

3. Убывающая последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве

Рассмотрим пространство (\mathbb{N}, d) натуральных чисел с метрикой

$$d(m, n) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n, \\ 0, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

и положим

$$B_n = \{m \mid d(m, n) \leq 1 + 1/2n\} = \{n, n+1, \dots\}$$

для $n = 1, 2, \dots$. Тогда $\{B_n\}$ удовлетворяет требуемым условиям, а пространство полно, поскольку каждая фундаментальная последовательность является „почти постоянной“.

Если не требовать полноты пространства, то можно привести совсем тривиальные примеры — например, последовательность $\{y \mid |1/n - y| \leq 1/n\}$ в пространстве \mathbf{P} положительных чисел с обычной метрикой пространства \mathbf{R} . С другой стороны, такой пример становится невозможным, если полное пространство является банаховым (см. [18]).

Настоящий пример (см. [48]) представляет интерес в связи с теоремой Бэра (см. пример 7 гл. 8, а также [2], [3], [27] и [54]), утверждающей, что *каждое полное метрическое пространство является множеством второй категории* или эквивалентно, что пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве всюду плотно. При доказательстве этой теоремы строится убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а потому она имеет непустое пересечение. Таким образом, мы видим, что если шары уменьшаются, они должны иметь общую точку, в противном же случае такая точка может и не существовать.

4. Открытый шар O и замкнутый шар B с общим центром и равными радиусами, такие, что $B \neq \bar{O}$

Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки, и пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Далее пусть x — произвольная точка множества X , а O и B — соответственно открытый и замкнутый шары с центром в точке x и радиусом 1. Тогда

$$O = \{x\}, \quad B = X,$$

и так как топология дискретна, то $\bar{O} = O \neq B$.

Подобный пример невозможен в любом нормированном векторном пространстве. (Доказательство этого факта предоставляется читателю в качестве упражнения.)

5. Замкнутые шары B_1 и B_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно, такие, что $B_1 \subset B_2$, а $r_1 > r_2$

Пусть (X, d) — метрическое пространство, состоящее из всех точек (x, y) замкнутого круга в евклидовой плоскости

$$X \equiv \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

с обычной евклидовой метрикой. Положим $B_2 \equiv X$, а

$$B_1 \equiv B_2 \cap \{(x, y) | (x - 2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Тогда $B_1 \subset B_2$, а $r_1 = 4 > r_2 = 3$.

Подобный пример нельзя построить ни в каком нормированном векторном пространстве, поскольку в этом пространстве радиус любого шара равен половине его диаметра. (Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.)

6. Топологическое пространство X и его подмножество Y , такие, что множество предельных точек Y не замкнуто

Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки. Наделим его тривиальной топологией $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. Если y — произвольный элемент из X , то положим $Y = \{y\}$. Тогда предельными точками множества Y будут все точки X , за исключением самой точки y . Таким образом, множество предельных точек совпадает с $X \setminus Y$, а так как Y не является открытым, то $X \setminus Y$ не замкнуто.

7. Топологическое пространство, в котором предел последовательности не единствен

Первый пример. Этим свойством обладает всякое пространство, наделенное тривиальной топологией, если оно содержит более одной точки. В самом деле, в этом пространстве каждая последовательность сходится к любой его точке.

Второй пример. Пусть X — бесконечное множество. Наделим его топологией \mathcal{O} , состоящей из \emptyset и всех дополнений конечных подмножеств из X . Тогда каждая последовательность различных точек X сходится к любому элементу X .

8. Сепарабельное пространство, обладающее несепарабельным подпространством

Первый пример. Пусть $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$ — пространство действительных чисел с топологией \mathcal{O} , порожденной базисом, состоящим из множеств вида

$$\{x\} \cup (\mathbf{Q} \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)), \quad \varepsilon \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

и пусть (Y, \mathcal{J}) — его подпространство иррациональных чисел с дискретной топологией (оно действительно является подпространством, ибо всякое одноточечное множество в Y является пересечением Y и некоторого элемента из \mathcal{O}). Тогда \mathbf{Q} будет счетным всюду плотным подмножеством $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$, однако в (Y, \mathcal{J}) не существует счетного всюду плотного подмножества.

Второй пример. Пусть (X, \mathcal{O}) — пространство всех точек (x, y) евклидовой плоскости, таких, что $y \geq 0$, и пусть \mathcal{O} — топология, порожденная базисом, состоящим из множеств следующих двух типов:

$$\{(x, y) \mid [(x - a)^2 + (y - b)^2]^{1/2} < \min(b, \varepsilon)\},$$

$$a \in \mathbf{R}, \quad b > 0, \quad \varepsilon > 0,$$

$$\{(a, 0)\} \cup \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 < \varepsilon^2\}, \quad a \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда множество $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}\}$ есть счетное всюду плотное подмножество в (X, \mathcal{O}) , однако пространство $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y = 0\}$, наделенное дискретной топологией, является подпространством пространства (X, \mathcal{O}) , не имеющим счетного всюду плотного подмножества. (См. [2], стр. 29, 5°.)

9. Сепарабельное пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности

Любой из двух примеров предыдущего пункта удовлетворяет требуемым условиям, поскольку (1) каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно и (2) любое его подпространство также удовлетворяет

второй аксиоме счетности. Если бы какое-либо из пространств предыдущего пункта удовлетворяло второй аксиоме счетности, то рассматриваемые подпространства были бы сепаральными.

10. Множество с различными топологиями, имеющими одни и те же сходящиеся последовательности

Первый пример. Пусть (X, \mathcal{O}) — произвольное несчетное пространство, топология \mathcal{O} которого определяется пустым множеством \emptyset и дополнениями всех счетных (возможно, пустых или конечных) множеств. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к x тогда и только тогда, когда $x_n = x$ для n , превосходящего некоторое $m \in \mathbb{N}$. Иными словами, сходящимися последовательностями являются те и только те последовательности, которые сходятся в пространстве (X, \mathcal{J}) , где \mathcal{J} — дискретная топология; при этом очевидно, что $\mathcal{O} \neq \mathcal{J}$.

Второй пример. Пусть X — множество всех порядковых чисел, не превосходящих Ω , где Ω — первое порядковое число, соответствующее несчетному множеству. (См. [49] и [54].) Далее пусть \mathcal{O} — топология, порожденная интервалами

$$[1, \beta), \quad (a, \beta) \quad (a, \Omega],$$

где a и $\beta \in X$. Так как каждое счетное множество из $X \setminus \{\Omega\}$ имеет верхнюю грань, принадлежащую $X \setminus \{\Omega\}$, то никакая последовательность точек из $X \setminus \{\Omega\}$ не может сходиться к Ω . Следовательно, последовательность точек в X сходится к Ω тогда и только тогда, когда все ее члены, за исключением конечного числа, равны Ω . Другими словами, сходящиеся в X последовательности совпадают с теми, которые сходятся в топологии, полученной присоединением к *подпространству* $X \setminus \{\Omega\}$ пространства X точки Ω как *изолированной* точки (это означает, что $\{\Omega\}$ есть одноточечное открытое множество нового пространства X).

Третий пример. (Определения и дальнейшие подробности см. в [3] и [29].) Пусть X — банахово пространство l_1 действительных (или комплексных) последовательностей $x = \{x_n\}$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ с нормой $\|x\| \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$. Сильной топологией пространства X назы-

вается топология метрического пространства (X, d) с метрикой $d(x, y) \equiv \|x - y\|$.

Определим теперь в X другую топологию, называемую слабой, при помощи следующей системы окрестностей:

$$N_x \equiv \left\{ y = \{y_n\} \mid \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n - x_n) \right| < \varepsilon, m = 1, 2, \dots, p \right\},$$

где $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а (a_{mn}) — ограниченная матрица с p строками и бесконечным числом столбцов. Можно показать, что $\{N_x\}$ удовлетворяет сформулированным в введении условиям и порождает топологическое пространство (X, \mathcal{G}) .

Чтобы доказать, что сильная топология X действительно сильнее слабой топологии, мы покажем, что любая окрестность произвольной точки x в слабой топологии содержит некоторую сферическую окрестность этой точки. Это сразу же следует из неравенства треугольника для действительных рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n - x_n) \right| \leq K \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n| = K \|y - x\|,$$

где K — верхняя грань множества абсолютных значений элементов матрицы (a_{mn}) . Чтобы доказать, что сильная топология строго сильнее слабой, покажем, что *каждая окрестность в слабой топологии не ограничена в метрике сильной топологии* (и, следовательно, никакая окрестность в слабой топологии не может быть подмножеством какой-либо окрестности в сильной топологии). Пусть (a_{mn}) — матрица с p строками и бесконечным числом столбцов для некоторой окрестности N_x в слабой топологии, $(z_1, z_2, \dots, z_{p+1})$ — нетривиальный $(p+1)$ -мерный вектор, такой, что

$$\sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0 \quad \text{для } m = 1, 2, \dots, p.$$

Далее положим $z_{p+2} = z_{p+3} = \dots = 0$. Тогда вектор $y(a) \equiv x + az = \{y_n(a)\} = \{x_n + az_n\}$ принадлежит N_x для любого действительного a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} (y_n(a) - x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} az_n = a \sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0,$$

$$m = 1, 2, \dots, p.$$

С другой стороны, $\|y(a) - x\| = \|az\| = |a| \cdot \|z\|$, а $\|z\| \neq 0$.

Теперь обратимся к последовательностям точек в X . Мы уже знаем, что всякая последовательность точек в X , которая сходится к x в сильной топологии, должна сходиться к x и в слабой топологии. Докажем обратное: если $\lim_{m \rightarrow +\infty} x^{(m)} = x$ в слабой топологии, то $\lim_{m \rightarrow +\infty} x^{(m)} = x$ в сильной топологии. Отсюда будет следовать, что слабая и сильная топологии в X определяют одни и те же сходящиеся последовательности.

Предположим, что существует последовательность, сходящаяся к x в слабой топологии, но не сходящаяся к x в сильной топологии. В силу линейного характера операции предельного перехода мы можем предположить, не теряя в общности, что x есть нулевой вектор. Более того, если рассматриваемая последовательность не сходится к нулю в сильной топологии, то из нее можно выделить подпоследовательность, нормы элементов которой отделены от 0. Если обозначить эту подпоследовательность через $\{x^{(m)}\}$, то найдется положительное число ε , такое, что

$$\|x^{(m)}\| \geqslant 5\varepsilon$$

для $m = 1, 2, \dots$. Так как $\{x^{(m)}\}$ — подпоследовательность некоторой последовательности, сходящейся к 0 в слабой топологии, то $\{x^{(m)}\}$ также должна сходиться к 0 в слабой топологии. Если мы запишем $x^{(m)}$ в виде

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \dots, x_n^{(m)}, \dots),$$

то последовательность $\{x^{(m)}\}$ может быть представлена бесконечной матрицей M , каждая строка которой соответствует одному из векторов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, опираясь на сходимость $\{x^{(m)}\}$ к нулю в слабой топологии, что каждый столбец матрицы M есть действительная последовательность, сходящаяся к 0, т. е. что при $m \rightarrow +\infty$ предел n -й координаты $x^{(m)}$ для всякого фиксированного $n = 1, 2, \dots$ равен 0, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_n^{(m)} = 0.$$

Но это непосредственно следует из рассмотрения окрестности нуля, задаваемой матрицей (a_{mn}) , состоящей из одной строки, на n -м месте которой стоит 1, а на остальных 0.

