, удаленными на первом шаге, I_2 и J_2 — „левыми средними“,

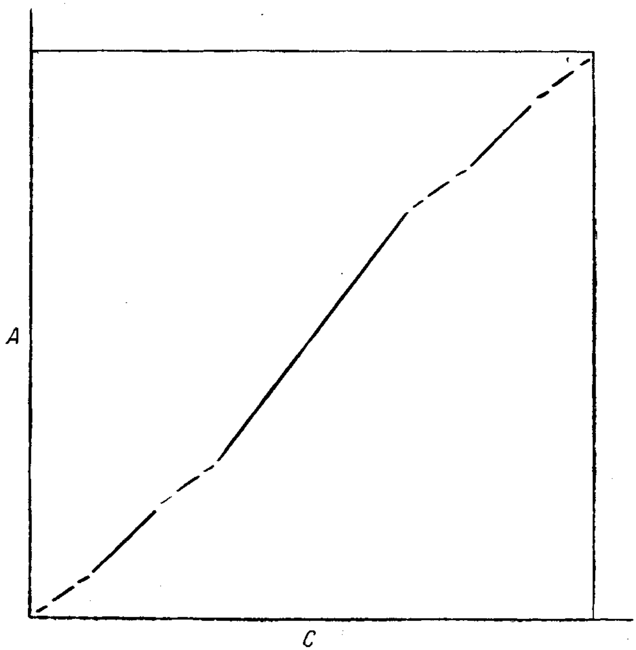

Рис. 5.

а I_3 и J_3 — „правыми средними“ интервалами, удаленными на втором шаге, и т. д. Затем с помощью возрастающей линейной функции отобразим замыкание I_n на замыкание J_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда f определена и строго возрастает на всюду плотном подмножестве интервала $[0, 1]$, и так как при этом множество ее значений также всюду плотно на $[0, 1]$, то f можно непрерывно продолжить на $[0, 1]$, как это описано во второй части примера 15 (см. рис. 5). Построенная таким образом функция f является функцией такого же типа, как и функция примера 16.

24. Два непересекающихся непустых нигде не плотных множества действительных чисел, таких, что каждая точка любого из них является предельной точкой другого

Пусть A — произвольное канторово множество на $[0, 1]$, а B — подмножество A, состоящее из всех концевых точек открытых интервалов, которые были удалены из $[0, 1]$ при построении A. Тогда множества B и $E \equiv A \setminus B$ удовлетворяют требуемым условиям.

Если рассматривать не только подмножества системы $\mathbf{R}$, то подобные примеры строятся очень просто. Например, требуемым условиям удовлетворяют следующие два множества на евклидовой плоскости: множество на оси x с рациональными первыми координатами и множество на оси x с иррациональными первыми координатами.

25. Два гомеоморфных множества действительных чисел, являющихся множествами разных категорий

Определим на $[0, 1]$ возрастающую непрерывную функцию, подобную канторовой функции, построенной во второй части примера 15. Пусть $\{J_n\}$ — описанная в примере 23 последовательность открытых интервалов, удаленных из $[0, 1]$ при построении канторова множества A, а $\{s_n\}$ — взаимно однозначное отображение $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$. Определим последовательность $\{r_n\}$ следующим образом: положим $r_1 \equiv s_1$, $r_2 \equiv s_n$, где n — наименьшее натуральное число, такое, что $s_n < r_1$; $r_3 \equiv s_n$, где n — наименьшее натуральное число, такое, что $s_n > r_1$. Далее положим $r_4 \equiv s_n$, где наименьшее натуральное число, такое, что $s_n < r_2$; $r_5 \equiv s_n$, где n — наименьшее натуральное число, такое, что $r_2 < s_n < r_1$; $r_6 \equiv s_n$, где n — наименьшее натуральное число, такое, что $r_1 < s_n < r_3$; $r_7 \equiv s_n$, где n—наименьшее натуральное число, такое, что $s_n > r_3$. Если продолжить этот процесс, то рациональные числа, заключенные между 0 и 1, будут занумерованы в последовательность $\{r_n\}$ таким образом, что их отношение порядка будет соответствовать отношению порядка последовательности интервалов J_n, как это указано на рис. 6. Другими словами, $r_m < r_n$ тогда и только тогда, когда J_m лежит левее J_n. Определим теперь функцию f, положив $f(x) \equiv r_n$, если x принадлежит замыканию $\bar{J}_n$ интервала J_n, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда, как и в примере 15, функция f определена и возрастает на плотном подмножестве интервала [0, 1], а множество ее значений плотно в [0, 1]. Следовательно, ее можно продолжить до непрерывной возрастающей функции, отображающей [0, 1] на [0, 1]. Если теперь определить множества B и E так, как в примере 24, то функция f отобразит B на множество $\mathbf{Q} \cap (0, 1)$, а E — на множество $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$ всех иррациональных чисел, заключенных между 0 и 1. Отображение E на $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$ является строго возрастающим и *бинепрерывным*. (Непрерывность обратного отображения следует из того, что при отображении E на $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$ сохраняется отношение

