3. Убывающая последовательность непустых замкнутых шаров с пустым пересечением в полном метрическом пространстве

Рассмотрим пространство $(\mathbf{N}, d)$ натуральных чисел с метрикой

$$d(m, n) \equiv \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{m+n}, & \text{если } m \neq n, \\ 0, & \text{если } m = n, \end{cases}$$

и положим

$$B_n \equiv \{m \mid d(m, n) \leqslant 1 + 1/2n\} = \{n, n+1, \ldots\}$$

для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{B_n\}$ удовлетворяет требуемым условиям, а пространство полно, поскольку каждая фундаментальная последовательность является „почти постоянной".

Если не требовать полноты пространства, то можно привести совсем тривиальные примеры — например, последовательность $\{y \mid |1/n - y| \leqslant 1/n\}$ в пространстве $\mathbf{P}$ положительных чисел с обычной метрикой пространства $\mathbf{R}$. С другой стороны, такой пример становится невозможным, если полное пространство является банаховым (см. [18]).

Настоящий пример (см. [48]) представляет интерес в связи с теоремой Бэра (см. пример 7 гл. 8, а также [2], [3], [27] и [54]), утверждающей, что *каждое полное метрическое пространство является множеством второй категории* или эквивалентно, что пересечение счетного множества открытых всюду плотных множеств в полном метрическом пространстве всюду плотно. При доказательстве этой теоремы строится убывающая последовательность замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а потому она имеет непустое пересечение. Таким образом, мы видим, что если шары уменьшаются, они должны иметь общую точку, в противном же случае такая точка может и не существовать.

4. Открытый шар O и замкнутый шар B с общим центром и равными радиусами, такие, что $B \neq \overline{O}$

Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки, и пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой

$$d(x, y) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \neq y, \\ 0, & \text{если } x = y. \end{cases}$$

Далее пусть x — произвольная точка множества X, а O и B — соответственно открытый и замкнутый шары с центром в точке x и радиусом 1. Тогда

$$O = \{x\}, \quad B = X,$$

и так как топология дискретна, то $\bar{O} = O \neq B$.

Подобный пример невозможен в любом нормированном векторном пространстве. (Доказательство этого факта предоставляется читателю в качестве упражнения.)

5. Замкнутые шары B_1 и B_2 с радиусами r_1 и r_2 соответственно, такие, что $B_1 \subset B_2$, а $r_1 > r_2$

Пусть (X, d) — метрическое пространство, состоящее из всех точек (x, y) замкнутого круга в евклидовой плоскости

$$X \equiv \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 9\}$$

с обычной евклидовой метрикой. Положим $B_2 \equiv X$, а

$$B_1 \equiv B_2 \cap \{(x, y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leqslant 16\}.$$

Тогда $B_1 \subset B_2$, а $r_1 = 4 > r_2 = 3$.

Подобный пример нельзя построить ни в каком нормированном векторном пространстве, поскольку в этом пространстве радиус любого шара равен половине его диаметра. (Доказательство предоставляется читателю в качестве упражнения.)

6. Топологическое пространство X и его подмножество Y, такие, что множество предельных точек Y не замкнуто

Пусть X — произвольное множество, содержащее более одной точки. Наделим его тривиальной топологией $\mathcal{O} = \{\varnothing, X\}$. Если y — произвольный элемент из X, то положим $Y = \{y\}$. Тогда предельными точками множества Y будут все точки X, *за исключением* самой точки y. Таким образом, множество предельных точек совпадает с $X \setminus Y$, а так как Y не является открытым, то $X \setminus Y$ не замкнуто.

7. Топологическое пространство, в котором предел последовательности не единствен

Первый пример. Этим свойством обладает всякое пространство, наделенное тривиальной топологией, если оно содержит более одной точки. В самом деле, в этом пространстве каждая последовательность сходится к любой его точке.

Второй пример. Пусть X — бесконечное множество. Наделим его топологией $\mathcal{O}$, состоящей из $\varnothing$ и всех дополнений конечных подмножеств из X. Тогда каждая последовательность *различных* точек X сходится к любому элементу X.

8. Сепарабельное пространство, обладающее несепарабельным подпространством

Первый пример. Пусть $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$ — пространство действительных чисел с топологией $\mathcal{O}$, порожденной базисом, состоящим из множеств вида

$$\{x\} \cup (\mathbf{Q} \cap (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon), \qquad \varepsilon \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0,$$

и пусть $(Y, \mathcal{J})$ — его подпространство иррациональных чисел с дискретной топологией (оно действительно является подпространством, ибо всякое одноточечное множество в Y является пересечением Y и некоторого элемента из $\mathcal{O}$). Тогда $\mathbf{Q}$ будет счетным всюду плотным подмножеством $(\mathbf{R}, \mathcal{O})$, однако в $(Y, \mathcal{J})$ не существует счетного всюду плотного подмножества.

Второй пример. Пусть $(X, \mathcal{O})$ — пространство всех точек (x, y) евклидовой плоскости, таких, что $y \geqslant 0$, и пусть $\mathcal{O}$ — топология, порожденная базисом, состоящим из множеств следующих двух типов:

$$\{(x,\ y) \mid [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} < \min(b,\ \varepsilon)\}, \qquad a \in \mathbf{R},\ b > 0,\ \varepsilon > 0,$$

$$\{(a,\ 0)\} \cup \{(x,\ y) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}, \qquad a \in \mathbf{R},\ \varepsilon > 0.$$

Тогда множество $\{(x, y) \mid x \in \mathbf{Q}, y \in \mathbf{Q} \cap \mathbf{P}\}$ есть счетное всюду плотное подмножество в $(X, \mathcal{O})$, однако пространство $\{(x,\ y) \mid x \in \mathbf{R},\ y = 0\}$, наделенное дискретной топологией, является подпространством пространства $(X, \mathcal{O})$, не имеющим счетного всюду плотного подмножества. (См. [2], стр. 29, 5°.)

9. Сепарабельное пространство, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности

Любой из двух примеров предыдущего пункта удовлетворяет требуемым условиям, поскольку (1) каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно и (2) любое его подпространство также удовлетворяет

второй аксиоме счетности. Если бы какое-либо из пространств предыдущего пункта удовлетворяло второй аксиоме счетности, то рассматриваемые подпространства были бы сепарабельными.

10. Множество с различными топологиями, имеющими одни и те же сходящиеся последовательности

Первый пример. Пусть $(X, \mathcal{O})$ — произвольное несчетное пространство, топология $\mathcal{O}$ которого определяется пустым множеством $\varnothing$ и дополнениями всех счетных (возможно, пустых или конечных) множеств. Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к x тогда и только тогда, когда $x_n = x$ для n, превосходящего некоторое $m \in \mathbf{N}$. Иными словами, сходящимися последовательностями являются те и только те последовательности, которые сходятся в пространстве $(X, \mathcal{J})$, где $\mathcal{J}$ — дискретная топология; при этом очевидно, что $\mathcal{O} \neq \mathcal{J}$.

