Для перехода от пары комплексно-сопряженных уравнений (20) к паре действительных уравнений (22) запишем уравнение (20), подставив в него значения λ_k и y^k из (21); мы получим тогда

$$\dot{\xi}^k + i\dot{\eta}^k = (\mu_k + i\nu_k)(\xi^k + i\eta^k) = \mu_k\xi^k - \nu_k\eta^k + i(\nu_k\xi^k + \mu_k\eta^k).$$

Приравнивая отдельно действительные и мнимые части этого соотношения, получаем систему уравнений (22).

Итак, предложение Е) доказано.

Система уравнений (19) имеет очевидное решение

$$y^k = c_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

но для того, чтобы получить решение исходной системы (3), нужно произвести переход от неизвестных (14) к неизвестным (13), а для этого нужно знать собственные векторы (23) матрицы A (см. (24)). Таким образом, предложение Е) равносильно теореме 10.

Для решения системы (1) в общем случае можно использовать приведение матрицы A к жордановой форме; получаемое здесь предложение Ж) равносильно теореме 11.

Ж) Пусть матрица A системы (1) произвольная. Выберем преобразование (15) таким образом, чтобы матрица B имела жорданову форму (см. § 36). Пусть λ — одно из собственных значений матрицы A и k — размер одной из жордановых клеток матрицы B с собственным значением λ. Будем считать, что эта клетка занимает первые k строк. Соответствующая этой клетке система уравнений имеет вид:

$$\dot{y}^1 = \lambda y^1 + y^2, \quad \dot{y}^2 = \lambda y^2 + y^3, \quad \ldots, \quad \dot{y}^{k-1} = \lambda y^{k-1} + y^k, \quad \dot{y}^k = \lambda y^k.$$

Каждой другой жордановой клетке матрицы B соответствует аналогичная система уравнений, которую легко решить.

Примеры

1. Применение метода, изложенного в этом параграфе, к решению системы (1) требует отыскания базиса

$$\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n$$

векторного пространства, составленного из серий (см. теорему 11). Это отыскание само по себе представляет некоторую алгебраическую задачу. Покажем, как, пользуясь результатами этого параграфа, можно решить систему (1) методом неопределенных коэффициентов, не отыскивая базиса, составленного из серий. Пусть λ — некоторое собственное значение матрицы (a_j^i). Этому собственному значению вообще говоря, соответствует несколько серий, входящих в базис $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n$; пусть k будет наибольшая из длин серий, соответ-

ствующих собственному значению λ. В силу теоремы 11 каждое из решений, соответствующих собственному значению λ, может быть записано в виде:

$$x^i = f^i(t)e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

где $f^i(t)$ есть многочлен степени $\leqslant k-1$. Таким образом, подставляя в систему (1) решение в виде (25) и считая, что коэффициенты многочленов $f^i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, суть неизвестные константы, мы, пользуясь методом неопределенных коэффициентов, найдем все решения системы (1), соответствующие собственному значению λ. При таком способе решения системы (1) не нужно знать серий, соответствующих собственному значению λ, а нужно знать лишь длины этих серий. Отыскание длин представляет собой более простую алгебраическую задачу, чем приведение к жордановой форме; задача эта решается *теорией элементарных делителей матриц*, относящейся к линейной алгебре. Теория элементарных делителей нигде в этой книге не используется.

2. Покажем теперь, как решить систему (1) методом исключения, изложенным в § 11. Для применения метода исключения запишем систему (1) в виде:

$$\sum_{j=1}^{n} L^i_j(p)x^j = 0,$$

где

$$L^i_j(p) = a^i_j - p\delta^i_j.$$

Детерминант $D(p)$ матрицы $(L^i_j(p))$ в данном случае представляет собой характеристический многочлен матрицы (a^i_j). Пусть λ — некоторый корень многочлена $D(p)$, или, что то же, собственное значение матрицы (a^i_j). Кратность корня λ обозначим здесь через l. В силу предложения В) § 11 всякое решение системы (1), соответствующее корню λ, следует искать в виде:

$$x^i = g^i(t)e^{\lambda t}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где степень многочлена $g^i(t)$ не превосходит числа $l-1$. Если сравнить метод, излагаемый в этом примере, с методом, данным в примере 1, то мы видим, что вся разница заключается в определении максимальной степени многочленов. Метод примера 1 дает более точное определение степени многочленов, так как число k, вообще говоря, меньше числа l. В самом деле, сумма *всех* длин серий, соответствующих собственному значению λ, равна l. Таким образом, равенство $k = l$ может иметь место лишь в случае, когда есть только одна серия, соответствующая собственному значению λ.

§ 15. Автономные системы дифференциальных уравнений и их фазовые пространства

Здесь будет дана геометрическая интерпретация *автономной* системы уравнений в виде *фазового пространства* этой системы. Эта интерпретация существенно отличается от геометрической интерпретации системы уравнений, указанной в §§ 1, 3 и правильнее должна называться не геометрической, а кинематической, так как в этой интерпретации каждому решению системы уравнений ставится в соответствие не кривая в пространстве, а движение точки по кривой. Кинематическая интерпретация (фазовое пространство) в некоторых отношениях более выразительна, чем геометрическая (система интегральных кривых).

Автономные системы

Система обыкновенных дифференциальных уравнений называется *автономной*, если в нее явно не входит независимое переменное (или, как мы будем говорить, время) t. Это значит, что закон изменения неизвестных функций, описываемый системой уравнений не меняется с течением времени, как это обычно и бывает с физическими законами. Очень легко доказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

есть решение некоторой автономной системы уравнений, то

$$x^i = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t + c), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где c — константа, также есть решение той же автономной системы уравнений. Проведем доказательство этого факта на примере нормальной автономной системы уравнений.

А) Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

— автономная нормальная система уравнений порядка n и

$$\dot{x} = f(x)$$

— векторная ее запись. Автономность системы (1) заключается в том, что функции $f^i(x^1, \ldots, x^n)$, $i = 1, \ldots, n$, являются функциями переменных $x^1, \ldots, x^n$ и не зависят от времени t. Относительно функций $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ мы будем предполагать, что они определены на некотором открытом множестве Δ пространства размерности n, где координатами точки являются переменные $x^1, \ldots, x^n$. Мы будем предполагать, что функции $f^i(x^1, \ldots, x^n)$ и их частные производные первого порядка непрерывны на множестве Δ. Оказывается, что если

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

— решение уравнения (1), то

$$x^i = \varphi^i_*(t) = \varphi^i(t+c), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

также есть решение системы (1).

Из правила дифференцирования сложной функции вытекает соотношение

$$\dot{\varphi}^i_*(t) = \dot{\varphi}^i(t+c), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Действительно,

$$\dot{\varphi}^i_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi^i_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t+c) = \frac{d}{d(t+c)}\varphi^i(t+c)\cdot\frac{d(t+c)}{dt} = \\ = \dot{\varphi}^i(t+c)\cdot 1 = \dot{\varphi}^i(t+c).$$

Докажем теперь, что (3) есть решение системы (1). Так как (2) есть решение, то мы имеем тождества

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(\varphi^1(t) \ \ldots, \ \varphi^n(t)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Заменяя в этих тождествах t через $t+c$, мы получаем:

$$\dot{\varphi}^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Из этого в силу (4) и (3) вытекает

$$\dot{\varphi}^i_*(t) = \dot{\varphi}^i(t+c) = f^i(\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)) = f^i(\varphi^1_*(t), \ldots, \varphi^n_*(t)).$$

Перейдем теперь к кинематической интерпретации решений системы (1). Формально речь будет идти об интерпретации в n-мерном пространстве, но для наглядности разумно представлять себе случай плоскости ($n = 2$).

Б) Каждому решению

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{5}$$

автономной системы (1) поставим в соответствие движение точки в n-мерном пространстве, задаваемое уравнениями (5), где $x^1, \ldots, x^n$ — координаты точки в пространстве, а t — время. В процессе своего движения точка описывает некоторую кривую — *траекторию* движения. Если сопоставить решению (5) не процесс движения, а траекторию движения точки, то мы получим менее полное представление о решении, поэтому желательно на траектории указать хотя бы направление движения. Оказывается, что если наряду с решением (5) имеется другое решение

$$x^i = \psi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{6}$$

то траектории, соответствующие этим решениям, либо не пересекаются в пространстве, либо совпадают. Именно, если траектории имеют хотя бы одну общую точку, т. е.

$$\varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

то

$$\psi^i(t) = \varphi^i(t+c), \text{ где } c = t_1 - t_2. \tag{8}$$

Последние равенства показывают, что траектории, описываемые первым и вторым решениями, совпадают между собой, но первое решение описывает ту же самую траекторию, что и второе, с «запозданием» на время c. Если точка, соответствующая первому решению, достигла некоторого положения на траектории в момент времени $t+c$, то точка, соответствующая второму решению, уже побывала в этом положении в момент времени t.

Для того чтобы вывести из равенства (7) тождество (8), рассмотрим наряду с решением (5) решение

$$\varphi_*^i(t) = \varphi^i(t+c) \tag{9}$$

(см. А)). Из равенства (7) при $c = t_1 - t_2$ следует равенство

$$\varphi_*^i(t_2) = \varphi^i(t_2+c) = \varphi^i(t_1) = \psi^i(t_2), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, решения (6) и (9) системы (1) имеют общие начальные условия (а именно, значения в момент времени t_2) и потому в силу теоремы единственности совпадают, так что мы имеем:

$$\psi^i(t) = \varphi_*^i(t) = \varphi^i(t+c), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Положения равновесия и замкнутые траектории

Поставим вопрос о том, может ли траектория, изображающая решение системы, пересекать себя.

В) Пусть

$$x^i = \varphi^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{10}$$

— некоторое решение системы (1). Допустим, что имеет место равенство

$$\varphi^i(t_1) = \varphi^i(t_2), \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad t_1 \neq t_2, \tag{11}$$

где числа t_1 и t_2, конечно, принадлежат интервалу $r_1 < t < r_2$ определения решения (10). Оказывается, что при этом условии решение (10) может быть продолжено на весь бесконечный интервал $-\infty < t < +\infty$. Поэтому мы сразу будем считать, что само решение (10) определено на этом интервале $-\infty < t < +\infty$. Оказывается далее, что возможны два следующих взаимно исключающих случая.

1) Для всех значений t имеет место равенство

$$\varphi^i(t) = a^i, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

где $(a^1, \ldots, a^n)$ есть точка множества Δ, не зависящая от t. Таким образом, в этом случае точка $(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ в действительности не движется при изменении t, а стоит на месте. Само решение (10)

и точка $(a^1, \ldots, a^n)$ в этом случае называются *положением равновесия* системы (1).

2) Существует такое положительное число T, что при произвольном t имеют место равенства

$$\varphi^i(t+T)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n,$$

но при $|\tau_1-\tau_2|<T$ хотя бы для одного $i=1, \ldots, n$ имеет место неравенство

$$\varphi^i(\tau_1)\neq\varphi^i(\tau_2).$$

В этом случае решение (10) называется *периодическим* с периодом T, а траектория, описываемая решением (10), называется *замкнутой траекторией*, или *циклом*.

Докажем предложение В). Как было отмечено в предложении Б), из равенства (11) следуют тождества

$$\varphi^i(t+c)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n, \qquad c=t_1-t_2. \tag{12}$$

При этом функции $\varphi^1(t+c), \ldots, \varphi^n(t+c)$ также представляют решение системы (1) (см. А)). Это решение и первоначальное решение (10) совпадают там, где они оба определены (теорема 2). Если объединить эти два решения, мы получим новое решение с бо́льшим интервалом существования, чем исходное, а именно, с интервалом $r_1-c<t<r_2$ при $c>0$ и $r_1<t<r_2-c$ при $c<0$. Так как t_1 и t_2 равноправны, то знак величины c можно изменить, так что решение можно продолжить на интервал $r_1-|c|<t<r_2+|c|$. Так как, кроме того, для продолженного решения равенство (11) по-прежнему выполнено, то к нему опять можно применить указанный способ расширения интервала существования, и потому мы можем продолжить решение (10) на всю бесконечную прямую с сохранением для него тождества (12).

Каждое число c, для которого выполнено тождество (12), будем называть *периодом* решения (10); множество всех периодов решения (10) обозначим через F. Множество F есть некоторое множество чисел. Установим некоторые его свойства. Заменяя в соотношении (12) t через $t-c$, получаем $\varphi^i(t)=\varphi^i(t-c)$. Таким образом, если c есть период, то $-c$ также есть период. Допустим, что c_1 и c_2 — периоды, т. е.

$$\varphi^i(t+c_1)=\varphi^i(t), \quad \varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Тогда

$$\varphi^i((t+c_2)+c_1)=\varphi^i(t+c_2)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Таким образом, если c_1 и c_2 суть периоды, то c_1+c_2 также есть период. Допустим, что $c_1, c_2, \ldots, c_m, \ldots$ есть последовательность

периодов, сходящаяся к некоторому числу c_0; тогда мы имеем

$$\varphi^i(t+c_m)=\varphi^i(t), \qquad i=1, \ldots, n, \quad m=1, 2, \ldots$$

Так как функции $\varphi^i(t)$ непрерывны, то при $m\to\infty$ мы получаем:

$$\varphi^i(t+c_0)=\varphi^i(t),$$

т. е. мы видим, что c_0 также есть период, так что множество F замкнуто.

Так как число c в равенстве (12) отлично от нуля ($t_1\neq t_2$), то множество F содержит числа, отличные от нуля. Из установленных свойств множества F легко выводится, что для него есть только две возможности: 1) множество F совпадает с множеством всех действительных чисел; 2) в множестве F имеется минимальное положительное число T, и тогда F состоит из всех целочисленных кратных числа T. Докажем, что действительно имеются только эти две возможности. Так как множество F вместе с каждым числом c содержит число $-c$ и так как в F имеются числа, отличные от нуля, то в F имеются положительные числа.