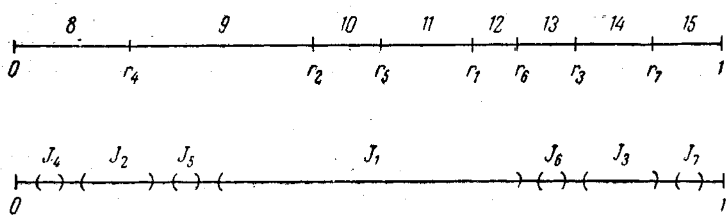

Рис. 6.

порядка.) Следовательно, E и $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$ гомеоморфны. Таким образом, *всякое канторово множество с удаленными „концевыми точками" гомеоморфно множеству иррациональных чисел интервала* (0, 1). Но E нигде не плотно и потому является множеством первой категории, в то время как $(0, 1) \setminus \mathbf{Q}$ — множество второй категории (см. пример 7).

Следует заметить, что в отличие от примера 23 гомеоморфизм, описанный в настоящем примере, не порождается гомеоморфизмом интервалов, содержащих эти множества. Если два пространства гомеоморфны и если два множества соответствуют друг другу при этом гомеоморфизме, то можно утверждать следующее: если одно из множеств нигде не плотно, то нигде не плотно и другое; если одно из множеств является множеством первой категории, то и другое также является множеством первой категории.

26. Два гомеоморфных множества действительных чисел, таких, что одно из них всюду плотно, а другое нигде не плотно

Если в примере 25 под последовательностью $\{r_n\}$ понимать не последовательность рациональных чисел интервала (0, 1), а последовательность, исчерпывающую все множество $\mathbf{Q}$, то мы получим гомеоморфизм между E и множеством $\mathbf{Q}'=\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ *всех* иррациональных чисел. Множество E нигде не плотно, а множество $\mathbf{Q}'$ всюду плотно. (См. последний абзац примера 25.)

27. Функция, определенная на R, равная нулю почти всюду и такая, что множество ее значений на каждом непустом открытом интервале совпадает с R

Построение функции f, обладающей указанными свойствами, мы разобьем на несколько этапов. Сначала построим на открытом интервале $(0, 1)$ функцию g, отображающую множество $C\cap(0, 1)$ на $\mathbf{R}$, где C — канторово множество меры нуль. Если φ — канторова функция (пример 15), то функцию g можно определить так:

$$g(x)\equiv \operatorname{tg}\left[\pi\left(\varphi(x)-\frac{1}{2}\right)\right], \qquad 0<x<1.$$

Второй шаг состоит в том, чтобы для произвольно заданного открытого интервала $I=(a, b)$ определить подмножество Z_I меры нуль и функцию g_I с областью определения Z_I и областью значений $\mathbf{R}$. Это можно сделать следующим образом:

$$Z_I\equiv\{a+(b-a)x\,|\,x\in C\cap(0, 1)\},$$

$$g_I(x)\equiv g\left(\frac{x-a}{b-a}\right), \qquad x\in Z_I.$$

Приступая к построению искомой функции f, положим ее равной нулю на множестве $\mathbf{I}$ всех целых чисел. Далее определим последовательность $\{U_n\}$ открытых множеств следующим образом: $U_1\equiv\mathbf{R}\setminus\mathbf{I}$, т. е. U_1 есть объединение всех открытых интервалов вида $(n, n+1)$, где n — целое число. Внутри *каждого* из этих интервалов I определим множество Z_I меры нуль и на нем функцию g_I так, как это сделано выше. На множестве Z_I функцию f полагаем равной g_I. Пусть U_2 — подмножество U_1, на котором f еще не определена. Тогда U_2 — открытое множество, и потому оно является объединением непересекающихся открытых интервалов. Внутри *каждого* из этих интервалов I определим множество Z_I меры нуль и на нем функцию g_I так, как это сделано выше. На множестве Z_I функцию f полагаем равной g_I. Пусть U_3 — подмножество U_2, на котором f еще не определена. Тогда U_3 также является открытым множеством и потому является объединением непересекающихся открытых интервалов. Если снова определить множества Z_I так, как это сделано выше, то функцию f можно продолжить и на эти множества меры нуль. Продолжая этот процесс, получаем последовательность $\{U_n\}$ открытых множеств, дополнение каждого из которых имеет меру нуль. Таким образом, функция f будет определена на некотором множестве меры нуль, а именно на дополнении пересечения множеств U_1, U_2, ..., или, что то же самое, на объединении их дополнений U_1', U_2', ... При этом *каждый* непустой открытый интервал содержит по крайней мере один из открытых интервалов I, составляющих открытые множества U_n, и потому некоторое множество Z_I, на котором множество значений f совпадает с $\mathbf{R}$. Наконец, положим функцию f равной нулю в тех точках, в которых она еще не определена.

28. Функция, определенная на R, график которой всюду плотен на плоскости

Этим свойством обладает функция примера 27.

29. Неотрицательная всюду конечная функция f, такая, что $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ для любого непустого открытого интервала (a, b)

Функцию, обладающую этими свойствами, можно построить, используя метод примера 27. Однако в этот метод нужно внести следующие изменения: (i) множество C следует заменить канторовым множеством меры 1/2 на [0, 1] и (ii) функцию g_I положить равной

$$g_I(x) = \frac{1}{|I|^2}\chi(Z_I),$$

где $|I|$ обозначает длину интервала I, а $\chi(A)$ — характеристическую функцию множества A (см. введение к гл. 1). Каждое множество Z_I имеет меру $\frac{1}{2}|I|$, и поэтому интеграл от g_I по I равен $1/(2|I|)$. Так как каждый непустой интервал (c, d) содержит подинтервалы I произвольно малой длины, то интеграл $\int_c^d f(x)\,dx$ равен $+\infty$.

30. Непрерывная строго монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду

Функцию f, обладающую этими свойствами, впервые построили А. К. Цаанен и В. А. Дж. Люксембург [59]. Пусть φ— канторова функция примера 15. Положим $\psi(x) \equiv \varphi(x)$, если $x \in [0, 1]$, и $\psi(x) \equiv 0$, если $x \in \mathbf{R} \setminus [0, 1]$. Далее, пусть $\{[a_n, b_n]\}$ — последовательность замкнутых интервалов $[0, 1]$, $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$, ..., $\left[0, \frac{1}{8}\right]$, ... Искомой функцией будет [1])

$$f(x) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n}\psi\left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right) \text{ для } 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

31. Ограниченная полунепрерывная функция, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману

Характеристическая функция f любого канторова множества A положительной меры на $[0, 1]$ ограничена и всюду полунепрерывна сверху. Но так как множество ее точек разрыва есть A и мера множества A положительна, то f

[1]) Приведенный пример функции $f(x)$ некорректен, так как $f(x)$ разрывна и не монотонна. Это вытекает из того, что указанный ряд сходится равномерно и потому

$$\varlimsup_{x \to \frac{1}{2}+0} f(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varlimsup_{x \to \frac{1}{2}+0} 2^{-n}\psi\left(\frac{x-a_n}{b_n-a_n}\right) = \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4},$$

тогда как

$$\varlimsup_{x \to \frac{1}{2}-0} f(x) \geqslant \frac{1}{2}\psi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\psi(1) = \frac{1}{2}, \quad f(0) = 0, \ f(1) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Корректный пример см. в [45]*, стр. 155. — *Прим. ред.*

не интегрируема по Риману на $[0, 1]$[1]). Две функции называются эквивалентными, если их значения совпадают почти всюду. Если значения функции f изменить на некотором множестве меры нуль, то множество точек разрыва вновь полученной функции также будет иметь положительную меру.

32. Ограниченная измеримая функция, не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману

Этим свойством обладает функция примера 31.