Теперь мы можем по индукции построить две строго возрастающие последовательности натуральных чисел $m_1 < m_2 < \dots$ и $n_1 < n_2 < \dots$, такие, что для $j \in \mathbb{N}$

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{n_j} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon, \quad \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} |x_n^{(m_j)}| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$(b) \quad \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| > 3\varepsilon.$$

Наконец, определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq n < n_1, \\ \operatorname{sgn} x_n^{(m_j)}, & \text{если } n_j + 1 \leq n \leq n_{j+1} \end{cases}$$

для $j = 1, 2, \dots$. Если N_0 — окрестность нулевого вектора, определяемая числом ε и матрицей (a_{mn}) , состоящей из одной строки, составленной из членов $\{a_n\}$,

$$N_0 = \left\{ y = \{y_n\} \mid \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \right| < \varepsilon \right\},$$

то никакая точка $x^{(m_j)}$ подпоследовательности $\{x^{(m_j)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ не является элементом N_0 :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| &\geq \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} |x_n^{(m_j)}| - \left| \sum_{n=1}^{n_j} a_n x_n^{(m_j)} \right| - \\ &\quad - \left| \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Но это означает, что $\{x^{(m)}\}$ не может сходиться к 0. (Противоречие.)

11. Пример топологического пространства X , множества $A \subset X$ и предельной точки этого множества, не являющейся пределом никакой последовательности точек из A

Первый пример. Пусть X — пространство из первого примера п. 10, и пусть A — какое-либо несчетное правильное (или собственное) подмножество из X . Тогда любая точка

множества $X \setminus A$ будет предельной точкой A , но поскольку x не может быть пределом последовательности точек из A в дискретной топологии, то это же справедливо и для топологии, описанной в этом примере.

Второй пример. Пусть X — пространство из второго примера п. 10 с топологией, которая была введена в начале примера. Положим $A = X \setminus \{\Omega\}$. Тогда Ω будет предельной точкой A , но никакая последовательность из A не может сходиться к Ω .

Третий пример. (См. [35], где построен аналогичный пример, а также [3], [18], [29] и [31], где даны определения и излагаются дальнейшие сведения.) Пусть X — гильбертово пространство l_2 всех действительных (или комплексных) последовательностей чисел $x = \{x_n\}$, таких, что $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty$ (или $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty$ в комплексном случае). В этом пространстве для любых двух точек $x = \{x_n\}$ и $y = \{y_n\}$ определено скалярное произведение (или внутреннее произведение) $(x, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$ (или $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n$ в комплексном случае).

Это скалярное произведение обладает следующими свойствами для любых $x, y, z \in l_2$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ (с этого момента в настоящем примере рассматривается лишь пространство действительных последовательностей):

- (i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
- (ii) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
- (iii) $(y, x) = (x, y)$,
- (iv) $(x, x) \geq 0$,

(v) если $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, то $\|\cdot\|$ является нормой, относительно которой l_2 является банаховым пространством.

Превратим теперь пространство $X = l_2$ в топологическое пространство (X, \mathcal{O}) , введя в нем систему окрестностей, определенную аналогично тому, как это сделано в третьем примере п. 10:

$$N_x \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y - x, b)| < \varepsilon\},$$

где $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а B — любое непустое конечное множество точек из X .

Пусть A — множество точек $\{x^{(m)}\}$, где $x^{(m)}$ — точка, m -я координата которой равна \sqrt{m} , а все остальные координаты равны нулю, т. е.

$$x^{(m)} = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{m}, 0, \dots).$$

Покажем сначала, что нулевой вектор будет предельной точкой A . Предположим, что окрестность нуля

$$N_0 \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y, b)| < \varepsilon\}$$

(где $\varepsilon > 0$, а B состоит из точек $b^{(1)} = \{b_n^{(1)}\}, \dots, b^{(p)} = \{b_n^{(p)}\}$) не содержит ни одной точки $x^{(m)}$. Это означает, что

$$\forall m \in \mathbb{N} \exists k \in \{1, 2, \dots, p\} \exists |V_m b_m^{(k)}| \geq \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^p \sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^p (b_m^{(k)})^2 \geq \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{m} = +\infty,$$

что противоречит предположению о сходимости ряда $\sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2$ для $k = 1, 2, \dots, p$.

Наконец, покажем, что никакая последовательность точек из A не может сходиться к нулевому вектору. Легко показать, что если

$$x^{(m_1)}, x^{(m_2)}, \dots, x^{(m_j)}, \dots \rightarrow 0,$$

то последовательность m_1, m_2, \dots не ограничена. Следовательно, не ограничивая общности, можно предположить, что $m_1 < m_2 < \dots$ и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{m_j} < +\infty.$$

Чтобы закончить доказательство, определим окрестность N_0 точки 0 при помощи $\varepsilon \equiv 1$ и множества B , состоящего из единственного вектора b , m_j -я координата которого равна $1/\sqrt{m_j}$ для $j = 1, 2, \dots$, а все остальные координаты равны нулю. Тогда никакая точка последовательности $\{x^{(m_j)}\}$ не может принадлежать N_0 , ибо $(x^{(m_j)}, b) = 1$ для $j = 1, 2, \dots$

Четвертый пример. См. пример 12 этой главы.

Отметим, что явление, описанное в настоящих примерах, не может иметь места в метрическом пространстве и, следовательно, ни одно из описанных выше пространств не является метрическим и даже не метризуемо.

12. Неметризуемое топологическое пространство X с функциями в качестве точек и топологией, соответствующей поточечной сходимости

Пусть (X, \mathcal{O}) — пространство всех действительнозначных непрерывных функций, заданных на $[0,1]$, и пусть топология \mathcal{O} порождается системой окрестностей

$$N_f \equiv \{g \mid x \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

где $f \in X$, $\varepsilon > 0$, а F — конечное непустое подмножество замкнутого интервала $[0,1]$. Ясно, что если в этой топологии $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow +\infty$, то $g_n(x) \rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ для каждого $x \in [0,1]$, поскольку в качестве F можно брать одноточечные множества $\{x\}$. С другой стороны, если $g_n(x) \rightarrow g(x)$ при $n \rightarrow +\infty$ для каждого $x \in [0,1]$, то $g_n \rightarrow g$ при $n \rightarrow +\infty$. В самом деле, для каждого $\varepsilon > 0$ и конечного подмножества F интервала $[0,1]$ можно выбрать n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ для каждого $x \in F$.

Пусть A — множество всех функций f из X , таких, что

$$(a) x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1,$$

$$(b) \mu(\{x \mid f(x) = 1\}) \geq 1/2.$$

Тогда 0 является предельной точкой A . Однако если некоторая последовательность $\{f_n\}$ элементов из A сходится к 0 в топологии \mathcal{O} , то $\{f_n(x)\}$ сходится к 0 в каждой точке $x \in [0,1]$. Следовательно, по теореме Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла в случае равномерно ограниченной последовательности функций получим

$\int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Но это противоречит неравенству

$\int_0^1 f_n(x) dx \geq 1/2$. Наконец, принимая во внимание последнее замечание к примеру 11, заключаем, что X не метризуемо.

13. Непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни открытым, ни замкнутым

Первый пример. Пусть функция $f(x) = e^x \cos x$ задана на \mathbb{R} , где определена обычная топология. Легко видеть, что f отображает \mathbb{R} на \mathbb{R} непрерывно, однако множество $f((-\infty, 0))$ не является открытым, а множество $f(\{-n\pi | n \in \mathbb{N}\})$ не является замкнутым.

Второй пример. Возьмем в качестве X пространство \mathbb{R} с дискретной топологией, в качестве Y — пространство \mathbb{R} с обычной топологией и рассмотрим тождественное отображение первого пространства на второе.

14. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся одновременно открытым и замкнутым, но не являющееся непрерывным

Первый пример. Пусть X — единичная окружность $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть Y — полуоткрытый интервал $[0, 2\pi)$ с топологией, индуцированной обычной топологией в \mathbb{R} . Наконец, пусть f — отображение $(x, y) \rightarrow \theta$, где $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ и $0 \leq \theta < 2\pi$. Тогда f одновременно и открыто, и замкнуто, поскольку обратное отображение непрерывно. Однако f разрывно в точке $(1, 0)$.

Второй пример. Отображение, обратное к отображению из второго примера п. 13.

15. Замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни открытым

Пусть X — единичная окружность $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть Y — полуоткрытый интервал $[0, \pi)$ с топологией, индуцированной обычной топологией в \mathbb{R} . Наконец, пусть f — отображение

$$(\cos \theta, \sin \theta) \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \theta - \pi, & \text{если } \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда f не является открытым, так как открытая верхняя полуокружность из X отображается в точку. Кроме того, f не является непрерывным в точке $(1, 0)$ (см. первый пример п. 14). Однако, как мы сейчас убедимся, f замкнуто. Предположим противное, т. е. что f не замкнуто. Тогда в X существует замкнутое множество A , такое, что $B \equiv f(A)$ не замкнуто в Y . Следовательно, существует последовательность $\{b_n\}$ точек из B , такая, что $b_n \rightarrow b$, а $b \notin B$. Пусть $f(p_n) = b_n$, где $p_n \in A$ для $n = 1, 2, \dots$. Поскольку A компактно, то без ограничения общности можно предположить, что $\{p_n\}$ сходится, $p_n \rightarrow p \in A$. Но так как $f(p_n) \rightarrow b \neq f(p)$, то f разрывно в точке p и, следовательно, $p = (1, 0)$. Это означает, что существует подпоследовательность последовательности $\{p_n\}$, стремящаяся к точке $(1, 0)$ либо по верхней, либо по нижней полуокружности. В первом случае $b_n \rightarrow 0 \in B$, а во втором случае $\{b_n\}$ не может сходиться в Y . Итак, в обоих случаях получено противоречие; следовательно, f замкнуто.

16. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся непрерывным и открытым, но не являющееся замкнутым

Пусть (X, \mathcal{O}) —евклидова плоскость с обычной топологией, (Y, \mathcal{J}) —пространство \mathbf{R} с обычной топологией, и, наконец, пусть отображение f есть проектирование $P: (x, y) \rightarrow x$. Тогда P , очевидно, непрерывно и открыто, однако $P(\{(x, y) | y = 1/x > 0\})$ не замкнуто в (Y, \mathcal{J}) .

17. Открытое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни замкнутым

Первый пример. Пусть $X = Y = \mathbf{R}$ с обычной топологией, и пусть f —функция, определенная в примере 27 гл. 8, множество значений которой на всяком непустом открытом интервале совпадает с \mathbf{R} . Эта функция, очевидно, является открытым отображением, поскольку образ всякого непустого открытого множества есть \mathbf{R} . Кроме того, f всюду разрывана. Покажем, что отображение f не замкнуто. Пусть точка

$x_n \in (n, n+1)$ такова, что $\frac{1}{n+1} < f(x_n) < \frac{1}{n}$ для $n=1, 2, \dots$.

Тогда $\{x_n\}$ замкнуто, а $\{f(x_n)\}$ — нет.