Второй пример. Пусть X — множество всех порядковых чисел, не превосходящих Ω, где Ω — первое порядковое число, соответствующее несчетному множеству. (См. [49] и [54].) Далее пусть $\mathcal{O}$ — топология, порожденная интервалами

$$[1, \beta), \qquad (\alpha, \beta) \qquad (\alpha, \Omega],$$

где α и $\beta \in X$. Так как каждое счетное множество из $X \setminus \{\Omega\}$ имеет верхнюю грань, принадлежащую $X \setminus \{\Omega\}$, то никакая последовательность точек из $X \setminus \{\Omega\}$ не может сходиться к Ω. Следовательно, последовательность точек в X сходится к Ω тогда и только тогда, когда все ее члены, за исключением конечного числа, равны Ω. Другими словами, сходящиеся в X последовательности совпадают с теми, которые сходятся в топологии, полученной присоединением к *подпространству* $X \setminus \{\Omega\}$ пространства X точки Ω как *изолированной* точки (это означает, что $\{\Omega\}$ есть одноточечное открытое множество нового пространства X).

Третий пример. (Определения и дальнейшие подробности см. в [3] и [29].) Пусть X — банахово пространство l_1 действительных (или комплексных) последовательностей $x = \{x_n\}$, таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < +\infty$ с нормой $\|x\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|$. Сильной топологией пространства X назы-

вается топология метрического пространства (X, d) с метрикой $d(x, y) \equiv \|x - y\|$.

Определим теперь в X другую топологию, называемую **слабой**, при помощи следующей системы окрестностей:

$$N_x \equiv \left\{ y = \{y_n\} \,\middle|\, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n - x_n) \right| < \varepsilon, \ m = 1, 2, \ldots, p \right\},$$

где $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а (a_{mn}) — ограниченная матрица с p строками и бесконечным числом столбцов. Можно показать, что $\{N_x\}$ удовлетворяет сформулированным в введении условиям и порождает топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$.

Чтобы доказать, что сильная топология X действительно сильнее слабой топологии, мы покажем, что любая окрестность произвольной точки x в слабой топологии содержит некоторую сферическую окрестность этой точки. Это сразу же следует из неравенства треугольника для действительных рядов:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n - x_n) \right| \leqslant K \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n| = K \|y - x\|,$$

где K — верхняя грань множества абсолютных значений элементов матрицы (a_{mn}). Чтобы доказать, что сильная топология *строго* сильнее слабой, покажем, что *каждая окрестность в слабой топологии не ограничена в метрике сильной топологии* (и, следовательно, *никакая* окрестность в слабой топологии не может быть подмножеством *какой-либо* окрестности в сильной топологии). Пусть (a_{mn})—матрица с p строками и бесконечным числом столбцов для некоторой окрестности N_x в слабой топологии, $(z_1, z_2, \ldots, z_{p+1})$ — *нетривиальный* $(p+1)$-мерный вектор, такой, что

$$\sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0 \quad \text{для} \quad m = 1, 2, \ldots, p.$$

Далее положим $z_{p+2} = z_{p+3} = \ldots = 0$. Тогда вектор $y(\alpha) \equiv x + \alpha z = \{y_n(\alpha)\} = \{x_n + \alpha z_n\}$ принадлежит N_x для любого действительного α:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn}(y_n(\alpha) - x_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{mn} \alpha z_n = \alpha \sum_{n=1}^{p+1} a_{mn} z_n = 0,$$
$$m = 1, 2, \ldots, p.$$

С другой стороны, $\|y(\alpha) - x\| = \|\alpha z\| = |\alpha| \cdot \|z\|$, а $\|z\| \neq 0$.

Теперь обратимся к последовательностям точек в X. Мы уже знаем, что всякая последовательность точек в X, которая сходится к x в сильной топологии, должна сходиться к x и в слабой топологии. Докажем обратное: *если* $\lim\limits_{m\to+\infty} x^{(m)} = x$ *в слабой топологии, то* $\lim\limits_{m\to+\infty} x^{(m)} = x$ *в сильной топологии.* Отсюда будет следовать, что слабая и сильная топологии в X определяют одни и те же сходящиеся последовательности.

Предположим, что существует последовательность, сходящаяся к x в слабой топологии, но не сходящаяся к x в сильной топологии. В силу линейного характера операции предельного перехода мы можем предположить, не теряя в общности, что x есть нулевой вектор. Более того, если рассматриваемая последовательность не сходится к нулю в сильной топологии, то из нее можно выделить подпоследовательность, нормы элементов которой отделены от 0. Если обозначить эту подпоследовательность через $\{x^{(m)}\}$, то найдется положительное число ε, такое, что

$$\|x^{(m)}\| \geqslant 5\varepsilon$$

для $m = 1, 2, \ldots$. Так как $\{x^{(m)}\}$ — подпоследовательность некоторой последовательности, сходящейся к 0 в слабой топологии, то $\{x^{(m)}\}$ также должна сходиться к 0 в слабой топологии. Если мы запишем $x^{(m)}$ в виде

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, \ldots),$$

то последовательность $\{x^{(m)}\}$ может быть представлена бесконечной матрицей M, каждая строка которой соответствует одному из векторов последовательности $\{x^{(m)}\}$. Следующий шаг состоит в том, чтобы показать, опираясь на сходимость $\{x^{(m)}\}$ к нулю в слабой топологии, что каждый столбец матрицы M есть действительная последовательность, сходящаяся к 0, т. е. что при $m \to +\infty$ предел n-й координаты $x^{(m)}$ для всякого фиксированного $n = 1, 2, \ldots$ равен 0, т. е.

$$\lim_{m\to+\infty} x_n^{(m)} = 0.$$

Но это непосредственно следует из рассмотрения окрестности нуля, задаваемой матрицей (a_{mn}), состоящей из одной строки, на n-м месте которой стоит 1, а на остальных 0.