Допустим, что в множестве F нет наименьшего положительного числа, т. е. что для произвольного положительного числа ε имеется положительный период $c<\varepsilon$. Из доказанных свойств множества F следует (так как c есть период), что все числа mc, где m — целое, также являются периодами. Так как $c<\varepsilon$, то для произвольного действительного числа c_0 можно подобрать такое целое m, что $|c_0-mc|<\varepsilon$. Таким образом, произвольное число c_0 является предельным для множества F, и потому, ввиду замкнутости множества F, это множество совпадает с множеством всех действительных чисел.

Допустим теперь, что F не есть множество всех действительных чисел. В силу доказанного, в F имеется тогда наименьшее положительное число T. Пусть c — произвольный период. Можно тогда выбрать такое целое число m, что $|c-mT|<T$. Допустим, что $c\neq mT$; тогда $|c-mT|$ есть отличный от нуля период, а это невозможно, так как $|c-mT|<T$, что противоречит минимальности числа T. Итак, доказано, что каждое число c из F может быть записано в виде $c=mT$, где m — целое число.

Теперь уже легко проверить, что если F есть множество всех действительных чисел, то имеет место случай 1), а если F не есть множество действительных чисел, то имеет место случай 2). Таким образом, предложение B) доказано.

Кратко предложение B) можно сформулировать, сказав, что имеется три сорта траекторий: 1) положение равновесия; 2) периодические траектории (циклы); 3) траектории без самопересечений. Естественно считать, что последний случай является «наиболее общим».

Из теоремы 2 следует, что через каждую точку области Δ задания системы (1) проходит траектория, изображающая решение системы.

Таким образом, вся область Δ заполнена траекториями, причем, согласно Б), траектории эти попарно не пересекаются. Среди всех траекторий особо выделяются самопересекающиеся, которые являются либо положениями равновесия, либо циклами. Эти два сорта траекторий имеют весьма важное значение.

Такова кинематическая интерпретация решений автономной системы уравнений. Сама система уравнений также допускает геометрическую интерпретацию.

Фазовые пространства

Г) Поскольку автономная система уравнений (1) определена на открытом множестве Δ, каждой точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ множества Δ поставлена в соответствие последовательность из n чисел, именно последовательность:

$$f^1(x_0^1, \ldots, x_0^n), \ldots, f^n(x_0^1, \ldots, x_0^n).$$

Эти числа можно рассматривать как компоненты вектора $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, проведенного в n-мерном пространстве и выходящего из точки $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Таким образом, автономной системе ставится в соответствие геометрический образ — векторное поле, заданное на открытом множестве Δ. В каждой точке $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ множества Δ определен вектор $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, выходящий из этой точки. Связь между геометрической интерпретацией решений и геометрической интерпретацией самой системы уравнений заключается в следующем: Пусть $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ — произвольная точка множества Δ. В силу геометрической интерпретации системы уравнений этой точке поставлен в соответствие выходящий из нее вектор $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Далее, в силу теоремы 2 существует решение $x^i = \varphi^i(t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi^i(t_0) = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

В силу кинематической интерпретации решению $x^i = \varphi^i(t)$ соответствует в пространстве движение точки, описывающее траекторию, причем в момент времени $t = t_0$ движущаяся точка проходит через положение $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ в пространстве. Оказывается, что векторная скорость точки, описывающей решение $x^i = \varphi^i(t)$, в момент ее прохождения через положение $(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ совпадает с вектором $\boldsymbol{f}(x_0^1, \ldots, x_0^n)$. Именно это совпадение и выражается системой уравнений (1) при

$$x^i = x_0^i, \qquad i = 1, \ldots, n; \; t = t_0.$$

Пространство размерности n, в котором интерпретируются решения автономной системы (1) в виде траекторий и сама автономная система (1) в виде векторного поля, называется *фазовым прост-*

ранством системы (1). Траектории называются *фазовыми траекториями*, векторы $f(x_0^1, \ldots, x_0^n)$ называются *фазовыми скоростями*. Связь между обеими интерпретациями заключается в том, что скорость движения точки по траектории в каждый момент времени совпадает с фазовой скоростью, заданной в том месте пространства, где в этот момент находится движущаяся точка.

Рассмотрим теперь положения равновесия с точки зрения фазовых скоростей.

Д) Для того чтобы точка $(a^1, \ldots, a^n)$ множества Δ была положением равновесия системы (1), т. е. чтобы имелось решение $x^i = \varphi^i(t)$ системы, для которого

$$\varphi^i(t) \equiv a^i, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{13}$$

необходимо и достаточно, чтобы фазовая скорость $f(a^1, \ldots, a^n)$ в точке $(a^1, \ldots, a^n)$ была равна нулю. Таким образом, для отыскания всех положений равновесия системы (1) нужно решить систему уравнений

$$f^i(a^1, \ldots, a^n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Эта система представляет собой не систему дифференциальных уравнений, а, как говорят, систему конечных уравнений (производные в нее не входят).

Для доказательства утверждения Д) допустим, что $(a^1, \ldots, a^n)$ есть положение равновесия, т. е. что имеется решение $x^i = \varphi^i(t)$, для которого выполнены соотношения (13), и подставим в систему (1) это решение. Так как производная постоянной равна нулю, то подстановка дает

$$f^i(a^1, \ldots, a^n) = \frac{d}{dt}\varphi^i(t) = \frac{d}{dt}a^i = 0.$$

Таким образом, вектор $f(a^1, \ldots, a^n)$ фазовой скорости действительно обращается в нуль в точке $a^1, \ldots, a^n$. Допустим, что, обратно, вектор $f(a^1, \ldots, a^n)$ фазовой скорости обращается в нуль в точке $(a^1, \ldots, a^n)$, т. е. что $f^i(a^1, \ldots, a^n) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и покажем, что в этом случае равенства (13) определяют решение системы (1). Подстановка дает

$$\dot{\varphi}^i(t) = f^i(a^1, \ldots, a^n), \qquad i = 1, \ldots, n;$$

равенства эти выполнены, так как слева стоит производная константы, а справа — нуль.

Е) Геометрическая интерпретация решения (2) системы уравнений (1), указанная в § 3, ставит в соответствие этому решению кривую K в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $t, x^1, \ldots, x^n$, определяемую системой уравнений (2). Здесь t является одной из координат в пространстве R. Переход к интерпретации в n-мерном фазовом

пространстве S переменных $x^1, \ldots, x^n$ заключается в том, что мы перестаем считать величину t координатой точки, а считаем ее параметром. Таким образом, фазовая траектория L получается из кривой K в результате проектирования пространства R на пространство S в направлении оси t.

Геометрическую наглядность это проектирование приобретает при $n=2$. В этом случае пространство R трехмерно, а пространство S представляет собой плоскость (см. пример 4).

Примеры

1. Рассмотрим автономное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=f(x) \tag{14}$$

первого порядка, правая часть которого непрерывна и имеет непрерывную производную на всей прямой P изменения переменного x. Предположим дополнительно, что нули функции $f(x)$ или, что то же самое, положения равновесия уравнения (14), не имеют предельных точек. В этом предположении положения равновесия разбивают прямую P на систему Σ интервалов. Каждый интервал (a, b) системы Σ обладает тем свойством, что на нем функция $f(x)$ не обращается в нуль, а каждый конец a или b его является либо нулем функции $f(x)$, либо равен $\pm\infty$. Таким образом, система Σ состоит из конечного или счетного числа конечных интервалов и не более чем двух

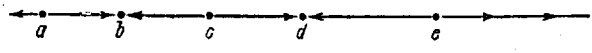

Рис. 17.

полубесконечных интервалов или же содержит только один бесконечный в обе стороны интервал $(-\infty, +\infty)$. Пусть (a, b) — некоторый интервал системы Σ, x_0 — точка этого интервала и $x=\varphi(t)$, $r_1<t<r_2$, — непродолжаемое решение уравнения (14) с начальными значениями 0, x_0. Допустим для определенности, что $f(x_0)>0$; тогда оказывается, что

$$a<\varphi(t)<b \text{ при } r_1<t<r_2, \tag{15}$$

$$\lim_{t\to r_1}\varphi(t)=a, \qquad \lim_{t\to r_2}\varphi(t)=b. \tag{16}$$

Далее, если число a, или соответственно b, конечно, то число r_1 или соответственно r_2, бесконечно. Таким образом (рис. 17), каждый интервал (a, b) представляет собой одну-единственную фазовую траекторию уравнения (14).

Докажем соотношения (15), (16). Из предположения $f(x_0) > 0$ следует, что на интервале (a, b) функция $f(x)$ положительна и потому каждая точка этого интервала, описывая фазовую траекторию, движется слева направо. Таким образом, при возрастающем t точка $\varphi(t)$ может покинуть интервал (a, b), лишь перейдя его правый конец b. Допустим, что это происходит при некотором $t = t_1$; тогда при $t = t_1$ имеем $\varphi(t_1) = b$, а это значит, что две различные траектории $x = \varphi(t)$ и $x = b$ пересекаются, что невозможно. Точно так же доказывается, что точка $\varphi(t)$ не может покинуть интервал (a, b) при убывающем t. Таким образом, соотношение (15) доказано.

Допустим теперь, что $\lim\limits_{t \to r_2} \varphi(t) = c < b$, и пусть $\psi(t)$ — решение уравнения (14) с начальными значениями 0, c. Так как $f(c) > 0$, то при некотором отрицательном значении t_2 имеем $\psi(t_2) < c$, а это значит, что две различные траектории $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ пересекаются, что невозможно. Таким образом, доказано, что $\lim\limits_{t \to r_2} \varphi(t) = b$. Точно так же доказывается и соотношение

$$\lim_{t \to r_1} \varphi(t) = a.$$

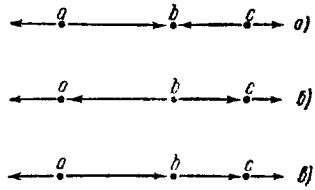

Рис. 18.

Допустим, наконец, что $b < \infty$, и покажем, что тогда $r_2 = +\infty$. Допустим противоположное, именно, что $r_2 < \infty$. Определим тогда функцию $\chi(t)$, положив $\chi(t) = \varphi(t)$ при $r_1 < t < r_2$ и $\chi(t) = b$ при $t \geqslant r_2$. Очевидно, что функция $\chi(t)$ непрерывна и удовлетворяет уравнению (14), а это невозможно, так как тогда пересекаются две различные траектории $x = \chi(t)$ и $x = b$. Полученное противоречие показывает, что $r_2 = +\infty$. Точно так же доказывается, что при $a > -\infty$ имеем $r_1 = -\infty$.

Пусть b — произвольное положение равновесия уравнения (14), а (a, b) и (b, c) — два интервала системы Σ, примыкающие к нему (соответственно слева и справа). Каждый из интервалов (a, b), (b, c) представляет собой одну траекторию. Если обе точки, описывающие траектории (a, b) и (b, c), приближаются (при возрастании t) к положению равновесия b, то положение равновесия b называется *устойчивым* (рис. 18, *а*). Если обе точки, описывающие траектории (a, b) и (b, c), удаляются от точки b, то положение равновесия b называется *неустойчивым* (рис 18, *б*). Если по одной из траекторий точка приближается, а по другой удаляется, то положение равновесия b называется *полуустойчивым* (рис. 18, *в*). Для того чтобы положение равновесия b было устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была положительна на интервале (a, b) и отрицательна на интервале (b, c). Для того чтобы положение равновесия b было неустойчивым, необходимо и достаточно, чтобы функция

$f(x)$ была отрицательна на интервале (a, b) и положительна на интервале (b, c). Для того чтобы положение равновесия b было полуустойчиво, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ имела один и тот же знак на обоих интервалах (a, b) и (b, c).

Допустим, что $\dot{f}(b) \neq 0$; тогда знак функции $f(x)$ вблизи точки b совпадает со знаком величины $\dot{f}(b)(x-b)$. Отсюда следует, что при $\dot{f}(b) < 0$ положение равновесия b уравнения (14) устойчиво, а при $\dot{f}(b) > 0$ оно неустойчиво.

2. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = f(x), \tag{17}$$

где $f(x)$ есть периодическая функция с непрерывной первой производной. Для определенности будем считать, что период ее равен 2π. Все сказанное в примере 1 относительно уравнения (14)

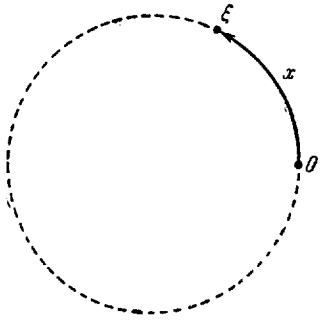

Рис. 19.

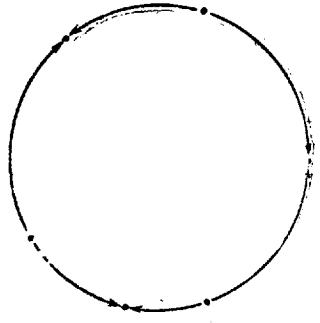

Рис. 20.

