

7. Функция  $f$ , для которой пределы  $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$  и  $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$  существуют, но не равны между собой

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x^2} \right) = 1,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \left( -\frac{y^2}{y^2} \right) = -1.$$

8. Функция  $f(x, y)$ , для которой предел  $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = g(x)$  существует равномерно относительно  $x$ , предел  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = h(y)$  существует равномерно относительно  $y$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} h(y)$ , однако предел  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$  не существует

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } xy \neq 0, \\ 0, & \text{если } xy = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$h(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

причем оба предельных соотношения выполняются равномерно относительно всей системы действительных чисел. Но так как в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки, в которых  $f$  равна 0, и точки, в которых  $f$  равна 1, то функция  $f(x, y)$  не имеет предела при  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

Следует заметить, что, согласно теореме Мура — Осгуда (см. [38], стр. 313), контрпример указанного вида невозможен, если из области определения функции  $f$  исключить точки вида  $(0, y)$  и точки вида  $(x, 0)$ .

### 9. Дифференцируемая, но не непрерывно дифференцируемая функция двух переменных

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + y^2 \sin(1/y), & \text{если } xy \neq 0, \\ x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \text{ а } y = 0, \\ y^2 \sin(1/y), & \text{если } x = 0, \text{ а } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда обе частные производные

$$f_x(x, y) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin(1/y) - \cos(1/y), & \text{если } y \neq 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

разрывны в начале координат, и, следовательно, функция  $f$  не является непрерывно дифференцируемой в этой точке. Однако  $f$  дифференцируема всюду. Например,  $f$  дифференцируема в точке  $(0, 0)$ , поскольку при  $h^2 + k^2 \neq 0$  приращение  $f(h, k) - f(0, 0)$  можно представить в виде

$$f_x(0, 0)h + f_y(0, 0)k + \varepsilon_1(h, k)h + \varepsilon_2(h, k)k,$$

где

$$\lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_1(h, k) = \lim_{(h, k) \rightarrow (0, 0)} \varepsilon_2(h, k) = 0.$$

В самом деле, это представление имеет такой вид:

$$f(h, k) - f(0, 0) = \begin{cases} \left(h \sin \frac{1}{h}\right)h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right)k, & \text{если } hk \neq 0, \\ \left(h \sin \frac{1}{h}\right)h + 0 \cdot k, & \text{если } h \neq 0, \text{ а } k = 0, \\ 0 \cdot h + \left(k \sin \frac{1}{k}\right)k, & \text{если } h = 0, \text{ а } k \neq 0, \end{cases}$$

## 10. Дифференцируемая функция, имеющая неравные смешанные частные производные второго порядка

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f_y(x, 0) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 0, \\ \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k)}{k} = 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

$$f_x(0, y) = \begin{cases} -y, & \text{если } y \neq 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0)}{h} = 0, & \text{если } y = 0. \end{cases}$$

Следовательно, в начале координат имеем

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1,$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_x(0, k) - f_x(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{-k}{k} = -1.$$

Функция  $f$  непрерывно дифференцируема, так как обе частные производные  $\partial f / \partial x$  и  $\partial f / \partial y$  непрерывны всюду. В частности,  $\partial f / \partial x$  непрерывна в начале координат, поскольку для  $x^2 + y^2 \neq 0$  имеем

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| = \frac{|x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5|}{(x^2 + y^2)^2} \leqslant \frac{6(x^2 + y^2)^{5/2}}{(x^2 + y^2)^2} = 6(x^2 + y^2)^{1/2}.$$

Настоящий пример станет невозможным, если предположить непрерывность смешанных частных производных  $f_{xy}$  и  $f_{yx}$  в некоторой окрестности начала координат. В самом деле, имеет место теорема (см. [36], стр. 263, а также [52]\*, т. I, стр. 405): если функция  $f$  имеет частные производные  $f_x$  и  $f_y$  в некоторой области  $R$  и если смешанная производная  $f_{xy}$  (соответственно  $f_{yx}$ ) существует и непрерывна в некоторой точке  $(a, b)$  области  $R$ , то смешанная производная  $f_{yx}$  (соответственно  $f_{xy}$ ) также существует в точке  $(a, b)$ , причем в этой точке  $f_{xy} = f_{yx}$ .

**11. Непрерывно дифференцируемая функция  $f$  двух переменных  $x$  и  $y$  и область  $R$  на плоскости, такие, что  $df/dy = 0$  в области  $R$ , но функция  $f$  зависит от  $y$  в этой области**

Пусть  $L$  — луч (т. е. замкнутая полупрямая) в плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , т. е.

$$L = \{(x, y) | x \geq 0, y = 0\},$$

а  $R$  — область  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus L$ . Тогда функция

$$f(x, y) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x > 0 \text{ и } y > 0, \\ 0 & \text{в остальных точках } (x, y) \in R \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в области  $R$ ; более того, она имеет непрерывные частные производные второго порядка. (Если же  $x^3$  заменить на  $e^{-1/x^2}$ , то  $f$  будет иметь непрерывные частные производные всех порядков.) И хотя частная производная первого порядка  $f_2(x, y)$  функции  $f$  тождественно равна нулю в области  $R$ , функция  $f$  зависит от  $y$ ; например,  $f(1, 1) = 1$ , а  $f(1, -1) = 0$ . Можно показать, что функция, имеющая частные производные первого порядка, которые тождественно равны нулю в некоторой области  $R$ , постоянна в этой области. (См. [36], стр. 280, а также [52]\*, т. III, стр. 50—55.) Настоящий пример показывает, что следующее рассуждение при доказательстве этого факта было бы ошибочным: „так как  $df/dx = 0$ , то  $f$  не зависит от  $x$ ; так как  $df/dy = 0$ , то  $f$  не зависит от  $y$ ; следовательно,  $f$  не зависит ни от  $x$ , ни от  $y$  и поэтому должна быть постоянной“. Отметим, что в случае когда каждая прямая, параллельная оси  $y$ , образует в пересечении с областью  $R$  интервал, утверждение настоящего контрпримера становится невозможным. (См. [36], стр. 228, упр. 32.)

**12. Локально однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, не являющаяся однородной**

Функция  $f(x, y)$  называется *однородной степени  $n$*  в области  $R$ , если для всех  $x, y$  и положительных  $\lambda$ , таких, что точки  $(x, y)$  и  $(\lambda x, \lambda y)$  принадлежат  $R$ , имеет место равенство  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ . Функция  $f(x, y)$  называется

локально однородной степени  $n$  в области  $R$ , если она является однородной степени  $n$  в некоторой окрестности каждой точки области  $R$ .

Пусть  $L$  — луч (т. е. замкнутая полупрямая) в плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ :

$$L = \{(x, y) | x = 2, y \geq 0\},$$

а  $R$  — область  $(\mathbf{R} \times \mathbf{R}) \setminus L$ . Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} y^4/x, & \text{если } x > 2 \text{ и } y > 0, \\ y^3 & \text{в остальных точках } (x, y) \in R \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в  $R$  (на самом деле  $f$  имеет непрерывные частные производные второго порядка). Так как для всякой точки  $(x, y) \in R$  при  $\lambda$ , достаточно близких к 1, справедливо равенство  $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^3 f(x, y)$ , то  $f$  локально однородна степени 3 в области  $R$ . Однако  $f$  не является однородной степени 3 в области  $R$ , поскольку для точки  $(x, y) = (1, 2)$  и  $\lambda = 4$  имеем  $f(x, y) = 8$ , а  $f(4x, 4y) = f(4, 8) = 1024 \neq 4^3 \cdot 8$ . Вместе с тем функция  $f$  не является однородной степени  $n$  ни при каком  $n \neq 3$ , так как в противном случае она была бы локально однородной степени  $n$ , что, очевидно, невозможно.

**13. Дифференцируемая функция двух переменных, не имеющая экстремума в начале координат и такая, что ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке**

Функция

$$f(x, y) = (y - x^2)(y - 3x^2)$$

не имеет локального экстремума в начале координат, так как в произвольно малой окрестности начала координат существуют точки вида  $(0, b)$ , в которых  $f$  положительна, и точки вида  $(a, 2a^2)$ , в которых  $f$  отрицательна. Рассмотрим сужение функции  $f$  на ось  $x$ . Мы получим функцию  $3x^4$ , которая имеет строгий абсолютный минимум в точке  $x = 0$ . Рассмотрим, далее, сужение  $f$  на ось  $y$ . Получим функцию  $y^2$ , которая имеет строгий абсолютный минимум в точке  $y = 0$ .

Наконец, рассмотрим сужение  $f$  на прямую  $y = mx$ , проходящую через начало координат, где  $0 < |m| < +\infty$ . Получим следующую функцию параметра  $x$ :

$$\begin{aligned} g(x) \equiv f(x, mx) &= (mx - x^2)(mx - 3x^2) = \\ &= m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4. \end{aligned}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , так как  $g'(0) = 0$ , а  $g''(0) = 2m^2 > 0$ .

#### 14. Обобщение предыдущего примера

Функция

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} (y - e^{-1/x^2})(y - 3e^{-1/x^2}), & \text{если } x \neq 0, \\ y^2, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не имеет локального экстремума в начале координат. (См. пример 13.) Рассмотрим сужение  $f$  на алгебраическую кривую  $y = cx^{m/n}$ , где  $m$  и  $n$  — взаимно простые натуральные числа, а  $c$  — постоянная, отличная от нуля (в случае четного  $n$  предполагается, что  $x \geq 0$ ). Мы получим следующую функцию параметра  $x$ :

$$\begin{aligned} g(x) = f(x, cx^{m/n}) &= (cx^{m/n} - e^{-1/x^2})(cx^{m/n} - 3e^{-1/x^2}) = \\ &= x^{2m/n}[c^2 - 4ce^{-1/x^2}x^{-m/n} + 3e^{-2/x^2}x^{-2m/n}]. \end{aligned}$$

Эта функция имеет строгий локальный минимум в точке  $x = 0$ , поскольку множитель  $x^{2m/n}$  положителен при  $x \neq 0$ , а функция, заключенная в квадратные скобки, имеет положительный предел  $c^2$  при  $x \rightarrow 0$ .

**15. Функция  $f$ , для которой  $\frac{d}{dx} \int\limits_a^b f(x, y) dy \neq \int\limits_a^b \left[ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy$ ,**

хотя оба интеграла существуют в смысле Римана

Функция

$$f(x, y) \equiv \begin{cases} \frac{x^3}{y^2} e^{-x^2/y}, & \text{если } y > 0, \\ 0, & \text{если } y = 0, \end{cases}$$

определенна в замкнутой верхней полуплоскости  $y \geq 0$ . Для любого фиксированного значения  $y$  эта функция является непрерывной функцией переменного  $x$ , а для любого фиксиру-

ванного значения  $x$  — непрерывной функцией переменного  $y$ . Однако как функция двух переменных она разрывна в точке  $(0, 0)$  (в этом можно убедиться, полагая  $y = x^2$ ). Интегрируя, получаем

$$g(x) \equiv \int_0^1 f(x, y) dy = xe^{-x^2}$$

для всякого действительного  $x$  (включая  $x = 0$ ), и, следовательно,  $g'(x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$  для всякого действительного  $x$  (включая  $x = 0$ ). Если  $x \neq 0$ , то

$$\int_0^1 f_1(x, y) dy = \int_0^1 e^{-x^2/y} \left( \frac{3x^2}{y^2} - \frac{2x^4}{y^3} \right) dy = e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Если же  $x = 0$ , то, принимая во внимание, что  $f_1(0, y) = 0$  для всех  $y$  (включая  $y = 0$ ), имеем

$$\int_0^1 f_1(0, y) dy = \int_0^1 0 dy = 0.$$

Следовательно,

$$g'(0) = 1 \neq \int_0^1 f_1(0, y) dy = 0.$$

Отметим, что все интегралы, которые встречались в данном примере, — собственные, так как подинтегральные функции являются непрерывными функциями переменной интегрирования.

- 16. Функция  $f$ , для которой  $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy$ , хотя оба интеграла существуют в смысле Римана**

Положим

$$f(x, y) = \begin{cases} y^{-2}, & \text{если } 0 < x < y < 1, \\ -x^{-2}, & \text{если } 0 < y < x < 1, \\ 0 & \text{в остальных точках} \\ & \text{квадрата } 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1. \end{cases}$$

Для  $0 < y < 1$  имеем

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^y \frac{dx}{y^2} - \int_y^1 \frac{dx}{x^2} = 1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 1 dy = 1.$$

Аналогично для  $0 < x < 1$  имеем

$$\int_0^1 f(x, y) dy = - \int_0^x \frac{dy}{x^2} + \int_x^1 \frac{dy}{y^2} = -1$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

17. Двойной ряд  $\sum_{m,n} a_{mn}$ , для которого  $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$

Пусть  $(a_{mn})$ , где  $m$  обозначает номер строки, а  $n$  — номер столбца, — следующая бесконечная матрица (см. пример 20 гл. 6):

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \dots \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \dots \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \dots \end{array} \right]$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 2^{-m} + 2^{-m-1} + \dots = 2^{-m+1}, \quad m = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} = 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \dots = 2.$$

Аналогично

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2^{-n+1}) = -2.$$

(См. [22], стр. 109.)