Второй пример. Пусть (X, \mathcal{O}) — плоскость с топологией \mathcal{O} , состоящей из пустого множества \emptyset и дополнений счетных множеств, а (Y, \mathcal{J}) — пространство \mathbb{R} с топологией \mathcal{J} , состоящей из пустого множества \emptyset и дополнений конечных множеств. Наконец, в качестве отображения рассмотрим проектирование $P: (x, y) \rightarrow x$. Тогда P открыто, поскольку любое непустое открытое множество в (X, \mathcal{O}) должно содержать некоторую горизонтальную прямую, образ которой есть \mathbb{R} . С другой стороны, P не замкнуто, так как множество точек $(n, 0)$, где $n \in \mathbb{N}$, замкнуто в (X, \mathcal{O}) , а его образ не замкнут в (Y, \mathcal{J}) . Наконец, P не является непрерывным, так как прообраз любого открытого в (Y, \mathcal{J}) множества, которое является правильным подмножеством в Y , не может быть открытым в (X, \mathcal{O}) .

18. Непрерывное замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся открытым

В качестве пространств X и Y возьмем замкнутый интервал $[0, 2]$ с обычной топологией. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 1, & \text{если } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Тогда отображение f , очевидно, непрерывно и, следовательно, замкнуто, так как X и Y — компактные метрические пространства. С другой стороны, множество $f((0, 1))$ не является открытым в Y .

19. Топологическое пространство X и его подпространство Y , содержащее два непересекающихся открытых множества, которые не являются пересечением подпространства Y с непересекающимися открытыми множествами пространства X

Пусть $X = \mathbb{N}$, а открытыми множествами являются \emptyset и дополнения конечных множеств. Пусть далее $Y = \{1, 2\}$. Тогда $\{1\} = Y \cap (X \setminus \{2\})$ и $\{2\} = Y \cap (X \setminus \{1\})$, так что топология подпространства Y дискретна. Однако непересекающиеся открытые множества $\{1\}$ и $\{2\}$ подпространства Y

не являются пересечениями подпространства Y с непересекающимися открытыми множествами пространства X , поскольку любые два непустых открытых множества пространства X пересекаются.

20. Два негомеоморфных топологических пространства, каждое из которых является непрерывным взаимно однозначным образом другого

Первый пример. Пусть X и Y — следующие подпространства пространства \mathbf{R} , наделенного обычной топологией:

$$X = \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((3n, 3n+1) \cup \{3n+2\}),$$

$$Y = (X \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Определим отображение S пространства X на Y и отображение T пространства Y на X формулами:

$$S(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2, \\ 1, & \text{если } x = 2, \end{cases} \quad T(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}y, & \text{если } y \leq 1, \\ \frac{1}{2}y - 1, & \text{если } 3 < y < 4, \\ y - 3, & \text{если } y \geq 5. \end{cases}$$

Тогда S и T непрерывны, взаимно однозначны и являются отображениями *на*. Однако X и Y не гомеоморфны, так как при любом гомеоморфизме Y на X точка 1 пространства Y не может иметь образа.

Второй пример. Пусть X и Y — множества на плоскости с обычной топологией, указанные на рис. 12. Вертикальные отрезки имеют длины, равные 2, и являются открытыми на верхних концах, а окружности имеют единичные радиусы. Отображение S пространства X на Y определяется следующим образом: верхняя часть рис. 12 при помощи параллельного переноса накладывается на нижнюю так, что горизонтальная прямая множества X отображается на горизонтальную прямую множества Y , окружности D_n — на C_{n+1} , отрезок A_1 — на C_1 , отрезки A_{n+2} — на B_{n+1} , $n \in \mathbb{N}$. Отображение же отрезка A_2 на окружность B_1 определяется отдельно формулами $x = \sin \pi t$, $y = 1 - \cos \pi t$, где $0 \leq t < 2$. Отображение T множества Y на X определим так: нижнюю часть рис. 12 сместим влево и наложим ее на верхнюю так, чтобы окруж-

ность B_1 совпала с D_1 , горизонтальная прямая множества Y — с горизонтальной прямой множества X , окружности C_{n+1} — с D_{n+2} , отрезки B_{n+1} — с A_n , $n \in \mathbb{N}$. Наконец, сегмент C_1 отобразим на окружность D_2 при помощи формул такого же типа, как и выше. Отображения S и T обладают нужными свойствами. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что пространства X и Y не гомеоморфны.

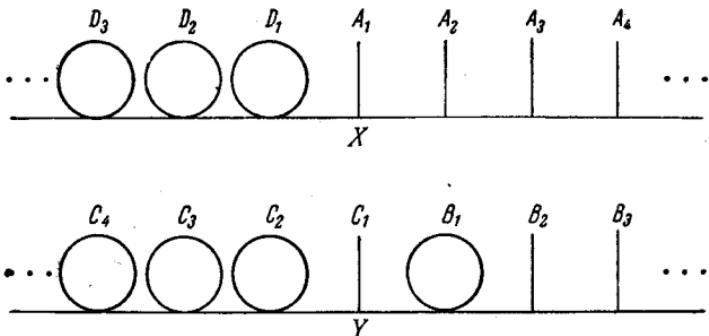


Рис. 12.

21. Разбиение трехмерного евклидова шара B на пять непересекающихся подмножеств S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (при этом S_5 состоит из единственной точки), таких, что при жестких движениях R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 справедливы следующие соотношения:

$$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$$

(Здесь символ \cong означает „конгруэнтен“. См. ссылку, которая следует ниже.)

22. Для любых двух евклидовых шаров B_ϵ и B_M , радиусы которых суть произвольно заданные числа $\epsilon > 0$ и $M > 0$, всегда существует разбиение шара B_ϵ на конечное число непересекающихся подмножеств S_1, S_2, \dots, S_n , таких, что при жестких движениях R_1, R_2, \dots, R_n справедливо, равенство

$$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \dots \cup R_n(S_n)$$

Два последних примера впервые были построены в работах Хаусдорфа, Банаха, Тарского, фон Неймана и Робинсона. Однако мы ограничимся лишь одной ссылкой, где они излагаются наиболее подробно (см. [43]).

ГЛАВА 13

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Функциональным пространством, или пространством функций, называется совокупность функций, имеющих общую область определения D . Обычно предполагается, что функциональное пространство обладает какой-либо алгебраической или топологической структурой. В настоящей главе мы сосредоточим внимание на *алгебраических* структурах некоторых пространств действительнозначных функций действительного переменного, общая область определения которых есть некоторый фиксированный интервал I .

Функциональное пространство S действительнозначных функций, заданных на интервале I , называется векторным пространством (или линейным пространством) над \mathbf{R} (системой действительных чисел), если S замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами, т. е. если

$$f, g \in S, \lambda, \mu \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in S,$$

где функция λf определяется следующим образом:

$$(\lambda f)(x) \equiv \lambda(f(x)).$$

Легко показать, что пространство действительнозначных функций, заданных на некотором интервале, является векторным пространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно двух операций, а именно относительно *сложения* $f + g$ и *умножения на скаляр* λf . Абстрактное понятие *векторного пространства* определено аксиоматически в введении к гл. 12. (Дальнейшие сведения см. в [19] и [15]*.) Многие наиболее важные классы функций, встречающиеся в анализе, являются линейными пространствами над \mathbf{R} (или над полем комплексных чисел \mathbf{C} ; в этом случае коэффициенты λ и μ — произвольные комплексные числа). Примерами пространств действительнозначных функций, которые являются линейными пространствами над \mathbf{R} , могут служить:

1. Совокупность *всех* (действительнозначных) функций на интервале I . 2. Совокупность всех *ограниченных* функций на интервале I . 3. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Риману* на замкнутом интервале $[a, b]$. 4. Совокупность всех функций, *измеримых по Лебегу* на интервале I . 5. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Лебегу* на интервале I . 6. Совокупность всех функций, измеримых на интервале I , p -я степень абсолютных значений которых интегрируема по Лебегу на I ($p \geq 1$). 7. Совокупность всех функций, *непрерывных* на интервале I . 8. Совокупность всех функций, *кусочно непрерывных* на замкнутом интервале $[a, b]$. (См. [36], стр. 131.) 9. Совокупность всех функций, *кусочно гладких* на замкнутом интервале $[a, b]$. (См. [36], стр. 131.) 10. Совокупность всех функций, имеющих производные n -го порядка на интервале I , где n — некоторое фиксированное натуральное число. 11. Совокупность всех функций, имеющих *непрерывные* производные n -го порядка на интервале I , где n — некоторое фиксированное натуральное число. 12. Совокупность всех *бесконечно дифференцируемых* функций на интервале I . 13. Совокупность всех (*алгебраических*) *полиномов* на интервале I . 14. Совокупность всех (*алгебраических*) полиномов на интервале I , степень которых не превосходит некоторого натурального n . 15. Совокупность всех *тригонометрических полиномов* на интервале I , имеющих вид

$$\sum_{i=0}^n a_i \cos ix + \beta_i \sin ix, \quad (1)$$

где n — любое неотрицательное целое число. 16. Совокупность всех тригонометрических полиномов вида (1), где n фиксировано. 17. Совокупность всех *ступенчатых* функций на замкнутом интервале $[a, b]$. 18. Совокупность всех *постоянных функций* на интервале I . 19. Совокупность всех функций, удовлетворяющих данному линейному однородному дифференциальному уравнению на интервале I , например уравнению

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

на интервале I . Если в предыдущих примерах рассматривать комплекснозначные функции, то получим еще девятнадцать примеров линейных пространств над \mathbf{R} .

Линейные пространства играют существенную роль в анализе. Однако существует несколько важных классов действительнозначных функций, которые не являются линейными пространствами. Некоторые из них указаны в следующих пяти примерах: (i) класс всех монотонных функций на интервале $[a, b]$, (ii) класс всех периодических функций на $(-\infty, +\infty)$, (iii) класс всех полунепрерывных функций на интервале $[a, b]$, (iv) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Риману на $[a, b]$, (v) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на $[a, b]$. Можно сказать, что эти пространства являются нелинейными на интервале $[a, b]$.

Пространство S действительных функций, заданных на интервале I , называется алгеброй над \mathbb{R} , если оно замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами и относительно операции произведения функций, т. е. если S есть линейное пространство над \mathbb{R} и

$$f \in S, g \in S \Rightarrow fg \in S.$$

(Точно так же, как и понятие линейного пространства, абстрактное понятие алгебры определяется аксиоматически. См. [19], т. II, стр. 36, 225.) Из тождества

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \quad (2)$$

следует, что линейное функциональное пространство является алгеброй тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции возвведения в квадрат.

