ности k уравнения (14), то число $\frac{1}{\tau}\ln\lambda$ называется *характеристическим показателем* кратности k уравнения (14). Допустим, что все действительные части характеристических показателей уравнения (14) меньше некоторого числа γ; тогда существует такое положительное число R, что для всякого решения $\varphi(t)$ уравнения (14) имеет место оценка

$$|\varphi(t)| \leqslant R|\varphi(0)|e^{\gamma t} \quad \text{при} \quad t \geqslant 0. \tag{15}$$

Докажем неравенство (15). Пусть $\Phi(t)$ — решение уравнения (1) с начальным условием $\Phi(0)=E$; тогда любое решение $\varphi(t)$ уравнения (14) записывается в виде:

$$\varphi(t)=\Phi(t)\varphi(0). \tag{16}$$

Это проверяется подстановкой вектора (16) в уравнение (14). Далее мы имеем:

$$\Phi(t+\tau)=\Phi(t)C,\ \Phi(t+2\tau)=\Phi(t)C^2,\ \ldots,\ \Phi(t+m\tau)= \\ =\Phi(t)C^m,\ \ldots \tag{17}$$

Так как на отрезке $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau$ элементы матрицы $\Phi(t_1)$ ограничены, то существует такое положительное число σ, что

$$|\Phi(t_1)x| \leqslant \sigma|x| \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t_1 \leqslant \tau. \tag{18}$$

Так как, далее, все собственные значения матрицы C по модулю меньше числа $e^{\tau\gamma}$, то в силу (13) для произвольного вектора x имеет место оценка

$$|C^m x| \leqslant n^2 r e^{\tau m\gamma}|x|. \tag{19}$$

Пусть теперь t — произвольное положительное число; найдем тогда такое целое неотрицательное число m, что

$$t=m\tau+t_1, \qquad 0 \leqslant t_1 < \tau.$$

В силу (16) и (17) мы имеем:

$$\varphi(t)=\Phi(m\tau+t_1)\varphi(0)=\Phi(t_1)C^m\varphi(0).$$

Отсюда согласно (18) и (19) получаем:

$$|\varphi(t)| \leqslant \sigma n^2 r e^{\tau m\gamma}|\varphi(0)|.$$

Так как число $e^{t_1\gamma}$ при $0 \leqslant t_1 \leqslant \tau$ не меньше некоторой константы $c>0$, то последнее неравенство можно записать в виде:

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{\sigma n^2 r}{c} e^{\gamma t}|\varphi(0)|.$$

Таким образом, оценка (15) доказана.

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ
ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Здесь в первую очередь доказываются уже формулированные ранее теоремы 1, 2, 3 существования и единственности. Далее, рассматривается вопрос о зависимости решения от начальных значений и параметров, если последние входят в уравнения. В первую очередь разбирается зависимость решения с фиксированными начальными значениями от параметров, а затем весьма простым приемом начальные значения превращаются в параметры, и, таким образом, дело сводится к вопросу о зависимости решения от параметров. Как в случае начальных значений, так и в случае параметров доказываются непрерывная зависимость решения от этих переменных и дифференцируемость решения по ним.

В том и другом случае здесь приводятся только так называемые интегральные теоремы, а нередко упоминаемые в учебниках «локальные» теоремы вообще не приведены. Объясняется это тем, что как в самой теории, так и в ее приложениях важны именно интегральные теоремы; локальные же теоремы в лучшем случае служат средством доказательства интегральных и не заслуживают специального внимания. Слово «интегральные», употребленное здесь, никакого отношения к операции интегрирования не имеет. Оно означает лишь, что решения рассматриваются не на малых интервалах времени, а «интегрально», «в целом», т. е. рассматриваются непродолжаемые решения (см. § 3, А)). В связи с этим изучению непродолжаемых решений посвящен здесь специальный параграф (§ 22).

Кроме этого материала, в настоящую главу включен параграф о первых интегралах системы обыкновенных дифференциальных уравнений и примыкающее к понятию первого интеграла исследование линейного уравнения в частных производных. Результаты этого параграфа в дальнейшем изложении нигде не используются.