**18. Дифференциал  $P dx + Q dy$  и плоская область  $R$ , в которой  $P dx + Q dy$  является локально полным, но не полным дифференциалом**

Выражение

$$P dx + Q dy,$$

где  $P$  и  $Q$  — функции, непрерывные в некоторой области  $R$  плоскости  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ , называется полным дифференциалом в  $R$ , если существует дифференцируемая функция  $\varphi$ , определенная в  $R$  и такая, что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$$

всюду в области  $R$ . Выражение  $P dx + Q dy$  называется локально полным дифференциалом в области  $R$ , если оно является полным дифференциалом в некоторой окрестности каждой точки области  $R$ . Выражение  $P dx + Q dy$  является полным дифференциалом в некоторой области  $R$  тогда и только тогда, когда для всякой кусочно гладкой замкнутой кривой  $C$ , лежащей в этой области, справедливо равенство

$$\int_C P dx + Q dy = 0.$$

(См. [36], стр. 587, а также [52]\*, т. III, стр. 50.) Выражение  $P dx + Q dy$ , где  $P$  и  $Q$  — непрерывно дифференцируемые функции, является локально полным дифференциалом

в некоторой области  $R$  в том и только в том случае, если в каждой точке области  $R$  справедливо равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Выражение

$$P dx + Q dy = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

является локально полным дифференциалом всюду в „проколотой плоскости“

$$R \equiv \{(x, y) | x^2 + y^2 > 0\},$$

так как

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

если  $x^2 + y^2 > 0$ . С другой стороны,  $P dx + Q dy$  не является полным дифференциалом в  $R$ . В самом деле, если  $C$  — единичная окружность  $x = \cos \theta$ ,  $y = \sin \theta$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , то

$$\int_C P dx + Q dy = \int_0^{2\pi} [(-\sin \theta)(-\sin \theta) + \cos^2 \theta] d\theta = 2\pi \neq 0.$$

Следует заметить, что если область  $R$  односвязная (см. [36], стр. 598), то  $P dx + Q dy$  будет полным дифференциалом в  $R$  тогда и только тогда, когда оно будет локально полным дифференциалом в  $R$ . (См. [36], стр. 601.)

## 19. Соленоидальное векторное поле, заданное в односвязной области и не имеющее векторного потенциала

Пусть  $P$ ,  $Q$  и  $R$  — непрерывно дифференцируемые функции в некоторой области  $W$  трехмерного евклидова пространства. Векторное поле (см. [36], стр. 568, а также [52]\*, т. III, стр. 367)  $\vec{Pi} + \vec{Qj} + \vec{Rk}$  называется соленоидальным в области  $W$ , если его дивергенция тождественно равна нулю в этой области:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

Если векторное поле  $\vec{F}$  является ротором (см. [36], стр. 572) некоторого векторного поля  $\vec{G}$  в области  $W$ , то векторное поле  $\vec{G}$  называется векторным потенциалом для  $\vec{F}$ . Так как дивергенция ротора тождественно равна нулю (см. [36], стр. 572, а также [52] \*, т. III, стр. 375), то любое векторное поле, имеющее векторный потенциал, является соленоидальным. Однако обратное утверждение, как показывает следующий пример, неверно. Положим

$$\vec{F} \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k)$$

в области

$$W \equiv \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 > 0\}.$$

Тот факт, что  $\vec{F}$  является соленоидальным полем, проверяется непосредственным дифференцированием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} x\} + \frac{\partial}{\partial y} \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} y\} + \dots = \\ = (x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} [(-2x^2 + y^2 + z^2) + \\ + (x^2 - 2y^2 + z^2) + \dots] = 0. \end{aligned}$$

Наконец, чтобы показать, что поле  $\vec{F}$  не имеет никакого векторного потенциала  $\vec{G}$ , рассмотрим сферу  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Если  $\vec{n}$  обозначает единичный вектор внешней нормали к этой сфере  $S$ , то поверхностный интеграл  $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$

равен

$$\begin{aligned} \iint_S \{(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k) \times \\ \times (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} (\vec{x}i + \vec{y}j + \vec{z}k)\} dS = \iint_S 1 dS = 4\pi. \end{aligned}$$

Но, если бы поле  $\vec{F}$  было ротором некоторого векторного потенциала, то по теореме Стокса (см. [36], стр. 636, 637, а также [52] \*, т. III, стр. 298) поверхностный интеграл

$\int \int_S \vec{F} n dS$  по замкнутой поверхности  $S$  должен был бы обратиться в нуль. Отметим, что область  $W$  односвязна. (См. [36], стр. 639, 640.)

Односвязность области можно понимать следующим образом: всякую простую замкнутую кривую, лежащую в этой области, можно стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области. В случае „проколотой пространственной области“  $W$  данного примера всякую простую замкнутую кривую, не проходящую через начало координат, можно стянуть в точку в этой области. Для области  $W$  причина того патологического свойства, которое наблюдается в настоящем контрпримере, состоит в том, что не все сферические поверхности — поверхности „типа сферы“ — можно стянуть в точку, не выходя за пределы области  $W$ .

## ГЛАВА 10

### МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ

#### Введение

В этой главе предполагается, что читатель знаком с элементами топологии евклидовой плоскости, включая понятия ограниченных, открытых, замкнутых, компактных, всюду плотных и нигде не плотных множеств. Некоторые другие понятия определяются ниже. Во всех случаях в качестве пространства рассматривается евклидова плоскость  $E_2$ .

Расстояние  $d(A, B)$  между двумя непустыми множествами  $A$  и  $B$  определяется формулой

$$d(A, B) \equiv \inf \{d(p, q) | p \in A, q \in B\},$$

где  $d(p, q) = [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]^{1/2}$  — расстояние между точками  $p = (x_1, y_1)$  и  $q = (x_2, y_2)$ . Таким образом, расстояние между двумя множествами всегда неотрицательно. Если множества имеют общую точку, то оно равно нулю. Однако расстояние между непересекающимися множествами также может быть равно нулю. Если же множества не пересекаются и компактны, то расстояние между ними положительно. (См. [36], стр. 200, упр. 17.) Диаметр  $\delta(A)$  непустого множества  $A$  определяется формулой

$$\delta(A) \equiv \sup \{d(p, q) | p \in A, q \in A\}.$$

Диаметр множества всегда неотрицателен и является конечным тогда и только тогда, когда  $A$  ограничено. Если  $A$  компактно, то существуют две точки множества  $A$ , расстояние между которыми равно диаметру  $A$ . (См. [36], стр. 200, упр. 18.)

Замкнутым кругом называется множество вида

$$\{(x, y) | (x - h)^2 + (y - k)^2 \leq r^2\},$$

где  $(h, k)$  — некоторая точка, а  $r$  — положительное число. Если в этом определении неравенство  $\leq$  заменить строгим

неравенством  $<$ , то мы получим определение открытого к уга.

Два непустых множества  $A$  и  $B$  отделены, если они не пересекаются и ни одно из них не содержит предельных точек другого:  $A \cap \bar{B} = \bar{A} \cap B = \emptyset$ . Непустое множество  $E$  называется связным, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых отделенных множеств  $A$  и  $B$ . Говорят, что множество, содержащее более одной точки, вполне несвязно, если у него нет других связных подмножеств, кроме одноточечных множеств. Множество  $A$  называется локально связным, если для любой точки  $p \in A$  и любой окрестности  $N$  этой точки существует такая окрестность  $M$  точки  $p$ , что всякая пара точек  $M$  принадлежит некоторому связному подмножеству из  $N^1$ .

Любое непрерывное отображение замкнутого интервала в  $E_2$  или множество значений этого отображения называется дугой (в качестве интервала можно взять единичный интервал  $[0, 1]$ ). В последнем случае, когда дуга рассматривается как точечное множество, соответствующее отображение называется параметризацией дуги. Если отображение имеет вид  $f(t) = (x(t), y(t))$ , то функции  $x(t)$  и  $y(t)$  называют параметризующими функциями отображения. Пусть  $f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , — некоторая дуга и  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ ; тогда ломаная, составленная из отрезков  $f(a_0)f(a_1)$ ,  $f(a_1)f(a_2)$ ,  $\dots$ ,  $f(a_{n-1})f(a_n)$ , называется ломаной, вписанной в данную дугу, а точная верхняя грань длин

$$d(f(a_0), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \dots + d(f(a_{n-1}), f(a_n))$$

по всем вписанным ломаным называется длиной данной дуги. Дуга называется спрямляемой, если ее длина конечна. Для того чтобы дуга была спрямляемой, необходимо и достаточно, чтобы обе ее параметризующие функции были функциями ограниченной вариации. (См. [38], стр. 353, упр. 27.) Дуга  $f(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , называется замкнутой кривой, если  $f(a) = f(b)$ .

Простая дуга  $f(t)$  определяется взаимно однозначным отображением. В этом случае обратное отображение также непрерывно, а исходное отображение есть гомеоморфизм.

<sup>1</sup>) Здесь должна идти речь об окрестностях и связности на множестве  $A$  (см. [54], стр. 171). — Прим. ред.

(См. [36], стр. 240.) Если функция  $y = g(x)$  непрерывна на  $[a, b]$ , то ее график является простой дугой (с параметризацией  $x = t$ ,  $y = g(t)$ ,  $t \in [a, b]$ ). Простой замкнутой кривой называется дуга  $f(t)$ , такая, что если область определения  $f$  есть замкнутый интервал  $[a, b]$ , то  $f(t_1) = f(t_2)$  лишь в том случае, когда  $t_1 = t_2$  или  $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$ . Иными словами, простой замкнутой кривой называется всякий гомеоморфный образ окружности.

Областью называется связное открытое множество. Согласно теореме Жордана, дополнение всякой простой замкнутой кривой  $C$  состоит из двух непересекающихся областей, для каждой из которых  $C$  служит границей (см. [34]). Жордановой областью называется всякая область, границей которой служит некоторая простая замкнутая кривая  $C$ . В противном случае говорят, что область является неожордановой.

Если  $\{C_n\}$  — убывающая последовательность непустых компактных множеств ( $C_n \supset C_{n+1}$  для  $n = 1, 2, \dots$ ), то существует по крайней мере одна точка, принадлежащая каждому  $C_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; иными словами, пересечение множеств  $C_n$  непусто, т. е.  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n = \emptyset$ . (См. [38], стр. 201, упр. 30.)

Множество  $A$  называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки  $A$ , целиком лежит в  $A$ . (Одноточечные множества следует рассматривать как частный случай отрезка.) Так как всякое пересечение выпуклых множеств выпукло и так как вся плоскость также является выпуклым множеством, то всякое выпуклое множество на плоскости содержится в некотором „наименьшем выпуклом множестве“, а именно в пересечении *всех* выпуклых множеств, содержащих данное множество. Это наименьшее выпуклое множество называют выпуклой оболочкой данного множества. Замыкание выпуклой оболочки множества является наименьшим замкнутым выпуклым множеством, содержащим данное множество. (См. [38], стр. 332, упр. 39.)

Говорят, что отображение открыто, если образ всякого открытого множества из его области определения является открытым множеством. Отображение называется замкнутым, если образ всякого замкнутого множества из его области определения является замкнутым множеством.

В некоторых примерах данной главы предполагается, что читатель знаком с мерой и интегралом Лебега на плоскости. По теории интеграла Лебега в библиографии указана литература, которую мы цитировали в гл. 8.

**1. Два непересекающихся замкнутых множества, расстояние между которыми равно нулю**

Положим  $F_1 \equiv \{(x, y) | xy = 1\}$ ,  $F_2 \equiv \{(x, y) | y = 0\}$  (т. е.  $F_2$  есть ось  $x$ ). Тогда  $F_1$  и  $F_2$  замкнуты и не пересекаются. Однако для любого  $\varepsilon > 0$  существуют две точки  $(2/\varepsilon, \varepsilon/2)$  и  $(2/\varepsilon, 0)$ , принадлежащие  $F_1$  и  $F_2$  соответственно, расстояние между которыми  $\frac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon$ .