Теперь мы можем по индукции построить две строго возрастающие последовательности натуральных чисел $m_1 < m_2 < \ldots$ и $n_1 < n_2 < \ldots$, такие, что для $j \in \mathbf{N}$

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=1}^{n_j} \left| x_n^{(m_j)} \right| < \varepsilon, \qquad \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} \left| x_n^{(m_j)} \right| < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\text{(b)} \qquad \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} \left| x_n^{(m_j)} \right| > 3\varepsilon.$$

Наконец, определим последовательность $\{a_n\}$ следующим образом:

$$a_n \equiv \begin{cases} 1, & \text{если} \quad 1 \leqslant n < n_1, \\ \operatorname{sgn} x_n^{(m_j)}, & \text{если} \quad n_j + 1 \leqslant n \leqslant n_{j+1} \end{cases}$$

для $j = 1, 2, \ldots$. Если N_0 — окрестность нулевого вектора, определяемая числом ε и матрицей (a_{mn}), состоящей из одной строки, составленной из членов $\{a_n\}$,

$$N_0 \equiv \left\{ y = \{y_n\} \,\middle|\, \left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n y_n \right| < \varepsilon \right\},$$

то *никакая* точка $x^{(m_j)}$ подпоследовательности $\{x^{(m_j)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ не является элементом N_0:

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| \geqslant \sum_{n=n_j+1}^{n_{j+1}} \left| x_n^{(m_j)} \right| - \left| \sum_{n=1}^{n_j} a_n x_n^{(m_j)} \right| -$$

$$- \left| \sum_{n=n_{j+1}+1}^{+\infty} a_n x_n^{(m_j)} \right| > 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

Но это означает, что $\{x^{(m)}\}$ не может сходиться к 0. (Противоречие.)

11. Пример топологического пространства X, множества $A \subset X$ и предельной точки этого множества, не являющейся пределом никакой последовательности точек из A

Первый пример. Пусть X — пространство из первого примера п. 10, и пусть A — какое-либо несчетное правильное (или собственное) подмножество из X. Тогда любая точка

множества $X \setminus A$ будет предельной точкой A, но поскольку x не может быть пределом последовательности точек из A в дискретной топологии, то это же справедливо и для топологии, описанной в этом примере.

Второй пример. Пусть X — пространство из второго примера п. 10 с топологией, которая была введена в начале примера. Положим $A \equiv X \setminus \{\Omega\}$. Тогда Ω будет предельной точкой A, но никакая последовательность из A не может сходиться к Ω.

Третий пример. (См. [35], где построен аналогичный пример, а также [3], [18], [29] и [31], где даны определения и излагаются дальнейшие сведения.) Пусть X — гильбертово пространство l_2 всех действительных (или комплексных) последовательностей чисел $x = \{x_n\}$, таких, что $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^2 < +\infty \left(\text{или } \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \text{ в комплексном случае}\right)$. В этом пространстве для любых двух точек $x = \{x_n\}$ и $y = \{y_n\}$ определено скалярное произведение (или внутреннее произведение) $(x, y) \equiv \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \left(\text{или } \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \bar{y}_n \text{ в комплексном случае}\right)$.

Это скалярное произведение обладает следующими свойствами для любых $x, y, z \in l_2$ и $\lambda \in \mathbf{R}$ (с этого момента в настоящем примере рассматривается лишь пространство действительных последовательностей):

(i) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$,
(ii) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$,
(iii) $(y, x) = (x, y)$,
(iv) $(x, x) \geqslant 0$,

(v) если $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, то $\| \quad \|$ является нормой, относительно которой l_2 является банаховым пространством.

Превратим теперь пространство $X = l_2$ в топологическое пространство $(X, \mathcal{O})$, введя в нем систему окрестностей, определенную аналогично тому, как это сделано в третьем примере п. 10:

$$N_x \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y - x, b)| < \varepsilon\},$$

где $x \in X$, $\varepsilon > 0$, а B — любое непустое конечное множество точек из X.

Пусть A — множество точек $\{x^{(m)}\}$, где $x^{(m)}$ — точка, m-я координата которой равна $\sqrt{m}$, а все остальные координаты равны нулю, т. е.

$$x^{(m)} = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ \sqrt{m},\ 0,\ \ldots).$$

Покажем сначала, что нулевой вектор будет предельной точкой A. Предположим, что окрестность нуля

$$N_0 \equiv \{y \mid b \in B \Rightarrow |(y,\ b)| < \varepsilon\}$$

(где $\varepsilon > 0$, а B состоит из точек $b^{(1)} = \{b_n^{(1)}\},\ \ldots,\ b^{(p)} = \{b_n^{(p)}\}$) не содержит *ни одной* точки $x^{(m)}$. Это означает, что

$$\forall m \in \mathbf{N}\ \exists\, k \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ p\}\ \ni \left|\sqrt{m}\, b_m^{(k)}\right| \geqslant \varepsilon$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{p} (b_m^{(k)})^2 \geqslant \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon^2}{m} = +\infty,$$

что противоречит предположению о сходимости ряда $\sum\limits_{m=1}^{+\infty} (b_m^{(k)})^2$ для $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ p$.

Наконец, покажем, что никакая последовательность точек из A не может сходиться к нулевому вектору. Легко показать, что если

$$x^{(m_1)},\ x^{(m_2)},\ \ldots,\ x^{(m_j)},\ \ldots \to 0,$$

то последовательность $m_1,\ m_2,\ \ldots$ не ограничена. Следовательно, не ограничивая общности, можно предположить, что $m_1 < m_2 < \ldots$ и

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{m_j} < +\infty.$$

Чтобы закончить доказательство, определим окрестность N_0 точки 0 при помощи $\varepsilon \equiv 1$ и множества B, состоящего из единственного вектора b, m_j-я координата которого равна $1/\sqrt{m_j}$ для $j = 1,\ 2,\ \ldots$, а все остальные координаты равны нулю. Тогда *никакая* точка последовательности $\{x^{(m_j)}\}$ не может принадлежать N_0, ибо $(x^{(m_j)},\ b) = 1$ для $j = 1,\ 2,\ \ldots$.

Четвертый пример. См. пример 12 этой главы.

Отметим, что явление, описанное в настоящих примерах, не может иметь места в метрическом пространстве и, следовательно, ни одно из описанных выше пространств не является метрическим и даже не метризуемо.

12. Неметризуемое топологическое пространство X с функциями в качестве точек и топологией, соответствующей поточечной сходимости

Пусть $(X, \mathcal{O})$ — пространство всех действительнозначных непрерывных функций, заданных на $[0,1]$, и пусть топология $\mathcal{O}$ порождается системой окрестностей

$$N_f \equiv \{g \mid x \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon\},$$

где $f \in X$, $\varepsilon > 0$, а F — конечное непустое подмножество замкнутого интервала $[0,1]$. Ясно, что если в этой топологии $g_n \to g$ при $n \to +\infty$, то $g_n(x) \to g(x)$ при $n \to +\infty$ для каждого $x \in [0,1]$, поскольку в качестве F можно брать одноточечные множества $\{x\}$. С другой стороны, если $g_n(x) \to g(x)$ при $n \to +\infty$ для каждого $x \in [0,1]$, то $g_n \to g$ при $n \to +\infty$. В самом деле, для каждого $\varepsilon > 0$ и конечного подмножества F интервала $[0,1]$ можно выбрать n настолько большим, чтобы выполнялось неравенство $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$ для *каждого* $x \in F$.