Пространство S действительнозначных функций, заданных на интервале I , называется структурой, если оно замкнуто относительно двух бинарных операций \vee и \wedge , которые определяются следующим образом:

$$(f \vee g)(x) \equiv \max(f(x), g(x)),$$

$$(f \wedge g)(x) \equiv \min(f(x), g(x)).$$

(Абстрактное понятие структуры определяется аксиоматически. См. [8].) Вместе с данной действительнозначной функцией f часто рассматриваются неотрицательные функции f^+ и f^- , определяемые следующими равенствами:

$$f^+ \equiv f \vee 0, f^- \equiv (-f) \vee 0. \quad (3)$$

Эти функции связаны такими соотношениями:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \quad (4)$$

$$f^+ = \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f, \quad f^- = \frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f. \quad (5)$$

Отметим также, что для операций максимума и минимума справедливы следующие равенства:

$$f \vee g = -[(-f) \wedge (-g)], \quad (6)$$

$$f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)], \quad (7)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g) + \frac{1}{2}|f - g|, \quad (8)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g) - \frac{1}{2}|f - g|. \quad (9)$$

Из равенств (3) — (9) следует, что линейное функциональное пространство является структурой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно какой-нибудь *одной* из следующих операций:

$$f \vee g, \quad f \wedge g, \quad (10)$$

$$f^+, \quad f^-, \quad |f|. \quad (11)$$

Среди приведенных выше примеров линейных пространств как алгебрами, так и структурами являются пространства примеров 1—4, 7, 8, 17 и 18. Ни алгебры, ни структуры не образуют пространства примеров 14 (см. ниже пример 6), 16 и 19. Пространства примеров 9, 10, 11 (см. ниже пример 7), 12, 13 и 15 являются алгебрами, но не являются структурами. Пространства примеров 5 (см. ниже пример 8) и 6 являются структурами, но не являются алгебрами.

1. Две монотонные функции, сумма которых не монотонна

$$\sin x + 2x \text{ и } \sin x - 2x \text{ на } [-\pi, \pi].$$

2. Две периодические функции, сумма которых не имеет периода

$$\sin x \text{ и } \sin ax \text{ (а иррационально) на } (-\infty, +\infty).$$

Если бы функция $\sin x + \sin ax$ имела отличный от нуля период p , то для любого действительного x были бы

справедливы следующие тождества:

$$\sin(x+p) + \sin(ax+ap) = \sin x + \sin ax,$$

$$\sin(x+p) - \sin x = -[\sin(ax+ap) - \sin ax],$$

$$\cos\left(x+\frac{1}{2}p\right)\sin\left(\frac{1}{2}p\right) = -\cos\left(ax+\frac{1}{2}ap\right)\sin\left(\frac{1}{2}ap\right),$$

$$\cos x \sin\left(\frac{1}{2}p\right) = -\cos(ax)\sin\left(\frac{1}{2}ap\right).$$

Если положить $x = \frac{1}{2}\pi$, то левая часть последнего тождества обратится в нуль. Следовательно, $\sin\frac{1}{2}ap = 0$, а поэтому ap кратно 2π . Если же положить $ax = \frac{1}{2}\pi$, то обратится в нуль правая часть этого тождества. Следовательно, $\sin\frac{1}{2}p = 0$, а поэтому p кратно 2π . Но это противоречит предыдущему, так как a иррационально. (См. [38], стр. 550, замечание.)

3. Две полуунпрерывные функции, сумма которых не является полуунпрерывной

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 2, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \end{cases} \quad g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -2, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда $f(x)$ всюду полуунпрерывна сверху, $g(x)$ всюду полуунпрерывна снизу, однако $f(x) + g(x)$ не является полуунпрерывной в точке $x = 0$.

Возможны и более интересные примеры, когда каждая из функций f и g полуунпрерывна всюду, однако в одних точках эти функции полуунпрерывны сверху, а в других — снизу. Для построения таких примеров условимся, что обозначение p/q , где p и q — целые числа, представляет собой

несократимую дробь, причем $q > 0$. Число нуль будем представлять в виде отношения $0/1$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ -1, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Следовательно, $f(x) + g(x)$ полунепрерывна тогда и только тогда, когда x рационально, т. е. $f + g$ почти всюду не является полунепрерывной.

Теперь рассмотрим следующие три функции:

$$F(x) = \begin{cases} 4/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ -2 - 4/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ -2, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

$$G(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 1 + 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ -1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

$$H(x) = \begin{cases} -1 - 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 3 + 1/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 3, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

Каждая из функций F , G и H полунепрерывна всюду, однако их сумма

$$F(x) + G(x) + H(x) = \begin{cases} -2 + 2/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ нечетно,} \\ 2 - 2/q, & \text{если } x = p/q, q \text{ четно,} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

не является полунепрерывной ни в одной точке.

4. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Риману, но квадрат их суммы не интегрируем по Риману

Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

и

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — алгебраическое число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — трансцендентное число.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \text{ — алгебраическое иррациональное число,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, функции f^2 и g^2 являются постоянными, и, следовательно, они интегрируемы на любом замкнутом интервале, в частности на $[0,1]$. В то же время функция $(f+g)^2$ разрывна всюду и поэтому не интегрируема по Риману *ни на каком* интервале, в частности она не интегрируема на $[0,1]$.

5. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу, но квадрат их суммы не интегрируем по Лебегу

Пусть E_1 — неизмеримое подмножество интервала $[0,1]$, а E_2 — неизмеримое подмножество интервала $[2,3]$. (См. пример 11 гл. 8.) Положим

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \cup E_2, \\ -1, & \text{если } x \in [2,3] \setminus E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [2,3] \cup E_1, \\ -1, & \text{если } x \in [0,1] \setminus E_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Но так как

$$f^2(x) = g^2(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \cup [2,3], \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

а

$$(f(x) + g(x))^2 = \begin{cases} 4, & \text{если } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то отсюда следует требуемый результат, поскольку множество $E_1 \cup E_2$ неизмеримо.

6. Линейное функциональное пространство, не являющееся ни алгеброй, ни структурой

Совокупность полиномов $cx + d$ степени не выше 1 на замкнутом интервале $[0,1]$ образует линейное пространство. Это пространство не является алгеброй, поскольку ему не принадлежит квадрат элемента x . Это пространство не образует и структуры, так как элемент $2x - 1$ принадлежит пространству, а элемент $|2x - 1|$ ему не принадлежит.

7. Линейное функциональное пространство, являющееся алгеброй, но не являющееся структурой

Рассмотрим пространство всех функций, непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$. Как следует из формулы $(fg)' = fg' + f'g$, оно образует алгебру. Однако оно не является структурой. В самом деле, функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^3 \sin 1/x, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, но ее абсолютное значение уже не будет дифференцируемо на бесконечном множестве точек, где $f'(x) = 0$. В действительности же функция $|f(x)|$ даже не является кусочно гладкой.

8. Линейное функциональное пространство, являющееся структурой, но не являющееся алгеброй

Множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на $[0,1]$, является линейным пространством и структурой.

Однако это пространство не образует алгебры, поскольку функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x^{-1/2}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

принадлежит пространству, а ее квадрат ему не принадлежит.

- 9. Две метрики в пространстве $C([0,1])$ функций, непрерывных на $[0,1]$, такие, что дополнения единичного шара в одной из метрик всюду плотно в единичном шаре другой метрики**

Метрики ρ и σ определим следующим образом: для $f, g \in C([0,1])$ положим

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 dx} \equiv \|f - g\|_2,$$

$$\sigma(f, g) = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)| \equiv \|f - g\|_\infty.$$

Пусть $P = \{f \mid \rho(f, 0) \leq 1\}$, $\Sigma = \{f \mid \sigma(f, 0) \leq 1\}$ — единичные шары в этих метриках. Очевидно, $\Sigma \subset P$. Покажем, что дополнение Σ всюду плотно в P . В самом деле, пусть $f \in P$ и $0 < \varepsilon < 1$. Если $\|f\|_\infty > 1$, то $f \notin \Sigma$ и f принадлежит любому шару в метрике ρ с центром в точке f . Если же $\|f\|_\infty \leq 1$, то положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{9} \text{ или } \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{9} \leq x \leq 1, \\ 3, & \text{если } x = \frac{1}{2}, \\ \text{линейна на оставшихся интервалах.} & \end{cases}$$

Тогда $f(x) + g(x) \notin \Sigma$ и

$$\|f - (f + g)\|_2 = \|g\|_2 < \sqrt{9 \cdot (\varepsilon^2/9)} = \varepsilon.$$

Этот последний пример выявляет существенное различие между конечномерными и бесконечномерными нормированными

линейными пространствами. В обоих случаях замкнутый единичный шар обладает тем свойством, что всякая прямая, проходящая через его центр (т. е. совокупность элементов, которые получаются умножением фиксированного ненулевого элемента на всевозможные скаляры), пересекает шар по замкнутому отрезку, средняя точка которого совпадает с центром шара. Тем самым в конечномерном пространстве топология определяется единственным образом. Настоящий пример показывает, что в бесконечномерном пространстве этот факт не имеет места.

БИБЛИОГРАФИЯ

Александров П. С., Колмогоров А. Н.

- [1]*¹⁾ Введение в теорию функций действительного переменного
М.—Л., 1938.

Александров, Хопф (Alexandrov P., Hopf H.)

- [2] Topologie, Springer, Berlin, 1935.

Банах (Banach S.)

- [3] Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932. (На украинском языке: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)

Безикович (Besicovitch A. S.)

- [4] Sur deux questions de l'intégrabilité, *Journ. Soc. Math. et Phys. à l'Univ. à Perm*, 2 (1920).
[5] On Kakeya's problem and a similar one, *Math. Z.*, 27 (1928), 312—320.
[6] On the definition and value of the area of a surface, *Quart. J. Math.*, 16 (1945), 86—102.
[7] The Kakeya problem, Math. Association of America Film, Modern Learning Aids, New York; *Amer. Math. Monthly*, 70, № 7 (1963), 697—706.

Биркгоф Г.

- [8] Теория структур, М., ИЛ, 1952.

Боас (Boas R. P.)

- [9] A primer of real functions, Carus Math. Monographs, № 13, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.

Брауэр (Brouwer L. E. J.)

- [10] Zur Analysis Situs, *Math. Ann.*, 68 (1909), 422—434.

Бурбаки Н.

- [11] Теория множеств, М., изд-во «Мир», 1965.
[12] Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.
[13] Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., Физматгиз, 1959.

Вайдьянатхасвами (Vaidyanathaswamy R.)

- [14] Treatise on set topology, Part 1, Indian Math. Soc., Madras, 1947.

¹⁾ Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.

Гельфанд И. М.

[15]* Лекции по линейной алгебре, М., изд-во «Наука», 1966.

Гобсон (Hobson E. W.)

[16] The theory of functions, Harren Press, Washington, 1950.

Грейвз (Graves L. M.)

[17] Theory of functions of real variables, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т.

[18] Линейные операторы, Общая теория, М., ИЛ, 1962.

Джекобсон (Jacobson N.)

[19] Lectures in abstract algebra, vols. 1 and 2, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1951.

Зигмунд А.

[20] Тригонометрические ряды, т. I и II, М., изд-во «Мир», 1965.

Какея (Kakeya S.)

[21] Some problems on maximum and minimum regarding ovals, *Tôhoku Sci. Reports*, 6 (1917), 71—88.

Каратедори (Carathéodory C.)

[22] Vorlesungen über reelle Funktionen, 2d ed., G. B. Teubner, Leipzig, 1927.

Келли (Kelly J. L.)

[23] General topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New York, 1955.

Кнастер, Куратовский (Knaster B., Kuratowski C.)

[24] Sur les ensembles convexes, *Fund. Math.*, 2 (1921), 201—255.

Колмогоров А. Н.

[25] О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций меньшего числа переменных, *ДАН СССР*, 108 (1956), 179—182.

Кук Р.

[26]* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.

Куратовский К.

[27] Топология, т. I, М., изд-во «Мир», 1966.

Лебег А.

[28] Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., 1934.

Люмис Л.