**2. Ограниченнное множество на плоскости, для которого не существует минимального замкнутого круга, содержащего это множество**

Минимальным замкнутым кругом, содержащим данное ограниченное плоское множество  $A$ , называется замкнутый круг, содержащий  $A$  и содержащийся в любом замкнутом круге, который содержит  $A$ . Любое двухточечное множество не имеет минимального круга. Однако в противоположность этому всякое непустое ограниченное плоское множество содержится в некотором замкнутом круге *минимального радиуса*. Кроме того, любое непустое множество  $A$  на плоскости содержится в некотором минимальном замкнутом выпуклом множестве, а именно в замыкании своей выпуклой оболочки, которая содержится во всяком выпуклом замкнутом множестве, содержащем  $A$ . В одномерном пространстве  $\mathbf{R}$  каждое непустое ограниченное множество содержится в некотором минимальном замкнутом интервале.

**3. „Тонкие“ связные множества, не являющиеся простыми дугами**

В данном случае слово „тонкие“ означает „нигде не плотные на плоскости“.

*Первый пример.* Множество

$$S_1 \equiv \{(x, y) | y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

не является простой дугой, потому что оно не компактно ( $\{0\} \times [-1, 1] \subset \bar{S}_1$ ).

*Второй пример.* Пусть  $S_1$  — множество из первого примера. Положим

$$S_2 \equiv \bar{S}_1 = \{(x, y) | y = \sin(1/x), 0 < x \leq 1\} \cup (\{0\} \times [-1, 1]).$$

Тогда, хотя  $S_2$  и компактно, но удаление произвольного множества точек из отрезка  $\{0\} \times [-1, 1]$  не нарушает связности  $S_2$ . В примере 11 будет показано, что множество  $S_2$  настоящего примера не является дугой. Далее, в примере 24, мы рассмотрим связное множество на плоскости, которое становится *вполне несвязным* при удалении из него всего лишь одной точки.

#### 4. Два непересекающихся плоских контура, содержащихся в квадрате и соединяющих его противоположные вершины

В этом примере под „контуром“ понимается нигде не плотное связное множество. В качестве квадрата возьмем  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , а исковые „контуры“ определим следующим образом (см. рис. 7):

$$\begin{aligned} C_1 \equiv & \left\{ (x, y) | y = \frac{7}{8}x - \frac{1}{8}, -1 \leq x \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | y = \frac{1}{2} \sin(\pi/2x) + \frac{1}{4}, 0 < x < 1 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | x = 1, \frac{3}{4} \leq y \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 \equiv & \left\{ (x, y) | y = -\frac{7}{8}x + \frac{1}{8}, -1 \leq x \leq 0 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | y = \frac{1}{2} \sin(\pi/2x) - \frac{1}{4}, 0 < x < 1 \right\} \cup \\ & \cup \left\{ (x, y) | x = 1, -1 \leq y \leq \frac{1}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Тогда  $C_1$  соединяет точки  $(-1, -1)$  и  $(1, 1)$ , а  $C_2$  — точки  $(-1, 1)$  и  $(1, -1)$ , причем  $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ .

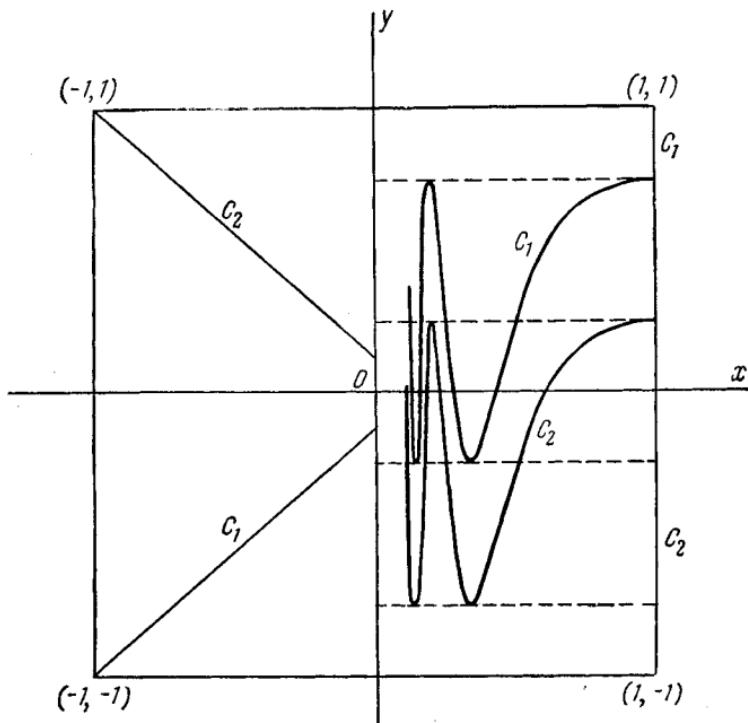


Рис. 7.

### 5. Отображение интервала $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$

Пусть  $t \in [0, 1]$ , и пусть  $0, t_1t_2t_3 \dots$  — двоичное разложение  $t$ . Для того чтобы разложение было однозначным, мы будем рассматривать лишь разложения, содержащие бесконечное множество нулей. Отображение  $f$  определим так: если  $t \in [0, 1]$ , то ее образом является точка  $(x, y)$  единичного квадрата  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ , где

$$x \equiv 0, t_1t_3t_5 \dots, \quad y \equiv 0, t_2t_4t_6 \dots$$

Если же  $t = 1$ , положим  $f(t) \equiv (1, 1)$ . Нетрудно видеть, что  $f$  отображает  $[0, 1]$  на  $S$  однозначно, но не взаимно однозначно. Например, точка  $(0, 1; 0, 1)$  является образом трех

различных точек:  $0,11$ ,  $0,100101010101\dots$  и  $0,011010101\dots$  (и только этих точек).

Отображение  $f$  не является непрерывным. Например, если  $\{t_n\}$  — последовательность точек

$$0,00111, \quad 0,001111, \quad 0,00111111, \quad 0,001111111, \dots$$

и если  $(x_n, y_n) \equiv f(t_n)$ , то последовательности  $\{x_n\}$  и  $\{y_n\}$  совпадут с последовательностью

$$0,01, \quad 0,011, \quad 0,0111, \quad 0,01111, \dots$$

Тогда  $t_n \rightarrow 0,01$ ,  $(x_n, y_n) \rightarrow (0,1; 0,1)$ , в то время как  $f(0,01) = (0,0; 0,1) \neq (0,1; 0,1)$ . Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) \neq f\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n\right).$$

В качестве упражнения читателю предлагается доказать, что отображение  $f$  не является ни открытым (образ открытого интервала  $(0,101; 0,111)$  содержит точку  $(0,1; 0,1)$ , которая, однако, не будет внутренней точкой образа), ни замкнутым (точка  $(0,1; 0,1)$  не принадлежит образу замкнутого интервала  $[0,001; 0,01]$ , но будет предельной для этого образа).

## 6. Кривая Пеано на плоскости

Кривой Пеано мы называем дугу, лежащую в евклидовом пространстве, размерность которого больше единицы, и имеющую непустое ядро в этом пространстве (эта кривая *не* является нигде не плотной). В 1890 г. итальянский математик Дж. Пеано (1858—1932 г.) поразил математический мир первым примером подобной кривой. Ниже мы приводим описание (данное в 1891 г. немецким математиком Д. Гильбертом (1862—1943 г.)) кривой, которая заполняет единичный квадрат  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ . Подобным же образом можно описать и многомерный аналог этого примера.

Как видно из рис. 8, идея построения состоит в том, чтобы разбить  $S$  и единичный интервал  $I = [0, 1]$  на  $4^n$  равных замкнутых квадратов и подинтервалов соответственно и установить соответствие между этими квадратами и подинтервалами так, чтобы сохранялось отношение включения (т. е. на каждой стадии разбиения, если некоторый квадрат

соответствует некоторому интервалу, то его подквадраты соответствуют подинтервалам указанного интервала).

Определим теперь непрерывное отображение  $f$  интервала  $I$  на  $S$ : если  $x \in I$ , то на каждой стадии разбиения  $x$  принадлежит по крайней мере одному замкнутому подинтервалу. Если этих подинтервалов два, то выберем один из них. Ему соответствует некоторый квадрат. Таким образом, мы получим убывающую последовательность замкнутых квадратов, соответствующих некоторой убывающей последовательности

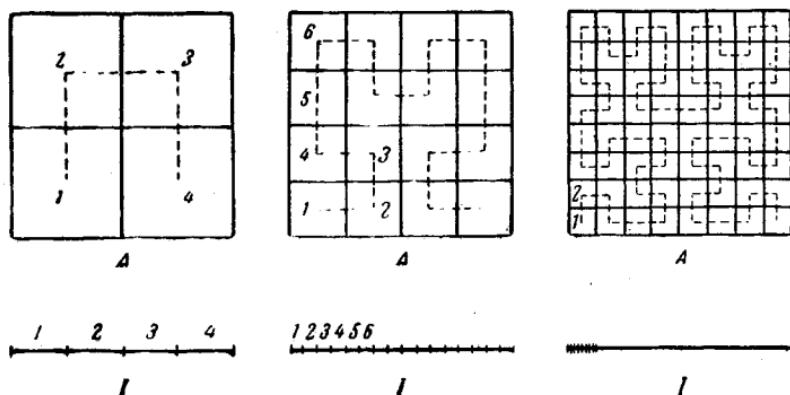


Рис. 8.

замкнутых интервалов. Эта последовательность замкнутых квадратов обладает тем свойством, что существует и притом только одна<sup>1)</sup> точка, принадлежащая всем этим квадратам. Эту точку мы и возьмем в качестве  $f(x)$ . Остается показать, что (i) точка  $f(x)$  определена корректно, т. е. она не зависит от выбора интервалов, содержащих  $x$ ; (ii) множество значений  $f$  есть  $S$  и (iii)  $f$  непрерывно. Доказательство мы предоставляем читателю.

Следует заметить, что отображение  $f$ , определенное выше, не является взаимно однозначным (например, каждая из трех точек  $1/6$ ,  $1/2$  и  $5/6$  отображается в точку  $(1/2, 1/2)$ ). Это не случайно, так как если бы отображение  $f$  было взаимно однозначным, то оно было бы гомеоморфизмом, в то время

<sup>1)</sup> Следует принять во внимание, что длины сторон квадратов стремятся к нулю. — Прим. перев.

как  $I$  и  $S$  не гомеоморфны (удаление любых трех точек нарушает связность  $I$ , но не нарушает связности  $S$ ). Тот факт, что отображение  $f$  однозначно, но не взаимно однозначно, в какой-то мере парадоксален, поскольку кажется, что будто бы в  $I$  больше точек, чем в  $S$ !

## 7. Кривая Пеано, стационарная почти всюду

Пусть  $\phi$  — канторова функция примера 15 гл. 8, а  $f$  — отображение, определенное в предыдущем примере. Тогда  $g(x) \equiv f(\phi(x))$  отображает канторово множество  $C$  на единичный квадрат  $[0, 1] \times [0, 1]$ . При этом дополнительное множество  $[0, 1] \setminus C$  отображается на образ при отображении  $f$  множества точек вида  $m \cdot 2^{-n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, связанные неравенством  $m < 2^n$ .

Таким образом, полученная кривая Пеано является стационарной почти всюду.

## 8. Кривая Пеано, дифференцируемая почти всюду

Термин „почти всюду дифференцируемая“ означает, что кривая определяется параметризующими функциями, которые дифференцируемы почти всюду. Требуемым свойством обладает отображение, определенное в примере 7.

## 9. Непрерывное отображение интервала $[0, 1]$ на себя, принимающее каждое значение несчетное множество раз

Этим свойством обладает каждая из параметризующих функций кривых Пеано примеров 6 и 7 и вообще каждая параметризующая функция любого непрерывного отображения интервала  $[0, 1]$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Кроме того, каждая из параметризующих функций отображения примера 7 обладает дополнительным свойством: она дифференцируема почти всюду, причем производная почти всюду равна нулю (см. [58]).

## 10. Простая дуга, расположенная в единичном квадрате и имеющая плоскую меру, сколь угодно близкую к единице

Как было показано в примере 6, никакая простая дуга не может заполнить весь единичный квадрат  $S \equiv [0, 1] \times [0, 1]$ .