33. Ограниченная функция, являющаяся пределом монотонной последовательности непрерывных функций, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману. (См. пример 10 гл. 4.)

Представим функцию f примера 31 как предел убывающей последовательности $\{f_n\}$ непрерывных функций следующим образом. Для любого открытого интервала $I=(a, b)$, где $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, и для любого натурального n определим функцию

$$g_{n,I}(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant a, \\ 1, & \text{если } b \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } a+\dfrac{b-a}{2^n} \leqslant x \leqslant b-\dfrac{b-a}{2^n}, \\ \text{линейна}, & \text{если } a \leqslant x \leqslant a+\dfrac{b-a}{2^n}, \\ \text{линейна}, & \text{если } b-\dfrac{b-a}{2^n} \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Если теперь $\{J_n\}$ — последовательность открытых интервалов, удаленных из $[0, 1]$ при построении канторова множества A положительной меры (см. пример 23), то искомая последовательность $\{f_n\}$ определяется так:

$$f_1 \equiv g_{1, J_1},$$
$$f_2 \equiv g_{2, J_1} \cdot g_{2, J_2},$$
$$\cdots$$
$$f_n \equiv g_{n, J_1} \cdot g_{n, J_2} \cdots g_{n, J_n}.$$

[1]) См. введение к гл. 4. — *Прим. перев.*

34. Интегрируемая по Риману функция f и непрерывная функция g, определенные на [0, 1] и такие, что их композиция $f(g(x))$ не интегрируема по Риману на [0, 1] и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману на этом замкнутом интервале. (См. пример 9 гл. 4.)

Представим функцию примера 31 в виде $f(g(x))$. Для этого положим $f(x)=0$ для $0 \leqslant x < 1$ и $f(x)=1$ для $x=1$. Далее положим $g(x)=1$, если $x \in A$, и $g(x)= 1-\frac{1}{2}(b-a)+\left|x-\frac{1}{2}(a+b)\right|$, если x принадлежит какому-либо интервалу $I=(a, b)$, удаленному из [0, 1] при построении A. Функция $g(x)$ непрерывна, ибо для любых x_1 и x_2 из [0, 1] имеет место неравенство $|g(x_1)-g(x_2)| \leqslant |x_1-x_2|$.

Заметим, что функции f_n примера 33 и функцию g примера 34 можно заменить бесконечно дифференцируемыми функциями. Этого можно добиться, если функции $g_{n,I}$ примера 33 и функции, составляющие функцию g примера 34, заменить бесконечно дифференцируемыми. Для этой цели можно использовать функции такого же типа, как и в примере 12 гл. 3.

Наконец, следует отметить, что функции f и g в настоящем примере нельзя поменять местами. Другими словами, всякая непрерывная функция (заданная на компактном интервале) от функции, интегрируемой по Риману, также интегрируема по Риману. (См. [38], стр. 153, упр. 55.)

35. Ограниченная функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману

Определим функцию g для положительных x формулой $g(x) \equiv x^2 \sin(1/x)$. (См. пример 2 гл. 3.) Далее для всякого положительного числа c обозначим через x_c наибольшее положительное число x, не превосходящее c и такое, что $g'(x)=0$. Наконец, для $0 < x \leqslant c$ определим функцию

$$g_c(x) \equiv \begin{cases} g(x), & \text{если } 0 < x \leqslant x_c, \\ g(x_c), & \text{если } x_c \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$$

Пусть A — какое-либо канторово множество положительной меры на $[0, 1]$. Определим функцию f следующим образом: если $x \in A$, то положим $f(x) \equiv 0$; если же x принадлежит какому-либо интервалу $I = (a, b)$, удаленному из $[0, 1]$ при построении A, то положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} g_c(x-a), & \text{если} \quad a < x \leqslant \frac{1}{2}(a+b), \\ g_c(-x+b), & \text{если} \quad \frac{1}{2}(a+b) \leqslant x < b, \end{cases}$$

где $c \equiv \frac{1}{2}(b-a)$.