[29] Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)

- [30] *Compt. Rend. Soc. Sci. et Lettres de Varsovie*, 7 (1914), 322—383, especially 382—383.

Мак-Шейн, Боттс (McShane E. J., Botts T. A.)

- [31] *Real analysis*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. Y., 1959.

Манро (M nroe M. E.)

- [32] *Introduction to measure and integration*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1953.

Натансон И. П.

- [33]* Теория функций вещественной переменной, М., Физматгиз, 1957.

фон Нейман Дж (von Neumann J.)

- [34] *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren*, *Math. Ann.*, 102 (1930), 370—427.

Ньюмен (Newman M. H. A.)

- [35] *Elements of the topology of plane sets of points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1939.

Олмстед (Olmsted J. M. H.)

- [36] *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1961.

- [37] *The real number system*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1962.

- [38] *Real variables*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1956.

Оsgood (Osgood W. F.)

- [39] *A Jordan curve of positive area*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 4 (1903), 107—112.

Пастор (Pastor J. R.)

- [40] *Elementos de la teoria de functiones*, 3d ed., Ibero-Americana, Madrid — Buenos Aires, 1953.

Поллард (Pollard H.)

- [41] *The theory of algebraic numbers*, Carus Math. Monographs, № 9, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

Радо (Rado T.)

- [42] *Length and area*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, 30, New York, 1958.

Робинсон (Robinson R. M.)

- [43] *On the decomposition of spheres*, *Fund. Math.*, 34 (1947), 246—266.

Рудин У.

- [44] Основы математического анализа, М., изд-во «Мир», 1966.

Сакс С.

- [45]* Теория интеграла, М., ИЛ, 1949,

Серпинский (Sierpinski W.)

- [46] *Bull. Intern. Ac. Sciences Cracovie* (1911), 149.
- [47] Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, *Fund. Math.*, 1 (1920), 112—115.
- [48] General topology, University of Toronto Press, Toronto, 1952.
- [49] Cardinal and ordinal numbers, Warsaw, 1958.

Теплиц (Toeplitz O.)

- [50] Über allgemeine lineare Mittelbildungen, *Prace Matematyczne-Fizyczne*, 22 (1911), 113—119.

Титчмарш Е.

- [51] Теория функций, М., Гостехиздат, 1951.

Фихтенгольц Г. М.

- [52]* Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III, М., 1960.

Халмощ П.

- [53] Теория меры, М., ИЛ, 1953.

Хаусдорф Ф.

- [54] Теория множеств, М., Гостехиздат, 1937.

Хенкок (Hancock H.)

- [55] Foundations of the theory of algebraic numbers, Macmillan, New York, 1931.

Холл, Спенсер (Hall D., Spencer G.)

- [56] Elementary topology, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.

Штейнниц (Steinitz E.)

- [57] Bedingte konvergente Reihen und konvexe Systeme, *Journ. für Math.*, 143 (1913), 128—175.

- [58] *Amer. Math. Monthly*, 68, № 1 (1961), 28, Problem 3.

- [59] *Amer. Math. Monthly*, 70, № 6 (1963), 674.

Указатель обозначений

$\in (\notin)$	принадлежит (не принадлежит)	11
\subseteq	является подмножеством	11
\Rightarrow	влечет	11
\Leftrightarrow	тогда и только тогда	11
$\{a, b, c, \dots\}$	множество, состоящее из элементов a, b, c, \dots	11
$\{\dots \dots\}$	множество всех ... таких, что	11
\equiv	равно по определению	11
$A \cup B$	объединение множеств A и B	11
$A \cap B$	пересечение множеств A и B	11
$A \setminus B$	разность множеств A и B	12
A'	дополнение A	12
\emptyset	пустое множество	12
(a, b)	упорядоченная пара	12
$A \times B$	декартово произведение	12
\exists	существует (существуют)	12
\exists	такой, что	12
D_f	область определения f	12
R_f	множество значений f	12
f^{-1}	функция, обратная к f	13
$f: A \rightarrow B, A \xrightarrow{f} B$	функция $f \ni D_f = A, R_f \subseteq B$	14
$f \circ g$	композиция (суперпозиция) f и g $((f \circ g)(x) = f(g(x)))$	14
F	поле	15
G	группа	16
P	множество положительных элементов поля	16
$<, \leqslant, >, \geqslant$	символы упорядочения	17
$ x $	абсолютное значение x	17

(a, b) , $[a, b]$		интервалы упорядоченной системы	17
$(a, b]$, $[a, b)$			18
$(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$			
$[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$			
$(-\infty, +\infty)$			
$N(a, \varepsilon)$		окрестность	18
$D(a, \varepsilon)$		проколотая окрестность	18
$\max(x, y)$		наибольший из элементов x и y	18
$\min(x, y)$		наименьший из элементов x и y	18
$\inf(A), \inf A$		точная нижняя грань A	18
$\sup(A), \sup A$		точная верхняя грань A	18
$x \leftrightarrow x'$		взаимно однозначное соответствие (отображение)	19
\mathbb{R}		система действительных чисел	19
$\operatorname{sgn} x$		специальная функция	19
χ_A		характеристическая функция множества A	19
\mathbb{N}		множество натуральных чисел	19
\mathbb{Q}		поле рациональных чисел	20
\mathbb{B}		кольцо	20
\mathbb{D}		область целостности	20
\mathbb{I}		кольцо целых чисел	21
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$		предел функции в точке	21
\forall		для всех, для произвольного, для каждого	21
$f'(a)$		производная функции $f(x)$ в точке $x = a$	22
$\{a_n\}$		последовательность	22
(x, y)		комплексное число	23
\mathbb{C}		поле комплексных чисел	23
$x + iy$		комплексное число	23
\mathbb{H}		поле рациональных функций	26
Φ		$\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{I}\}$	28
$m \mid n$		m делит n	28
$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$		объединение (пересечение) счетного множества множеств A_1, A_2, \dots	31
$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right)$			
$F(A), I(A), \bar{A}$		граница, ядро, замыкание множества A	31
$\{U_\alpha\}$		открытое покрытие	32
$[x]$		$\sup \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq x\}$	32

$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$	$\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)$	верхний (нижний) предел функции $f(x)$ в точке $x = a$	33
$D(\pm\infty, N)$		проколотая окрестность $\pm\infty$	33
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$		предел функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$	33
$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$		бесконечные пределы	33
F_σ		множество типа F_σ	43
$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} A_n$	$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \right)$	верхний (нижний) предел последова- тельности множеств A_1, A_2, \dots	68
$\sum a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$		бесконечный ряд	71
(t_{ij})		матрица	86
$f^{(n)}(x)$		n -я производная функции $f(x)$	91
σ -кольцо		кольцо	109
\mathfrak{A}		класс множеств	109
\mathfrak{C}		класс компактных множеств	109
$x + A$		сдвиг множества A на число x	109
\mathfrak{B}		класс борелевских множеств	109
\mathfrak{S}		σ -кольцо	109
$\rho \lll \sigma$		мера ρ абсолютно непрерывна отно- сительно σ	110
$X, (X, \mathfrak{S})$		пространство с мерой	110
\mathfrak{B}		класс функций, измеримых по Лебегу	110
μ		мера	110
$\mu_*(\mu^*)$		внутренняя (внешняя) мера	111
C		канторово множество	112
c		мощность множества	111
$D(A)$		разностное множество (множества A)	114
$G_\delta, F_{\sigma\delta}, \dots$		множества типа $G_\delta, F_{\sigma\delta}, \dots$	120
$(r + A) (\text{mod } 1)$		сдвиг (множества A на число r) по модулю 1	121
I		$\{z \mid z \in \mathbb{C}, z = 1\}$	122
I_0		$\{z \mid z = e^{2\pi i\theta}, \theta \in \mathbb{Q}, 0 \leq \theta < 1\}$	122
\tilde{S}		факторгруппа I/I_0	122
$\tilde{\mu}$		мера на I	122
φ		канторова функция	126
$ I $		длина интервала I	136
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, f_x, f_{xy},$			
f_1, f_{21}, \dots		частные производные функции	147

$P dx + Q dy$	дифференциал	159
\vec{F}	векторное поле	161
E_2	евклидова плоскость	163
$d(A, B)$	расстояние между множествами A и B	163
$d(p, q)$	расстояние между точками p и q	163
$\delta(A)$	диаметр множества A	163
\aleph	бесконечное кардинальное число	181
\mathfrak{f}	мощность множества всех замкнутых множеств на плоскости	181
Ψ	первое порядковое число мощности с	181
$A(S), \underline{A}(S), \bar{A}(S)$	площадь, внутренняя площадь, внешняя площадь плоского множества S	187
\mathcal{N}	сетка прямых	187
(X, d)	метрическое пространство	195
d	метрика	195
$d(x, y)$	расстояние между точками x и y	195
(X, \mathcal{G})	топологическое пространство	195
\mathcal{G}	совокупность открытых множеств, топология	196
\mathcal{T}	индуцированная топология	196
\mathcal{B}	базис топологии	196
\mathcal{M}	система окрестностей	197
$(\emptyset, X), 2^X$	тривиальная, дискретная топология	197
$d^*(x, y)$	эквивалентная ограниченная метрика	198
$\ \cdot\ $	норма	199
Ω	первое порядковое число, соответствующее несчетному множеству	204
(x, y)	скалярное произведение элементов x и y	208
$(f \vee g)(x)$	$\max(f(x), g(x))$	218
$(f \wedge g)(x)$	$\min(f(x), g(x))$	218
f^+, f^-	$f \vee 0, (-f) \wedge 0$	218

УКАЗАТЕЛЬ

- Абель Н. Х. 94
Абсолютное значение 17
Аксиома выбора 120
— счетности вторая 199
Алгебра 218
Александров П. С. 53
Архимеда аксиома 25, 27
- Базис Гамеля 47
— топологии 196
Банах С. 215
Безикович А. С. 193, 194
Бесселя неравенство 94
Борелевское множество 109
Бореля мера 110
Бэр Р. 118
Бэра теорема о категориях 118
- Ван дер Варден Б. Л. 42, 53
Вейерштрасс К. В. Т. 53
Векторный потенциал 161
Вольтерра В. 141
Вычитание 16
- Гельвин Ф. 123, 183
Гильберт Д. 48, 169
Главное значение в смысле Коши 60
Граница множества 31
Грань верхняя 18
— нижняя 18
— точная верхняя 18
— — нижняя 18
Группа абелева 16
— коммутативная 16
— мультиликативная 16
— топологическая 123
- Движение жесткое 215
Двоичная дробь 124
- Декартово произведение 12
Деление 16
Делитель 28
— наибольший общий 28
Диаметр множества 163
Дивергенция векторного поля 161
Дифференциал 159
— локально полный 159
— полный 159
Дополнение множества 12
- Евклидова плоскость 163
Единица 27
- Закон ассоциативности 15
— двойственности де Моргана 119
— дистрибутивности 15
— коммутативности 15
— сокращения 21
Замыкание 32
Значение функции 13
- Изоморфизм 19
Интеграл Лебега 96
— Лебега — Стильтьеса 142
— Римана 56
Интервал бесконечный 18
— замкнутый 17
— конечный 17
— открытый 17
— — и замкнутый 18
— полузамкнутый 17
— полуоткрытый 17
- Какея С. 194
Кантор Г. 112
Квантор общности 21
— существования 12