По тем же причинам *всякая простая дуга на плоскости нигде не плотна*. Из этого следует, что простая дуга не может заполнить „слишком большую“ часть  $S$ . В частности, она не может заполнить почти весь квадрат  $S$ , так как если бы простая дуга  $A$ , расположенная в  $S$ , имела меру, равную 1, то она была бы плотна в  $S$ , а так как она замкнута, то она совпала бы с  $S$ . Однако простая дуга  $A$  может иметь положительную плоскую меру. Более того, если

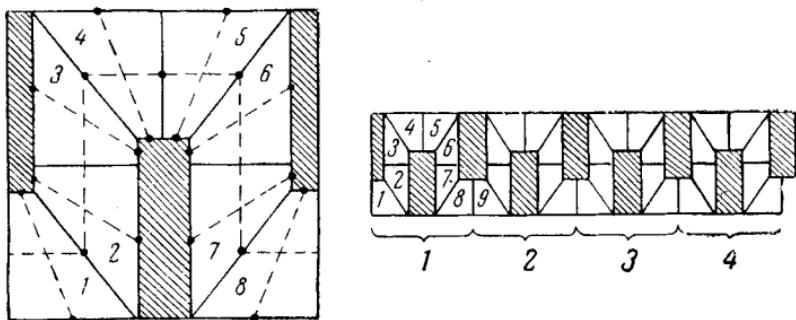


Рис. 9.

$\varepsilon$  — произвольное число, заключенное между 0 и 1, то существует простая дуга  $A$ , плоская мера которой больше, чем  $1 - \varepsilon$ . Сейчас мы наметим схему доказательства этого замечательного факта.

Модифицируем построение, которое проведено в примере 6, вырезая открытые „каналы“ между смежными подквадратами из  $S$ , которые *не* соответствуют смежным подинтервалам из  $I$ . После первого шага вместо подквадратов получаем четырехугольники, которые в свою очередь разделены прямыми, проходящими через середины противоположных сторон. Затем вырезаются открытые каналы, и каждый замкнутый четырехугольник заменяется последовательностью из *восьми* меньших четырехугольников. Первое подразделение и общая схема, в которой для простоты вместо четырехугольников используются квадраты, показаны на рис. 9. Второй шаг отражен на рис. 10. В обоих случаях удаленные каналы выделены штрихами. После  $n$  шагов получим  $8^n$  замкнутых четырехугольников, которые нумеруются следующим образом: если четырехугольник после  $n - 1$  шагов имел номер  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, 8^{n-1}$ ), то четырехугольники,

получившиеся из него после  $n$ -го шага, получают номера от  $8k - 7$  до  $8k$ . Кроме того, нумерация такова, что на каждом шаге два четырехугольника являются смежными тогда и только тогда, когда они имеют последовательные номера

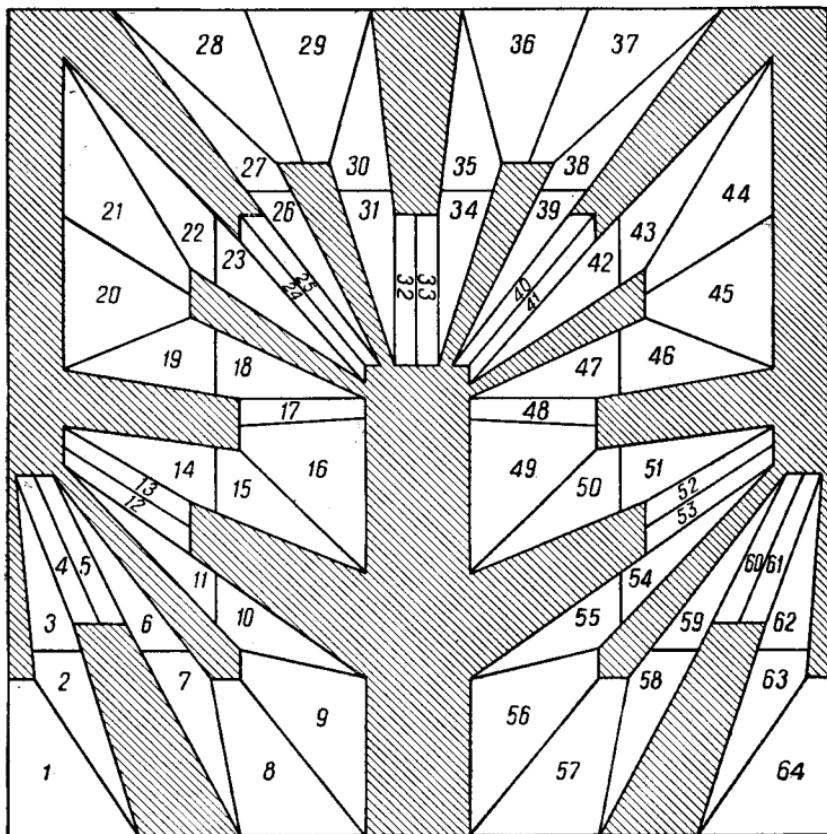


Рис. 10.

и, следовательно, соответствуют смежным подинтервалам из  $I = [0, 1]$ . Нетрудно показать, что диаметр каждого четырехугольника составляет не более  $3/4$  от диаметра содержащего его четырехугольника, который был построен на предыдущем шаге. Следовательно, любая убывающая бесконечная последовательность вложенных четырехугольников определяет единственную точку, а именно точку их пересечения.

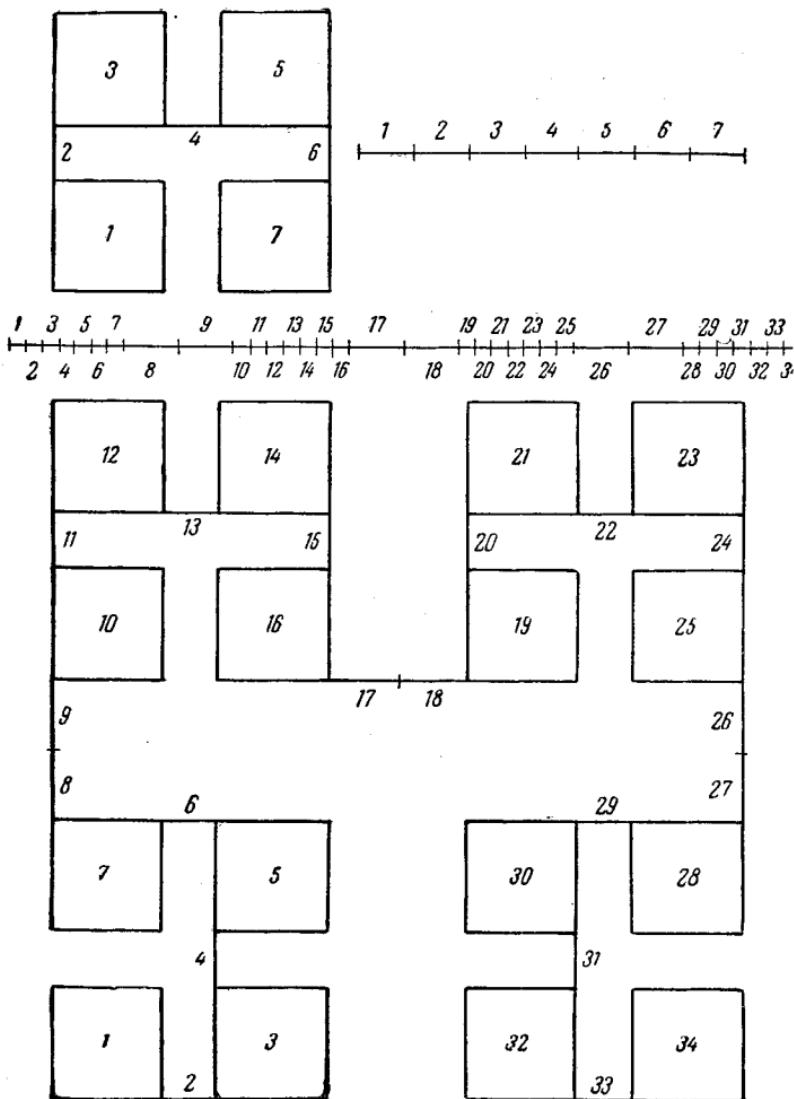


Рис. 11.

Поэтому отображение можно определить точно так же, как и в примере 6. Это отображение непрерывно по тем же причинам, что и в примере 6. Более того, оно является взаимно однозначным, так как мы удалили соответствующие каналы. Наконец, поскольку можно удалять каналы сколь угодно малой площади, то их общая плоская мера также может быть сделана сколь угодно малой, а поэтому остающаяся после их удаления простая дуга имеет плоскую меру, сколь угодно близкую к 1.

Другой метод построения простой дуги с положительной плоской мерой указан на рис. 11. Этот метод несколько проще по замыслу, чем описанное выше построение, но имеет тот недостаток, что некоторые подинтервалы из  $[0, 1]$  отображаются на множества нулевой плоской меры. Построение, указанное на рисунке 11, приводит к простой дуге, содержащей множество  $A \times A$ , где  $A$  — канторово множество. Так как для  $0 < \varepsilon \leq 1$  мы можем выбрать  $A$  с (линейной) мерой, не меньшей чем  $\sqrt{1 - \varepsilon}$ , то дуга, о которой идет речь, будет иметь плоскую меру, не меньшую чем  $1 - \varepsilon$ .

Американский математик У. Ф. Осгуд (1864 — 1943 г.) в 1903 г. построил (см. [39]) простую дугу с плоской мерой, превосходящей  $1 - \varepsilon$ , используя канторово множество  $A$  линейной меры, большей, чем  $\sqrt{1 - \varepsilon}$ . При этом простая дуга была построена таким образом, что она содержала множество  $A \times A$ .

## 11. Связное компактное множество, не являющееся дугой

Пусть  $S_2$  — второе множество примера 3. Это множество не является дугой, ибо оно локально несвязно: если  $N = \{(x, y) | (x, y) \in S_2, x^2 + y^2 < 1/2\}$ , то не существует окрестности начала координат, которая принадлежит  $N$  и любые две точки которой можно соединить связным множеством, лежащим в  $N$ . (См. [56], стр. 204.)

## 12. Плоская область, не совпадающая с ядром своего замыкания

Пусть  $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \setminus ([0, 1] \times \{0\})$ , т. е.  $S$  — открытый круг с радиальным разрезом. Тогда

$$\bar{S} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\},$$

а ядром  $\bar{S}$  является  $I(\bar{S}) = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ .

Так как каждая жорданова область совпадает с ядром своего замыкания (см. [38], стр. 477), то мы тем самым получили простой пример области, не являющейся жордановой. Однако пример 14 показывает, что не *каждая* область, совпадающая с ядром своего замыкания, является жордановой областью.

### 13. Три непересекающиеся плоские области с общей границей

Этот пример проще всего описать в форме рассказа. Представим себе, что на острове в океане живет человек. На острове имеются два водоема с пресной водой, причем в одном из них вода холодная, а в другом — теплая. Человек хочет, чтобы все три источника воды находились на подходящем расстоянии от любой точки острова. Для этого он начинает рыть каналы, но таким образом, что остров все время остается гомеоморфным своей первоначальной форме. Сначала он проводит канал от океана в глубь острова так, чтобы его воды находились от любой точки суши на расстоянии не более одного фута и чтобы канал не входил в соприкосновение с источниками пресной воды. Затем он подобным же образом проводит канал от источника холодной пресной воды и канал от источника теплой пресной воды, чтобы в результате каждая точка оставшейся суши находилась от этих трех каналов не далее одного фута. Неудовлетворенный этим результатом обитатель острова повторяет описанный тройной процесс так, чтобы каждая точка оставшейся суши отстояла от каждого канала не далее чем на полфута. Но и это не удовлетворяет его, и он доводит приближение к каждой точке суши до одной четверти фута. Так он продолжает этот процесс до бесконечности, всякий раз уменьшая вдвое критическое расстояние и время, затрачиваемое на каждый шаг, стремясь закончить работу в конечный отрезок времени. Предположим теперь, что „остров“ — это компактный круг, из внутренности которого удалены два непересекающихся открытых круга, а „оcean“ — его открытое плоское дополнение, лежащее вне этого круга. Предположим далее, что расширения каждой из трех первоначальных областей остаются на каждом шаге гомеоморфными их первоначальной форме. Тогда в результате мы получим три

взаимно непересекающиеся области  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , каждая из которых является объединением бесконечной последовательности областей, а часть суши  $F$ , которая останется от острова, будет общей границей областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ . Так как дополнение  $F$  состоит из трех непересекающихся областей вместо двух, то ни одна из областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  не является жордановой. (Подробности и доказательство теоремы Жордана см. в [34].) С другой стороны, как мы увидим в примере 14, каждая из этих трех областей совпадает с ядром своего замыкания.