Если x — какая-либо точка множества A, а y — какая-либо *другая* точка из $[0, 1]$, то либо $f(y) = 0$, либо y принадлежит некоторому удаленному интервалу $I = (a, b)$. В первом случае $|(f(y) - f(x))/(y-x)| = 0 < |y-x|$. Во втором же случае, обозначив через d тот конец интервала (a, b), который ближе к y, имеем при $c \equiv \frac{1}{2}(b-a)$:

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| = \left|\frac{f(y)}{y-x}\right| \leqslant \left|\frac{f(y)}{y-d}\right| = \left|\frac{g_c(|y-d|)}{y-d}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{|y-d|^2}{y-d}\right| = |y-d| \leqslant |y-x|.$$

Следовательно, в обоих случаях $|(f(y) - f(x))/(y-x)| \leqslant$ $\leqslant |y-x|$, и потому $f'(x) = 0$ для каждого $x \in A$.

С другой стороны, если x принадлежит какому-либо удаленному интервалу (a, b), то

$$|f'(x)| \leqslant \left|2z \sin\left(\frac{1}{z}\right) - \cos\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leqslant 3,$$

где z — некоторое число между 0 и 1. Таким образом, f дифференцируема всюду на $[a, b]$ и ее производная f' ограничена на этом интервале.

Наконец, учитывая, что $\overline{\lim\limits_{y \to +0}}\, g'(y) = 1$ (см. введение к гл. 2), заключаем, что для всякой точки x множества A справедливо равенство $\overline{\lim\limits_{y \to x}}\, f'(y) = 1$. Следовательно, функция f' разрывна в каждой точке множества A, т. е. на множестве положительной меры. Таким образом, функция f' удовлетворяет всем требуемым условиям.

Построение, подобное описанному выше, было (по-видимому, впервые) проведено итальянским математиком В. Вольтерра (1860—1940 г.); см. *Giorn. di Battaglini*, **19** (1881), 353—372.

36. Функция, для которой существует несобственный интеграл Римана и не существует интеграл Лебега

Положим $f(x) \equiv \sin x/x$, если $x \neq 0$ и $f(0) \equiv 1$. Тогда несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится (см. [36], стр. 465, а также [52]*, т. II, стр. 569), однако $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\,dx = +\infty$. Это означает, что функция $|f(x)|$ не интегрируема по Лебегу на $[0, +\infty)$, а поэтому не интегрируема и функция $f(x)$.

37. Функция, измеримая по Лебегу и не измеримая по Борелю

Этим условиям удовлетворяет характеристическая функция измеримого по Лебегу неборелевского множества. (См. пример 17.)

38. Измеримая функция $f(x)$ и непрерывная функция $g(x)$, такие, что композиция $f(g(x))$ неизмерима

Применяя обозначения примера 16, положим $E \equiv \psi^{-1}(D)$. Тогда характеристическая функция $f \equiv \chi_E$ множества E измерима, а функция $g \equiv \psi^{-1}$ непрерывна. Однако композиция этих функций $f(g(x))$ неизмерима, поскольку она является характеристической функцией неизмеримого множества D.

Следует заметить, что в этом примере функции f и g нельзя поменять местами. Другими словами, любая непрерывная функция от измеримой функции измерима.

39. Непрерывная монотонная функция $g(x)$ и непрерывная функция $f(x)$, такие, что

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) \neq \int_0^1 f(x)\,g'(x)\,dx$$

Пусть $f(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$, и пусть g — канторова функция примера 15. Тогда интеграл Римана — Стильтьеса (см. [38], стр. 179, а также [33]*, стр. 249) или интеграл Лебега — Стильтьеса (см. [30], [31] и [53]), стоящий в левой части, равен $\varphi(1) - \varphi(0) = 1$, в то время как интеграл Лебега, стоящий в правой части, равен 0, ибо подинтегральная функция почти всюду равна 0.

40. Различные виды сходимости функциональных последовательностей

Пусть функции $f_1, f_2, f_3, \ldots$ заданы и интегрируемы по Лебегу либо на единичном интервале $[0, 1]$, либо на множестве всех действительных чисел $\mathbf{R}$ (в более общем случае эти функции могут быть заданы и интегрируемы по Лебегу на измеримом множестве конечной или бесконечной меры). Тогда существует много способов интерпретации равенства

$$\lim_{n \to +\infty} f_n = f.$$

Мы рассмотрим здесь четыре специальных вида сходимости и укажем включения, которыми они связаны. В тех случаях, когда включения отсутствуют, мы приведем соответствующие контрпримеры.