§ 20. Доказательство теоремы существования и единственности для одного уравнения

В этом параграфе будет дано доказательство сформулированной в § 1 теоремы 1 существования и единственности для одного уравнения первого порядка

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

правая часть которого определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial f}{\partial x}$ на некотором открытом множестве Г плоскости P переменных t, x. Доказательство теоремы 2, приводимое в следующем параграфе, представляет собой усложнение доказательства теоремы 1 и содержит его как частный случай. Приводя доказательство сначала для случая одного уравнения, я имею целью выявить основные *идеи* этого доказательства, которые в общем случае загромождаются второстепенными деталями. Доказательство теорем 1 и 2 проводится в этой книге *методом последовательных приближений*, принадлежащим Пикару и применяемым в анализе при доказательстве многих теорем существования. Этот метод является одновременно методом приближенного вычисления решения и потому имеет большую практическую ценность. В некоторых случаях метод последовательных приближений может быть истолкован как *метод сжатых отображений*. Здесь я провожу доказательство таким образом, чтобы показать близость этих двух методов. Различие же этих методов выявится при доказательстве теоремы 3.

Основные идеи доказательства

Первым шагом при доказательстве теоремы 1 методом последовательных приближений является переход от дифференциального уравнения к *интегральному*, который мы формулируем в виде отдельного предложения.

А) Пусть $x=\varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (1), определенное на интервале $r_1<t<r_2$, так что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\ \varphi(t)), \tag{2}$$

и пусть

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{3}$$

— некоторое начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что тогда для функции $\varphi(t)$ на всем интервале $r_1<t<r_2$ выполнено интегральное тождество

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{4}$$

Обратно, если для некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$ на интервале $r_1<t<r_2$ выполнено тождество (4), то функция $x=\varphi(t)$ дифференцируема, является решением уравнения (1) и удовлетворяет начальному условию (3). Кратко говоря, интегральное уравнение (4) эквивалентно дифференциальному уравнению (2) вместе с начальным условием (3).

Докажем это. Допустим сначала, что выполнено соотношение (4). Заменяя в нем переменное t его значением t_0, получаем: $\varphi(t_0)=x_0$. Таким образом, из (4) вытекает (3). Далее, правая часть тождества (4) очевидно дифференцируема по t, а потому дифференцируема по t и левая его часть. В результате дифференцирования тождества (4), получаем тождество (2).

Допустим теперь, что выполнены соотношения (2) и (3). Интегрируя соотношение (2) в пределах от t_0 до t, получаем:

$$\varphi(t)-\varphi(t_0)=\int_{t_0}^{t} f(\tau,\ \varphi(\tau))\ d\tau.$$

В силу соотношения (3) из последнего равенства получаем (4).

Таким образом, предложение А) доказано.

Введем теперь некоторые обозначения, используемые ниже при доказательстве теоремы 1.

Б) Пусть $x=\varphi(t)$ — такая непрерывная функция, определенная на некотором отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, что ее график целиком расположен в открытом множестве Г, и t_0 — некоторая точка отрезка $r_1\leqslant t\leqslant r_2$. Тогда, пользуясь правой частью тождества (4), можно функции $\varphi(t)$ поставить в соответствие функцию $\varphi^*(t)$, определенную также на отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, при помощи равенства

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau \tag{5}$$

(график функции $\varphi^*(t)$, конечно, уже может не проходить в множестве Г). Таким образом, правую часть тождества (4) можно рассматривать как оператор, ставящий в соответствие функции φ функцию φ^*. Обозначая этот оператор одной буквой A, мы запишем соотношение (5) в виде формулы

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{6}$$

Пользуясь оператором A, интегральное уравнение (4) можно записать в виде:

$$\varphi=A\varphi. \tag{7}$$

В) Пусть $\varphi(t)$ — некоторая непрерывная функция, определенная на отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$. *Нормой* $\|\varphi\|$ этой функции называется максимум ее модуля

$$\|\varphi\|=\max_{r_1\leqslant t\leqslant r_2}|\varphi(t)|.$$

Если $\psi(t)$ и $\chi(t)$ — две непрерывные функции, заданные на отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, то норма $\|\psi-\chi\|$ их разности $\psi(t)-\chi(t)$ является не-