- Класс, замкнутый относительно сдвигов** 109
 — эквивалентности 111
Колмогоров А. Н. 48, 98
Кольцо 20
Композиция функций 14
Контур плоский 167
Координата пары вторая 12
 — — первая 12
Кривая замкнутая 164
 — Пеано 169
 — спрямляемая 164
Круг замкнутый 163
 — минимальный 166
 — открытый 164
- Лебег А.** 45, 97
Ломаная, вписанная в дугу 164
Люксембург В. А. Дж. 137
- Мазуркевич С.** 183
Матрица бесконечная 86
 — Теплица 86
Мера 110
 — абсолютно непрерывная 110
 — Бореля 110
 — внешняя 111
 — внутренняя 111
 — Лебега 110
 — полная 110
Метрика 195
 — ограниченная 198
Множество борелевское 109
 — вполне несвязное 164
 — всюду плотное 27
 — второй категории 118
 — выпуклое 165
 — замкнутое 31
 — значений функции 12
 — измеримое по Лебегу 110
 — индуктивное 19
 — канторово 112
 — — положительной меры 116
 — компактное 32
 — локально связное 164
 — меры нуль 56
 — неизмеримое 120
 — непустое 12
 — нигде не плотное 112
 — открытое 31
 — первой категории 118
- Множество плоское** 163
 — полной меры 129
 — положительной меры 115
 — пустое 12
 — связное 164
 — совершенное 111
 — счетное 32
 — типа F_σ 43
 — типа G_δ 119
- Неравенство Бесселя** 94
 — треугольника 195
Норма 199
Нуль 16
Нуль-множество 110
- Область** 147
 — жорданова 165
 — значений функции 12
 — нежорданова 165
 — односвязная 162
 — определения функции 12
 — целостности поля 20
Оболочка выпуклая 165
Объединение множеств 11
Окрестность точки 18
 — — проколотая 18
 — — сферическая 197
Операция бинарная 15
Осгуд У. Ф. 175
Основная теорема индукции 20
 — — интегрального исчисления 57
Отображение 12
 — взаимно однозначное 12
 — замкнутое 165, 199
 — непрерывное 16, 199
 — открытое 165, 199
 — топологическое 128, 199
- Параметризация** 164
Параметризующие функции 164
Пастор Р. 129
Пеано Дж. 169
Пересечение множеств 11
Площадь 187
 — внешняя 187
 — внутренняя 187
 — поверхности 193
Покрытие открытое 32

- Поле архimedово 25
 — векторное 160
 — — соленоидальное 160
 — полное 16
 — — в смысле Коши 27
 — — упорядоченное 19
 Полином 25
 Полное продолжение меры Бореля 110
 Последовательность Коши 23, 198
 — расходящаяся 22
 — сходящаяся 22
 — фундаментальная 23
 Предел бесконечный 33
 — верхний 33
 — нижний 33
 — функции 21
 — множеств 68
 — последовательности 22
 — — частичный 64
 Преобразование Фурье 96
 Признак Даламбера 79
 — Вейерштрасса 34, 93
 — Коши 80
 Примитивная 57
 Принцип Кавальери 190
 — максимального элемента 111
 Продолжение функции 14
 Проекция пары 12
 — вторая 12
 — первая 12
 Произведение декартово 12
 — рядов по Коши 82
 — скалярное 208
 Производная 22
 Пространство банахово 200
 — гильбертово 208
 — линейное 199
 — локально компактное 196
 — метризуемое 198
 — метрическое 195
 — неполное 198
 — нормированное векторное 199
 — полное 198
 — сепарабельное 199
 — с мерой 110
 — топологическое 195
 — функциональное 215
 — хаусдорфово 196
- Радиус 197
 Разностное множество 114
 Разность множеств 12
 Расстояние между двумя множествами 163
 — — — функциями 59
 Робинсон Р. 215
 Ротор векторного поля 161
 Ряд гармонический 72
 — мажорирующий 72
 — Маклорена 72
 — неотрицательный 71
 — положительный 71
 — расходящийся 71
 — степенной 71
 — сходящийся 71
 — тригонометрический 93
 — условно сходящийся 73
- Свойство Коши 22
 Сдвиг множества 109
 — — по модулю 1, 121
 Серпинский В. 74, 100, 181
 Сигма-кольцо 109
 Система действительных чисел 19
 — окрестностей 197
 Сложение 15
 Соответствие взаимно однозначное 12
 Структура 218
 Сужение функции 14
 Сумма ряда 71
 Сходимость в среднем 143
 — по мере 143
 — почти всюду 142
 — с интегрируемой мажорантой 143
 Сходящаяся последовательность 22
 — — множеств 68
 — — функций 101
- Тарский А. 215
 Теорема Гейне — Бореля 32
 — Дини 107
 — Жордана 165
 — Колмогорова 47
 — Лейбница 75
 — Мертенса 82
 — Мура — Осгуда 152

- Теорема о полном упорядочении 111
 — о среднем значении 53
 Радона — Никодима 146
 Римана 74
 Ролля 30
 Стокса 161
 Стоуна — Вейерштрасса 98
 Теплиц О. 86
 Топология дискретная 197
 — индуцированная 196
 — порожденная 197
 — сильная 204
 — слабая 205
 — тривиальная 197
 Точка внутренняя 31
 — граничная 31
 — конденсации 123
 — предельная 21
 Троичная дробь 113
- Фату 94
 Фейер 97
 Фон Нейман Дж. 215
 Функция алгебраическая 38
 — бесконечно дифференцируемая 49
 — возрастающая 17
 — действительного переменного 19
 — действительнозначная 19
 — дифференцируемая 49
 — измеримая 141
 — интегрируемая по Лебегу 96
 — — по Риману 56
 — канторова 126
 — линейная 47
 — локально ограниченная 33
 — — однородная 155
 — множества счетно аддитивная 110
 — монотонная 17
 — неизмеримая 141
 — неотрицательная 110
 — непрерывная 21
 — ограниченная 33
 — однородная 154
- Функция периодическая 32
 — — с периодом p 32
 — полунепрерывная в точке 33
 — — сверху 33
 — — снизу 33
 — постоянная 13
 — равномерно непрерывная 22
 — рациональная 26
 — строго возрастающая 17
 — — монотонная 17
 — трансцендентная 38
 — убывающая 17
 — характеристическая 19
- Харди Г. Х. 53
 Хаусдорф Ф. 215
- Цаанен А. К. 137
 Центр сферической окрестности 197
 Цорна лемма 111
- Частные производные 147
 Число действительное 19
 — кардинальное 181
 — комплексное 23
 — натуральное 19
 — порядковое 181
 — простое 28
 — рациональное 20
 — целое 20
- Член последовательности 22
- Шар замкнутый 198
 — открытый 197
 Шварц Г. А. 191, 193
 Штейнгауз 88
- Эквивалентные метрики 198
 — функции 31
- Элемент множества 11
 — отрицательный 16
 — положительный 16
 — противоположный 16
 — составной 28
- Ядро множества 31

О Г Л А В Л Е Н И Е

От редактора	5
Предисловие	7
Глава 1. Система действительных чисел	11
Введение	11
1. Бесконечное поле, которое нельзя упорядочить	23
2. Поле, которое можно упорядочить двумя различными способами	24
3. Неполное упорядоченное поле	24
4. Упорядоченное неархимедово поле	25
5. Упорядоченное поле, которое нельзя пополнить	26
6. Упорядоченное поле, в котором множество рациональных чисел не плотно	27
7. Неполное упорядоченное поле, полное в смысле Коши	27
8. Область целостности, допускающая различные факторизации	27
9. Два числа без наибольшего общего делителя	28
10. Дробь, не допускающая единственного представления в виде несократимой дроби	29
11. Функции, непрерывные на замкнутом интервале и не обладающие известными свойствами, если система чисел не полна	29
Глава 2. Функции и пределы	31
Введение	31
1. Всюду разрывная функция, абсолютное значение которой есть всюду непрерывная функция	34
2. Функция, непрерывная лишь в одной точке (см. пример 22)	34
3. Непрерывная и неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве	34
4. Неограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и локально ограниченная на нем	34
5. Функция, всюду конечная и всюду локально неограниченная	35
6. Непрерывная ограниченная функция, определенная на произвольном некомпактном множестве и не имеющая экстремальных значений	35
7. Ограниченная функция, не имеющая относительных экстремумов на компактном множестве	36

8. Ограниченная функция, не являющаяся полуунепрерывной ни в одной точке	37
9. Периодическая функция, отличная от постоянной и не имеющая наименьшего периода	37
10. Иррациональные функции	37
11. Трансцендентные функции	38
12. Функции $y=f(u)$, $u \in \mathbb{R}$, и $u=g(x)$, $x \in \mathbb{R}$, композиция которых $y=f(g(x))$ всюду непрерывна и такова, что	
$\lim_{u \rightarrow b} f(u) = c, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) \neq c.$	39
13. Две равномерно непрерывные функции, произведение которых не является равномерно непрерывной функцией	39
14. Непрерывное на некотором интервале взаимно однозначное отображение, обратное к которому разрывно	39
15. Функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках	40
16. Полунепрерывная функция с плотным множеством точек разрыва	40
17. Функция с плотным множеством точек разрыва, каждая из которых устранима	40
18. Монотонная функция, точки разрыва которой образуют произвольное счетное (возможно, плотное) множество	41
19. Функция с плотным множеством точек непрерывности и плотным множеством точек разрыва, ни одна из которых не является устранимой	41
20. Нигде не монотонное взаимно однозначное соответствие между двумя интервалами	41
21. Непрерывная нигде не монотонная функция	42
22. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное замкнутое множество	43
23. Функция, точки разрыва которой образуют произвольно заданное множество типа F_σ (см. пример 8 гл. 4 и примеры 8, 10 и 22 гл. 8)	43
24. Функция, не являющаяся пределом последовательности непрерывных функций (см. пример 10 гл. 4)	44
25. Функция, определенная на $[0,1]$, множество значений которой на каждом невырожденном подинтервале совпадает с $[0,1]$ (см. пример 27 гл. 8)	45
26. Разрывная линейная функция	47
27. Теорема Колмогорова: для каждого $n \in \mathbb{N}$ существуют $n(2n+1)$ функций $\varphi_{ij}(x_j)$ ($j=1, 2, \dots, n, i=1, 2, \dots, 2n+1$), таких, что (а) все функции $\varphi_{ij}(x_j)$ непрерывны на $[0,1]$; (б) для любой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, непрерывной на $0 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$, существуют $2n+1$ функций Ψ_i , $i=1, 2, \dots, 2n+1$, каждая из которых непрерывна на \mathbb{R} , причем	

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{2n+1} \Psi_i \left(\sum_{j=1}^n \varphi_{ij}(x_j) \right). \quad \dots \quad 47$$