остается правильным и для уравнения (17), так как уравнение (17) является частным случаем уравнения (14). Однако, для того чтобы учесть специфику уравнения (17) (периодичность функции $f(x)$) разумно считать, что фазовым пространством уравнения (17) является не прямая, а окружность K радиуса единица, на которой выбрано некоторое начало отсчета 0 и направление обхода (например, против часовой стрелки). Каждому числу x поставим в соответствие точку ξ окружности K, отложив от начала отсчета против часовой стрелки дугу длины x (рис. 19). При этом всем числам $x + 2k\pi$ (k — целое число) будет соответствовать на окружности одна и та же точка ξ. Так как $f(x + 2k\pi) = f(x)$, то можно положить $f(\xi) = f(x)$, и функция f оказывается заданной на окружности K. Уравнение (17) задает теперь движение точки ξ по окружности K. Если $x(t)$ есть некоторое решение уравнения (17), то соответствующая числу $x(t)$ точка $\xi(t)$ движется по окружности K. Если α — такая точка на окружности K, что $f(\alpha) = 0$, то существует такое решение $x(t)$ уравнения (17), что $\xi(t) = \alpha$, и x

есть положение равновесия уравнения (17). Допустим для простоты, что положения равновесия уравнения (17) на окружности K не имеют предельных точек; тогда их имеется лишь конечное число или нет вовсе (рис. 20). Положения равновесия разбивают окружность на конечную систему Σ интервалов. Если положений равновесия вовсе нет, то система Σ содержит лишь один «интервал» (окружность). Если имеется лишь одно положение равновесия α, то система Σ также содержит лишь один интервал, состоящий из всех точек окружности K за исключением точки α. В первом случае интервал вовсе не имеет концов, во втором оба его конца совпадают. Пусть I — некоторый интервал системы Σ и $x(t)$ — некоторое решение уравнения (17) с начальными значениями 0, x_0, где ξ_0 есть точка интервала I. Решение $x(t)$ всегда определено для всех значений t, и точка $\xi(t)$ принадлежит интервалу I. Если интервал I имеет концы (один или два), то точка пробегает интервал I в определенном направлении, причем каждая точка интервала I проходится решением $\xi(t)$ один раз. Если интервал I совпадает со всей окружностью, то, отправившись из положения ξ_0, точка через некоторое время T вернется в нее, так что $\xi(0)=\xi(T)$. В этом случае $\xi(t)$ периодически зависит от числа t с периодом T. Соответствующее движению $\xi(t)$ числовое решение $x(t)$ уравнения (17) удовлетворяет условию

$$x(t+T)=x(t)\pm 2\pi.$$

Из этого примера видно, что фазовым пространством системы уравнений не всегда целесообразно считать эвклидово координатное пространство, а иногда приходится считать более сложное геометрическое образование. Ниже, в примере 3, мы столкнемся с этим обстоятельством в более сложной обстановке, чем в этом примере.

3. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x}^i=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2, \tag{18}$$

где функции $f^i(x^1, x^2)$ являются периодическими относительно обоих аргументов с периодами 2π:

$$f^i(x^1+2k\pi,\ x^2+2l\pi)=f^i(x^1, x^2), \qquad i=1, 2.$$

Как всегда, будем предполагать, что функции $f^i(x^1, x^2)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Ввиду периодичности функций $f^i(x^1, x^2)$ разумно считать, что фазовым пространством системы (18) является не плоскость, а более сложное геометрическое образование, именно, *поверхность тора* или, как говорят, *тор* (рис. 21). Опишем эту поверхность.

В трехмерном эвклидовом пространстве с декартовыми координатами x, y, z выберем в плоскости x, z окружность K радиуса единица с центром в точке (2, 0, 0). Примем на этой окружности за

начало отсчета точку с координатами (3, 0, 0). Тогда каждому числу x^1 будет поставлена в соответствие точка ξ^1 окружности K (см. пример 2). Будем теперь вращать плоскость (x, z) в пространстве (x, y, z) вокруг оси z. Описываемая при этом вращении окружностью K поверхность P представляет собой тор. Пусть ξ^1 — некоторая точка

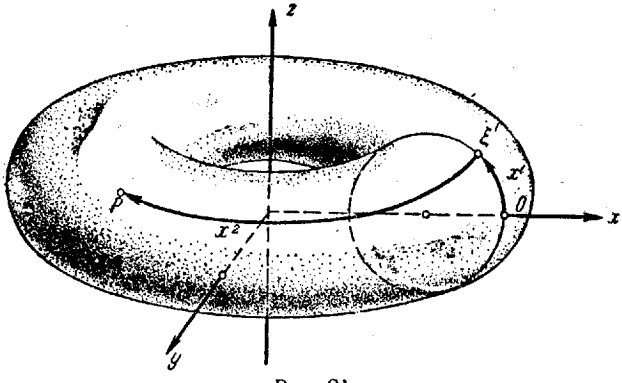

Рис. 21.

окружности K. В результате поворота плоскости (x, z) на угол x^2, исчисляемый в радианах, точка ξ^1 перейдет в некоторую точку p тора P (рис. 21). Если сделать поворот не на угол x^2, а на угол $x^2 + 2k\pi$, то мы придем к той же точке p тора P. Таким образом, точка p тора P однозначно определяется двумя *циклическими координатами* ξ^1, ξ^2, и каждой паре циклических координат ξ^1, ξ^2 соответствует на торе одна вполне определенная точка. Мы видим, таким образом, что функции $f^i(x^1, x^2)$ можно считать заданными не на плоскости, а на поверхности тора P:

$$f^i(\xi^1, \xi^2) = f^i(x^1, x^2).$$

Пусть теперь $x^1(t)$, $x^2(t)$ — некоторое решение системы (18). Ставя в соответствие каждому из чисел $x^1(t)$ и $x^2(t)$ циклические координаты $\xi^1(t)$ и $\xi^2(t)$, мы получаем точку $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ тора P. Таким образом, каждое решение $x^1(t)$, $x^2(t)$ системы (18) может быть изображено движением точки по тору, причем закон движения в каждый момент времени определяется той точкой $\xi^1(t)$, $\xi^2(t)$ тора, через которую траектория в этот момент проходит. Это объясняется тем, что функции $f^i(\xi^1, \xi^2)$ заданы на торе. Таким образом, весь тор P оказывается покрытым траекториями, каждые две из которых либо не пересекаются, либо совпадают. В частности, если траектория пересекает самое себя, то она либо замкнута, либо является положением равновесия.

Изображение фазовых траекторий системы (18) не на плоскости, а на поверхности тора отражает специфическое свойство системы (18) (периодичность функций f^i) и удобно при ее изучении.

4. Каждое решение автономной системы уравнений

$$\dot{x} = -\omega y, \quad \dot{y} = \omega x$$

записывается в виде:

$$x = r\cos(\omega t + \alpha), \quad y = r\sin(\omega t + \alpha), \tag{19}$$

где r и α — константы. Система уравнений (19) определяет в трехмерном пространстве R переменных t, x, y винтовую спираль при $r \neq 0$ и прямую линию (именно, ось t) при $r = 0$.

В фазовой плоскости S переменных x и y та же система уравнений (19) определяет окружность при $r \neq 0$ и точку (положение равновесия) при $r = 0$. Переход от кривых в пространстве R к кривым на плоскости S осуществляется проектированием в направлении оси t на координатную плоскость xy.

5. Каждое решение неавтономной системы уравнений

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = t$$

записывается в виде:

$$x = t + a, \quad y = \frac{1}{2}t^2 + b, \tag{20}$$

где a и b — константы. Из общей теории известно (единственность решения), что в трехмерном пространстве R переменных t, x, y две кривые, определяемые системой уравнений (20), либо не пересекаются, либо совпадают. Для того, чтобы получить проекцию кривой, определяемой системой (20), на плоскость S переменных x, y, следует из системы (20) исключить t. Производя это исключение, получаем:

$$y = \frac{1}{2}(x - a)^2 + b.$$

Это уравнение определяет на плоскости xy параболу с осью, направленной вдоль положительной полуоси x и вершиной в точке (a, b). Две такие параболы: одна с вершиной в точке (a_1, b_1), а другая с вершиной в точке (a_2, b_2) — не пересекаются лишь в случае, если $a_1 = a_2$, $b_1 \neq b_2$. Если же $a_1 \neq a_2$, то соответствующие параболы пересекаются (в одной точке). Пересечение траекторий происходит потому, что исходная система дифференциальных уравнений неавтономна. Поэтому изображение решений на плоскости xy в случае неавтономной системы нецелесообразно.

§ 16. Фазовая плоскость линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

Здесь будут построены фазовые траектории на фазовой плоскости системы

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2, \\ \dot{x}^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

или в векторной форме

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

с постоянными действительными коэффициентами a^i_j. При этом нам придется разобрать несколько различных случаев, так как фазовая картина траекторий системы существенно зависит от значений коэффициентов.

Следует заметить, что начало координат (точка (0, 0)) всегда является положением равновесия системы (1). Это положение равновесия тогда и только тогда является единственным, когда детерминант матрицы (a^i_j) отличен от нуля, или, что то же, оба собственных значения этой матрицы отличны от нуля.

Допустим, что собственные значения матрицы A действительны, различны и отличны от нуля. Тогда, как это следует из результатов § 14 (теорема 10) произвольное действительное решение уравнения (2) можно записать в виде:

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda_1 t} + c^2 h_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{3}$$

Здесь h_1 и h_2 — действительные линейно независимые собственные векторы матрицы A; λ_1 и λ_2 — его действительные собственные значения, а c^1 и c^2 — действительные константы. Решение (3) разложим по базису (h_1, h_2), положив

$$x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2; \tag{4}$$

тогда мы будем иметь:

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{5}$$

Координаты ξ^1, ξ^2 на фазовой плоскости P системы (1), вообще говоря, не являются прямоугольными, поэтому отобразим аффинно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* таким образом, чтобы при этом векторы h_1, h_2 перешли во взаимно ортогональные единичные векторы плоскости P^*, направленные соответственно по оси абсцисс и оси ординат (рис. 22). Точка $x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$ плоскости P перейдет при этом отображении в точку с декартовыми прямоугольными координатами ξ^1, ξ^2 в плоскости P^*. Таким образом, траектория, заданная параметрическими уравнениями (5) в плоскости P перейдет в траекторию (которую мы также назовем *фазовой*), заданную теми же уравнениями в прямоугольных координатах плоскости P^*. Мы начертим сперва траектории, заданные уравнениями (5) в плоскости P^*, и затем отобразим их обратно в плоскость P.

Наряду с фазовой траекторией (5) в плоскости P^* имеется траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = c^1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi^2 = -c^2 e^{\lambda_2 t}, \tag{6}$$

а также траектория, задаваемая уравнениями

$$\xi^1 = -c^1 e^{\lambda_1 t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda_2 t}. \tag{7}$$

Траектория (6) получается из траектории (5) зеркальным отражением относительно оси абсцисс, а траектория (7) — относительно оси ординат. Таким образом, указанные два зеркальных отображения оставляют

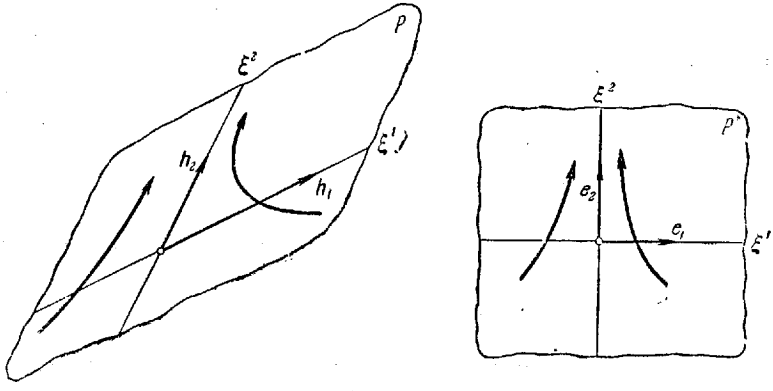

Рис. 22.

картину траекторий на плоскости P^* инвариантной. Из этого видно, что если вычертить траектории в первом квадранте, то уже легко представить себе всю фазовую картину в плоскости P^*.

Заметим, что при $c^1 = c^2 = 0$ мы получаем движение точки, описывающее положение равновесия (0, 0). При $c^2 = 0$, $c^1 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось абсцисс, при $c^1 = 0$, $c^2 > 0$ получаем движение, описывающее положительную полуось ординат. Если $\lambda_1 < 0$, то движение, описывающее положительную полуось абсцисс, протекает в направлении к *началу координат*, если же $\lambda_1 > 0$, то движение это имеет противоположное направление — *от начала координат*. В первом случае точка движется, неограниченно приближаясь к началу координат, во втором — неограниченно удаляясь в бесконечность. То же справедливо и относительно движения, описывающего положительную полуось ординат. Если c^1 и c^2 положительны, то движение точки протекает в первой четверти, не выходя на ее границу.

Дальнейшее, более детальное описание фазовой плоскости проведем отдельно для нескольких случаев — в зависимости от знаков чисел λ_1, λ_2.

А) *Узел*. Допустим, что оба числа λ_1 и λ_2 отличны от нуля и имеют один знак, причем

$$|\lambda_1| < |\lambda_2|. \tag{8}$$

Разберем сперва случай, когда

$$\lambda_1 < 0, \quad \lambda_2 < 0.$$

При этих предположениях движение по положительной полуоси абсцисс направлено к началу координат, точно так же, как движение по положительной полуоси ординат. Далее, движение по произвольной траектории внутри первого квадранта состоит в асимптотическом приближении точки к началу координат, причем траектория при этом касается оси абсцисс в начале координат. При t, стремящемся к $-\infty$, точка движется так, что абсцисса и ордината ее

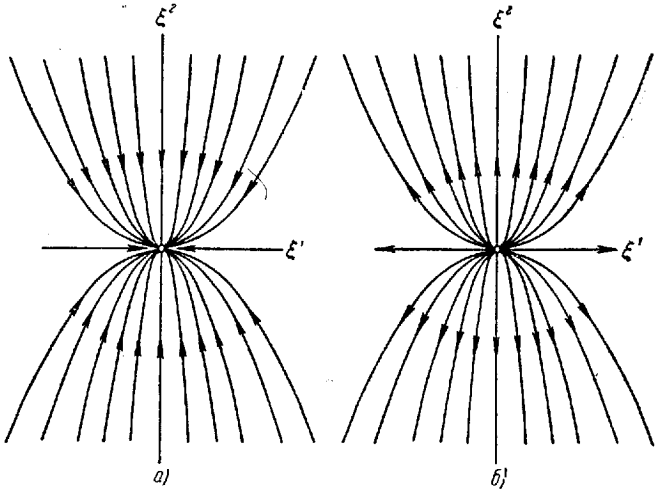

Рис. 23.