Пусть A — множество всех функций f из X, таких, что

(a) $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,

(b) $\mu(\{x \mid f(x) = 1\}) \geqslant 1/2$.

Тогда 0 является предельной точкой A. Однако если некоторая последовательность $\{f_n\}$ элементов из A сходится к 0 в топологии $\mathcal{O}$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к 0 в каждой точке $x \in [0,1]$. Следовательно, по теореме Лебега о возможности предельного перехода под знаком интеграла в случае равномерно ограниченной последовательности функций получим $\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to +\infty$. Но это противоречит неравенству $\int_0^1 f_n(x)\,dx \geqslant 1/2$. Наконец, принимая во внимание последнее замечание к примеру 11, заключаем, что X не метризуемо.

13. Непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни открытым, ни замкнутым

Первый пример. Пусть функция $f(x) \equiv e^x \cos x$ задана на $\mathbf{R}$, где определена обычная топология. Легко видеть, что f отображает $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$ непрерывно, однако множество $f((-\infty, 0))$ не является открытым, а множество $f(\{-n\pi \mid n \in \mathbf{N}\})$ не является замкнутым.

Второй пример. Возьмем в качестве X пространство $\mathbf{R}$ с дискретной топологией, в качестве Y — пространство $\mathbf{R}$ с обычной топологией и рассмотрим тождественное отображение первого пространства на второе.

14. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся одновременно открытым и замкнутым, но не являющееся непрерывным

Первый пример. Пусть X — единичная окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть Y — полуоткрытый интервал $[0, 2\pi)$ с топологией, индуцированной обычной топологией в $\mathbf{R}$. Наконец, пусть f — отображение $(x, y) \to \theta$, где $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$ и $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Тогда f одновременно и открыто, и замкнуто, поскольку обратное отображение непрерывно. Однако f разрывно в точке $(1,0)$.

Второй пример. Отображение, обратное к отображению из второго примера п. 13.

15. Замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни открытым

Пусть X — единичная окружность $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ с топологией, индуцированной обычной топологией на плоскости. Далее, пусть Y — полуоткрытый интервал $[0, \pi)$ с топологией, индуцированной обычной топологией в $\mathbf{R}$. Наконец, пусть f — отображение

$$(\cos\theta, \sin\theta) \to \begin{cases} 0, & \text{если} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \\ \theta - \pi, & \text{если} \quad \pi < \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Тогда f не является открытым, так как открытая верхняя полуокружность из X отображается в точку. Кроме того, f не является непрерывным в точке (1,0) (см. первый пример п. 14). Однако, как мы сейчас убедимся, f замкнуто. Предположим противное, т. е. что f *не* замкнуто. Тогда в X существует замкнутое множество A, такое, что $B \equiv f(A)$ не замкнуто в Y. Следовательно, существует последовательность $\{b_n\}$ точек из B, такая, что $b_n \to b$, а $b \notin B$. Пусть $f(p_n) = b_n$, где $p_n \in A$ для $n = 1, 2, \ldots$. Поскольку A компактно, то без ограничения общности можно предположить, что $\{p_n\}$ сходится, $p_n \to p \in A$. Но так как $f(p_n) \to \to b \neq f(p)$, то f разрывно в точке p и, следовательно, $p = (1, 0)$. Это означает, что существует подпоследовательность последовательности $\{p_n\}$, стремящаяся к точке (1, 0) либо по верхней, либо по нижней полуокружности. В первом случае $b_n \to 0 \in B$, а во втором случае $\{b_n\}$ не может сходиться в Y. Итак, в обоих случаях получено противоречие; следовательно, f замкнуто.

16. Отображение одного топологического пространства на другое, являющееся непрерывным и открытым, но не являющееся замкнутым

Пусть $(X, \mathcal{O})$—евклидова плоскость с обычной топологией, $(Y, \mathcal{J})$ — пространство $\mathbf{R}$ с обычной топологией, и, наконец, пусть отображение f есть проектирование P: $(x, y) \to x$. Тогда P, очевидно, непрерывно и открыто, однако $P(\{(x, y) \mid y = = 1/x > 0\})$ не замкнуто в $(Y, \mathcal{J})$.

17. Открытое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся ни непрерывным, ни замкнутым

Первый пример. Пусть $X = Y = \mathbf{R}$ с обычной топологией, и пусть f — функция, определенная в примере 27 гл. 8, множество значений которой на всяком непустом открытом интервале совпадает с $\mathbf{R}$. Эта функция, очевидно, является открытым отображением, поскольку образ всякого непустого открытого множества есть $\mathbf{R}$. Кроме того, f всюду разрывна. Покажем, что отображение f не замкнуто. Пусть точка

$x_n \in (n, n+1)$ такова, что $\frac{1}{n+1} < f(x_n) < \frac{1}{n}$ для $n=1, 2, \ldots$. Тогда $\{x_n\}$ замкнуто, а $\{f(x_n)\}$ — нет.

Второй пример. Пусть $(X, \mathcal{O})$ — плоскость с топологией $\mathcal{O}$, состоящей из пустого множества $\varnothing$ и дополнений счетных множеств, а $(Y, \mathcal{J})$ — пространство $\mathbf{R}$ с топологией $\mathcal{J}$, состоящей из пустого множества $\varnothing$ и дополнений конечных множеств. Наконец, в качестве отображения рассмотрим проектирование P: $(x, y) \to x$. Тогда P открыто, поскольку любое непустое открытое множество в $(X, \mathcal{O})$ должно содержать некоторую горизонтальную прямую, образ которой есть $\mathbf{R}$. С другой стороны, P не замкнуто, так как множество точек $(n, 0)$, где $n \in \mathbf{N}$, замкнуто в $(X, \mathcal{O})$, а его образ не замкнут в $(Y, \mathcal{J})$. Наконец, P не является непрерывным, так как прообраз любого открытого в $(Y, \mathcal{J})$ множества, которое является правильным подмножеством в Y, не может быть открытым в $(X, \mathcal{O})$.

18. Непрерывное замкнутое отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся открытым

В качестве пространств X и Y возьмем замкнутый интервал $[0, 2]$ с обычной топологией. Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x-1, & \text{если } 1 < x \leqslant 2. \end{cases}$$

Тогда отображение f, очевидно, непрерывно и, следовательно, замкнуто, так как X и Y — компактные метрические пространства. С другой стороны, множество $f((0, 1))$ не является открытым в Y.