Глава 3. Дифференцирование	49
Введение	49
1. Функция, не являющаяся производной	49
2. Дифференцируемая функция с разрывной производной	50
3. Разрывная функция, имеющая всюду производную (не обязательно конечную)	50
4. Дифференцируемая функция, производная которой не сохраняет знака ни в какой односторонней окрестности экстремальной точки	50
5. Дифференцируемая функция, производная которой положительна в некоторой точке, но сама функция не монотонна ни в какой окрестности этой точки	51
6. Функция, производная которой конечна, но не ограничена на замкнутом интервале	51
7. Функция, производная которой существует и ограничена, но не имеет (абсолютного) экстремума на замкнутом интервале	51
8. Всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция	52
9. Дифференцируемая функция, для которой теорема о среднем не имеет места	53
10. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, положительная при положительных x и равная нулю при отрицательных x	54
11. Бесконечно дифференцируемая функция, положительная в единичном интервале и равная нулю вне его	54
12. Бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 на $[1, +\infty)$, равная 0 на $(-\infty, 0]$ и строго монотонная на $[0, 1]$	54
13. Бесконечно дифференцируемая монотонная функция f , такая, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) \neq 0$	55
Глава 4. Интеграл Римана	56
Введение	56
1. Ограниченнная функция, не интегрируемая по Риману на конечном замкнутом интервале	56
2. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая primitive	57
3. Функция, интегрируемая по Риману и не имеющая primitive ни на каком интервале	57
4. Функция, имеющая primitive на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману (см. пример 35 гл. 8)	57
5. Интегрируемая по Риману функция со всюду плотным множеством точек разрыва	58
6. Функция f , для которой $g(x) \equiv \int_0^x f(t) dt$ всюду дифференцируема, однако $g'(x) \neq f(x)$ на всюду плотном множестве	58

7. Две различные полуунпрерывные функции, „расстояние” между которыми равно нулю	59
8. Интегрируемая по Риману функция, множество точек разрыва которой совпадает с произвольно заданным множеством типа F_σ и меры нуль (см. пример 22 гл. 8)	59
9. Две функции, интегрируемые по Риману, композиция которых не интегрируема по Риману (см. пример 34 гл. 8)	60
10. Не интегрируемая по Риману ограниченная функция, являющаяся пределом возрастающей последовательности интегрируемых по Риману функций (см. пример 33 гл. 8)	60
11. Расходящийся несобственный интеграл, имеющий конечное главное значение в смысле Коши	60
12. Сходящийся несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$, подинтегральная функция которого положительна, непрерывна и не стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$	61
13. Сходящийся на интервале $[0, +\infty)$ несобственный интеграл, подинтегральная функция которого не ограничена на любом интервале вида $[a, +\infty)$, где $a > 0$	61
14. Функции f и g , такие, что интеграл Римана—Стильтьеса от f относительно g существует на $[a, b]$ и $[b, c]$, но не существует на $[a, c]$	62
Глава 5. Последовательности	63
Введение	63
1. Ограниченные расходящиеся последовательности	63
2. Последовательность с произвольно заданным замкнутым множеством предельных точек	64
3. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$, для которой $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{n+p} - a_n) = 0$ при любом натуральном p	66
4. Расходящаяся последовательность $\{a_n\}$, такая, что для заданной строго возрастающей последовательности $\{\varphi_n\} = \{\varphi(n)\}$ натуральных чисел $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_{\varphi(n)} - a_n) = 0$	66
5. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, такие, что $\underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \underline{\lim} (a_n + b_n) < \underline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n < \overline{\lim} (a_n + b_n) < \overline{\lim} a_n + \overline{\lim} b_n$	67
6. Последовательности $\{a_{1n}\}, \{a_{2n}\}, \dots$, такие, что $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (a_{1n} + a_{2n} + \dots) < \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{1n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} + \dots$	67
7. Две равномерно сходящиеся последовательности функций, последовательность произведений которых не сходится равномерно	68

8. Расходящаяся последовательность множеств	68
9. Последовательность $\{A_n\}$ множеств, которая сходится к пустому множеству, но кардинальные числа этих множеств $\rightarrow +\infty$	69
Глава 6. Бесконечные ряды	71
Введение	71
1. Расходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю	72
2. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $a_n \geq b_n$, $n=1, 2, \dots$	72
3. Сходящийся ряд $\sum a_n$ и расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $ a_n \geq b_n $, $n=1, 2, \dots$	72
4. Для произвольно заданного положительного ряда существует либо мажорируемый им расходящийся, либо мажорирующий его сходящийся ряд	72
5. Об условно сходящихся рядах	73
6. Для произвольного условно сходящегося ряда $\sum a_n$ и произвольного действительного числа x существует последовательность $\{\epsilon_n\}$, где $ \epsilon_n =1$ ($n=1, 2, \dots$), такая, что	
$\sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n a_n = x$	75
7. Об условиях теоремы Лейбница для знакочередующихся рядов	75
8. Расходящийся ряд с общим членом, стремящимся к нулю, который при подходящей расстановке скобок становится сходящимся к наперед заданной сумме	76
9. Для произвольно заданной положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует расходящийся ряд $\sum a_n$, общий член которого стремится к нулю, причем $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = 0$	76
10. Для всякой положительной последовательности $\{b_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существует положительный расходящийся ряд $\sum a_n$, такой, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n/b_n = +\infty$	77
11. Для всякой положительной последовательности $\{c_n\}$ с нижним пределом, равным нулю, существуют положительный сходящийся ряд $\sum a_n$ и положительный расходящийся ряд $\sum b_n$, такие, что $a_n/b_n = c_n$, $n=1, 2, \dots$	77
12. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция, такая, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ расходится	78

13. Положительная непрерывная при $x \geq 1$ функция, такая, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ сходится	78
14. Ряды, к которым не применим признак Даламбера	79
15. Ряды, к которым не применим признак Коши	80
16. Ряды, для которых эффективен признак Коши и не эффективен признак Даламбера	82
17. Два сходящихся ряда, произведение которых расходится	82
18. Два расходящихся ряда, произведение которых сходится абсолютно	83
19. Для произвольной последовательности $\left\{ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}, n = 1, 2, \dots$, положительных сходящихся рядов существует положительный сходящийся ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m$, не сравнимый ни с одним из рядов $\left\{ \sum\limits_{m=1}^{+\infty} a_{mn} \right\}$	84
20. Матрица Тэплица T и расходящаяся последовательность, преобразуемая матрицей T в сходящуюся последовательность	86
21. Для всякой матрицы Тэплица $T = (t_{ij})$ существует последовательность $\{a_j\}$, каждый член которой есть либо 1, либо -1, такая, что преобразование $\{b_i\}$ последовательности $\{a_j\}$ посредством матрицы T расходится	88
22. Степенной ряд, сходящийся лишь в одной точке (см. пример 24)	90
23. Функция, ряд Маклорена которой сходится всюду, однако представляет функцию лишь в одной точке	91
24. Функция, ряд Маклорена которой сходится лишь в одной точке	91
25. Сходящийся тригонометрический ряд, не являющийся рядом Фурье	93
26. Бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$, не являющаяся преобразованием Фурье никакой функции, интегрируемой по Лебегу, и такая, что $\lim_{ x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	96
27. Для произвольного счетного множества $E \subset [-\pi, \pi]$ существует непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в каждой точке $x \in E$ и сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi] \setminus E$	97
28. Функция, интегрируемая (по Лебегу) на $[-\pi, \pi]$, ряд Фурье которой расходится всюду	98
29. Последовательность $\{a_n\}$ рациональных чисел, обладающая тем свойством, что для всякой функции f , непрерывной на $[0,1]$ и равной 0 при $x=0$ ($f(0)=0$), существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_v\}$	

$(n_0 \equiv 0)$, такая, что

$$f(x) = \sum_{v=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=n_v+1}^{n_{v+1}} a_n x^n \right),$$

причем сходимость является равномерной на $[0,1]$ 98

Глава 7. Равномерная сходимость 101

Введение 101

1. Последовательность всюду разрывных функций, сходящаяся равномерно к всюду непрерывной функции 101
2. Последовательность бесконечно дифференцируемых функций, которая равномерно сходится к нулю, а последовательность производных этих функций всюду расходится 101
3. Неограниченная функция, являющаяся пределом неравномерно сходящейся последовательности ограниченных функций 102
4. Разрывная функция, являющаяся пределом последовательности непрерывных функций 102
5. Не интегрируемая по Риману функция, являющаяся пределом последовательности функций, интегрируемых по Риману (см. пример 33 гл. 8) 104
6. Последовательность функций, для которой предел интегралов не равен интегралу от предельной функции 104
7. Последовательность функций, для которой предел производных не равен производной от предельной функции 105
8. Последовательность функций, равномерно сходящаяся на каждом замкнутом подинтервале, но не сходящаяся равномерно на всем интервале 106
9. Последовательность $\{f_n\}$, равномерно сходящаяся к нулю $\underset{+\infty}{\lim}_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ 106

на интервале $[0, +\infty)$ и такая, что $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx \neq 0$ 106

10. Неравномерно сходящийся ряд, общий член которого стремится к нулю равномерно 107
11. Неравномерно сходящаяся последовательность, обладающая равномерно сходящейся подпоследовательностью 107
12. Неравномерно сходящиеся последовательности, удовлетворяющие любым трем из четырех условий теоремы Дини 107

Глава 8. Множества и мера на действительной оси 109

Введение 109

1. Совершенное нигде не плотное множество 111
2. Несчетное множество меры нуль 113
3. Множество меры нуль, разностное множество которого содержит некоторую окрестность нуля 114
4. Совершенное нигде не плотное множество положительной меры 115
5. Совершенное нигде не плотное множество иррациональных чисел 117

6. Всюду плотное открытое множество, дополнение которого имеет положительную меру	118
7. Множество второй категории	118
8. Множество, не являющееся множеством типа F_σ	119
9. Множество, не являющееся множеством типа G_δ	119
10. Множество A , не являющееся множеством точек разрыва никакой функции	120
11. Неизмеримое множество	120
12. Множество D , такое, что для всякого измеримого множества A справедливы равенства $\mu_*(D \cap A) = 0$, $\mu^*(D \cap A) = \mu(A)$	123
13. Множество A меры нуль, для которого любое действительное число является его точкой конденсации	123
14. Нигде не плотное множество A действительных чисел и его непрерывное отображение на замкнутый единичный интервал $[0, 1]$	124
15. Непрерывная монотонная функция, производная которой равна нулю почти всюду	126
16. Топологическое отображение замкнутого интервала, не сохраняющее измеримость и нулевую меру	128
17. Измеримое неборелевское множество	128
18. Две непрерывные функции, разность которых не является постоянной, но их производные (конечные или бесконечные) совпадают всюду	129
19. Множество полной меры и первой категории на $[0, 1]$	129
20. Множество меры нуль и второй категории на $[0, 1]$	130
21. Множество меры нуль, не являющееся множеством типа F_σ	130
22. Множество меры нуль, такое, что не существует функции (интегрируемой по Риману или нет), для которой это множество является множеством точек разрыва	131
23. Два совершенных нигде не плотных гомеоморфных множества на $[0, 1]$, лишь одно из которых имеет меру нуль	131
24. Два непересекающихся непустых нигде не плотных множества действительных чисел, таких, что каждая точка любого из них является предельной точкой другого	133
25. Два гомеоморфных множества действительных чисел, являющихся множествами разных категорий	133
26. Два гомеоморфных множества действительных чисел, таких, что одно из них всюду плотно, а другое нигде не плотно	134
27. Функция, определенная на \mathbb{R} , равная нулю почти всюду и такая, что множество ее значений на каждом непустом открытом интервале совпадает с \mathbb{R}	135
28. Функция, определенная на \mathbb{R} , график которой всюду плотен на плоскости	136
29. Неотрицательная всюду конечная функция f , такая, что	
$\int_a^b f(x) dx = +\infty$ для любого непустого открытого интер-	
вала (a, b)	136
30. Непрерывная строго монотонная функция с производной, равной нулю почти всюду	137