бесконечно возрастают, но возрастание ординаты сильнее, чем возрастание абсциссы, т. е. движение идет в направлении оси ординат. Эта фазовая картина называется *устойчивым узлом* (рис. 23, *а*). Если наряду с неравенством (8) выполнены неравенства

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0,$$

то траектории остаются прежними, но движение по ним направлено в противоположном направлении. Мы имеем *неустойчивый узел* (рис. 23, *б*).

Б) Седло. Допустим, что числа λ_1 и λ_2 имеют противоположные знаки. Для определенности предположим, что

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2.$$

В этом случае движение по положительной полуоси абсцисс идет к началу координат, а движение по положительной полуоси ординат —

от начала координат. Траектории, лежащие внутри первого квадранта, напоминают по своему виду гиперболы, а движения по ним происходят в направлении к началу вдоль оси абсцисс, и в направлении от начала вдоль оси ординат. Эта фазовая картина называется *седлом* (рис. 24).

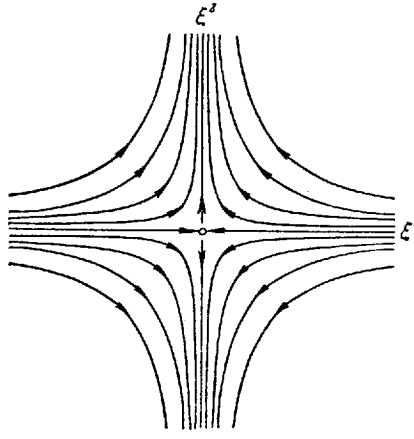

Рис. 24.

Рисунки 23, *а*, *б* и 24 дают картину траекторий на вспомогательной фазовой плоскости P^*. Расположение траекторий на фазовой плоскости P получается из этого с помощью аффинного преобразования и зависят от положения собственных векторов (см., например, рис. 25 и 26).

Рассмотрим теперь случай, когда собственные значения матрицы A комплексны. В этом случае они комплексно сопряжены и могут быть обозначены через $\lambda = \mu + i\nu$ и $\bar{\lambda} = \mu - i\nu$, причем $\nu \neq 0$. Собственные векторы матрицы A могут быть выбраны сопряженными, так что их можно обозначить через $\boldsymbol{h}$ и $\bar{\boldsymbol{h}}$. Положим:

$$\boldsymbol{h} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{h}_1 - i\boldsymbol{h}_2),$$

где $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ — действительные векторы. Векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ линейно независимы, так как в случае линейной зависимости между ними мы имели бы линейную зависимость между $\boldsymbol{h}$ и $\bar{\boldsymbol{h}}$. Итак, векторы $\boldsymbol{h}_1$ и $\boldsymbol{h}_2$ можно принять за базис фазовой плоскости P уравнения (2).

Произвольное действительное решение уравнения (2) можно записать в виде:

$$\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{h}e^{\lambda t} + \bar{c}\bar{\boldsymbol{h}}e^{\bar{\lambda} t}, \tag{9}$$

где c — комплексная константа. Пусть

$$\zeta = \xi^1 + i\xi^2 = ce^{\lambda t};$$

тогда мы имеем:

$$\boldsymbol{x} = \xi^1\boldsymbol{h}_1 + \xi^2\boldsymbol{h}_2.$$

Отобразим аффинно фазовую плоскость P на вспомогательную плоскость P^* комплексного переменного ζ так, чтобы вектор $\boldsymbol{h}_1$

перешел в единицу, а вектор h_2 — в i; тогда вектору $\xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$ будет соответствовать комплексное число $\zeta = \xi^1 + i\xi^2$. В силу этого

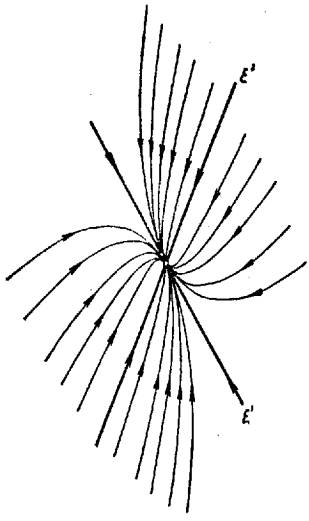

Рис. 25.

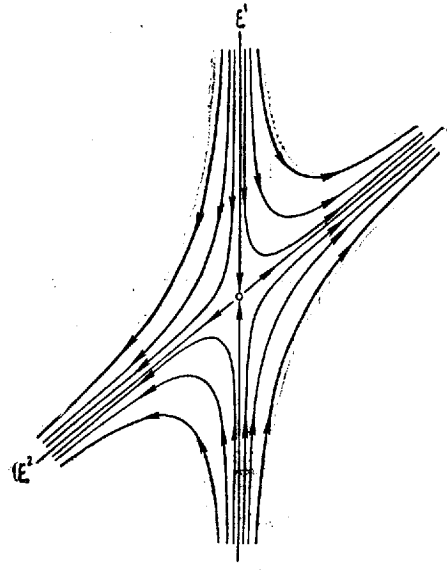

Рис. 26.

отображения фазовая траектория (9) перейдет в фазовую траекторию на плоскости P^*, описываемую уравнением

$$\zeta = ce^{\lambda t}. \tag{10}$$

В) Фокус и центр. Перепишем уравнение (10) в полярных координатах, положив

$$\zeta = \rho e^{i\varphi}, \quad c = Re^{i\alpha}.$$

Таким образом получаем:

$$\rho = Re^{\mu t}, \quad \varphi = \nu t + \alpha;$$

это есть уравнение движения точки в плоскости P^*. При $\mu \neq 0$ каждая траектория оказывается логарифмической спиралью. Соответствующая картина на плоскости P называется *фокусом*. Если $\mu < 0$, то точка при возрастании t асимптотически приближается к началу координат, описывая логарифмическую спираль. Это — *устойчивый фокус* (рис. 27, *а*). Если $\mu > 0$, то точка уходит от начала координат в бесконечность, и мы имеем *неустойчивый фокус* (рис. 27, *б*). Если число μ равно нулю, то каждая фазовая траектория, кроме положения равновесия (0, 0), замкнута, и мы имеем так называемый *центр* (рис. 28).

Рисунки 27 и 28 дают картину во вспомогательной фазовой плоскости; в плоскости P картина аффинно искажается (см., например, рис. 29 и 30).

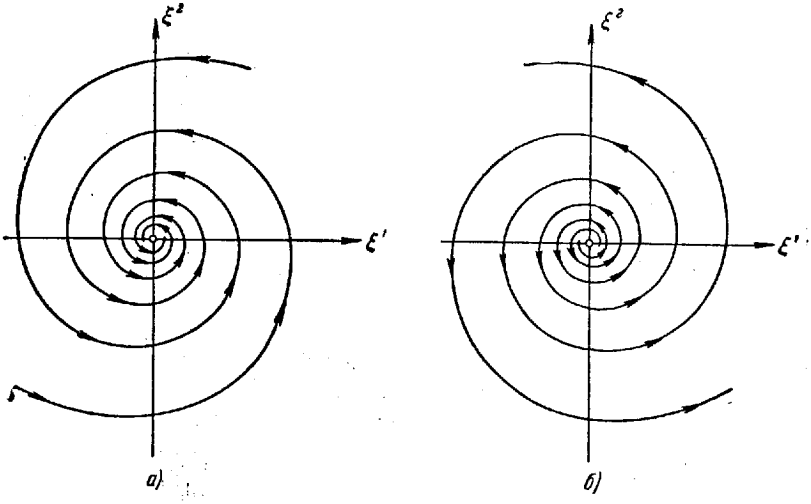

Рис. 27.

Выше мы рассматривали так называемые невырожденные случаи: корни λ_1 и λ_2 различны и отличны от нуля. Малое

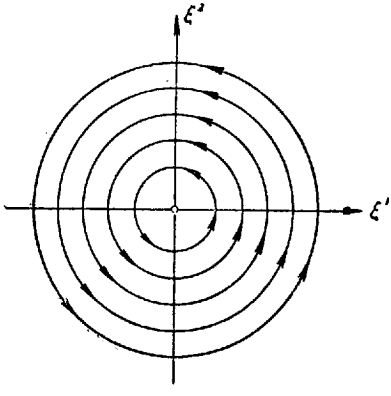

Рис. 28.

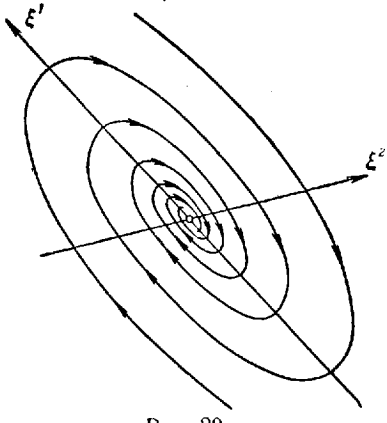

Рис. 29.

изменение элементов матрицы (a_j^i) не меняет в этих предположениях общего характера поведения фазовых траекторий. Исключение составляет случай центра: при малом изменении элементов матрицы (a_j^i)

равенство $\mu = 0$ может нарушиться, и центр перейдет в устойчивый или неустойчивый фокус. Включение этого вырожденного случая (центра) в основной текст параграфа объясняется его важностью. Остальные вырожденные случаи будут рассмотрены в примерах 1 и 3.

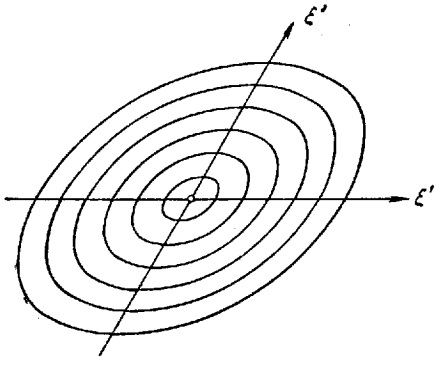

Рис. 30.

Примеры

1. (*Вырожденный узел*). Если матрица A системы (1) имеет лишь одно собственное значение λ, то возможны два существенно различных случая, при описании которых мы будем обозначать через $\boldsymbol{A}$ преобразование, соответствующее матрице A.

Случай I. Существует в плоскости P базис $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, состоящий из двух собственных векторов преобразования $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2 = \lambda \boldsymbol{h}_2. \tag{11}$$

Случай II. Существует в плоскости P такой базис $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, что

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2 = \lambda \boldsymbol{h}_2 + \boldsymbol{h}_1. \tag{12}$$

Существование базиса одного из видов (11), (12) непосредственно вытекает из теоремы 30, но здесь мы докажем этот факт непосредственно. Пусть $\boldsymbol{h}_1$ — собственный вектор преобразования $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{h}_2$ — произвольный вектор, не коллинеарный вектору $\boldsymbol{h}_1$. Тогда мы имеем:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_1 = \lambda \boldsymbol{h}_1, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_2 = \alpha \boldsymbol{h}_1 + \mu \boldsymbol{h}_2.$$

Из этого видно, что преобразование $\boldsymbol{A}$ имеет в базисе $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

так что его собственными значениями являются λ и μ, и потому $\mu = \lambda$. Если $\alpha = 0$, то для базиса $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$ выполнены соотношения (11). Если же $\alpha \neq 0$, то, заменив вектор $\boldsymbol{h}_1$ коллинеарным ему вектором $\alpha \boldsymbol{h}_1$, мы получим базис, удовлетворяющий условию (12).

Непосредственно проверяется, что в случае I общее решение уравнения (2) записывается в виде:

$$\boldsymbol{x} = c^1 \boldsymbol{h}_1 e^{\lambda t} + c^2 \boldsymbol{h}_2 e^{\lambda t} = \boldsymbol{x}_0 e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Написанное решение имеет начальное значение $(0, x_0)$. При $\lambda \neq 0$ каждое решение описывает полупрямую, выходящую из начала координат. При $\lambda < 0$ движение происходит в направлении к началу координат (рис. 31, *а*), при $\lambda > 0$ — от начала координат (рис. 31, *б*); относительно случая $\lambda = 0$ см. пример 3.

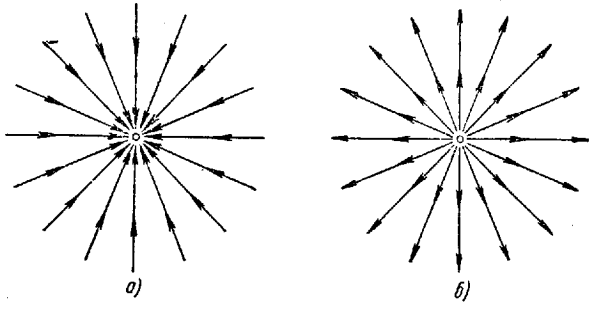

Рис. 31.

Непосредственно проверяется также, что в случае II произвольное решение уравнения (2) имеет вид:

$$x = c^1 h_1 e^{\lambda t} + c^2 (h_1 t + h_2) e^{\lambda t}.$$

Разлагая это решение по базису h_1, h_2 в виде $x = \xi^1 h_1 + \xi^2 h_2$, получаем уравнение траекторий в плоскости P относительно базиса h_1, h_2:

$$\xi^1 = (c^1 + c^2 t) e^{\lambda t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \tag{14}$$

Аффинное отображение фазовой плоскости P, переводящее векторы h_1 и h_2 в единичные ортогональные векторы, направленные по осям координат плоскости P^*, переводит траектории плоскости P в траектории плоскости P^*, в которой уравнения (14) дают траектории уже в прямоугольных координатах.