Предыдущее построение можно провести с любым конечным (на самом деле со счетным) множеством непересекающихся областей. Если взять более четырех областей, то мы сможем построить таким путем „карту“, на которой все „страны“ имеют общую границу. Это показывает, что знаменитая проблема четырех красок требует точной формулировки, в противном случае она имеет тривиальное отрицательное решение (см. [10]).

#### **14. Нежорданова область, совпадающая с ядром своего замыкания**

Пусть  $R$  — любая из областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ , определенных в примере 13. Как было отмечено,  $R$  не является жордановой областью. С другой стороны, как мы покажем сейчас,  $R$  совпадает с ядром своего замыкания. В самом деле, так как  $R \subset \bar{R}$  и  $R$  открыто, то  $R = I(R) \subset I(\bar{R})$ . Теперь нам остается доказать обратное включение  $I(\bar{R}) = I(R \cup F) \subset R$ . Но если бы это включение не имело места, то нашлась бы точка  $p \in F$ , которая была бы внутренней для множества  $R \cup F$ . А это означало бы, что существует окрестность  $N$  точки  $p$ , которая лежит в  $R \cup F$  и, следовательно, не содержит ни одной точки из двух оставшихся областей. Тем самым мы получили бы противоречие с тем фактом, что каждая точка  $F$  является предельной для любой из трех областей  $R_1$ ,  $R_2$  и  $R_3$ .

#### **15. Ограниченнная плоская область, граница которой имеет положительную меру**

Пусть  $A$  — канторово множество положительной меры на  $[0, 1]$ , и пусть

$$R \equiv ((0, 1) \times (-1, 1)) \setminus (A \times [0, 1]).$$

Множество  $R$  есть область с границей

$$F(R) = (\{0\} \times [-1, 1]) \cup (\{1\} \times [-1, 1]) \cup \\ \cup (A \times [0, 1]) \cup ((0, 1) \times \{1\}) \cup ((0, 1) \times \{-1\}).$$

Следовательно,  $\mu(F(R)) = \mu(A) > 0$ . Ясно, что  $R$  не является жордановой областью ( $I(\bar{R}) \neq R$ ). (См. [22], стр. 292. Относительно жордановой области, имеющей границу положительной плоской меры, см. пример 4 гл. 11.)

## 16. Простая дуга бесконечной длины

*Первый пример.* Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } x = 1/n, n \in \mathbb{N}, n \text{ нечетно,} \\ 1/n, & \text{если } x = 1/n, n \in \mathbb{N}, n \text{ четно.} \end{cases}$$

Далее положим  $f(0) = 0$ , и пусть  $f(x)$  линейна на каждом интервале  $[1/(n+1), 1/n]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда вследствие расходящности гармонического ряда график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  будет простой дугой бесконечной длины.

*Второй пример.* Положим  $f(x) = x \sin(1/x)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$ . Тогда график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  снова будет простой дугой бесконечной длины по той же причине, что и в первом примере. Длины вписанных ломаных превосходят сумму высот отдельных волн графика  $f(x)$ , а эта сумма имеет вид  $\sum 2/(2n - 1)\pi$ .

В противоположность двум предыдущим примерам график функции  $f(x) = x^2 \sin(1/x)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$  имеет конечную длину, так как эта функция дифференцируема и ее производная ограничена на  $[0, 1]$ . (См. [38], стр. 353 (упр. 24 и 27), стр. 176 (теорема II).)

## 17. Простая дуга бесконечной длины, имеющая касательную в каждой точке

Если  $f(x) = x^2 \sin(1/x^2)$  для  $x \in (0, 1]$  и  $f(0) = 0$ , то график  $f(x)$  для  $x \in [0, 1]$  будет простой дугой бесконечной длины по тем же причинам, что и во втором примере предыдущего пункта. Однако график  $f(x)$  имеет касательную в каждой точке, поскольку  $f(x)$  всюду дифференцируема.

**18. Простая дуга, такая, что ее длина между любой парой точек бесконечна**

*Первый пример.* Пусть  $f(t) = (x(t), y(t))$  — любая кривая Пеано, отображающая  $[0, 1]$  на  $[0, 1] \times [0, 1]$  и обладающая следующим дополнительным свойством:  $f$  отображает всякий невырождающийся в точку интервал из  $[0, 1]$  на множество, имеющее непустое (двумерное) ядро. (Этим свойством обладает, например, отображение примера 6.) Тогда график каждой из функций  $x(t)$  и  $y(t)$  для  $t \in [0, 1]$  обладает требуемыми свойствами. Например, чтобы установить, что график  $x(t)$  для  $a \leq t \leq b$  имеет бесконечную длину, мы можем воспользоваться тем фактом (см. пример 9), что существуют по крайней мере два значения, каждое из которых принимается функцией  $x(t)$  несчетное множество раз.

*Второй пример.* Пусть  $f$  — отображение такого же типа, как и в примере 10, и пусть, кроме того, оно отображает всякий невырождающийся в точку подинтервал из  $[0, 1]$  на множество положительной плоской меры. Тогда  $f$  обладает требуемыми свойствами, так как всякая спрямляемая простая дуга имеет плоскую меру, равную нулю. (См. [38], стр. 436.)

*Третий пример.* График любой функции, которая всюду непрерывна, но нигде не дифференцируема на замкнутом интервале (см. пример 8 гл. 3), также обладает нужными свойствами. В самом деле, если бы этот график был спрямляемым, то функция имела бы ограниченную вариацию, а любая функция ограниченной вариации дифференцируема почти всюду. (См. [17], а также [33]\*, стр. 238.)

*Четвертый пример.* См. [22], стр. 190.

**19. Гладкая кривая  $C$ , содержащая точку  $P$ , которая не является ближайшей точкой этой кривой ни для какой точки выпуклой области, ограниченной этой кривой**

Пусть кривая  $C$  есть график функции  $y^3 = x^4$ . Эта кривая всюду вогнута вверх. Положим  $P = (0, 0)$ . Если  $(a, b)$  — точка, лежащая выше  $C$ , и  $a \neq 0$ , то ясно, что точка  $(a, a^{4/3})$  ближе к  $(a, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Если же  $b$  — произвольное число, не меньшее единицы, то точка  $(1/8, 1/16)$  ближе к  $(0, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Наконец, если  $b$  — произвольное положительное

жительное число, меньшее единицы, то точка  $(b^3, b^4)$  ближе к  $(0, b)$ , чем  $(0, 0)$ . Идея этого примера заключается в том, что начало координат является точкой бесконечной кривизны (нулевого радиуса кривизны) кривой  $C$ . (См. [36], стр. 258, а также [52]\*, т. I, стр. 568.)

**20. Подмножество  $A$  единичного квадрата  $S = [0, 1] \times [0, 1]$ , плотное в  $S$  и такое, что всякая вертикальная или горизонтальная прямая, пересекающая  $S$ , имеет с  $A$  лишь одну общую точку**

Очевидно, достаточно построить взаимно однозначное отображение  $f$  интервала  $[0, 1]$  на себя с графиком, всюду плотным в  $S$ . Начнем с последовательного определения  $f(x)$  для  $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Пусть точки множества  $B = ((0, 1] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$  расположены в виде последовательности  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ . На нулевом шаге положим  $f(x_1) = y_1$ . На первом шаге мы разделим  $B$  на четыре непересекающиеся части вертикальными и горизонтальными прямыми:

$$\begin{aligned} &((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}) \times ((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}), \\ &((0, 1/2] \cap \mathbb{Q}) \times ((1/2, 1] \cap \mathbb{Q}), \dots \end{aligned}$$

и занумеруем эти множества в каком-либо порядке:  $B_{11}, B_{12}, B_{13}, B_{14}$ . Пусть  $(x_{11}, y_{11})$  — первая из точек последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащая  $B_{11}$  и такая, что  $x_{11} \neq x_1$  и  $y_{11} \neq y_1$ . Положим  $f(x_{11}) = y_{11}$ . Далее пусть  $(x_{12}, y_{12})$  — первая из точек последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащая  $B_{12}$  и такая, что  $x_{12} \neq x_1, x_{12} \neq x_{11}$  и  $y_{12} \neq y_1, y_{12} \neq y_{11}$ . Положим  $f(x_{12}) = y_{12}$ . Затем, аналогичным образом определив  $f(x_{13}) = y_{13}$ , обозначим через  $(x_{14}, y_{14})$  первую точку последовательности  $\{(x_n, y_n)\}$ , принадлежащую  $B_{14}$  и такую, что  $x_{14}$  отлично от  $x_1, x_{11}, x_{12}$  и  $x_{13}$ , а  $y_{14}$  отлично от  $y_1, y_{11}, y_{12}$  и  $y_{13}$ , и положим  $f(x_{14}) = y_{14}$ . На этом заканчивается первый шаг построения. На втором шаге подобным же образом множество  $B$  разбивается на 16 частей  $B_{21}, B_{22}, \dots, B_{2, 16}$  вертикальными и горизонтальными прямыми. Затем снова, как и выше, расширяется область определения и множество значений функции  $f$ . Продолжая этот процесс до бесконечности и деля множество  $B$  на  $n$ -м шаге на  $4^n$  конгруэнтных

частей, мы получим функцию  $f$ , обладающую требуемым свойством относительно множества  $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$ . Наконец, чтобы получить искомую функцию, достаточно продолжить функцию  $f$  на  $[0, 1]$  следующим образом:  $f(x) = x$  для  $x \in [0, 1] \setminus ((0, 1] \cap \mathbb{Q})$ .

## 21. Неизмеримое плоское множество, имеющее с каждой прямой не более двух общих точек

Этот пример принадлежит В. Серпинскому [47]. Его построение опирается на принцип максимального элемента в форме теоремы о полном упорядочении, а также в форме леммы Цорна. (См. [17], [31] и [49].) Сначала мы приведем четыре утверждения относительно кардинальных и порядковых чисел.

(i) Если  $\alpha$  — бесконечное кардинальное число, то  $\alpha^2 = \alpha$ . (См. [17] и [49].)

(ii) Мощность  $f$  множества всех замкнутых множеств положительной плоской меры равна мощности  $c$  множества  $\mathbb{R}$ . (В самом деле, поскольку замкнутые множества и их дополнения находятся во взаимно однозначном соответствии, то  $f$  не превосходит мощности множества всех открытых множеств. А так как каждое открытое множество является объединением счетного множества открытых кругов с рациональными радиусами, центры которых имеют рациональные координаты, то  $f \leq c$ . С другой стороны, так как замкнутые круги с центрами в начале координат образуют множество мощности  $c$ , то  $f \geq c$ .)

(iii) Пусть  $\Psi$  обозначает первое порядковое число, соответствующее мощности  $c$ . (См. пример 10 гл. 12.) Тогда множество  $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$  имеет мощность  $c$ .

(iv) Если  $E$  — линейное множество положительной линейной меры, то мощность  $E$  равна  $c$ . ( $E$  содержит некоторое замкнутое линейное множество  $F$  положительной линейной меры, а  $F$  является объединением некоторого счетного множества (быть может, пустого) и некоторого (обязательно непустого) совершенного множества. См. [33]\*, [48] и [54].)

Пусть  $\alpha \rightarrow F_\alpha$  есть взаимно однозначное отображение множества  $\{\alpha \mid \alpha < \Psi\}$  на множество всех замкнутых множеств положительной плоской меры. Далее, пусть  $F$  — сово-

купность всех функций  $p(a)$ , таких, что их области определения имеют вид  $[1, \beta]$  для некоторого  $\beta \leqslant \Psi$ , их множества значений являются подмножествами плоскости и, кроме того,

- (a)  $p(a) \in F_a$  для каждого  $a$  из области определения  $p(a)$ .
- (b) никакие три точки из множества значений  $p(a)$  не коллинеарны<sup>1)</sup>.