19. Топологическое пространство X и его подпространство Y, содержащее два непересекающихся открытых множества, которые не являются пересечением подпространства Y с непересекающимися открытыми множествами пространства X

Пусть $X \equiv \mathbf{N}$, а открытыми множествами являются $\varnothing$ и дополнения конечных множеств. Пусть далее $Y \equiv \{1, 2\}$. Тогда $\{1\} = Y \cap (X \setminus \{2\})$ и $\{2\} = Y \cap (X \setminus \{1\})$, так что топология подпространства Y дискретна. Однако непересекающиеся открытые множества $\{1\}$ и $\{2\}$ подпространства Y

не являются пересечениями подпространства Y с непересекающимися открытыми множествами пространства X, поскольку любые два непустых открытых множества пространства X пересекаются.

20. Два негомеоморфных топологических пространства, каждое из которых является непрерывным взаимно однозначным образом другого

Первый пример. Пусть X и Y — следующие подпространства пространства $\mathbf{R}$, наделенного обычной топологией:

$$X \equiv \bigcup_{n=0}^{+\infty} ((3n,\ 3n+1) \cup \{3n+2\}),$$

$$Y \equiv (X \setminus \{2\}) \cup \{1\}.$$

Определим отображение S пространства X на Y и отображение T пространства Y на X формулами:

$$S(x) \equiv \begin{cases} x, & \text{если } x \neq 2, \\ 1, & \text{если } x = 2, \end{cases} \quad T(y) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}y, & \text{если } y \leqslant 1, \\ \frac{1}{2}y - 1, & \text{если } 3 < y < 4, \\ y - 3, & \text{если } y \geqslant 5. \end{cases}$$

Тогда S и T непрерывны, взаимно однозначны и являются отображениями *на*. Однако X и Y не гомеоморфны, так как при любом гомеоморфизме Y на X точка 1 пространства Y не может иметь образа.

Второй пример. Пусть X и Y — множества на плоскости с обычной топологией, указанные на рис. 12. Вертикальные отрезки имеют длины, равные 2, и являются открытыми на верхних концах, а окружности имеют единичные радиусы. Отображение S пространства X на Y определяется следующим образом: верхняя часть рис. 12 при помощи параллельного переноса накладывается на нижнюю так, что горизонтальная прямая множества X отображается на горизонтальную прямую множества Y, окружности D_n — на C_{n+1}, отрезок A_1 — на C_1, отрезки A_{n+2} — на B_{n+1}, $n \in \mathbf{N}$. Отображение же отрезка A_2 на окружность B_1 определяется отдельно формулами $x = \sin \pi t$, $y = 1 - \cos \pi t$, где $0 \leqslant t < 2$. Отображение T множества Y на X определим так: нижнюю часть рис. 12 сместим влево и наложим ее на верхнюю так, чтобы окруж-

ность B_1 совпала с D_1, горизонтальная прямая множества Y — с горизонтальной прямой множества X, окружности C_{n+1} — с D_{n+2}, отрезки B_{n+1} — с A_n, $n \in \mathbf{N}$. Наконец, сегмент C_1 отобразим на окружность D_2 при помощи формул такого же типа, как и выше. Отображения S и T обладают нужными свойствами. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что пространства X и Y не гомеоморфны.

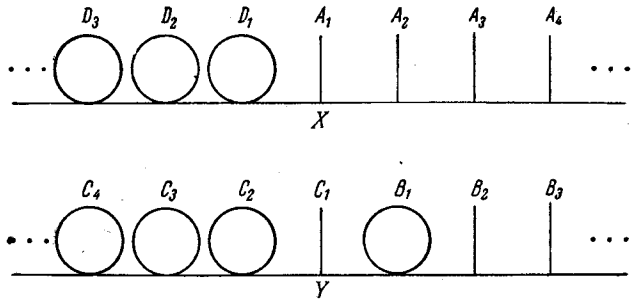

Рис. 12.

21. Разбиение трехмерного евклидова шара B на пять непересекающихся подмножеств S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 (при этом S_5 состоит из единственной точки), таких, что при жестких движениях R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 справедливы следующие соотношения:

$$B \cong R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cong R_3(S_3) \cup R_4(S_4) \cup R_5(S_5)$$

(Здесь символ $\cong$ означает „конгруэнтен". См. ссылку, которая следует ниже.)

22. Для любых двух евклидовых шаров B_ε и B_M, радиусы которых суть произвольно заданные числа $\varepsilon > 0$ и $M > 0$, всегда существует разбиение шара B_ε на конечное число непересекающихся подмножеств $S_1, S_2, \ldots, S_n$, таких, что при жестких движениях $R_1, R_2, \ldots, R_n$ справедливо равенство

$$B_M = R_1(S_1) \cup R_2(S_2) \cup \ldots \cup R_n(S_n)$$

Два последних примера впервые были построены в работах Хаусдорфа, Банаха, Тарского, фон Неймана и Робинсона. Однако мы ограничимся лишь одной ссылкой, где они излагаются наиболее подробно (см. [43]).

ГЛАВА 13

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Введение

Функциональным пространством, или пространством функций, называется совокупность функций, имеющих общую область определения D. Обычно предполагается, что функциональное пространство обладает какой-либо алгебраической или топологической структурой. В настоящей главе мы сосредоточим внимание на *алгебраических* структурах некоторых пространств действительнозначных функций действительного переменного, общая область определения которых есть некоторый фиксированный интервал I.

Функциональное пространство S действительнозначных функций, заданных на интервале I, называется векторным пространством (или линейным пространством) над $\mathbf{R}$ (системой действительных чисел), если S замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами, т. е. если

$$f,\ g \in S,\ \lambda,\ \mu \in \mathbf{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in S,$$

где функция λf определяется следующим образом:

$$(\lambda f)(x) \equiv \lambda (f(x)).$$

Легко показать, что пространство действительнозначных функций, заданных на некотором интервале, является векторным пространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно двух операций, а именно относительно *сложения* $f+g$ и *умножения на скаляр* λf. Абстрактное понятие *векторного пространства* определено аксиоматически в введении к гл. 12. (Дальнейшие сведения см. в [19] и [15]*.) Многие наиболее важные классы функций, встречающиеся в анализе, являются линейными пространствами над $\mathbf{R}$ (или над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$; в этом случае коэффициенты λ и μ — произвольные комплексные числа). Примерами пространств действительнозначных функций, которые являются линейными пространствами над $\mathbf{R}$, могут служить:

1. Совокупность *всех* (действительнозначных) функций на интервале I. 2. Совокупность всех *ограниченных* функций на интервале I. 3. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Риману* на замкнутом интервале $[a, b]$. 4. Совокупность всех функций, *измеримых по Лебегу* на интервале I. 5. Совокупность всех функций, *интегрируемых по Лебегу* на интервале I. 6. Совокупность всех функций, измеримых на интервале I, p-я степень абсолютных значений которых интегрируема по Лебегу на I ($p \geqslant 1$). 7. Совокупность всех функций, *непрерывных* на интервале I. 8. Совокупность всех функций, *кусочно непрерывных* на замкнутом интервале $[a, b]$. (См. [36], стр. 131.) 9. Совокупность всех функций, *кусочно гладких* на замкнутом интервале $[a, b]$. (См. [36], стр. 131.) 10. Совокупность всех функций, имеющих производные n-го порядка на интервале I, где n — некоторое фиксированное натуральное число. 11. Совокупность всех функций, имеющих *непрерывные* производные n-го порядка на интервале I, где n — некоторое фиксированное натуральное число. 12. Совокупность всех *бесконечно дифференцируемых* функций на интервале I. 13. Совокупность всех (*алгебраических*) *полиномов* на интервале I. 14. Совокупность всех (алгебраических) полиномов на интервале I, степень которых не превосходит некоторого натурального n. 15. Совокупность всех *тригонометрических полиномов* на интервале I, имеющих вид

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \cos ix + \beta_i \sin ix, \tag{1}$$

где n — любое неотрицательное целое число. 16. Совокупность всех тригонометрических полиномов вида (1), где n фиксировано. 17. Совокупность всех *ступенчатых* функций на замкнутом интервале $[a, b]$. 18. Совокупность всех *постоянных функций* на интервале I. 19. Совокупность всех функций, удовлетворяющих данному линейному однородному дифференциальному уравнению на интервале I, например уравнению

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + e^x \frac{dy}{dx} - xy = 0,$$

на интервале I. Если в предыдущих примерах рассматривать комплекснозначные функции, то получим еще девятнадцать примеров линейных пространств над $\mathbf{R}$.

Линейные пространства играют существенную роль в анализе. Однако существует несколько важных классов действительнозначных функций, которые не являются линейными пространствами. Некоторые из них указаны в следующих пяти примерах: (i) класс всех монотонных функций на интервале $[a, b]$, (ii) класс всех периодических функций на $(-\infty, +\infty)$, (iii) класс всех полунепрерывных функций на интервале $[a, b]$, (iv) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Риману на $[a, b]$, (v) класс всех функций, квадраты которых интегрируемы по Лебегу на $[a, b]$. Можно сказать, что эти пространства являются нелинейными на интервале $[a, b]$.

Пространство S действительных функций, заданных на интервале I, называется алгеброй над $\mathbf{R}$, если оно замкнуто относительно линейных комбинаций с действительными коэффициентами и относительно операции произведения функций, т. е. если S есть линейное пространство над $\mathbf{R}$ и

$$f \in S,\ g \in S \Rightarrow fg \in S.$$

(Точно так же, как и понятие линейного пространства, абстрактное понятие *алгебры* определяется аксиоматически. См. [19], т. II, стр. 36, 225.) Из тождества

$$fg = \frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \tag{2}$$

следует, что линейное функциональное пространство является алгеброй тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операции возведения в квадрат.

Пространство S действительнозначных функций, заданных на интервале I, называется структурой, если оно замкнуто относительно двух бинарных операций $\vee$ и $\wedge$, которые определяются следующим образом:

$$(f \vee g)(x) \equiv \max(f(x),\ g(x)),$$
$$(f \wedge g)(x) \equiv \min(f(x),\ g(x)).$$

(Абстрактное понятие структуры определяется аксиоматически. См. [8].) Вместе с данной действительнозначной функцией f часто рассматриваются неотрицательные функции f^+ и f^-, определяемые следующими равенствами:

$$f^+ \equiv f \vee 0,\ f^- \equiv (-f) \vee 0. \tag{3}$$

Эти функции связаны такими соотношениями:

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-, \tag{4}$$

$$f^+ = \frac{1}{2}|f| + \frac{1}{2}f, \quad f^- = \frac{1}{2}|f| - \frac{1}{2}f. \tag{5}$$

Отметим также, что для операций максимума и минимума справедливы следующие равенства:

$$f \vee g = -[(-f) \wedge (-g)], \tag{6}$$

$$f \wedge g = -[(-f) \vee (-g)], \tag{7}$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|, \tag{8}$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|. \tag{9}$$

Из равенств (3)—(9) следует, что линейное функциональное пространство является структурой тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно какой-нибудь *одной* из следующих операций:

$$f \vee g, \ f \wedge g, \tag{10}$$

$$f^+, \ f^-, \ |f|. \tag{11}$$

Среди приведенных выше примеров линейных пространств как алгебрами, так и структурами являются пространства примеров 1—4, 7, 8, 17 и 18. Ни алгебры, ни структуры не образуют пространства примеров 14 (см. ниже пример 6), 16 и 19. Пространства примеров 9, 10, 11 (см. ниже пример 7), 12, 13 и 15 являются алгебрами, но не являются структурами. Пространства примеров 5 (см. ниже пример 8) и 6 являются структурами, но не являются алгебрами.

1. Две монотонные функции, сумма которых не монотонна

$$\sin x + 2x \text{ и } \sin x - 2x \text{ на } [-\pi, \pi].$$

2. Две периодические функции, сумма которых не имеет периода

$$\sin x \text{ и } \sin \alpha x \ (\alpha \text{ иррационально}) \text{ на } (-\infty, +\infty).$$

Если бы функция $\sin x + \sin \alpha x$ имела отличный от нуля период p, то для любого действительного x были бы

справедливы следующие тождества:

$$\sin(x+p)+\sin(\alpha x+\alpha p)=\sin x+\sin\alpha x,$$

$$\sin(x+p)-\sin x=-[\sin(\alpha x+\alpha p)-\sin\alpha x],$$

$$\cos\left(x+\frac{1}{2}p\right)\sin\left(\frac{1}{2}p\right)=-\cos\left(\alpha x+\frac{1}{2}\alpha p\right)\sin\left(\frac{1}{2}\alpha p\right),$$

$$\cos x\sin\left(\frac{1}{2}p\right)=-\cos(\alpha x)\sin\left(\frac{1}{2}\alpha p\right).$$

Если положить $x=\frac{1}{2}\pi$, то левая часть последнего тождества обратится в нуль. Следовательно, $\sin\frac{1}{2}\alpha p=0$, а поэтому αp кратно 2π. Если же положить $\alpha x=\frac{1}{2}\pi$, то обратится в нуль правая часть этого тождества. Следовательно, $\sin\frac{1}{2}p=0$, а поэтому p кратно 2π. Но это противоречит предыдущему, так как α иррационально. (См. [38], стр. 550, замечание.)