Разберем случай $\lambda \neq 0$ (случай $\lambda = 0$ см. в примере 3). Пусть сначала $\lambda < 0$. Рассмотрим траектории, заполняющие плоскость P^*, в этом случае. Прежде всего из уравнений (14) видно, что, меняя одновременно знаки у c^1 и c^2, мы получим симметрию плоскости P^* относительно начала координат, при которой траектории переходят в траектории. Таким образом, достаточно рассмотреть заполнение траекториями верхней полуплоскости. При $c^2 = 0$, $c^1 \neq 0$ получаем две траектории: одну при $c_1 > 0$, другую — при $c_1 < 0$. Первая совпадает с положительной полуосью абсцисс, вторая — с отрицательной полуосью абсцисс; движение по обеим направлено к началу координат. Рассмотрим, далее, траекторию $c_1 = 0$, $c_2 > 0$. Мы имеем:

$$\xi^1 = c^2 t e^{\lambda t}, \qquad \xi^2 = c^2 e^{\lambda t}. \tag{15}$$

При $t=0$ получаем точку $(0, c^2)$ на оси ординат. При t, возрастающем от нуля, точка сначала движется направо, затем налево, все время опускаясь вниз к началу координат, к которому она подходит по траектории, касающейся положительного направления оси

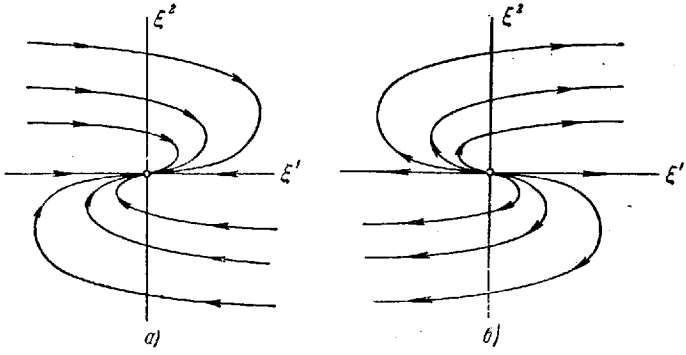

Рис. 32.

абсцисс. При t, убывающем от нуля до $-\infty$, точка движется налево, одновременно поднимаясь вверх, однако налево быстрее, чем вверх, так что общая тенденция ее движения — в отрицательном направлении вдоль оси абсцисс. Если в уравнениях (15) придавать константе c^2

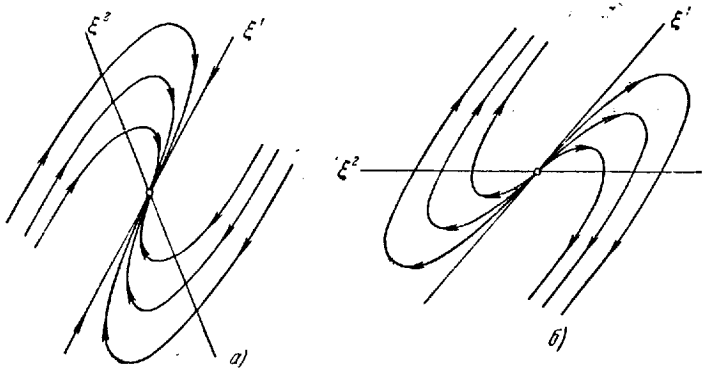

Рис. 33.

все положительные значения, то описанные таким образом траектории заполняют всю верхнюю полуплоскость (рис. 32, *а*). Мы имеем здесь *устойчивый вырожденный узел*. Если $\lambda > 0$, то траектории получаются из описанных путем зеркального отражения плоскости относительно оси ординат (рис. 32, *б*), а движение по ним идет в противоположном направлении, т. е. от начала координат. Это — *неустойчивый*

вырожденный узел. На рис. 33, *а, б* показаны фазовые траектории в плоскости P.

2. Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0. \tag{16}$$

Заменяя это уравнение нормальной системой по способу, изложенному в § 4, получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -bx - ay. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Фазовую плоскость системы (17) считают фазовой плоскостью уравнения (16). Непосредственно проверяется, что характеристический многочлен системы (17) совпадает с характеристическим многочленом уравнения (16), т. е. равен

$$p^2 + ap + b. \tag{18}$$

Таким образом, если корни многочлена (18) комплексны, то фазовая плоскость уравнения (16) представляет собой фокус или центр. Рассмотрим фазовую плоскость в случае действительных различных и отличных от нуля корней многочлена (18).

Пусть λ — корень многочлена (18) и $\boldsymbol{h} = (h^1, h^2)$ — соответствующий ему собственный вектор. Мы имеем тогда (учитывая вид системы (17))

$$h^2 = \lambda h^1.$$

Таким образом, собственное направление, соответствующее собственному значению λ, определяется прямой линией, имеющей уравнение

$$y = \lambda x;$$

мы будем называть ее *собственной прямой.*

Если корни λ_1 и λ_2 отрицательны, то мы имеем *устойчивый узел* (см. А)). В этом случае обе собственные прямые проходят во второй и четвертой четвертях; траектории вблизи начала координат касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 34).

Если корни λ_1 и λ_2 положительны, то мы имеем *неустойчивый узел* (см. А)). Обе собственные прямые проходят в первой и третьей четвертях; вблизи начала координат траектории касаются той из них, которая расположена ближе к оси абсцисс (рис. 35).

Если корни λ_1 и λ_2 имеют разные знаки, то мы имеем седло; одна собственная прямая проходит во второй и четвертой четвертях, а другая — в первой и третьей. В направлении первой из этих прямых траектории приближаются к началу координат, а в направлении второй — отходят от него (рис. 36).

3. Рассмотрим, наконец, случай, когда хотя бы одно из собственных значений матрицы A обращается в нуль.

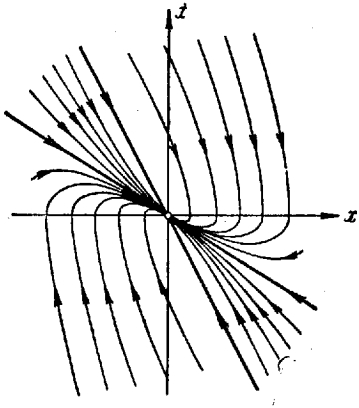

Рис. 34.

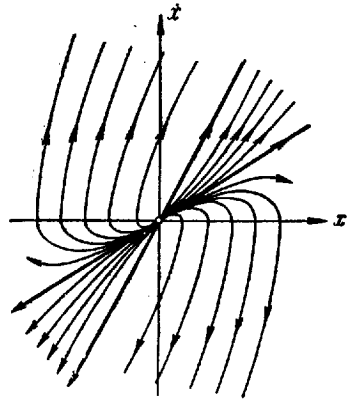

Рис. 35.

Случай I. В нуль обращается лишь одно собственное значение:

$$\lambda_1 \neq 0, \qquad \lambda_2 = 0.$$

В этом случае решение можно записать в виде (4), где ξ^1 и ξ^2 даются формулами (5). Так как $\lambda_2 = 0$, то $\xi^2 = \text{const}$, и движение про-

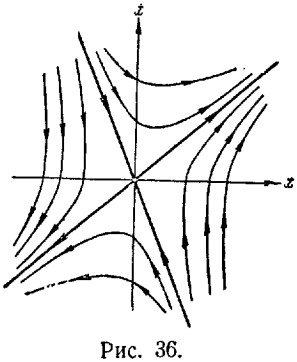

Рис. 36.

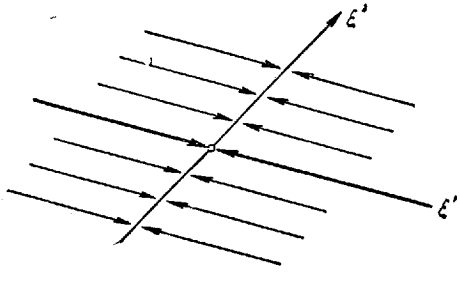

Рис. 37.

исходит по прямым $\xi^2 = \text{const}$ в направлении к прямой $\xi^1 = 0$ или от нее в зависимости от знака числа λ_1. Все точки прямой $\xi^1 = 0$ являются положениями равновесия (рис. 37).

Если же имеется единственное собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то могут представиться два случая, рассмотренные в примере 1.

Случай I (см. (11), $\lambda = 0$). Общее решение записывается в виде (см. (13)):

$$x = x_0.$$

Этот случай имеет место, если все коэффициенты системы (1) обращаются в нуль; каждая точка плоскости P является положением равновесия.

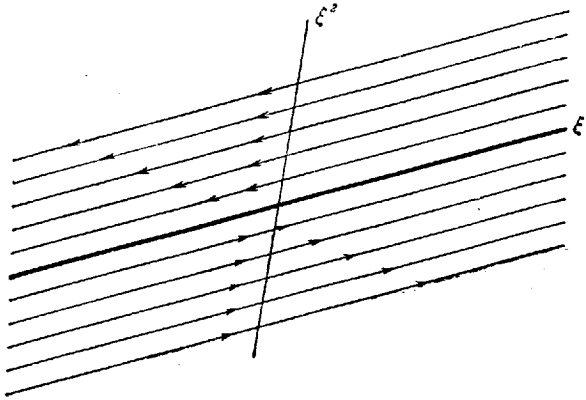

Рис. 38.

Случай II (см. (12), $\lambda = 0$). Общее решение записывается в виде (см. (14)):

$$\xi^1 = c^1 + c^2 t, \qquad \xi^2 = c^2.$$

Движение происходит равномерно по каждой из прямых $\xi^2 = \text{const}$. Все точки прямой $\xi^2 = 0$ являются положениями равновесия (рис. 38).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В этой главе излагается теория линейных уравнений, сперва для нормальной системы n-го порядка, а затем для одного уравнения n-го порядка, причем почти все результаты, относящиеся к одному уравнению, выводятся из соответствующих результатов о нормальной системе. Третий параграф главы посвящен нормальным линейным однородным системам с периодическими коэффициентами. Главным результатом здесь является теорема Ляпунова о возможности линейным периодическим преобразованием переменных перевести нормальную систему с периодическими коэффициентами в нормальную систему с постоянными коэффициентами. В дальнейшем этот результат находит важное применение в теории устойчивости. Доказательство его очень просто, но опирается на сравнительно неэлементарную теорию функций от матриц. Эта теория, не являющаяся частью теории обыкновенных дифференциальных уравнений, излагается для удобства читателей в добавлении II. Таким образом, третий параграф этой главы (§ 19) является неэлементарным благодаря используемому в нем матричному исчислению.

§ 17. Нормальная система линейных уравнений

Здесь будет рассмотрена нормальная система линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\, x^j + b^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Напомним, что если $q_1 < t < q_2$ есть интервал существования и непрерывности коэффициентов $a_j^i(t)$ и свободных членов $b^i(t)$ системы (1), то, в силу теоремы 3, каждое решение может быть продолжено на весь интервал $q_1 < t < q_2$. В дальнейшем мы будем считать, что каждое рассматриваемое решение задано на этом интервале и каждое рассматриваемое значение t принадлежит ему.

Фундаментальная система решений

В первую очередь будет рассматриваться однородная система уравнений

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\, x^j, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

или, в векторной записи,

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\, \boldsymbol{x}. \tag{3}$$

А) Установим простейшие свойства уравнения (3).

а) Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ есть решение уравнения (3), обращающееся в нуль при некотором значении t_0:

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{0}, \tag{4}$$

то решение это тождественно равно нулю

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \boldsymbol{0}, \qquad q_1 < t < q_2.$$

б) Если

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t), \ \ldots, \ \boldsymbol{\varphi}_r(t)$$

— решения уравнения (3), то векторная функция

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c^1 \boldsymbol{\varphi}_1(t) + \ldots + c^r \boldsymbol{\varphi}_r(t),$$

где $c^1, \ldots, c^r$ — константы, также является решением уравнения (3).

Свойство б) проверяется непосредственно. Свойство а) вытекает из того, что вектор $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, тождественно равный нулю, очевидно, является решением уравнения (3), а потому решение $\boldsymbol{\varphi}(t)$, предусмотренное в а), как имеющее с этим решением общее начальное условие (4), должно с ним совпадать.

Б) Пусть

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t), \ \boldsymbol{\varphi}_2(t), \ \ldots, \ \boldsymbol{\varphi}_r(t) \tag{5}$$

— система решений уравнения (3). Она называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1, c^2, \ldots, c^r$, не все равные нулю, что

$$c^1 \boldsymbol{\varphi}_1(t) + c^2 \boldsymbol{\varphi}_2(t) + \ldots + c^r \boldsymbol{\varphi}_r(t) \equiv \boldsymbol{0}.$$

В противном случае система (5) решений уравнения (3) называется *линейно независимой*. Оказывается, что если хотя бы для одного значения $t = t_0$ векторы

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t_0), \quad \boldsymbol{\varphi}_2(t_0), \ \ldots, \ \boldsymbol{\varphi}_r(t_0) \tag{6}$$

РИС. 7.13. Перколяционный кластер и его остов (черный цвет) по результатам моделирования на квадратной решетке размером 147 × 147 при $p_c = 0{,}593$ [168].

перерезать одну *обособленную связь*. Вытесняющая жидкость (вода) не может проникнуть в обособленные ветви, потому что запертому там маслу просто некуда деться.

Остов включает все узлы, лежащие на всех возможных траекториях несамопересекающегося случайного блуждания, начинающихся в узле (узлах) впрыскивания и заканчивающихся на границе области. Несамопересекающееся случайное блуждание не может привести в обособленную ветвь, потому что иначе для возвращения на остов пришлось бы дважды побывать в том единственном узле, связывающем с ним эту ветвь.

Конкретная реализация перколяционного кластера и его остова показана на рис. 7.13 для перколяции по узлам квадратной решетки на пороге протекания. Остов связывает узел, находящийся в центре квадратной решетки размером 147 × 147, с узлами на ее границе. Перколирующий кластер содержит 6261 узел, в то время как в остове всего 3341 узел.

Мы изготовили лабораторную модель перколяционного кластера, показанного на рис. 7.13 [168]. Модель сделана из эпоксидной смолы и имеет цилиндрические поры диаметром 1,1 мм и высотой 0,7 мм. Поры связаны каналами шириной 0,7 мм. Модель заполнялась вязким подкрашенным глицерином. Обычный эксперимент по вытеснению состоял в том, что в центре объема впрыскивался воздух, который вытеснял

векторного пространства, то они составляют его базис, и потому вектор $\varphi(t_0)$ может быть записан в виде:

$$\varphi(t_0) = c^1\varphi_1(t_0) + \ldots + c^n\varphi_n(t_0), \tag{9}$$

где $c^1, \ldots, c^n$ — надлежащим образом выбранные числа. Решения $\varphi(t)$ и $c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^n\varphi_n(t)$ имеют общее начальное условие (см. (9)) и потому совпадают, так что имеет место равенство (8).