отрицательным числом, оценивающим, насколько сильно отличаются эти функции друг от друга. Если число $\|\psi-\chi\|$ мало, то функции ψ и χ «близки» друг к другу. Равенство $\|\psi-\chi\|=0$ имеет место тогда и только тогда, когда функции ψ и χ тождественно совпадают. Пользуясь понятием нормы, легко можно формулировать известное из курса анализа условие равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Пусть

$$\varphi_0(t),\ \varphi_1(t),\ \ldots,\ \varphi_i(t),\ \ldots \tag{8}$$

— последовательность непрерывных функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Последовательность (8) равномерно сходится к функции φ, определенной на том же отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, если

$$\lim_{i\to\infty}\|\varphi-\varphi_i\|=0.$$

Для того, чтобы последовательность (8) равномерно сходилась, достаточно, чтобы имели место неравенства

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant a_i,$$

где числа $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Прежде чем перейти к детальному проведению доказательства теоремы 1, изложим кратко суть метода последовательных приближений, применяемого для решения уравнения (7). Строится последовательность

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_i,\ \ldots \tag{9}$$

непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, который содержит внутри себя точку t_0. Каждая функция последовательности (9) определяется через предыдущую при помощи равенства

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i, \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{10}$$

Если график функции φ_i проходит в множестве Г, то функция φ_{i+1} равенством (10) определяется, но для того, чтобы могла быть определена следующая функция φ_{i+2}, нужно, чтобы и график функции φ_{i+1} проходил в множестве Г. Этого, как мы покажем, удается достичь, выбрав отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ достаточно коротким. Далее, также за счет уменьшения длины отрезка $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, можно достичь того, чтобы для последовательности (9) выполнялись неравенства

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots, \tag{11}$$

где $0<k<1$. Из неравенств (11) следуют неравенства

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant\|\varphi_1-\varphi_0\|\cdot k^i, \qquad i=1,\ 2,\ \ldots,$$

и, таким образом, последовательность (9) равномерно сходится (см. В)).

Далее уже легко устанавливается, что предел φ последовательности (9) удовлетворяет уравнению (7).

Ту же конструкцию можно описать несколько иным способом — — в форме метода сжатых отображений. Выберем некоторое семейство Ω функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ (причем $r_1 < t_0 < r_2$), так, чтобы графики этих функций проходили в множестве Г. Допустим еще, что в отношении оператора A семейство Ω удовлетворяет следующим двум условиям: 1) применяя оператор A к любой функции семейства Ω, мы вновь получаем функцию семейства Ω; 2) существует такое число k, $0 < k < 1$, что для двух произвольных функций ψ и χ семейства Ω выполнено неравенство

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|.$$

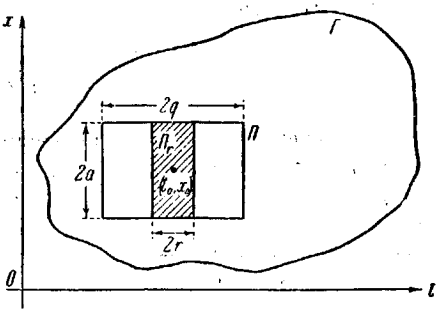

Рис. 39.

В этом смысле отображение A является сжатым (правильнее было бы сказать «сжимающим»).

Легко видеть, что если для семейства Ω выполнены формулированные условия, то, исходя из произвольной его функции φ_0, мы по индуктивной формуле (10) получим бесконечную последовательность (9), удовлетворяющую условию (11), и, как было отмечено выше, равномерно сходящуюся к решению φ уравнения (7).

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1 на основе изложенных соображений.