3. Две полунепрерывные функции, сумма которых не является полунепрерывной

Положим

$$f(x)\equiv\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ 2, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0,\end{cases}\qquad g(x)\equiv\begin{cases}1, & \text{если } x>0,\\ -2, & \text{если } x=0,\\ -1, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Тогда $f(x)$ всюду полунепрерывна сверху, $g(x)$ всюду полунепрерывна снизу, однако $f(x)+g(x)$ не является полунепрерывной в точке $x=0$.

Возможны и более интересные примеры, когда каждая из функций f и g полунепрерывна всюду, однако в одних точках эти функции полунепрерывны *сверху*, а в других — *снизу*. Для построения таких примеров условимся, что обозначение p/q, где p и q — целые числа, представляет собой

несократимую дробь, причем $q>0$. Число нуль будем представлять в виде отношения 0/1. Положим

$$f(x)\equiv\begin{cases}1, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ 0 \text{ в противном случае},\end{cases}$$

$$g(x)\equiv\begin{cases}-1, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ 0 \text{ в противном случае}.\end{cases}$$

Тогда

$$f(x)+g(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ -1, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Следовательно, $f(x)+g(x)$ полунепрерывна тогда и только тогда, когда x рационально, т. е. $f+g$ почти всюду *не является* полунепрерывной.

Теперь рассмотрим следующие три функции:

$$F(x)\equiv\begin{cases}4/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ -2-4/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ -2, \text{ если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

$$G(x)\equiv\begin{cases}-1-1/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ 1+1/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ -1, \text{ если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

$$H(x)\equiv\begin{cases}-1-1/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ 3+1/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ 3, \text{ если } x \text{ иррационально}.\end{cases}$$

Каждая из функций F, G и H полунепрерывна всюду, однако их сумма

$$F(x)+G(x)+H(x)=\begin{cases}-2+2/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ нечетно},\\ 2-2/q, \text{ если } x=p/q,\ q \text{ четно},\\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

не является полунепрерывной *ни в одной* точке.

4. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Риману, но квадрат их суммы не интегрируем по Риману

Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ иррационально,} \\ -1, & \text{если } x \text{ рационально,} \end{cases}$$

и

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — алгебраическое число,} \\ -1, & \text{если } x \text{ — трансцендентное число.} \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \text{ — алгебраическое иррациональное число,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Очевидно, функции f^2 и g^2 являются постоянными, и, следовательно, они интегрируемы на любом замкнутом интервале, в частности на $[0,1]$. В то же время функция $(f+g)^2$ разрывна всюду и поэтому не интегрируема по Риману *ни на каком* интервале, в частности она не интегрируема на $[0,1]$.

5. Две функции, квадраты которых интегрируемы по Лебегу, но квадрат их суммы не интегрируем по Лебегу

Пусть E_1 — неизмеримое подмножество интервала $[0,1]$, а E_2 — неизмеримое подмножество интервала $[2,3]$. (См. пример 11 гл. 8.) Положим

$$f(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0,1] \cup E_2, \\ -1, & \text{если } x \in [2,3] \setminus E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$g(x) \equiv \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [2,3] \cup E_1, \\ -1, & \text{если } x \in [0,1] \setminus E_1, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) + g(x) = \begin{cases} 2, & \text{если } x \in E_1 \cup E_2, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Но так как

$$f^2(x)=g^2(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in[0,1]\cup[2,3],\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

а

$$(f(x)+g(x))^2=\begin{cases}4, & \text{если } x\in E_1\cup E_2,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

то отсюда следует требуемый результат, поскольку множество $E_1\cup E_2$ неизмеримо.

6. Линейное функциональное пространство, не являющееся ни алгеброй, ни структурой

Совокупность полиномов $cx+d$ степени не выше 1 на замкнутом интервале $[0,1]$ образует линейное пространство. Это пространство не является алгеброй, поскольку ему не принадлежит квадрат элемента x. Это пространство не образует и структуры, так как элемент $2x-1$ принадлежит пространству, а элемент $|2x-1|$ ему не принадлежит.

7. Линейное функциональное пространство, являющееся алгеброй, но не являющееся структурой

Рассмотрим пространство всех функций, непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$. Как следует из формулы $(fg)'=fg'+f'g$, оно образует алгебру. Однако оно не является структурой. В самом деле, функция

$$f(x)\equiv\begin{cases}0, & \text{если } x=0,\\ x^3\sin 1/x, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

непрерывно дифференцируема на $[0,1]$, но ее абсолютное значение уже не будет дифференцируемо на бесконечном множестве точек, где $f(x)=0$. В действительности же функция $|f(x)|$ даже не является кусочно гладкой.

8. Линейное функциональное пространство, являющееся структурой, но не являющееся алгеброй

Множество всех функций, интегрируемых по Лебегу на $[0,1]$, является линейным пространством и структурой.

Однако это пространство не образует алгебры, поскольку функция

$$f(x) \equiv \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ x^{-1/2}, \text{ если } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

принадлежит пространству, а ее квадрат ему не принадлежит.

9. Две метрики в пространстве $C([0,1])$ функций, непрерывных на $[0,1]$, такие, что дополнения единичного шара в одной из метрик всюду плотно в единичном шаре другой метрики

Метрики ρ и σ определим следующим образом: для $f, g \in C([0,1])$ положим

$$\rho(f, g) = \sqrt{\int_0^1 |f(x) - g(x)|^2 \, dx} \equiv \|f - g\|_2,$$

$$\sigma(f, g) = \sup_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - g(x)| \equiv \|f - g\|_\infty.$$

Пусть $P \equiv \{ f \mid \rho(f, 0) \leqslant 1 \}$, $\Sigma \equiv \{ f \mid \sigma(f, 0) \leqslant 1 \}$ — единичные шары в этих метриках. Очевидно, $\Sigma \subset P$. Покажем, что дополнение Σ всюду плотно в P. В самом деле, пусть $f \in P$ и $0 < \varepsilon < 1$. Если $\|f\|_\infty > 1$, то $f \notin \Sigma$ и f принадлежит любому шару в метрике ρ с центром в точке f. Если же $\|f\|_\infty \leqslant 1$, то положим

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{9} \text{ или } \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon^2}{9} \leqslant x \leqslant 1, \\ 3, \text{ если } x = \frac{1}{2}, \\ \text{линейна на оставшихся интервалах.} \end{cases}$$

Тогда $f(x) + g(x) \notin \Sigma$ и

$$\|f - (f + g)\|_2 = \|g\|_2 < \sqrt{9 \cdot (\varepsilon^2/9)} = \varepsilon.$$

Этот последний пример выявляет существенное различие между конечномерными и бесконечномерными нормированными

линейными пространствами. В обоих случаях замкнутый единичный шар обладает тем свойством, что всякая прямая, проходящая через его центр (т. е. совокупность элементов, которые получаются умножением фиксированного ненулевого элемента на всевозможные скаляры), пересекает шар по замкнутому отрезку, средняя точка которого совпадает с центром шара. Тем самым в конечномерном пространстве топология определяется единственным образом. Настоящий пример показывает, что в бесконечномерном пространстве этот факт не имеет места.