Перейдем теперь к координатному описанию полученных фактов и к установлению некоторых других результатов.

Г) Пусть

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{10}$$

— некоторая система решений уравнения (3). Решение $\varphi_k(t)$ в координатной форме запишем, положив

$$\varphi_k(t) = (\overset{1}{\varphi}_k(t), \overset{2}{\varphi}_k(t), \ldots, \overset{n}{\varphi}_k(t)).$$

Составим теперь матрицу

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \ldots & \varphi_k^1(t) & \ldots & \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \ldots & \varphi_k^2(t) & \ldots & \varphi_n^2(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^n(t) & \ldots & \varphi_k^n(t) & \ldots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

k-м столбцом которой служит решение $\varphi_k(t)$ системы (2) или, точнее, его координаты. Детерминант этой матрицы обозначим через $W(t)$; он называется *детерминантом Вронского* системы решений (10). Очевидно, что если решения (10) линейно независимы, то детерминант Вронского $W(t)$ не обращается в нуль ни при одном значении t; в этом случае система (10) является фундаментальной системой решений. Далее, если система (10) линейно зависима, то детерминант Вронского тождественно равен нулю. В случае, когда система (10) является фундаментальной, мы будем называть матрицу (11) *фундаментальной*.

Докажем теперь, что произвольно заданная квадратная матрица порядка n, составленная из функций переменного t и удовлетворяющая некоторым естественным условиям, является фундаментальной для некоторой системы уравнений вида (2).

Д) Будем считать, что матрица (11) есть произвольно заданная матрица функций переменного t, непрерывно дифференцируемых на интервале $q_1 < t < q_2$, с детерминантом, нигде не обращающимся в нуль на этом интервале. Оказывается, что эта матрица (11) является фундаментальной для некоторой (одной-единственной) системы (2), определенной на интервале $q_1 < t < q_2$.

Для доказательства этого запишем в формулах предположение, что векторная функция $\varphi_k(t)$, координаты которой составляют

k-й столбец матрицы (11), является решением уравнения (3). Мы имеем

$$\varphi_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t)\,\varphi_k^j(t), \qquad i, k = 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Если в этом соотношении зафиксировать индекс i, а считать меняющимся только индекс k, то систему полученных соотношений можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_1^i(t), \ldots, a_n^i(t)$. Система эта однозначно разрешима, так как матрица ее получается из матрицы (11) транспонированием и потому детерминант ее отличен от нуля. Таким образом, функции $a_j^i(t)$ при каждом фиксированном i однозначно находятся из соотношений (12), и притом оказываются непрерывными функциями, так как функции $\varphi_k^i(t)$ и $\varphi_k^j(t)$ непрерывны.

Формула Лиувилля

При доказательстве предложения Ж) нам понадобится правило дифференцирования детерминанта. Дадим его здесь.

Е) Пусть $(\varphi_j^i(t))$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой являются дифференцируемыми функциями переменного t, и пусть $W(t)$ — детерминант этой матрицы. Производную $\dot{W}(t)$ этого детерминанта можно вычислять по следующей формуле:

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \ldots + W_n(t). \tag{13}$$

Слагаемое $W_i(t)$, стоящее на i-м месте в правой части равенства, определяется следующим образом. В матрице $(\varphi_j^i(t))$ дифференцируют по t все члены i-й строки, а остальные строки оставляют без изменения; детерминант полученной матрицы и есть $W_i(t)$. Очевидно, что роли строк и столбцов можно поменять.

Для доказательства формулы (13) рассмотрим сперва детерминант U квадратной матрицы (u_j^i) порядка n, как функцию всех элементов u_j^i $(i, j = 1, \ldots)$ n, этой матрицы, считая, что элементы эти являются независимыми переменными. Вычислим частную производную

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r}$$

функции U по переменному u_s^r; здесь r и s фиксированы. Алгебраическое дополнение элемента u_j^i в матрице (u_j^i) обозначим через V_i^j, так что

$$U = \sum_{j=1}^{n} u_j^r V_r^j. \tag{14}$$

Формула эта дает разложение детерминанта U по элементам r-й строки. Алгебраическое дополнение V_r^j не зависит от переменного u_s^r и потому, дифференцируя равенство (14) по u_s^r, получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial u_s^r} = V_r^s. \tag{15}$$

Если положить $u_j^i = \varphi_j^i(t)$, то мы имеем $U = W(t)$. Дифференцируя $W(t)$ как сложную функцию, мы получаем в силу формулы (15):

$$\dot{W}(t) = \sum_{i,j} \frac{\partial U}{\partial u_j^i} \cdot \dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{i,j} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j \right).$$

Так как, очевидно,

$$\sum_{j=1}^{n} \dot{\varphi}_j^i(t) V_i^j = W_i(t),$$

то формула (13) доказана.

Перейдем теперь к доказательству так называемой *формулы Лиувилля*.

Ж) Пусть $W(t)$ — детерминант Вронского фундаментальной системы решений уравнений (2); тогда имеет место формула

$$W(t) = W(t_0) e^{\int_{t_0}^{t} S(\tau) d\tau}, \tag{16}$$

где $S(t)$ — след (т. е. сумма диагональных членов) матрицы $A(t)$

$$S(t) = a_1^1(t) + a_2^2(t) + \ldots + a_n^n(t).$$

Для доказательства формулы (16) введем дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет детерминант Вронского.

Вычислим производную $\dot{W}(t)$ этого детерминанта, пользуясь формулой (13). Для того чтобы провести вычисления более обозримым образом, будем считать строки матрицы (11) векторами, именно положим:

$$\chi^i(t) = (\varphi_1^i(t), \ldots, \varphi_n^i(t)), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Соотношение (12) можно теперь записать в виде:

$$\dot{\chi}^i(t) = a_1^i(t) \chi^1(t) + \ldots + a_n^i(t) \chi^n(t). \tag{17}$$

Соотношение это показывает, что производная i-й строки матрицы (11) является линейной комбинацией строк той же матрицы. Таким образом, при вычислении детерминанта $W_i(t)$ мы должны i-ю строку детерминанта $W(t)$ заменить линейной комбинацией (17) строк того же детерминанта. Так как от прибавления кратных других строк к данной строке детерминант не меняется, то детерминант $W_i(t)$

получается из детерминанта $W(t)$ умножением его i-й строки на $a_i^i(t)$, и поэтому мы имеем:

$$W_i(t) = a_i^i(t)\, W(t).$$

Таким образом, в силу формулы (13) получаем:

$$\dot{W}(t) = S(t)\, W(t).$$

Единственным решением этого уравнения с начальным условием

$$W(t)|_{t=t_0} = W(t_0)$$

является (16). Таким образом, формула Лиувилля доказана.

Метод вариации постоянных

Перейдем теперь к изучению неоднородных систем.

Пусть

$$\dot{y} = A(t)y + b(t) \tag{18}$$

— векторная запись неоднородной системы (1) и пусть $y = \psi(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Наряду с уравнением (18) рассмотрим соответствующее однородное уравнение (3). Из замечаний § 6 непосредственно следует, что произвольное решение уравнения (18) может быть записано в виде:

$$y = \varphi(t) + \psi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть произвольное решение уравнения (3).

Таким образом, решение неоднородного уравнения (18) сводится к решению однородного и к отысканию частного решения неоднородного уравнения. Покажем, каким образом, зная фундаментальную систему решений однородного уравнения (3), можно (при помощи квадратур) найти частное решение неоднородного уравнения.

3) *(Метод вариации постоянных.)* Пусть

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$$

— фундаментальная система решений однородного уравнения (3). Будем искать решение уравнения (18) в виде:

$$y = c^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c^n(t)\varphi_n(t), \tag{19}$$

где коэффициентами являются неизвестные функции от t. Подставляя это значение y в уравнение (18), получаем:

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + \dot{c}^n(t)\varphi_n(t) + c^1(t)\dot{\varphi}_1(t) + \ldots + c^n(t)\dot{\varphi}_n(t) = \\ = A(t)(c^1(t)\varphi_1(t) + \ldots + c^n(t)\varphi_n(t)) + b(t),$$

откуда, принимая во внимание, что $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — решения уравнения (3), получаем:

$$\dot{c}^1(t)\varphi_1(t)+\ldots+\dot{c}^n(t)\varphi_n(t)=b(t). \tag{20}$$

Так как $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — линейно независимые векторы в каждой точке t, то из соотношения (20) величины $\dot{c}^1(t), \ldots, \dot{c}^n(t)$ определяются однозначно, и потому величины $c^1(t), \ldots, c^n(t)$ можно найти при помощи квадратур. Уравнение (20) относительно $\dot{c}^1(t), \ldots, \dot{c}^n(t)$, записанное в координатной форме, имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n} \varphi_j^i(t)\dot{c}^j(t)=b^i(t), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{21}$$

И) Пусть $\Phi(t)=(\varphi_j^i(t))$ — фундаментальная матрица уравнения (3), обращающаяся при $t=t_0$ в единичную матрицу. Тогда решение неоднородного уравнения (18) с начальными значениями t_0, y_0 записывается в виде:

$$y=\Phi(t)\left(y_0+\int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(t)b(t)\,dt\right), \tag{22}$$

где $\Phi^{-1}(t)$ — матрица, обратная матрице $\Phi(t)$.

Непосредственно проверяется, что при $t=t_0$ формула (22) дает $y=y_0$. Точно так же можно было бы непосредственной подстановкой в уравнение (18) проверить, что формула (22) дает решение уравнения (18). Можно также вывести формулу (22) методом вариации постоянных. В самом деле, формула (21) в векторной форме переписывается следующим образом:

$$\Phi(t)\ \dot{c}\ (t)=b(t).$$

Отсюда находим:

$$\dot{c}(t)=\Phi^{-1}(t)\,b(t), \text{ или } c(t)=\int\Phi^{-1}(t)\,b(t)\,dt. \tag{23}$$

Далее, формула (19) может быть переписана в виде:

$$y^i(t)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j^i(t)\,c^j(t), \qquad i=1, \ldots, n,$$

или в векторной форме

$$y=\Phi(t)\,c\,(t).$$

Подставляя в эту формулу значение $c(t)$ из соотношения (23), получаем:

$$y=\Phi(t)\int\Phi^{-1}(t)\ b(t)dt. \tag{24}$$

Таким образом, формула (24) (а потому и формула (22), являющаяся ее частным случаем) дает решение уравнения (18).

Матричная запись систем линейных уравнений.

В ряде случаев удобно бывает записывать уравнение (3) в матричной форме, при которой неизвестной величиной является фундаментальная матрица уравнения (3). Дадим здесь эту запись.

К) Пусть (7) — фундаментальная система решений уравнения (3); тогда

$$\dot{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^i(t)\varphi_j^\alpha(t).$$

В матричной форме это соотношение принимает вид:

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \tag{25}$$

где $\dot{\Phi}(t)$ — производная фундаментальной матрицы $\Phi(t) = (\varphi_j^i(t))$ по времени t, т. е. $\dot{\Phi}(t) = (\dot{\varphi}_j^i(t))$. Таким образом, фундаментальная матрица $\Phi(t)$ уравнения (3) удовлетворяет матричному уравнению (25); более того, каждое решение матричного уравнения

$$\dot{X} = A(t)X, \tag{26}$$

где X — неизвестная матрица, является фундаментальной матрицей уравнения (3), если только детерминант матрицы X отличен от нуля. В дальнейшем под *решением* уравнения (26) будем подразумевать лишь такую матрицу X, удовлетворяющую уравнению (26), детерминант которой отличен от нуля. Очевидно, что отыскание одного решения матричного уравнения (26) равносильно отысканию всех решений уравнения (3). Отметим, что если $X = \Phi(t)$ и $X = \hat{\Phi}(t)$ — два решения матричного уравнения (26), то существует такая постоянная матрица P, что

$$\hat{\Phi}(t) = \Phi(t)P. \tag{27}$$

Докажем последнее соотношение. Пусть

$$\Phi(t) = (\varphi_j^i(t)), \quad \hat{\Phi}(t) = (\hat{\varphi}_j^i(t)),$$
$$\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \ldots, \varphi_j^n(t)), \quad \hat{\varphi}_j(t) = (\hat{\varphi}_j^1(t), \ldots, \hat{\varphi}_j^n(t));$$

тогда

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{28}$$

есть фундаментальная система решений уравнения (3), а так как $\hat{\varphi}_j(t)$ также есть решение уравнения (3), то оно может быть выражено через фундаментальную систему (28), так что мы имеем:

$$\hat{\varphi}_j(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} p_j^\alpha \varphi_\alpha(t).$$

Переписывая это соотношение в скалярной форме, получаем:

$$\hat{\varphi}_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} \varphi_\alpha^i(t) p_j^\alpha. \tag{29}$$

Соотношение (27) представляет собой матричную запись соотношения (29) при $P = (p_j^i)$.

Л) В уравнении (3) введем новое векторное неизвестное y при помощи преобразования

$$y = S(t)x, \tag{30}$$

где $S(t) = (s_j^i(t))$ — невырожденная матрица, зависящая от t. Уравнение для новой неизвестной векторной функции y имеет вид:

$$\dot{y} = (\dot{S}(t) + S(t)A(t))S^{-1}(t)y, \tag{31}$$

т. е. вновь является уравнением типа (3). Преобразованию (30) векторного переменного соответствует преобразование

$$Y = S(t)X \tag{32}$$

матричного переменного (см. К)).