Пусть  $G$  — множество всех множеств значений функций из  $F$ , и пусть  $G$  частично упорядочено по отношению включения. Тогда по лемме Цорна (см. [17], [31] и [49]) существует максимальное множество  $E \in G$ , которое является множеством значений некоторой функции  $q(a)$  из  $F$ . Пусть область определения  $q$  есть  $[1, \beta]$ . Покажем, что  $\beta = \Psi$ . Предположим противное, т. е. пусть  $\beta < \Psi$ . Тогда, если обозначить через  $b$  кардинальное число, соответствующее порядковому числу  $\beta$ , то  $b \leqslant b^2 < c$  (строгое неравенство  $b < b^2$  имеет место, если  $1 < b$  и  $b$  конечно). Это означает, что мощность множества всех направлений, определяемых парами точек, принадлежащих множеству значений  $E$  функции  $q(a)$ , меньше  $c$  и, следовательно, существует направление  $\theta$ , отличное от всех направлений, определяемых парами точек из  $E$ . Но тогда некоторая прямая  $L$ , имеющая направление  $\theta$ , должна пересекаться с множеством  $F_\beta$  по множеству положительной линейной меры (согласно теореме Фубини). А так как это последнее множество имеет мощность  $c$ , то существует точка  $p_\beta \in F_\beta$ , такая, что  $p_\beta$  не коллинеарна никакой паре точек из области значений  $q(a)$ . Продолжим теперь функцию  $q(a)$  так, чтобы она была задана на  $[1, \beta] = [1, \beta + 1]$  и чтобы  $q(\beta) = p_\beta$ . Но тогда эта продолженная функция  $q(a)$  будет обладать свойствами (а) и (б) и ее множество значений будет больше максимального члена  $E$  из  $G$ . Мы получили противоречие. Следовательно,  $\beta = \Psi$ , т. е. область определения функции  $q(a)$  состоит из *всех*  $a$ , меньших  $\Psi$ , а множество значений  $E$  функции  $q(a)$  содержит некоторую точку  $p_a$  из *каждого* замкнутого плоского множества  $F_a$  положительной плоской меры.

Покажем теперь, что множество  $E$  неизмеримо. В самом деле, если бы  $E$  было измеримо, то было бы измеримо и его дополнение  $E'$ . А так как  $E'$  не содержит ни одного

<sup>1)</sup> То есть не лежат на одной прямой. — Прим. перев.

замкнутого плоского множества положительной плоской меры, то оно должно иметь меру нуль. Но с другой стороны, так как каждая прямая на плоскости пересекает  $E$  не более чем в двух точках, то (согласно теореме Фубини)  $E$  также должно иметь меру нуль. Следовательно, вся плоскость, являясь объединением двух множеств  $E$  и  $E'$  меры нуль, должна иметь меру нуль. Таким образом, мы получили противоречие, и неизмеримость множества  $E$  доказана.

Отметим также, что если  $S$  — произвольное множество положительной плоской меры, то пересечение  $S \cap E$  неизмеримо. Если предположить противное, то, применяя теорему Фубини, получим, что  $\mu(S \cap E) = 0$ , в то время как  $\mu(S \setminus E) > 0$ . Таким образом,  $S \setminus E$  содержит некоторое замкнутое множество  $F$  положительной плоской меры. Но так как  $F \cap E = \emptyset$ , то мы получаем противоречие с основным свойством множества  $E$ : пересечение множества  $E$  с каждым замкнутым множеством положительной плоской меры непусто.

С. Мазуркевич [30] построил плоское множество  $E$ , пересекающееся с каждой прямой на плоскости в точности в двух точках. Однако такое множество  $E$  может быть измеримым и в этом случае оно обязано иметь меру нуль. Это объясняется тем, что этот метод построения зависит лишь от существования на плоскости множества  $E_1$ , пересекающегося с каждой прямой по множеству мощности  $c$ . Само же множество  $E$  строится затем как подмножество  $E_1$ .

Однако множества, обладающие тем же свойством, что и  $E_1$ , могут иметь нулевую плоскую меру. Например, пусть  $C$  — канторово множество на  $[0, 1]$ . Положим

$$E_1 \equiv (\mathbb{R} \times C) \cup (C \times \mathbb{R}).$$

Тогда ясно, что каждая прямая пересекает  $E_1$  по множеству мощности  $c$ , однако  $E_1$  является (замкнутым) множеством нулевой плоской меры.

В статье [59] приведено построение „множества Мазуркевича“ как ответ на одну проблему, поставленную в этом журнале.

Ф. Гельвин доказал следующее: если  $1 \leq n \leq \aleph_0$ , где  $\aleph_0$  — мощность множества  $\mathbb{N}$ , то существует неизмеримое множество  $S$  на плоскости, такое, что пересечение  $S$  с каждой прямой состоит в точности из  $n$  точек.

**22. Неотрицательная функция  $f(x, y)$ , такая, что**

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 0,$$

а интеграл  $\iint_S f(x, y) dx dy$ , где  $S = [0, 1] \times [0, 1]$   
не существует

Мы приведем два примера. В первом из них интеграл понимается в смысле Римана, во втором — в смысле Лебега.

*Первый пример.* Пусть  $f$  — характеристическая функция множества из примера 20. Тогда  $\int_0^1 f(x, y) dx = 0$  для каждого  $y \in [0, 1]$  и  $\int_0^1 f(x, y) dy = 0$  для каждого  $x \in [0, 1]$ , причем оба интеграла являются интегралами Римана. Однако двойной интеграл Римана по  $S$  не существует, так как для функции  $f$  верхний и нижний интегралы Римана равны 1 и 0 соответственно.

*Второй пример.* Пусть  $f$  — характеристическая функция множества из примера 21. Тогда оба повторных интеграла снова равны нулю, причем их можно рассматривать как в смысле Римана, так и в смысле Лебега. Однако функция  $f$  неизмерима на  $S$ , и поэтому двойной интеграл Лебега не существует.

**23. Действительнозначная функция одного действительного переменного, график которой является неизмеримым плоским множеством**

Определим функцию  $f(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  следующим образом:

$$f(x) \equiv \begin{cases} \max \{y | (x, y) \in E\}, & \text{если } \{y | (x, y) \in E\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \{y | (x, y) \in E\} = \emptyset, \end{cases}$$

где  $E$  — множество из примера 21. Положим

$$E_1 \equiv \{(x, f(x)) | x \in \mathbb{R}\} \cap E, \quad E_2 \equiv E \setminus E_1.$$

Тогда либо  $E_1$ , либо  $E_2$  (либо оба эти множества) должно быть неизмеримым, так как их объединение есть  $E$ . Если неизмеримо  $E_1$ , то множество

$$F = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

— график функции  $f$  — является объединением  $E_1$  и некоторого подмножества оси  $x$ . Но так как последнее имеет нулевую плоскую меру, то  $F$  неизмеримо. Если же неизмеримо  $E_2$ , то определим функцию  $g(x)$  для  $x \in \mathbb{R}$  следующим образом:

$$g(x) = \begin{cases} \min\{y \mid (x, y) \in E\}, & \text{если } \{y \mid (x, y) \in E\} \text{ состоит из} \\ & \quad \text{двух различных точек,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда множество  $G = \{(x, g(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$  — график функции  $g$  — является объединением  $E_2$  и некоторого подмножества оси  $x$  и потому неизмеримо. Итак, в любом случае существует функция, график которой есть неизмеримое плоское множество.

#### 24. Связное множество, которое становится вполне несвязным при удалении одной точки

Пусть  $C$  — канторово множество примера 1 гл. 8, и пусть  $B$  — подмножество  $C$ , состоящее из всех концевых точек открытых интервалов, удаленных из  $[0, 1]$  при построении  $C$ . Положим  $E = C \setminus B$  (см. пример 24 гл. 8). Далее для каждого  $x \in C$  через  $L(x)$  обозначим замкнутый отрезок, соединяющий две точки  $(x, 0)$  и  $(1, 1)$  на плоскости. Наконец, для  $x \in B$  через  $S(x)$  обозначим множество всех тех точек из  $L(x)$ , ординаты которых иррациональны, а для  $x \in E$  тем же символом  $S(x)$  обозначим множество всех тех точек из  $L(x)$ , ординаты которых рациональны. Тогда множество  $S = \bigcup_{x \in C} S(x)$  обладает требуемыми свойствами.

Мы приведем доказательство лишь в общих чертах: подробности можно найти в [24].

Связность множества  $S$  доказывается с привлечением понятий множеств первой и второй категорий, и мы его опускаем.

Покажем лишь, что множество  $S_0 = S \setminus \{(1, 1)\}$  вполне несвязно. В самом деле, если  $E \subset S_0$  содержит более одной точки и является подмножеством какого-либо множества  $S(x)$ ,  $x \in C$ , то  $E$ , очевидно, несвязно. С другой стороны, если  $p$  и  $q$  — две точки множества  $S_0$ , расположенные на двух *различных* интервалах  $L(x)$  и  $L(y)$ , где  $x$  и  $y$  при-  
надлежат  $C$  и  $x < y$ , то в дополнении множества  $S_0$  суще-  
ствует прямая линия, проходящая через точку  $(1, 1)$  и такая,  
что точки  $p$  и  $q$  лежат по разные стороны от нее. Такой  
прямой является всякая прямая, проходящая через точку  $(1, 1)$   
и любую точку вида  $(a, 0)$ , где  $x < a < y$  и  $a \notin C$ .

## ГЛАВА 11

### ПЛОЩАДЬ

#### Введение

В основе понятия площади лежит понятие двойного интеграла Римана. Говорят, что ограниченное плоское множество  $S$  имеет площадь, если его характеристическая функция  $\chi_S$  интегрируема (по Риману) на замкнутом прямоугольнике  $R$ , который содержит  $S$  и стороны которого параллельны координатным осям. В этом случае площадь  $A(S)$  множества  $S$  по определению полагается равной двойному интегралу от  $\chi_S$  по  $R$ :

$$A(S) \equiv \int_R \int \chi_S dA.$$

Эти определения, очевидно, корректны, поскольку понятия „имеет площадь“ и „площадь“ не зависят от прямоугольника  $R$ , содержащего множество  $S$ .

Пусть прямоугольник  $R$  разделен на меньшие прямоугольники при помощи сетки  $\mathcal{N}$  прямых, параллельных его сторонам. Тогда некоторые из этих прямоугольников могут быть подмножествами  $S$ , а некоторые из них могут быть подмножествами дополнения  $S'$  множества  $S$ . Для каждой такой сетки  $\mathcal{N}$  через  $a(\mathcal{N})$  обозначим сумму площадей всех прямоугольников, являющихся подмножествами  $S$  (если таких прямоугольников нет, то положим  $a(\mathcal{N})=0$ ), а через  $\bar{A}(\mathcal{N})$  — сумму площадей всех прямоугольников, не являющихся подмножествами  $S'$  (т. е. таких прямоугольников, пересечение которых с множеством  $S$  непусто). Внутренняя площадь  $\underline{A}(S)$  и внешняя площадь  $\bar{A}(S)$  множества  $S$  определяются соответственно как  $\sup a(\mathcal{N})$  и  $\inf \bar{A}(\mathcal{N})$  для всех сеток прямых, параллельных сторонам прямоугольника  $R$ , т. е.

$$A(S) = \sup a(\mathcal{N}), \quad \bar{A}(S) = \inf \bar{A}(\mathcal{N}).$$

Очевидно, эти определения не зависят от  $R$ . Ограниченнное множество  $S$  имеет площадь тогда и только тогда, когда  $A(S) = \bar{A}(S)$ . В этом случае  $\underline{A}(S) = \bar{A}(S)$ .

Для того чтобы ограниченное множество  $S$  имело площадь, необходимо и достаточно, чтобы его граница  $F(S)$  имела площадь, равную нулю, или, что эквивалентно, чтобы  $F(S)$  имела внешнюю площадь, равную нулю. Но так как для всякого ограниченного множества  $S$  его граница  $F(S)$  является компактным множеством (и, следовательно, она измерима как плоское множество) и так как для компактных множеств внешняя площадь и внешняя плоская мера (Лебега) совпадают, то ограниченное множество имеет площадь тогда и только тогда, когда его граница имеет нулевую плоскую меру.

Все предыдущие утверждения относительно площади можно распространить подобным образом и на *объемы* множеств, расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. Существует обобщение понятия площади и объема, так называемая мера Жордана, которое применимо к евклидовым пространствам любого числа измерений и даже к более общим пространствам. (См. [38], стр. 431.) Мера Лебега является обобщением меры Жордана в том смысле, что любое множество, имеющее меру Жордана, измеримо по Лебегу и его мера Жордана совпадает с мерой Лебега. Принципиальным преимуществом меры Лебега над мерой Жордана объясняется широкое применение меры Лебега к предельным процессам. Элементарные сведения о площади и объеме, а также доказательства многих сформулированных выше утверждений можно найти в [38], стр. 431—465.

В примерах 7 и 8 настоящей главы речь идет о *площади поверхности*; определение этого понятия см. в литературе, указанной там же.

## **1. Ограниченнное плоское множество, не имеющее площади**

Рассмотрим множество  $S = (\mathbf{Q} \cap [0, 1]) \times (\mathbf{Q} \cap [0, 1])$  всех точек единичного квадрата, обе координаты которых рациональны. Это множество не имеет площади, так как его граница  $F(S)$  не имеет нулевой площади. (Множество  $F(S)$

совпадает с самим единичным квадратом и, следовательно, имеет площадь, равную 1.) Внешняя площадь множества  $S$  равна единице, а внутренняя — нулю.