Пусть одна и та же буква S обозначает либо $[0, 1]$, либо $\mathbf{R}$ в зависимости от того, где заданы рассматриваемые функции. Мы рассмотрим четыре интерпретации упомянутого выше предельного равенства.

(i) С х о д и м о с т ь   п о ч т и   в с ю д у[1]):

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ для почти всех } x \in S.$$

[1]) С этим видом сходимости тесно связана *сходимость всюду* которая является частным случаем сходимости типа (i).

(ii) Сходимость по мере:

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \mu\{x \,|\, |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} = 0.$$

(iii) Сходимость в среднем[1]):

$$\lim_{n\to+\infty} \int_S |f_n(x) - f(x)|\, dx = 0.$$

(iv) Сходимость с интегрируемой мажорантой[2]):

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду и существует интегрируемая по Лебегу функция g, такая, что $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$ для $n = 1, 2, \ldots$ и почти всех $x \in S$.

Сформулируем сначала два утверждения относительно включений, связывающих сходимости видов (i) — (iv). Если мера S конечна, то

$$(\mathrm{iv}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (\mathrm{i}) \\ (\mathrm{iii}) \end{array} \right\} \Rightarrow (\mathrm{ii}).$$

Если же мера S бесконечна, то

$$(\mathrm{iv}) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\mathrm{i}) \\ (\mathrm{iii}) \Rightarrow (\mathrm{ii}). \end{array} \right.$$

(См. [30], [32] и [53].)

Приведем теперь примеры, которые показывают, что других включений, кроме указанных выше, не существует. Все эти примеры, кроме последнего, будут справедливы как для случая конечной, так и для случая бесконечной меры, поскольку все участвующие в них функции равны нулю для $x \in \mathbf{R} \setminus [0,1]$.

---

[1]) Это есть сходимость в банаховом пространстве L^1 всех интегрируемых функций, среди которых отождествлены те, которые совпадают почти всюду. Этот вид сходимости можно обобщить, рассмотрев сходимость в банаховом пространстве L^p измеримых функций, которые интегрируемы вместе с p-й степенью их модуля. (В этом случае также отождествляются функции, совпадающие почти всюду.) Дальнейшие подробности см. в [17], [29], [32] и [53].

[2]) Можно определить еще один вид сходимости, а именно сходимость с интегрируемой мажорантой в L^p; для этого (iii) заменяется сходимостью в L^p и требуется выполнение неравенства $|f_n(x)| \leqslant |g(x)|$, где $g \in L^p$.

(i) $\not\Rightarrow$ (iii). Достаточно положить $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, а

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} n, & \text{если } 0 < x < 1/n, \\ 0, & \text{если } x \in \mathbf{R} \setminus (0,\ 1/n), \end{cases}$$

для $n = 1,\ 2,\ \ldots$.

(i) $\not\Rightarrow$ (iv). В самом деле, так как (iv) $\Rightarrow$ (iii), то требуемое утверждение вытекает из предыдущего.

(iii) $\not\Rightarrow$ (i). Пусть $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$. Представим каждое $n \in \mathbf{N}$ в виде $n = 2^k + m$, где $0 \leqslant m < 2^k$, $k = 0, 1, \ldots$. Тогда k и m однозначно определяются числом n. Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } \dfrac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \dfrac{m+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Тогда $\int\limits_S |f_n(x) - f(x)|\, dx = 2^{-k} \to 0$ при $n \to +\infty$, однако $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$ *не* существует ни для какого $x \in [0,\ 1]$.

(iii) $\not\Rightarrow$ (iv). Так как (iv) $\Rightarrow$ (i), то требуемое утверждение вытекает из предыдущего.

(ii) $\not\Rightarrow$ (i). Воспользуемся примером, опровергающим включение (iii) $\Rightarrow$ (i). Для функций f_n этого примера и для любого положительного ε имеем

$$\mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leqslant 2^{-k} \to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

(ii) $\not\Rightarrow$ (iii). Пусть $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, и пусть для всякого $n \in \mathbf{N}$ числа k и m определены так, как в примере для утверждения (iii) $\not\Rightarrow$ (i). Положим

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 2^k, & \text{если } \dfrac{m}{2^k} \leqslant x \leqslant \dfrac{m+1}{2^k}, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Тогда для любого положительного ε

$$\mu\{x \mid |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\} \leqslant 2^{-k} \to 0 \text{ при } n \to +\infty,$$

однако

$$\int\limits_S |f_n(x) - f(x)|\, dx = 1 \not\to 0 \text{ при } n \to +\infty.$$

(ii) $\not\Rightarrow$ (iv). Так как (iv) $\Rightarrow$ (i) и (iv) $\Rightarrow$ (iii), то требуемое утверждение вытекает из доказанных ранее, а именно из того, что (ii) $\not\Rightarrow$ (i), или того, что (ii) $\not\Rightarrow$ (iii).