Выведем сначала уравнение (31) для неизвестного y. Мы имеем:

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}(S(t)x) = \dot{S}(t)x + S(t)\dot{x} =$$
$$= (\dot{S}(t) + S(t)A(t))x = (\dot{S}(t) + S(t)A(t))S^{-1}(t)y.$$

Для того чтобы установить, что преобразованию (30) векторного неизвестного соответствует преобразование (32) матричного неизвестного, перепишем преобразование (30) в скалярной форме

$$y^i = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t)x^\alpha.$$

Вектору $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \ldots, \varphi_j^n(t))$ фундаментальной системы уравнения (3) преобразование (30) ставит в соответствие вектор $\psi_j(t) = (\psi_j^1(t), \ldots, \psi_j^n(t))$ по формуле

$$\psi_j^i(t) = \sum_{\alpha=1}^{n} s_\alpha^i(t)\varphi_j^\alpha(t).$$

Таким образом, фундаментальной матрице $\Phi(t)$ уравнения (3) соответствует фундаментальная матрица $\Psi(t)$ уравнения (31) по формуле

$$\Psi(t) = S(t)\Phi(t),$$

а это и значит, что матричное неизвестное преобразуется по формуле (32).

Пример

Из предложения В) видно, что для нахождения всех решений уравнения (3) достаточно найти его фундаментальную систему решений, т. е. n линейно независимых решений. Покажем, что, зная одно нетривиальное решение системы (2), можно на единицу снизить порядок системы (2), т. е. свести ее к решению линейной системы порядка $n-1$.

Пусть

$$\varphi(t)=(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$$

— решение уравнения (3) или, что то же, системы (2). Будем искать решение уравнения (3) в виде:

$$x=u\varphi(t)+y, \tag{33}$$

где u — неизвестная функция, а y — неизвестный вектор, о котором мы будем предполагать, что первая его компонента равна нулю:

$$y=(0, y^2, \ldots, y^n).$$

Подстановка вектора x из формулы (33) в уравнение (3) дает

$$\dot{u}\varphi(t)+u\dot{\varphi}(t)+\dot{y}=A(t)(u\varphi(t)+y).$$

Учитывая тот факт, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (3), получаем отсюда

$$\dot{u}\varphi(t)+\dot{y}=A(t)y.$$

Выпишем это уравнение в координатной форме, выделив при этом первое из получаемых уравнений:

$$\dot{u}\varphi^1(t)=\sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)y^j, \tag{34}$$

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} a_j^i(t)y^j-\dot{u}\varphi^i(t), \quad i=2, \ldots, n. \tag{35}$$

Определяя $\dot{u}$ из уравнения (34) и подставляя полученное значение в соотношения (35), получаем:

$$\dot{y}^i=\sum_{j=2}^{n} b_j^i(t)y^j, \qquad i=2, \ldots, n, \tag{36}$$

где

$$b_j^i(t)=a_j^i(t)-\frac{\varphi^i(t)}{\varphi^1(t)}a_j^1(t).$$

Следует помнить, что подстановка значения $\dot{u}$ из (34) в (35) возможна лишь на том интервале, где функция $\varphi_1(t)$ не обращается в нуль. Если теперь $\psi(t)=\{\psi^2(t), \ldots, \psi^n(t)\}$ — какое-либо решение системы

(36), то, определяя функцию u из соотношения

$$\dot{u}\varphi^1(t) = \sum_{j=2}^{n} a_j^1(t)\psi^j(t)$$

при помощи квадратуры, получаем решение исходной системы (2) в виде:

$$x = u\varphi(t) + \psi(t).$$

§ 18. Линейное уравнение n-го порядка

Здесь будет рассмотрено линейное уравнение порядка n:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)y = b(t), \tag{1}$$

коэффициенты $a_i(t)$ и свободный член $b(t)$ которого мы будем предполагать определенными и непрерывными на интервале $q_1 < t < q_2$. Исследование уравнения (1) будет производиться здесь путем его сведения к нормальной системе линейных уравнений по методу, указанному в § 4.

Фундаментальная система решений

А) Для сведения уравнения (1) к нормальной линейной системе введем новые неизвестные функции

$$x^1 = y, \quad x^2 = \dot{y}, \ \ldots, \ x^n = y^{(n-1)}.$$

Эти новые неизвестные функции $x^1, \ldots, x^n$ удовлетворяют линейной системе (см. § 4, А)):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= x^3, \\ &\ldots\ldots \\ \dot{x}^{n-1} &= x^n, \\ \dot{x}^n &= -a_n(t)x^1 - a_{n-1}(t)x^2 - \ldots - a_1(t)x^n + b(t). \end{aligned}\right\}$$

Полученную систему в векторной форме запишем в виде:

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \tag{2}$$

где матрица $A(t)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

а вектор $\boldsymbol{b}(t)$ определяется формулой

$$\boldsymbol{b}(t)=(0,\ 0,\ldots,\ b(t)).$$

Уравнения (1) и (2) эквивалентны между собой; именно, каждому решению $y=\psi(t)$ уравнения (1) соответствует решение

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\psi(t),\ \dot{\psi}(t),\ \ldots,\ \psi^{(n-1)}(t))$$

уравнения (2), и наоборот, каждому решению

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)=(\varphi^1(t),\ \varphi^2(t),\ \ldots,\ \varphi^n(t))$$

уравнения (2) соответствует решение

$$y=\varphi^1(t)$$

уравнения (1), причем соответствие это взаимно однозначно. Если решения $\psi(t)$ уравнения (1) и $\boldsymbol{\varphi}(t)$ уравнения (2) соответствуют в указанном смысле друг другу, то мы будем писать

$$\psi(t)\rightleftarrows\boldsymbol{\varphi}(t).$$

Из эквивалентности уравнений (1) и (2), в частности, следует, что любое решение уравнения (1) может быть продолжено на весь интервал $q_1<t<q_2$ (см. теорему 3), так что в дальнейшем мы будем считать, что каждое рассматриваемое решение уравнения (1) задано на этом интервале и каждое рассматриваемое значение t принадлежит ему.

В первую очередь изучим однородное уравнение

$$y^{(n)}+a_1(t)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(t)y=0. \tag{4}$$

Пусть

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A(t)\boldsymbol{x} \tag{5}$$

— соответствующая ему система уравнений, данная в векторной записи, где матрица $A(t)$ определяется формулой (3).

Б) Пусть

$$\psi_1(t),\ \psi_2(t),\ \ldots,\ \psi_r(t) \tag{6}$$

— некоторая система решений уравнения (4). Непосредственно проверяется, что функция

$$\psi(t)=c^1\psi_1(t)+\ \ldots\ +c^r\psi_r(t),$$

где $c^1,\ \ldots\ ,\ c^r$ — константы, является решением уравнения (4). Система решений (6) называется *линейно зависимой*, если существуют такие константы $c^1,\ \ldots,\ c^r$, не обращающиеся одновременно в нуль, что

$$c^1\psi_1(t)+\ \ldots\ +c^r\psi_r(t)\equiv 0. \tag{7}$$

Оказывается, что если

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t) \tag{8}$$

— решения уравнения (5), соответствующие решениям (6):

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \varphi_i(t), \qquad i = 1, \ldots, r$$

(см. А)), то решения (8) линейно зависимы (см. § 17, Б)) тогда и только тогда, когда линейно зависимы решения (6).

Докажем это. Допустим, что решения (6) линейно зависимы, т. е. имеет место соотношение (7). Выписывая соотношение (7) и те соотношения, которые получаются из него путем дифференцирования, получаем:

$$\left.\begin{aligned} c^1\psi_1(t) + \ldots + c^r\psi_r(t) &= 0, \\ c^1\psi_1(t) + \ldots + c^r\psi_r(t) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c^1\psi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c^r\psi_r^{(n-1)}(t) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Принимая во внимание, что

$$\varphi_i(t) = (\psi_i(t), \dot{\psi}_i(t), \ldots, \psi_i^{(n-1)}(t)),$$

мы видим, что соотношения (9) в векторной записи имеют вид:

$$c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^r\varphi_r(t) = 0, \tag{10}$$

так что имеет место линейная зависимость и между решениями (8) Допустим, наоборот, что решения (8) линейно зависимы, т. е. что имеют место соотношения (10). Ставя в соотношение (10) вместо каждого вектора $\varphi_i(t)$ его первую компоненту, получаем соотношение (7), так что решения (6) линейно зависимы.

В) Система решений

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{11}$$

уравнения (4) называется *фундаментальной*, если она линейно независима (обозначениями предусмотрено, что число решений системы (11) равно порядку уравнения (4)). Оказывается, что фундаментальные системы решений уравнения (4) существуют и что если система (11) является фундаментальной, то каждое решение уравнения (4) может быть записано в виде:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \ldots + c^n\psi_n(t),$$

где $c^1, \ldots, c^n$ — константы. Из сказанного видно, что для нахождения всех решений уравнения (4) достаточно найти его фундаментальную систему решений. (Для линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами фундаментальная система решений была построена в § 7, 8.)

Покажем прежде всего, что фундаментальная система решений уравнения (4) существует. Для этого воспользуемся фактом существования фундаментальной системы решений уравнения (5) (см. § 17, В)). Пусть

$$\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t) \tag{12}$$

— фундаментальная система решений уравнения (5) и пусть

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{13}$$

— соответствующие решениям (12) решения уравнения (4):

$$\psi_i(t) \rightleftarrows \varphi_i(t), \qquad i=1, \ldots, n$$

(см. А)). Так как решения (12) линейно независимы, то в силу Б) линейно независимы и решения (13), и потому они составляют фундаментальную систему. Допустим теперь, что система (11) является фундаментальной для уравнения (4) и пусть решения (12) соответствуют решениям (11). Пусть, далее, $\psi(t)$ — произвольное решение уравнения (4) и $\varphi(t)$ — соответствующее ему решение уравнения (5). Так как система (11) по предположению фундаментальна, т. е. линейно независима, то соответствующая ей система (12) также линейно независима, т. е. фундаментальна. Таким образом, в силу предложения В) § 17, получаем:

$$\varphi(t) = c^1\varphi_1(t) + \ldots + c^n\varphi_n(t).$$

Заменяя в этом соотношении каждый вектор его первой компонентой, получаем:

$$\psi(t) = c^1\psi_1(t) + \ldots + c^n\psi_n(t).$$

Таким образом, предложение В) доказано.

Г) *Детерминантом Вронского* системы решений (11) уравнения (4) называется детерминант:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \psi_1(t) & \ldots & \psi_n(t) \\ \dot{\psi}_1(t) & \ldots & \dot{\psi}_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \psi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \psi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Если решения (12) уравнения (5) соответствуют решениям (11) (см. А)), то детерминант Вронского (см. § 17, Г)) системы решений (12) уравнения (5) совпадает с детерминантом (14); это видно непосредственно. Таким образом, то, что верно для детерминанта Вронского системы (12), верно и для детерминанта (14). Отсюда в силу предложения Г) § 17 заключаем, что детерминант (14) или не обращается в нуль ни в одной точке, или равен нулю тождественно; для того чтобы система решений (11) была линейно независимой, т. е. фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы детерминант (14) не обращался в

нуль. Из предложения Ж) § 17 следует формула Лиувилля для детерминанта (14):

$$W(t) = W(t_0)\, e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\, d\tau}. \tag{15}$$

Она получается из формулы (16) § 17, если учесть, что след, т. е. сумма диагональных членов матрицы (3), равен $-a_1(t)$. Ниже, в примере 2, будет дано более простое непосредственное доказательство формулы (15).

Д) Пусть

$$z^{(n)} + a_1(t)\, z^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, z = b(t) \tag{16}$$

— неоднородное уравнение и пусть

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, y = 0 \tag{17}$$

— соответствующее ему однородное уравнение. Из предложений § 6 непосредственно следует, что если $\chi_0(t)$ есть частное решение уравнения (16), то произвольное решение уравнения (16) имеет вид:

$$z = \psi(t) + \chi_0(t),$$

где $\psi(t)$ — решение уравнения (17).

Метод вариации постоянных

Е) Пусть

$$\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t) \tag{18}$$

— какая-либо фундаментальная система решений уравнения (17). Тогда решение уравнения (16) может быть получено в виде:

$$z = c^1(t)\, \psi_1(t) + \ldots + c^n(t)\, \psi_n(t), \tag{19}$$

где функции

$$\dot{c}^1(t), \ldots, \dot{c}^n(t) \tag{20}$$

получаются как решения системы алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{array}{c}
\psi_1(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n(t)\, \dot{c}^n(t) = 0, \\
\psi_1(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n(t)\, \dot{c}^n(t) = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi_1^{(n-2)}(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n^{(n-2)}(t)\, \dot{c}^n(t) = 0, \\
\psi_1^{(n-1)}(t)\, \dot{c}^1(t) + \ldots + \psi_n^{(n-1)}(t)\, \dot{c}^n(t) = b(t).
\end{array}\right\} \tag{21}$$

Так как детерминант системы уравнений (21) относительно неизвестных величин (20) есть детерминант Вронского системы решений (18), то в силу предложения Г) он не обращается в нуль ни при одном значении t, и потому из системы уравнений (21) можно определить величины (20), а по ним определяются квадратурами и нужные нам функции

$$c^1(t), \ldots, c^n(t).$$

Доказательство предложения Е) вытекает из предложения З) § 17. Можно также провести его и непосредственно. Сделаем это. Предполагая, что на величины (20) наложены условия (21), мы получаем из формулы (19) путем дифференцирования следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
z &= c^1(t)\psi_1(t) + \ldots + c^n(t)\psi_n(t),\\
\dot z &= c^1(t)\dot\psi_1(t) + \ldots + c^n(t)\dot\psi_n(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
z^{(n-1)} &= c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t),\\
z^{(n)} &= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \ldots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t) +\\
&\quad + \dot c^1(t)\psi_1^{(n-1)}(t) + \ldots + \dot c^n(t)\psi_n^{(n-1)}(t) =\\
&= c^1(t)\psi_1^{(n)}(t) + \ldots + c^n(t)\psi_n^{(n)}(t) + b(t).
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (16), получаем тождество. Таким образом, если функции $c^1(t), \ldots, c^n(t)$ удовлетворяют соотношениям (21), то функция (19) является решением уравнения (16).