## **2. Компактное плоское множество, не имеющее площади**

Пусть  $A$  — канторово множество положительной меры  $\varepsilon$  (см. пример 4 гл. 8). Положим  $S = A \times [0, 1]$ . Тогда  $F(S) = S$  и плоская мера множества  $F(S)$  равна линейной мере  $\varepsilon$  множества  $A$ . Но так как множество  $F(S) = S$  компактно, то его внешняя площадь равна его мере и потому положительна. Следовательно,  $S$  не имеет площади. Внешняя площадь  $S$  равна  $\varepsilon$ , а внутренняя — нулю.

## **3. Ограниченная плоская область, не имеющая площади**

Этим свойством обладает область  $R$  примера 15 гл. 10.

## **4. Ограниченная плоская жорданова область, не имеющая площади**

Пусть  $\varepsilon$  — положительное число, меньшее единицы, и пусть  $A$  — простая дуга с параметризующей функцией  $f(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , лежащая в единичном квадрате  $[0, 1] \times [0, 1]$  и имеющая плоскую меру, большую чем  $1 - \varepsilon/2$ . (См. пример 10 гл. 10.) Далее, пусть  $C$  — замкнутая простая кривая, образованная объединением множества  $A$  и трех сегментов  $\{0\} \times [-\varepsilon/2, 0]$ ,  $\{1\} \times [-\varepsilon/2, 0]$  и  $[0, 1] \times \{-\varepsilon/2\}$ . Наконец, пусть  $R$  — ограниченная область, границей которой служит  $C$ . Тогда  $R$  будет жордановой областью, а внешняя площадь ее границы больше  $1 - \varepsilon/2 > 1 - \varepsilon > 0$ .

## **5. Простая замкнутая кривая, плоская мера которой больше плоской меры области, ограниченной этой кривой**

Пусть  $C$  — кривая, а  $R$  — область, определенные в примере 4. Тогда если  $\mu$  — плоская мера Лебега, то

$$\mu(R \cup C) = \mu(R) + \mu(C) \leq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Но так как  $\mu(C) > 1 - \frac{1}{2}\varepsilon$ , то отсюда следует, что

$$\mu(R) < \varepsilon.$$

Поэтому если  $\varepsilon < 2/3$ , то мера  $R$  меньше меры  $C$ . Заметим, что при этом мера  $R$  может быть сделана сколь угодно близкой к нулю, а мера  $C$  — сколь угодно близкой к единице.

## 6. Две функции $\varphi$ и $\psi$ , заданные на $[0, 1]$ и такие, что

(а)  $\varphi(x) < \psi(x)$  для  $x \in [0, 1]$ ,

(б)  $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)] dx$  существует и равен 1,

(с)  $S \equiv \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$  не имеет площади

Пусть  $\varphi(x)$  — характеристическая функция множества  $Q \cap [0, 1]$ , и пусть  $\psi(x) = \varphi(x) + 1$ . Тогда условия (а) и (б), очевидно, выполнены. В то же время граница  $F(S)$  есть замкнутый прямоугольник  $[0, 1] \times [0, 2]$  положительной площади, и потому  $S$  не имеет площади. При этом внешняя площадь  $S$  равна 2, а внутренняя — нулю.

Этот пример представляет интерес в связи с принципом Кавальери, который состоит в следующем: если каждая плоскость  $\Pi$ , параллельная заданной плоскости  $\Pi_0$ , пересекает два трехмерных множества  $W_1$  и  $W_2$  так, что площади сечений равны, то  $W_1$  и  $W_2$  имеют равные объемы (см. [53]). Двумерный аналог этого принципа формулируется так: если всякая прямая  $L$ , параллельная заданной прямой  $L_0$ , пересекает два плоских множества  $S_1$  и  $S_2$  по отрезкам равной длины, то  $S_1$  и  $S_2$  имеют одинаковые площади. Приведенный выше пример показывает, что если не предполагать, что  $S_1$  и  $S_2$  имеют площадь, то это утверждение теряет силу. (В качестве множеств  $S_1$  и  $S_2$  можно взять соответственно множество  $S$  пункта (с) и замкнутый квадрат  $[0, 1] \times [3, 4]$ , а в качестве семейства параллельных прямых — семейство всех вертикалей.) В качестве упражнения читателю предлагается построить аналогичный контрпример в трехмерном пространстве.

**7. Пример Шварца, в котором боковой поверхности прямого кругового цилиндра сопоставляется сколь угодно большая конечная или даже бесконечная площадь**

Пусть  $S$  — прямой круговой цилиндр

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

с радиусом основания 1 и с высотой 1. Для каждого натурального  $m$  определим  $2m+1$  окружностей  $C_{km}$  следующим образом:

$$C_{km} = S \cap \left\{ (x, y, z) | z = \frac{k}{2m} \right\}, \quad k = 0, 1, \dots, 2m.$$

На каждой из этих  $2m+1$  окружностей возьмем  $n$  равномерно распределенных точек  $P_{kmj}$  ( $j = 0, 1, \dots, n-1$ ):

$$P_{kmj} = \begin{cases} \left( \cos \frac{2j\pi}{n}, \sin \frac{2j\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ четно,} \\ \left( \cos \frac{(2j+1)\pi}{n}, \sin \frac{(2j+1)\pi}{n}, \frac{k}{2m} \right), & \text{если } k \text{ нечетно.} \end{cases}$$

На каждой окружности  $C_{km}$  точки  $P_{kmj}$ ,  $j = 0, 1, \dots, n$ , являются вершинами правильного многоугольника, имеющего  $n$  сторон. Если  $0 < k \leq 2m$ , то каждая сторона многоугольника с вершинами на окружности  $C_{km}$  расположена над некоторой вершиной многоугольника, вписанного в  $C_{k-1, m}$ , и образует с этой вершиной некоторый (плоский) треугольник в пространстве. Аналогично, если  $0 \leq k < 2m$ , то каждая сторона многоугольника с вершинами на  $C_{km}$  расположена под некоторой вершиной многоугольника, вписанного в  $C_{k+1, m}$ , и образует с этой вершиной треугольник. Нетрудно видеть, что существуют всего  $4mn$  конгруэнтных треугольников, построенных таким способом и расположенных в пространстве так, что их вершины лежат на данном цилиндре. Площадь каждого из этих треугольников равна

$$\sin \frac{\pi}{n} \left[ \left( \frac{1}{4m^2} + \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2 \right)^{1/2} \right].$$

Эти треугольники образуют многогранник  $\Pi_{mn}$ , вписанный в  $S$ . Площадь  $A(\Pi_{mn})$  его боковой поверхности равна

$$A(\Pi_{mn}) = 2\pi \frac{\sin(\pi/n)}{(\pi/n)} \sqrt{1 + 4m^2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{n} \right)^2}.$$

Если  $m$  и  $n \rightarrow +\infty$ , то длины сторон упомянутых треугольников стремятся к нулю и поэтому естественно было бы ожидать, что площади боковых поверхностей вписанных многоугольников стремятся к некоторому пределу, а именно к площади боковой поверхности цилиндра, равной  $(2\pi \cdot 1) \cdot 1 = 2\pi$  (площадь боковой поверхности прямого кругового цилиндра вычисляется по известной формуле  $2\pi r h$ , где  $r$  — радиус основания, а  $h$  — высота цилиндра). Однако мы увидим, что результат зависит от относительных скоростей возрастания  $m$  и  $n$ .

Заметим сначала, что при  $n \rightarrow +\infty$  предел множителя, стоящего перед радикалом в формуле для  $A(\Pi_{mn})$ , равен  $2\pi$ , а подкоренное выражение не меньше 1. Поэтому, если  $A(\Pi_{mn})$  имеет предел, то он должен быть не меньше  $2\pi$ . Теперь обратим внимание на выражение под радикалом, точнее на функцию

$$f(m, n) = 2m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 m}{n^2} - \frac{2\pi^4 m}{4! n^4} + \frac{2\pi^6 m}{6! n^6} - \dots$$

Рассмотрим три случая:

(i) Если  $m = n$ , то

$$f(n, n) = 2n \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2}{n} - \frac{2\pi^4}{4! n^3} + \dots$$

Следовательно,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, n) = 0$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{nn}) = 2\pi$ .

(ii) Если же  $m = [an^2]$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа (функция  $[x]$  определена во второй главе) и если  $0 < a < +\infty$ , то

$$f([an^2], n) = 2[an^2] \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \frac{\pi^2 [an^2]}{n^2} - \frac{2\pi^4 [an^2]}{4! n^4} + \dots$$

Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f([an^2], n) = a\pi^2$ , а  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{[an^2], n}) = 2\pi \sqrt{1 + a^2\pi^4}$ .

(iii) Наконец, если  $m = n^3$ , то

$$f(n^3, n) = 2n^3 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \pi^2 n - \frac{2\pi^4}{4! n} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n^3, n) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{n^3, n}) = +\infty.$$

В заключение отметим, что в зависимости от способа стремления  $m$  и  $n$  к бесконечности в качестве предела  $A(\Pi_{mn})$  может получиться любое конечное или бесконечное число, не меньшее  $2\pi$ . Хотя предел  $\lim_{m, n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{mn})$  не существует, но можно утверждать, что

$$\lim_{m, n \rightarrow +\infty} A(\Pi_{mn}) = 2\pi.$$

Приведенный выше пример принадлежит Г. А. Шварцу (*Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, vol. 2, p. 309, Berlin, Julius Springer, 1890). Он показывает, что понятие *площади поверхности* гораздо сложнее понятия *длины дуги*. Подробное рассмотрение этих понятий и дальнейшие ссылки можно найти в [42]. Элементарные сведения о площади поверхности см. в [36], стр. 610—635 (а также [52]\*, т. III, стр. 248—257).

8. Для любых двух положительных чисел  $\varepsilon$  и  $M$  в трехмерном пространстве существует поверхность  $S$ , такая, что
- (a)  $S$  гомеоморфна поверхности сферы;
  - (b) площадь поверхности  $S$  существует и меньше  $\varepsilon$ ;
  - (c) мера Лебега в трехмерном пространстве поверхности  $S$  существует и больше  $M$

Этот пример принадлежит А. С. Безиковичу (см. [6]). При его построении используются идеи, подобные тем, на которые опиралось построение простой дуги положительной плоской меры (пример 10 гл. 10), однако само построение в данном случае гораздо сложнее. Для его полного описания потребовалось бы ввести определение площади поверхности, и потому мы не будем вдаваться в подробности.

Обсудим некоторые интересные аспекты примера 8.

а. Существует некоторая аналогия между примером 8 и примером 5. В обоих случаях граница тел „массивнее“ их внутренности. Однако линейная мера (длина) кривой в примере 5 бесконечна, в то время как плоская мера (площадь) поверхности в примере 8 конечна и мала.

б. Вспомним известные соотношения между объемом куба и его боковой поверхностью, а также между объемом шара

и его боковой поверхностью. Объем куба =  $\frac{1}{6} \times$  длина ребра  $\times$  площадь поверхности, а объем шара =  $\frac{1}{3} \times$  длина радиуса  $\times$  площадь поверхности. Эти соотношения могут навести на мысль, что если мала площадь замкнутой поверхности одновременно с объемом трехмерной области, которую она ограничивает, то должна быть мала и мера этой поверхности, рассматриваемая в трехмерном пространстве. Пример 8 показывает, что это не так.

с. Можно построить прямую цилиндрическую „банку“ конечной высоты, в основании которой лежит неспрямляемая жорданова кривая, имеющую конечный объем (меру в трехмерном пространстве), но бесконечную площадь поверхности. (Таким образом, эту „банку“ можно наполнить краской, но всю ее поверхность закрасить не удастся!) Этот пример в некотором смысле двойствен примеру 8.

**9. Плоское множество сколь угодно малой плоской меры, внутри которого направление отрезка единичной длины можно поменять на обратное непрерывным движением**

Этот пример был построен в 1928 г. А. С. Безиковичем как решение проблемы, поставленной в 1917 г. С. Какея. (См. [4], [5] и [21], а также [7], где приводятся наиболее полные сведения.)