Наконец, приведем пример, в котором множество $S \equiv \mathbf{R}$ имеет бесконечную меру.

(i) $\not\Rightarrow$ (ii). Положим $f(x) \equiv 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$ и

$$f_n(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } n \leqslant x \leqslant n+1, \\ 0 & \text{для остальных } x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

41. Две меры μ и ν на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$, такие, что μ абсолютно непрерывна относительно ν, однако не существует функции f, удовлетворяющей равенству $\mu(E) = \int\limits_E f(x)\,d\nu(x)$ для всех $E \in \mathfrak{S}$

Пусть $X \equiv \mathbf{R}$, а $\mathfrak{S}$ — класс всех подмножеств пространства X. Для всякого множества $E \in \mathfrak{S}$ положим

$$\mu(E) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } E \text{ счетно}, \\ +\infty, & \text{если } E \text{ несчетно}, \end{cases}$$

$$\nu(E) \equiv \begin{cases} n, & \text{если } E \text{ состоит из } n \text{ точек}, \ n \geqslant 0, \\ +\infty, & \text{если } E \text{ бесконечно}. \end{cases}$$

Тогда $\nu(E) = 0 \Rightarrow E = \varnothing$ и, следовательно, $\mu(E) = 0$. Таким образом, μ абсолютно непрерывна относительно ν. С другой стороны, если f такова, что

$$\mu(E) = \int\limits_E f(x)\,d\nu(x)$$

для всех множеств E, то это равенство справедливо, в частности, когда $E = \{y\}$ — произвольное одноточечное множество. В этом случае

$$\mu(E) = 0 = \int\limits_E f(x)\,d\nu(x) = f(y).$$

Но это означает, что функция f тождественно равна нулю и, следовательно, $\mu(E) = 0$ для любого $E \in \mathfrak{S}$. (Противоречие.)

10 Зак. 587

Если принять, что $\pm\infty \cdot 0$ равно 0, то справедливо следующее утверждение: *если f — неотрицательная действительнозначная функция в широком смысле, измеримая относительно меры ν на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{S})$, и если*

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, d\nu(x)$$

для всех измеримых множеств E, то μ является мерой на $(X, \mathfrak{S})$, абсолютно непрерывной относительно ν. Предыдущий контрпример показывает, что без ограничений обратная теорема не верна. Теорема Радона — Никодима (см. [53]) указывает ограничения, при которых обратная теорема имеет место.

ГЛАВА 9

ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Введение

В этой главе предполагаются известными понятия непрерывности и дифференцируемости функций двух переменных, а в двух последних примерах, кроме того, предполагается, что читатель знаком с криволинейными интегралами, односвязностью областей и векторным анализом. Если $f(x, y)$ — дифференцируемая функция двух переменных x и y, то ее частные производные мы будем обозначать следующими символами:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x(x, y)=f_1(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}=f_y(x, y)=f_2(x, y),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{xx}(x, y)=f_{11}(x, y), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=f_{xy}(x, y)=f_{12}(x, y), \ldots.$$

Областью называется любое непустое открытое множество R, любые две точки которого можно соединить ломаной линией, целиком лежащей в R.

1. Разрывная функция двух переменных, непрерывная по каждой переменной в отдельности

Пусть функция $f(x, y)$ с областью определения $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ определена следующим образом:

$$f(x, y)\equiv\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=y=0.\end{cases}$$

Тогда f разрывна в начале координат, поскольку в произвольно малой окрестности точки $(0, 0)$ существуют точки вида (a, a), в которых значение функции равно $1/2$. С другой стороны, для всякого фиксированного значения y (равного нулю или отличного от нуля) функция $g(x)\equiv f(x, y)$

является всюду непрерывной функцией переменной x. По той же причине $f(x, y)$ является непрерывной функцией от y для всякого фиксированного значения x.