БИБЛИОГРАФИЯ

Александров П. С., Колмогоров А. Н.

[1]*[1]) Введение в теорию функций действительного переменного М.—Л., 1938.

Александров, Хопф (Alexandrov P., Hopf H.)

[2] Topologie, Springer, Berlin, 1935.

Банах (Banach S.)

[3] Théorie des opérations linéaires, Warsaw, 1932. (На украинском языке: Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.)

Безикович (Besicovitch A. S.)

[4] Sur deux questions de l'intégrabilité, *Journ. Soc. Math. et Phys. à l'Univ. à Perm,* **2** (1920).

[5] On Kakeya's problem and a similar one, *Math. Z.,* **27** (1928), 312—320.

[6] On the definition and value of the area of a surface, *Quart. J. Math.,* **16** (1945), 86—102.

[7] The Kakeya problem, Math. Association of America Film, Modern Learning Aids, New York; *Amer. Math. Monthly,* **70**, № 7 (1963), 697—706.

Биркгоф Г.

[8] Теория структур, М., ИЛ, 1952.

Боас (Boas R. P.)

[9] A primer of real functions, Carus Math. Monographs, № 13, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1960.

Брауер (Brouwer L. E. J.)

[10] Zur Analysis Situs, *Math. Ann.,* **68** (1909), 422—434.

Бурбаки Н.

[11] Теория множеств, М., изд-во «Мир», 1965.

[12] Общая топология. Основные структуры, М., Физматгиз, 1958.

[13] Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, М., Физматгиз, 1959.

Вайдьянатхасвами (Vaidyanathaswamy R.)

[14] Treatise on set topology, Part 1, Indian Math. Soc., Madras, 1947.

---

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.

Гельфанд И. М.
[15]* Лекции по линейной алгебре, М., изд-во «Наука», 1966.

Гобсон (Hobson E. W.)
[16] The theory of functions, Harren Press, Washington, 1950.

Грейвз (Graves L. M.)
[17] Theory of functions of real variables, 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1956.

Данфорд Н., Шварц Дж. Т.
[18] Линейные операторы, Общая теория, М., ИЛ, 1962.

Джекобсон (Jacobson N.)
[19] Lectures in abstract algebra, vols. 1 and 2, D. Van Nostrand Company, Inc., New York, 1951.

Зигмунд А.
[20] Тригонометрические ряды, т. I и II, М., изд-во «Мир», 1965.

Какея (Kakeya S.)
[21] Some problems on maximum and minimum regarding ovals, *Tôhoku Sci. Reports,* **6** (1917), 71—88.

Каратеодори (Carathéodory C.)
[22] Vorlesungen über reelle Funktionen, 2d ed., G. B. Teubner, Leipzig, 1927.

Келли (Kelley J. L.)
[23] General topology, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, New York, 1955.

Кнастер, Куратовский (Knaster B., Kuratowski C.)
[24] Sur les ensembles convexes, *Fund. Math.,* **2** (1921), 201—255.

Колмогоров А. Н.
[25] О представлении непрерывных функций нескольких переменных суперпозицией непрерывных функций меньшего числа переменных, *ДАН СССР,* **108** (1956), 179—182.

Кук Р.
[26]* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей, М., Физматгиз, 1960.

Куратовский К.
[27] Топология, т. I, М., изд-во «Мир», 1966.

Лебег А.
[28] Интегрирование и отыскание примитивных функций, М.—Л., 1934.

Люмис Л.
[29] Введение в абстрактный гармонический анализ, М., ИЛ, 1956.

Мазуркевич (Mazurkiewicz S.)
[30] *Compt. Rend. Soc. Sci. et Lettres de Varsovie,* **7** (1914), 322—383, especially 382—383.

Мак-Шейн, Ботс (McShane E. J., Botts T. A.)
[31] Real analysis, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton, N. Y., 1959.

Манро (Munroe M. E.)
[32] Introduction to measure and integration, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1953.

Натансон И. П.
[33]* Теория функций вещественной переменной, М., Физматгиз, 1957.

фон Нейман Дж (von Neumann J.)
[34] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann.,* **102** (1930), 370—427.

Ньюмен (Newman M. H. A.)
[35] Elements of the topology of plane sets of points, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1939.

Олмстед (Olmsted J. M. H.)
[36] Advanced calculus, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1961.
[37] The real number system, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1962.
[38] Real variables, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York, 1956.

Осгуд (Osgood W. F.)
[39] A Jordan curve of positive area, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **4** (1903), 107—112.

Пастор (Pastor J. R.)
[40] Elementos de la teoria de functiones, 3d ed., Ibero-Americana, Madrid — Buenos Aires, 1953.

Поллард (Pollard H.)
[41] The theory of algebraic numbers, Carus Math. Monographs, № 9, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1950.

Радо (Radó T.)
[42] Length and area, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, **30**, New York, 1958.

Робинсон (Robinson R. M.)
[43] On the decomposition of spheres, *Fund. Math.,* **34** (1947), 246—266.

Рудин У.
[44] Основы математического анализа, М., изд-во «Мир», 1966.

Сакс С.
[45]* Теория интеграла, М., ИЛ, 1949.

Серпинский (Sierpinski W.)
[46] *Bull. Intern. Ac. Sciences Cracovie* (1911), 149.
[47] Sur un problème concernant les ensembles mesurables superficiellement, *Fund. Math.*, **1** (1920), 112—115.
[48] General topology, University of Toronto Press, Toronto, 1952.
[49] Cardinal and ordinal numbers, Warsaw, 1958.

Теплиц (Toeplitz O.)
[50] Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Matematyczne-Fizyczne, 22 (1911), 113—119.

Титчмарш Е.
[51] Теория функций, М., Гостехиздат, 1951.

Фихтенгольц Г. М.
[52]* Курс дифференциального и интегрального исчисления, тт. I—III, М., 1960.

Халмош П.
[53] Теория меры, М., ИЛ, 1953.

Хаусдорф Ф.
[54] Теория множеств, М., Гостехиздат, 1937.

Хенкок (Hancock H.)
[55] Foundations of the theory of algebraic numbers, Macmillan, New York, 1931.

Холл, Спенсер (Hall D., Spencer G.)
[56] Elementary topology, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1955.

Штейниц (Steinitz E.)
[57] Bedingte konvergente Reihen und konvexe Systeme, *Journ. für Math.*, **143** (1913), 128—175.

[58] *Amer. Math. Monthly*, **68**, № 1 (1961), 28, Problem 3.
[59] *Amer. Math. Monthly*, **70**, № 6 (1963), 674.

Указатель обозначений

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