31. Ограниченнaя полунепрерывная функция, не интегрируемая по Риману и не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману	137
32. Ограниченнaя измеримая функция, не эквивалентная никакой функции, интегрируемой по Риману	138
33. Ограниченнaя функция, являющаяся пределом монотонной последовательности непрерывных функций, не интегрируемая по Риману и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману (см. пример 10 гл. 4)	138
34. Интегрируемая по Риману функция f и непрерывная функция g , определенные на $[0, 1]$ и такие, что их композиция $f(g(x))$ не интегрируема по Риману на $[0, 1]$ и не эквивалентна никакой функции, интегрируемой по Риману на этом замкнутом интервале (см. пример 9 гл. 4)	139
35. Ограниченнaя функция, имеющая примитивную на замкнутом интервале, но не интегрируемая на нем по Риману	139
36. Функция, для которой существует несобственный интеграл Римана и не существует интеграл Лебега	141
37. Функция, измеримая по Лебегу и не измеримая по Борелю	141
38. Измеримая функция $f(x)$ и непрерывная функция $g(x)$, такие, что их композиция $f(g(x))$ неизмерима	141
39. Непрерывная монотонная функция $g(x)$ и непрерывная функция $f(x)$, такие, что	
$\int_0^1 f(x) dg(x) \neq \int_0^1 f(x) g'(x) dx$	142
40. Различные виды сходимости функциональных последовательностей	142
41. Две меры μ и v на пространстве с мерой (X, \mathfrak{S}) , такие, что μ абсолютно непрерывна относительно v , однако не существует функции f , удовлетворяющей равенству $\mu(E) = \int_E f(x) dv(x)$ для всех $E \in \mathfrak{S}$	145
Глава 9. Функции двух переменных	147
Введение	147
1. Разрывная функция двух переменных, непрерывная по каждой переменной в отдельности	147
2. Функция двух переменных, не имеющая предела в начале координат, но имеющая равный нулю предел при приближении к началу координат по любой прямой	148
3. Обобщение предыдущего примера	148
4. Разрывная (и, следовательно, недифференцируемая) функция двух переменных, имеющая всюду частные производные первого порядка	149

5. Функции f , для которых существуют и равны лишь два из следующих пределов: $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. . . 149
6. Функции f , для которых существует лишь один из следующих пределов: $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$. . . 150
7. Функция f , для которой пределы $\lim_{x \rightarrow a} \lim_{y \rightarrow b} f(x, y)$ и $\lim_{y \rightarrow b} \lim_{x \rightarrow a} f(x, y)$ существуют, но не равны между собой 151
8. Функция $f(x, y)$, для которой предел $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = g(x)$ существует равномерно относительно x , предел $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = h(y)$ существует равномерно относительно y , $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{y \rightarrow 0} h(y)$, однако предел $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ не существует 151
9. Дифференцируемая, но не непрерывно дифференцируемая функция двух переменных 152
10. Дифференцируемая функция, имеющая неравные смешанные частные производные второго порядка 153
11. Непрерывно дифференцируемая функция f двух переменных x и y и область R на плоскости, такие, что $\partial f / \partial y = 0$ в области R , но функция f зависит от y в этой области 154
12. Локально однородная непрерывно дифференцируемая функция двух переменных, не являющаяся однородной 154
13. Дифференцируемая функция двух переменных, не имеющая экстремума в начале координат и такая, что ее сужение на любую прямую, проходящую через начало координат, имеет строгий локальный минимум в этой точке 155
14. Обобщение предыдущего примера 156
15. Функция f , для которой $\frac{d}{dx} \int\limits_a^b f(x, y) dy \neq \int\limits_a^b \left[\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right] dy$, хотя оба интеграла существуют в смысле Римана 156
16. Функция f , для которой $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y) dy dx \neq \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x, y) dx dy$, хотя оба интеграла существуют в смысле Римана 157
17. Двойной ряд $\sum_{m, n} a_{mn}$, для которого $\sum_m \sum_n a_{mn} \neq \sum_n \sum_m a_{mn}$ 158
18. Дифференциал $Pdx + Qdy$ и плоская область R , в которой $Pdx + Qdy$ является локально полным, но не полным дифференциалом 159
19. Соленоидальное векторное поле, заданное в односвязной области и не имеющее векторного потенциала 160

Глава 10. Множества на плоскости	163
Введение	163
1. Два непересекающихся замкнутых множества, расстояние между которыми равно нулю	166
2. Ограничное множество на плоскости, для которого не существует минимального замкнутого круга, содержащего это множество	166
3. „Тонкие” связные множества, не являющиеся простыми дугами	166
4. Два непересекающихся плоских контура, содержащихся в квадрате и соединяющих его противоположные вершины	167
5. Отображение интервала $[0, 1]$ на квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$	168
6. Кривая Пеано на плоскости	169
7. Кривая Пеано, стационарная почти всюду	171
8. Кривая Пеано, дифференцируемая почти всюду	171
9. Непрерывное отображение интервала $[0, 1]$ на себя, принимающее каждое значение несчетное множество раз	171
10. Простая дуга, расположенная в единичном квадрате и имеющая плоскую меру, сколь угодно близкую к единице	171
11. Связное компактное множество, не являющееся дугой	175
12. Плоская область, не совпадающая с ядром своего замыкания	175
13. Три непересекающиеся плоские области с общей границей	176
14. Нежорданова область, совпадающая с ядром своего замыкания	177
15. Ограниченнная плоская область, граница которой имеет положительную меру	177
16. Простая дуга бесконечной длины	178
17. Простая дуга бесконечной длины, имеющая касательную в каждой точке	178
18. Простая дуга, такая, что ее длина между любой парой точек бесконечна	179
19. Гладкая кривая C , содержащая точку P , которая не является ближайшей точкой этой кривой ни для какой точки выпуклой области, ограниченной этой кривой	179
20. Подмножество A единичного квадрата $S=[0, 1] \times [0, 1]$, плотное в S и такое, что всякая вертикальная или горизонтальная прямая, пересекающая S , имеет с A лишь одну общую точку	180
21. Неизмеримое плоское множество, имеющее с каждой прямой не более двух общих точек	181
22. Неотрицательная функция $f(x, y)$, такая, что	

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx = 0,$$

а интеграл $\int_S \int f(x, y) dx dy$, где $S=[0, 1] \times [0, 1]$, не существует 184

23. Действительнозначная функция одного действительного переменного, график которой является неизмеримым плоским множеством	184
24. Связное множество, которое становится вполне несвязным при удалении одной точки	185

Глава 11. Площадь 187

Введение	187
1. Ограничено плоское множество, не имеющее площади	188
2. Компактное плоское множество, не имеющее площади	189
3. Ограниченная плоская область, не имеющая площади	189
4. Ограниченная плоская жорданова область, не имеющая пло- щади	189
5. Простая замкнутая кривая, плоская мера которой больше плоской меры области, ограниченной этой кривой	189
6. Две функции φ и ψ , заданные на $[0, 1]$ и такие, что (a) $\varphi(x) < \psi(x)$ для $x \in [0, 1]$,	
(b) $\int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)] dx$ существует и равен 1,	
(c) $S \equiv \{(x, y) 0 \leq x \leq 1, \varphi(x) < y < \psi(x)\}$ не имеет площа- ди	190
7. Пример Шварца, в котором боковой поверхности прямого кругового цилиндра сопоставляется сколь угодно большая конечная или даже бесконечная площадь	191
8. Для любых двух положительных чисел ε и M в трехмерном пространстве существует поверхность S , такая, что (a) S гомеоморфна поверхности сферы; (b) площадь поверхности S существует и меньше ε ; (c) мера Лебега в трехмерном пространстве поверхности S существует и больше M	193
9. Плоское множество сколь угодно малой плоской меры, внут- ри которого направление отрезка единичной длины можно поменять на обратное непрерывным движением	194

Глава 12. Метрические и топологические пространства 195

Введение	195
1. Убывающая последовательность непустых замкнутых огра- ниченных множеств с пустым пересечением	200
2. Неполное метрическое пространство с дискретной топологией	200
3. Убывающая последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве	201
4. Открытый шар O и замкнутый шар B с общим центром и равными радиусами, такие, что $B \neq O$	201
5. Замкнутые шары B_1 и B_2 с радиусами r_1 и r_2 соответст- венно, такие, что $B_1 \subset B_2$, а $r_1 > r_2$	202
6. Топологическое пространство X и его подмножество Y , та- кие, что множество предельных точек Y не замкнуто	202

7. Топологическое пространство, в котором предел последовательности не единственен	202
8. Сепарабельное пространство, обладающее несепарабельным подпространством	203
9. Сепарабельное пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности	203
10. Множество с различными топологиями, имеющими одни и те же сходящиеся последовательности	204
11. Пример топологического пространства X , множества $A \subset X$ и предельной точки этого множества, не являющейся пределом никакой последовательности точек из A	207
12. Неметризуемое топологическое пространство X с функциями в качестве точек и топологией, соответствующей поточечной сходимости	210
13. Непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни открытым, ни замкнутым	211
14. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся одновременно открытым и замкнутым, но не являющееся непрерывным	211
15. Замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни открытым	211
16. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся непрерывным и открытым, но не являющееся замкнутым	212
17. Открытое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни замкнутым	212
18. Непрерывное замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся открытым	213
19. Топологическое пространство X и его подпространство Y , содержащее два непересекающихся открытых множества, которые не являются пересечением подпространства Y с непересекающимися открытыми множествами пространства X	213
20. Два негомеоморфных топологических пространства, каждое из которых является непрерывным взаимно однозначным образом другого	214
21. Разбиение трехмерного евклидова шара B на пять непересекающихся подмножеств S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (при этом S_5 состоит из единственной точки), таких, что при жестких движениях R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 справедливы следующие соотношения:	
$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$	215
22. Для любых двух евклидовых шаров B_ε и B_M , радиусы которых суть произвольно заданные числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, всегда существует разбиение шара B_ε на конечное число непересекающихся подмножеств S_1, S_2, \dots, S_n , таких, что при жестких движениях R_1, R_2, \dots, R_n справедливо равенство	
$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \dots \cup R_n(S_n)$	215

Глава 13. Функциональные пространства	216
Введение	216
1. Две монотонные функции, сумма которых не монотонна	219
2. Две периодические функции, сумма которых не имеет периода	219
3. Две полунепрерывные функции, сумма которых не является полунепрерывной	220
4. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Риману, но квадрат их суммы не интегрируем по Риману	222
5. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу, но квадрат их суммы не интегрируем по Лебегу	222
6. Линейное функциональное пространство, не являющееся ни алгеброй, ни структурой	223
7. Линейное функциональное пространство, являющееся алгеброй, но не являющееся структурой	223
8. Линейное функциональное пространство, являющееся структурой, но не являющееся алгеброй	223
9. Две метрики в пространстве $C([0, 1])$ функций, непрерывных на $[0, 1]$, такие, что дополнение единичного шара в одной из метрик всюду плотно в единичном шаре другой метрики	224
Библиография	226
Указатель обозначений	230
Указатель	234