2. Функция двух переменных, не имеющая предела в начале координат, но имеющая равный нулю предел при приближении к началу координат по любой прямой

Пусть функция $f(x, y)$ с областью определения $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ определена следующим образом:

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

и пусть L — произвольная прямая, проходящая через начало координат. Если L — какая-либо координатная ось, то функция $f(x, y)$ на L тождественно равна нулю и, следовательно, имеет предел, равный 0, когда $(x, y) \to (0, 0)$ вдоль L. Если же L — прямая вида $y = mx$, то на L при $x \neq 0$ имеем

$$f(x, mx) = \frac{mx^3}{x^4 + m^2 x^2} = \frac{mx}{x^2 + m^2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x, mx) = 0$. Однако, несмотря на это, функция $f(x, y)$ разрывна в точке $(0, 0)$, ибо в произвольно малой окрестности точки $(0, 0)$ существуют точки вида (a, a^2), в которых функция f принимает значение, равное $1/2$.

3. Обобщение предыдущего примера

Пусть функция $f(x, y)$ с областью определения $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ задана формулой

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} \dfrac{e^{-1/x^2} y}{e^{-2/x^2} + y^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Далее пусть C — проходящая через начало координат кривая вида $x^m = (y/c)^n$, т. е. $y = cx^{m/n}$, где m и n — взаимно простые натуральные числа, а c — постоянная, отличная от нуля (в случае четного n предполагается, что $x \geqslant 0$).

Тогда, если точка (x, y) приближается к началу координат вдоль C, то

$$\lim_{x\to 0} f(x, cx^{m/n}) = \lim_{x\to 0} \frac{ce^{-1/x^2}x^{-m/n}}{e^{-2/x^2}x^{-2m/n}+c^2} = 0.$$

(См. пример 10 гл. 3.) Но несмотря на то что предел функции $f(x, y)$, когда точка (x, y) стремится к началу координат вдоль любой алгебраической кривой вида $y = cx^{m/n}$, равен нулю, функция $f(x, y)$ разрывна в начале координат. В самом деле, в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки вида $(a, e^{-1/a^2})$, в которых функция f принимает значение, равное $1/2$.

4. Разрывная (и, следовательно, недифференцируемая) функция двух переменных, имеющая всюду частные производные первого порядка

Этим свойством обладает каждая из функций, рассмотренных в трех предыдущих примерах.

5. Функции f, для которых существуют и равны лишь два из следующих пределов:

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y), \quad \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y), \quad \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y)$$

Обозначим вышеуказанные пределы через (i), (ii) и (iii) соответственно. Каждая из следующих ниже функций такова, что для нее указанный предел не существует, но два других предела существуют и равны между собой.

(i) Пример 1, где $(a, b) = (0, 0)$.

(ii) $$f(x, y) \equiv \begin{cases} y + x\sin(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

при этом $(a, b) = (0, 0)$.

(iii) $$f(x, y) \equiv \begin{cases} x + y\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

при этом $(a, b) = (0, 0)$.

В примерах (ii) и (iii) имеем

$$|f(x, y)| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2(x^2 + y^2)^{1/2}$$

и, следовательно, $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y) = 0$. Тот из повторных пределов, который существует в примерах (ii) или (iii), равен 0.

Следует заметить, что если оба предела (i) и (ii) существуют, то они должны быть равны. То же самое справедливо и для пределов (i) и (iii). (См. [36], стр. 184, а также [52]*, т. I, стр. 361.)

6. Функции f, для которых существует лишь один из следующих пределов:

$$\lim_{(x, y)\to(a, b)} f(x, y), \quad \lim_{x\to a} \lim_{y\to b} f(x, y), \quad \lim_{y\to b} \lim_{x\to a} f(x, y)$$

Как и в примере 5, обозначим три вышеуказанных предела через (i), (ii) и (iii) соответственно. Каждая из следующих ниже функций такова, что указанный предел существует, а два других нет:

$$\text{(i)}\ f(x, y) \equiv \begin{cases} x \sin(1/y) + y \sin(1/x), & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0, \end{cases}$$

при этом $(a, b) = (0, 0)$.

$$\text{(ii)}\ f(x, y) \equiv \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} + y \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

при этом $(a, b) = (0, 0)$.

$$\text{(iii)}\ f(x, y) \equiv \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} + x \sin(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

при этом $(a, b) = (0, 0)$.