Примеры

1. Если известно нетривиальное (не равное тождественно нулю) решение $\psi(t)$ уравнения (4), то порядок этого уравнения можно снизить на единицу, т. е. свести его решение к решению линейного уравнения порядка $n-1$. Для этого произведем замену

$$y = \psi(t)v, \tag{22}$$

где v — новая неизвестная функция. Мы покажем сейчас, что результат подстановки (22) в левую часть уравнения (4) приводит нас к уравнению

$$b_0(t)v^{(n)} + b_1(t)v^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1}(t)\dot v + b_n(t)v = 0 \tag{23}$$

для v, причем

$$b_0(t) = \psi(t), \qquad b_n(t) \equiv 0. \tag{24}$$

Так как все наше исследование справедливо для уравнения n-го порядка, коэффициент при n-й производной у которого равен единице, то соотношение (23) приходится делить на $b_0(t) = \psi(t)$, и потому

сведение уравнения (4) к уравнению (23) имеет место лишь на таком интервале, где $\psi(t)$ не обращается в нуль. Полагая

$$\frac{b_i(t)}{\psi(t)} = l_i(t)$$

и заменяя неизвестную функцию v новой неизвестной функцией

$$w = \dot{v},$$

мы приходим к уравнению

$$w^{(n-1)} + l_1(t)\, w^{(n-2)} + \ldots + l_{n-1}(t)\, w = 0$$

порядка $n-1$. Если имеется решение $\chi(t)$ этого уравнения, то решение v уравнения (23) получаем квадратурой:

$$v = \int \chi(t)\, dt,$$

а решение y уравнения (4) получается подстановкой найденной функции v в (22).

Докажем, что подстановка (22) приводит уравнение (4) к виду (23), причем выполнены соотношения (24). Дифференцируя соотношения (22), получаем:

$$y^{(k)} = \psi(t)\, v^{(k)} + \ldots,$$

где не выписаны члены, содержащие производные от v порядков, меньших чем k. Из этого следует, что уравнение (4) принимает вид (23), причем $b_0(t) = \psi(t)$. Так как $\psi(t)$ есть решение уравнения (4), то $v = 1$ есть решение уравнения (23). Подставляя решение $v = 1$ в (23), получаем $b_n(t) = 0$. Таким образом, соотношения (24) доказаны.

2. Приведем доказательство формулы Лиувилля (15) для одного уравнения n-го порядка, не опирающееся на формулу Лиувилля для системы (см. формулу (16) § 17). При этом мы будем пользоваться правилом дифференцирования детерминанта, данным в § 17 (см. § 17, E)). В силу этого правила дифференцирования мы получаем из (14):

$$\dot{W}(t) = W_1(t) + \ldots + W_i(t) + \ldots + W_n(t),$$

где $W_i(t)$ есть определитель Вронского $W(t)$, в котором продифференцирована i-я строка. Если $i < n$, то в результате дифференцирования i-й строки мы получаем строку, совпадающую с $(i+1)$-й строкой определителя $W(t)$, и потому мы имеем:

$$W_1(t) = W_2(t) = \ldots = W_{n-1}(t) = 0.$$

При дифференцировании n-й строки мы получаем строку

$$\psi_1^{(n)}(t), \ldots, \psi_n^{(n)}(t),$$

которая в силу уравнения (4) является линейной комбинацией строк определителя $W(t)$, причем n-я строка берется с коэффициентом

$-a_1(t)$. В силу наличия в определителе $W_n(t)$ строк определителя Вронского с номерами $1, \ldots, n-1$, эти строки в линейной комбинации можно отбросить, и остается лишь n-я строка с коэффициентом $-a_1(t)$. Таким образом, для определителя Вронского получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{W}(t) = -a_1(t)\,W(t).$$

Решая его, получаем формулу Лиувилля (15).

§ 19. Нормальная линейная однородная система с периодическими коэффициентами

Среди линейных уравнений с переменными коэффициентами особенно важную роль играют уравнения с периодическими коэффициентами. Настоящий параграф посвящается изложению некоторых свойств нормальных линейных однородных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Из приводимых здесь свойств этих систем центральным является теорема Ляпунова. Приведенное здесь доказательство теоремы Ляпунова менее элементарно, чем все предыдущее изложение книги. Оно опирается на матричное исчисление, необходимые сведения из которого излагаются в добавлении II.

Пусть

$$\dot{X} = A(t)\,X \tag{1}$$

— нормальная линейная однородная система уравнений, записанная в матричной форме (см. § 17, К)). Мы будем предполагать, что коэффициенты этой системы являются периодическими функциями времени t с периодом τ, т. е. матрица $A(t)$ удовлетворяет условию

$$A(t+\tau) = A(t).$$

А) Для всякого (матричного) решения

$$X = \Phi(t) \tag{2}$$

уравнения (1) (см. § 17, К)) найдется такая постоянная (невырожденная) матрица C, что

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)\,C.$$

Матрицу C мы будем называть *основной* для решения (2). Если $X = \hat{\Phi}(t)$ — какое-либо другое решение уравнения (1), а $\hat{C}$ — его основная матрица, то мы имеем:

$$\hat{C} = P^{-1}CP, \tag{3}$$

где P — некоторая невырожденная постоянная матрица.

Для доказательства существования матрицы C заметим, что, наряду с решением (2), решением уравнения (1) является и матрица $\Phi(t+\tau)$. В самом деле,

$$\dot{\Phi}(t+\tau)=A(t+\tau)\Phi(t+\tau)=A(t)\Phi(t+\tau).$$

Таким образом, в силу формулы (27) § 17 имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,$$

где C — постоянная матрица.

Для доказательства формулы (3) также воспользуемся формулой (27) § 17. Так как $\hat{\Phi}(t)$ есть решение уравнения (1), то в силу упомянутой формулы имеем:

$$\hat{\Phi}(t)=\Phi(t)P.$$

Отсюда

$$\hat{\Phi}(t+\tau)=\Phi(t+\tau)P=\Phi(t)CP=\hat{\Phi}(t)P^{-1}CP,$$

что и дает соотношение (3).

Б) Уравнение (1) и уравнение

$$\dot{Y}=B(t)Y \tag{4}$$

с периодической матрицей $B(t)$ того же периода τ, что и матрица $A(t)$, называются *эквивалентными*, если существует линейное преобразование

$$Y=S(t)X$$

(см. § 17, Л)) с периодической матрицей $S(t)$ периода τ, переводящее уравнение (1) в уравнение (4). Оказывается, что уравнения (1) и (4) тогда и только тогда эквивалентны, когда существуют решения $X=\Phi(t)$ и $Y=\Psi(t)$ этих уравнений с одной и той же основной матрицей.

Докажем это утверждение. Допустим сначала, что уравнения (1) и (4) эквивалентны. Пусть $X=\Phi(t)$ — произвольное решение уравнения (1) с основной матрицей C; тогда $Y=\Psi(t)=S(t)\Phi(t)$ есть решение уравнения (4), и мы имеем:

$$\Psi(t+\tau)=S(t+\tau)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t+\tau)=S(t)\Phi(t)C=\Psi(t)C.$$

Таким образом, основная матрица C решения $\Phi(t)$ является основной и для решения $\Psi(t)$.

Допустим теперь, что существуют решения $X=\Phi(t)$ и $Y=\Psi(t)$ уравнений (1) и (4) с одной и той же основной матрицей C; тогда мы имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C, \qquad \Psi(t+\tau)=\Psi(t)C.$$

Деля второе из этих соотношений справа на первое, получаем:

$$\Psi(t+\tau)\Phi^{-1}(t+\tau)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t).$$

Таким образом, матрица

$$S(t)=\Psi(t)\Phi^{-1}(t)$$

является периодической с периодом τ, и мы имеем:

$$\Psi(t)=S(t)\Phi(t). \tag{5}$$

Так как каждое из решений $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ однозначно определяет свое уравнение (см. § 17, Д)), то из (5) следует, что уравнение (4) получается из уравнения (1) путем преобразования с матрицей $S(t)$.

Как видно из предложений А) и Б), каждому уравнению вида (1), рассматриваемому с точностью до эквивалентности (см. Б)), соответствует матрица C, определенная с точностью до трансформации (см. (3)). Более того, совокупность всех инвариантов матрицы C относительно преобразований вида (3) составляет полную систему инвариантов уравнения (1), определенного с точностью до эквивалентности.

Следует заметить, что все сказанное в предложениях А) и Б) верно как в случае, когда рассматриваются только действительные матрицы, так и в случае, когда рассматриваются комплексные матрицы. В нижеследующей важной теореме Ляпунова (теорема 12) мы будем различать действительный и комплексный случаи.

Теорема 12. *Всякое уравнение* (1) *эквивалентно* (*см.* Б)) *уравнению*

$$\dot{Y}=BY,$$

где B — постоянная матрица. (Матрица B, вообще говоря, комплексна.) Если в уравнении (1) *матрица $A(t)$ периода τ действительна, то это уравнение, рассматриваемое как периодическое, с периодом 2τ, эквивалентно уравнению*

$$\dot{Y}=B_1Y,$$

где матрица B_1 постоянна и действительна, причем матрица перехода $S(t)$ от уравнения (1) *к уравнению $\dot{Y}=B_1Y$ также действительна.*

Доказательству теоремы 12 предпошлем следующее предложение.

В) Пусть

$$\dot{Y}=BY \tag{6}$$

— система линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами, записанная в матричной форме. Матрица B здесь постоянна. Оказывается, что матрица

$$Y=e^{tB} \tag{7}$$

(см. § 35, Г)) является решением уравнения (6).

Для доказательства того, что (7) есть решение уравнения (6), выпишем функцию e^{tB} в явном виде. Мы имеем:

$$e^{tB} = E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \frac{t^3}{3!}B^3 + \ldots .$$

Отсюда для производной $\frac{d}{dt}e^{tB}$ получаем:

$$\frac{d}{dt}e^{tB} = B\left(E + tB + \frac{t^2}{2!}B^2 + \ldots\right) = Be^{tB}.$$

Доказательство теоремы 12. Пусть C — основная матрица некоторого решения $X = \Phi(t)$ уравнения (1). В силу предложения Г) § 35 существует матрица B, удовлетворяющая условию

$$e^{\tau B} = C.$$

Докажем, что уравнения (1) и

$$\dot{Y} = BY \tag{8}$$

эквивалентны. Действительно, в силу предложения В) матрица $Y = e^{tB}$ является решением уравнения (8). Таким образом, если уравнение (8) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами с периодом τ, то основная матрица решения $Y = e^{tB}$ есть C, именно (см. формулу (20) § 35):

$$e^{(t+\tau)B} = e^{tB}e^{\tau B} = e^{tB}C.$$

Так как основные матрицы рассматриваемых решений уравнения (1) и уравнения (8) совпадают, то эти уравнения эквивалентны (см. Б)). Таким образом, первая часть теоремы 12 доказана.

Будем считать теперь, что $A(t)$ — действительная матрица, $\Phi(t)$ — некоторое действительное решение уравнения (1) и C — основная матрица этого решения, так что

$$\Phi(t+\tau) = \Phi(t)C. \tag{9}$$

Так как $\Phi(t)$ — действительная матрица, то C — также действительная матрица. Из (9) следует, что

$$\Phi(t+2\tau) = \Phi(t+\tau)C = \Phi(t)C^2. \tag{10}$$

В силу предложения Г) § 35 существует действительная матрица B_1, удовлетворяющая условию

$$e^{2\tau B_1} = C^2.$$

Докажем, что уравнение (1) и уравнение

$$\dot{Y} = B_1 Y, \tag{11}$$

рассматриваемые как уравнения с периодом 2τ, эквивалентны. Действительно, матрица e^{tB_1} является решением уравнения (11). Таким образом, если уравнение (11) рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами периода 2τ, то основная матрица решения $Y=e^{tB_1}$ есть C^2. Так как основные матрицы рассматриваемых решений уравнений (1) и (11) (см. (10)) совпадают, то эти уравнения эквивалентны.

Итак, теорема 12 доказана.

Г) Пусть C — произвольная квадратная матрица порядка n, модули всех собственных значений которой меньше некоторого положительного числа ρ. Элементы матрицы C^m, где m — натуральное число, обозначим через ${}^m c_j^i$, так что $C^m=({}^m c_j^i)$. Тогда существует такое положительное число r, не зависящее от i, j, m, что

$$|{}^m c_j^i|<r\rho^m. \tag{12}$$

Отсюда, в частности, следует, что для произвольного вектора x имеет место неравенство

$$|C^m x|\leqslant n^2 r\rho^m |x|. \tag{13}$$

Для доказательства оценки (12) рассмотрим ряд

$$f(z)=1+\frac{z}{\rho}+\frac{z^2}{\rho^2}+\ldots+\frac{z^m}{\rho^m}+\ldots,$$

радиус сходимости которого, очевидно, равен ρ. Из теоремы 29 (см. § 35) следует, что матричный ряд

$$f(C)=E+\frac{C}{\rho}+\frac{C_2}{\rho^2}+\ldots+\frac{C^m}{\rho^m}+\ldots$$

сходится и, в частности, сходится числовой ряд

$$\delta_j^i+\frac{{}^1c_j^i}{\rho}+\frac{{}^2c_j^i}{\rho^2}+\ldots+\frac{{}^mc_j^i}{\rho^m}+\ldots$$

Так как ряд этот сходится, то все его члены не превосходят некоторого числа r, причем число r можно выбрать общим для всех пар чисел (i, j). Таким образом, оценка (12) имеет место.

Д) Пусть

$$\dot{x}=A(t)x \tag{14}$$

— векторная запись матричного уравнения (1) и C — основная матрица некоторого решения $\Phi(t)$ уравнения (1). Собственное значение λ кратности k матрицы C называется *характеристическим числом* кратности k уравнения (1) и уравнения (14). Так как с точностью до трансформации матрица C не зависит от случайности выбора решения $\Phi(t)$ уравнения (1) (см. А)), то характеристические числа уравнения (14) и их кратности определены здесь инвариантно. Если λ есть характеристическое число крат-