## ГЛАВА 12

### МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

#### Введение

Метрическим пространством называется упорядоченная пара  $(X, d)$ , где  $X$  — непустое множество; а  $d$  — действительнозначная функция, определенная на  $X \times X$ , причем

(i)  $d$  строго положительна:

$$x \in X \Rightarrow d(x, x) = 0,$$

$$x \text{ и } y \in X, x \neq y \Rightarrow d(x, y) > 0;$$

(ii) справедливо неравенство треугольника:

$$x, y \text{ и } z \in X \Rightarrow d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

Из (i) и (ii) сразу следует, что

(iii)  $d$  симметрична:

$$x \text{ и } y \in X \Rightarrow d(x, y) = d(y, x).$$

Функция  $d$  называется метрикой метрического пространства  $(X, d)$ , а число  $d(x, y)$  — расстоянием между точками  $x$  и  $y$ . Когда из контекста ясно, о какой метрике идет речь, можно использовать одну букву  $X$  для обозначения как метрического пространства, так и множества его точек.

Топологическим пространством называется упорядоченная пара  $(X, \mathcal{O})$ , где  $X$  — непустое множество, а  $\mathcal{O}$  — семейство подмножеств из  $X$ , такое, что

(i)  $\emptyset \in \mathcal{O}$  и  $X \in \mathcal{O}$ ,

(ii)  $\mathcal{O}$  замкнуто относительно операции пересечения конечного числа подмножеств:

$$O_1, \dots, O_n \in \mathcal{O} \Rightarrow O_1 \cap \dots \cap O_n \in \mathcal{O},$$

где  $n$  — произвольное натуральное число;

(iii)  $\mathcal{O}$  замкнуто относительно операции объединения:

$$(\lambda \in \Lambda \Rightarrow O_\lambda \in \mathcal{O}) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O},$$

где  $\Lambda$  — произвольное непустое множество индексов.

Семейство  $\mathcal{O}$  называется топологией топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$ , а элементы этого семейства — открытыми множествами. Семейство  $\mathcal{O}$  называют также топологией множества  $X$ . Если же из контекста ясно, какое семейство открытых множеств имеется в виду, то одна и та же буква может быть использована как для обозначения топологического пространства, так и множества его точек. Очевидно, условие (ii) эквивалентно такому же условию при  $n = 2$ . Топологическое пространство  $(Y, \mathcal{J})$  называется подпространством топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$ , если  $Y \subset X$  и  $\mathcal{J} = \{Y \cap O | O \in \mathcal{O}\}$ ; в этом случае говорят, что топология  $\mathcal{J}$  индуцируется топологией  $\mathcal{O}$ .

Множество называется замкнутым, если его дополнение открыто. Открытым покрытием множества  $A$  называется класс открытых множеств, объединение которых содержит  $A$ . Множество  $C$  называется компактным, если каждое открытое покрытие  $C$  содержит конечное подпокрытие. Топологическое пространство называется хаусдорфовым, если для любых двух его различных точек  $x$  и  $y$  существуют два непересекающихся открытых множества, одно из которых содержит  $x$ , а другое —  $y$ . В любом хаусдорфовом пространстве каждое компактное множество замкнуто. Говорят, что точка  $p$  является предельной точкой множества  $A$ , если каждое открытое множество, содержащее  $p$ , содержит по крайней мере одну точку из  $A \setminus \{p\}$ . Замыканием  $\bar{A}$  множества  $A$  называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих  $A$ . Оно состоит из всех точек, которые являются либо элементами  $A$ , либо предельными точками  $A$ . Замыкание любого множества  $A$  замкнуто. Множество  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда оно совпадает со своим замыканием, т. е.  $A = \bar{A}$ . Локально компактным пространством называется топологическое пространство, каждая точка которого содержится в некотором открытом множестве, замыкание которого компактно.

Базисом топологии топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$  называется подсемейство  $\mathcal{J}$  семейства  $\mathcal{O}$ , обладающее тем

свойством, что всякий непустой элемент из  $\mathcal{O}$  является объединением некоторой совокупности элементов из  $\mathcal{G}$ . Системой окрестностей топологического пространства  $(X, \mathcal{O})$  называется совокупность  $\mathcal{M}$  упорядоченных пар  $(x, N)$ , такая, что  $x \in N$  для всякой пары  $(x, N) \in \mathcal{M}$ , причем совокупность всех  $N$ , таких, что  $(x, N) \in \mathcal{M}$  является базисом топологии  $\mathcal{O}$ . Примером системы окрестностей является множество всех пар  $(x, A)$ , таких, что  $x \in A$  и  $A \in \mathcal{G}$ , где  $\mathcal{G}$  — некоторый базис топологии пространства  $(X, \mathcal{O})$ . Если  $\mathcal{G}$  — произвольное непустое семейство подмножеств множества  $X$ , то  $\mathcal{G}$  будет базисом некоторой топологии  $\mathcal{O}$  в  $X$ , если выполнены два следующих условия: (i)  $X$  является объединением элементов из  $\mathcal{G}$ , и (ii) если  $G_1$  и  $G_2$  — элементы семейства  $\mathcal{G}$ , пересечение которых не пусто, и  $x \in G_1 \cap G_2$ , то существует элемент  $G \in \mathcal{G}$ , такой, что  $x \in G \subset G_1 \cap G_2$ . Если выполнены условия (i) и (ii), то топология  $\mathcal{O}$ , порожденная семейством  $\mathcal{G}$ , определяется множествами, которые являются объединениями элементов семейства  $\mathcal{G}$ . Последовательность  $\{x_n\}$  точек топологического пространства называется сходящейся к точке  $x$ , а  $x$  называется пределом последовательности  $\{x_n\}$ , если

$\forall$  открытого множества  $O$ , содержащего  $x$ ,

$$\exists m \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}, n > m \Rightarrow x_n \in O.$$

Во всяком хаусдорфовом пространстве сходящаяся последовательность имеет единственный предел.

Если  $\mathcal{O}_1$  и  $\mathcal{O}_2$  — две топологии в одном и том же множестве  $X$  и если  $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ , то говорят, что  $\mathcal{O}_1$  слабее  $\mathcal{O}_2$ , а  $\mathcal{O}_2$  сильнее  $\mathcal{O}_1$ . Самой слабой из всех топологий в  $X$  является *тривиальная топология*  $\mathcal{O} \equiv \{\emptyset, X\}$ , а самой сильной — *дискретная топология*  $\mathcal{O} \equiv 2^X$ , состоящая из *всех* подмножеств множества  $X$ .

Если  $(X, d)$  — метрическое пространство и  $x \in X$ , то окрестностью (или сферической окрестностью) точки  $x$  называется множество вида

$$\{y | y \in X, d(x, y) < \varepsilon\},$$

где  $\varepsilon > 0$  ( $x$  называется *центром*, а  $\varepsilon$  — *радиусом* этой сферической окрестности). Сферическую окрестность иногда называют *открытым шаром*. Множество всех сферических окрестностей любого метрического пространства удовлетворяет

двум упомянутым выше условиям и порождает топологию метрического пространства. Множество всех упорядоченных пар  $(x, N)$ , где  $N$  — сферическая окрестность точки  $x$ , является системой окрестностей этой топологии. Топологическое пространство  $(X, \mathcal{O})$  называется метризуемым, если в  $X$  существует такая метрика  $d$ , что  $\mathcal{O}$  является топологией метрического пространства  $(X, d)$ . *Замкнутым шаром* метрического пространства  $(X, d)$  называют множество вида

$$\{y | y \in X, d(x, y) \leq \varepsilon\},$$

где  $x \in X$ , а  $\varepsilon > 0$  ( $x$  называется *центром*, а  $\varepsilon$  — радиусом шара). Всякий замкнутый шар есть замкнутое множество. Часто вместо „замкнутый шар“ говорят просто „шар“. Множество в метрическом пространстве называется ограниченным, если оно является подмножеством некоторого шара. Если пространство  $(X, d)$  ограничено, то  $d$  называется ограниченной метрикой. Если метрические пространства  $(X, d)$  и  $(X, d^*)$  имеют одну и ту же топологию, то говорят, что метрики  $d$  и  $d^*$  эквивалентны. Пусть  $(X, d)$  — произвольное метрическое пространство. Метрика  $d^*$ , определенная формулой

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)},$$

является ограниченной метрикой, эквивалентной  $d$ . Таким образом, всякое метризуемое пространство можно метризовать с помощью ограниченной метрики. В любом конечномерном евклидовом пространстве с обычной евклидовой метрикой множество является компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Последовательность  $\{x_n\}$  точек в метрическом пространстве  $(X, d)$  называется фундаментальной последовательностью (или последовательностью Коши), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \exists \left. \begin{array}{l} m \text{ и } n \in \mathbb{N} \\ m > K \text{ и } n > K \end{array} \right\} \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Метрическое пространство называется полным, если каждая фундаментальная последовательность точек этого пространства сходится (к некоторой точке пространства). В противном случае пространство называется неполным. Такие понятия, как

*связное множество, вполне несвязное множество и совершенное множество*, определяются точно так же, как и в евклидовых пространствах (см. введение к гл. 10).

Говорят, что топологическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, если существует счетный базис его топологии. Множество в топологическом пространстве называется *всюду плотным*, если его замыкание совпадает со всем пространством. Топологическое пространство называется *сепарабельным*, если оно содержит счетное всюду плотное множество. Метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности тогда и только тогда, когда оно сепарабельно.

Если  $(X, \mathcal{O})$  и  $(Y, \mathcal{J})$  — топологические пространства, а  $f$  — отображение  $X$  в  $Y$ , то  $f$  называется *непрерывным*, если  $B \in \mathcal{J} \Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{O}$ ; — *открытым*, если  $A \in \mathcal{O} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{J}$ ; — *замкнутым*, если  $A' \in \mathcal{O} \Rightarrow (f(A))' \in \mathcal{J}$ . Если  $f$  — отображение топологического пространства  $X$  на топологическое пространство  $Y$ , то  $f$  называется *гомеоморфизмом* (или *топологическим отображением*), если  $f$  взаимно однозначно, а  $f$  и  $f^{-1}$  непрерывны.

Пусть  $V$  — аддитивная группа с элементами  $x, y, z, \dots$ , а  $F$  — поле с элементами  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ . Тогда  $V$  называется *векторным пространством* (или *линейным пространством*) над полем  $F$ , если существует функция  $(\lambda, x) \rightarrow \lambda x$ , отображающая  $F \times V$  в  $V$  и такая, что для всех  $\lambda$  и  $\mu$  из  $F$  и  $x$  и  $y$  из  $V$  выполнены следующие условия:

- (i)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ,
- (ii)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ,
- (iii)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ,
- (iv)  $1 \cdot x = x$ .

Точки векторного пространства называют также *векторами*. Пусть  $F$  обозначает либо поле  $\mathbf{R}$  действительных чисел, либо поле  $\mathbf{C}$  комплексных чисел. Векторное пространство  $V$  над полем  $F$  называется *нормированным*, если существует действительнозначная норма  $\| \cdot \|$ , удовлетворяющая для всех  $x$  и  $y$  из  $V$  и  $\lambda$  из  $F$  следующим условиям:

- (v)  $\|x\| \geqslant 0$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ,
- (vi)  $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ ,
- (vii)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ .

Каждое нормированное векторное пространство является метрическим пространством с метрикой  $d(x, y) = \|x - y\|$ . Банаховым пространством называется полное нормированное векторное пространство.

Дальнейшие сведения о топологических пространствах и отображениях см. в [11], [12], [13], [14], [23], [27], [48], [54] и [56], о векторных пространствах — в [19], о банаховых пространствах — в [3] и [29].

## 1. Убывающая последовательность непустых замкнутых ограниченных множеств с пустым пересечением

Введем в пространстве  $\mathbf{R}$  ограниченную метрику  $d(x, y) \equiv \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$  и положим  $F_n \equiv [n, +\infty)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .

Тогда каждое множество  $F_n$  замкнуто и ограничено,

$$\text{а } \bigcap_{n=1}^{+\infty} F_n = \emptyset.$$

Настоящий пример невозможен в конечномерном евклидовом пространстве с обычной евклидовой метрикой, поскольку всякая убывающая последовательность непустых компактных множеств имеет непустое пересечение.

## 2. Неполное метрическое пространство с дискретной топологией

Пространство  $(\mathbf{N}, d)$  натуральных чисел с метрикой  $d(m, n) = |m - n|/mn$  имеет дискретную топологию, поскольку в нем всякое одноточечное множество открыто. Однако оно неполно, так как расходящаяся последовательность  $\{n\}$  фундаментальна.

Этот пример показывает, что *полнота не является топологическим свойством*, поскольку пространство  $\mathbf{N}$  с обычной метрикой и полно, и дискретно. Иными словами, два метрических пространства могут быть гомеоморфными даже в том случае, если одно из них полно, а другое нет. Другим примером таких пространств являются два гомеоморфных интервала  $(-\infty, +\infty)$  и  $(0, 1)$ , из которых полным в обычной метрике  $\mathbf{R}$  является лишь первый.