Доказательство теоремы 1

Начальные значения t_0 и x_0 искомого решения уравнения (1) являются координатами точки (t_0, x_0), лежащей в множестве Г. Выберем прежде всего какой-либо прямоугольник П с центром в точке (t_0, x_0) со сторонами, параллельными осям, целиком вместе со своей границей содержащийся в множестве Г (рис. 39). Длину горизонтальной (параллельной оси t) стороны прямоугольника П обозначим через $2q$, а длину вертикальной стороны — через $2a$. Таким образом, точка (t, x) тогда и только тогда принадлежит прямоугольнику П, когда выполнены неравенства:

$$|t - t_0| \leqslant q, \qquad |x - x_0| \leqslant a. \tag{12}$$

Так как прямоугольник П есть замкнутое множество, содержащееся в Г, то непрерывные на нем функции $f(t, x)$ и $\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}$ ог-

раничены, и потому существуют такие положительные числа M и K, что для t и x, удовлетворяющих условиям (12), выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leqslant M, \quad \left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant K. \tag{13}$$

Наряду с прямоугольником П будем рассматривать более «узкий» прямоугольник Π_r, определяемый неравенствами

$$|t - t_0| \leqslant r, \qquad |x - x_0| \leqslant a,$$

где

$$r \leqslant q \tag{14}$$

(см. рис. 39). Более точно число r определим далее. Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных функций, заданных на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, графики которых проходят в прямоугольнике Π_r. Таким образом, функция φ, определенная на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t) - x_0| \leqslant a. \tag{15}$$

Постараемся теперь выбрать число r таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

а) Если функция φ принадлежит семейству Ω_r, то функция $\varphi^* = A\varphi$ (см. (5), (6)) также принадлежит семейству Ω_r.

б) Существует такое число k, $0 < k < 1$, что для любых двух функций ψ и χ семейства Ω_r имеет место неравенство

$$\|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|. \tag{16}$$

Рассмотрим условие а). Для того чтобы функция $\varphi^* = A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r, необходимо и достаточно, чтобы при $|t - t_0| \leqslant r$ было выполнено неравенство

$$|\varphi^*(t) - x_0| \leqslant a.$$

В силу (5) и (13) мы имеем:

$$|\varphi^*(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau\right| \leqslant Mr.$$

Из этого видно, что при

$$r \leqslant \frac{a}{M} \tag{17}$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$\psi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \psi(\tau))\, d\tau,$$

$$\chi^*(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \chi(\tau))\, d\tau.$$

Вычитая второе равенство из первого, получаем:

$$|\psi^*(t) - \chi^*(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau)))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))|\, d\tau\right|. \tag{18}$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь формулой Лагранжа и вторым из неравенств (13):

$$|f(\tau, \psi(\tau)) - f(\tau, \chi(\tau))| = \left|\frac{\partial f(\tau, \theta)}{\partial x}(\psi(\tau) - \chi(\tau))\right| \leqslant K \cdot |\psi(\tau) - \chi(\tau)|; \tag{19}$$

здесь θ — число, заключенное между $\psi(\tau)$ и $\chi(\tau)$ и, следовательно, удовлетворяющее неравенству $|\theta - x_0| \leqslant a$. Из (18) и (19) следует:

$$\| A\psi - A\chi \| = \| \psi^* - \chi^* \| \leqslant Kr \| \psi - \chi \|.$$

Таким образом, условие б) выполнено, если число $k = Kr$ меньше единицы, т. е. если

$$r < \frac{1}{K}. \tag{20}$$

Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (14), (17) и (20), то для семейства Ω_r выполнены условия а) и б). В дальнейшем будем считать число r выбранным таким образом, что неравенства (14), (17) и (20) для него выполнены.

Построим теперь последовательность

$$\varphi_0, \quad \varphi_1, \quad \ldots, \quad \varphi_i, \quad \ldots \tag{21}$$

функций, определенных на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, положив:

$$\varphi_0(t) \equiv x_0, \tag{22}$$

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{23}$$

Так как функция (22) принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (21) принадлежат этому же семейству (см.

условие а)). Далее, мы имеем (см. (15)):

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi_1-x_0|\leqslant a.$$

В силу (16) получаем:

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

откуда

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant ak^i,\qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Таким образом, в силу В), последовательность (21) равномерно сходится на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$ к некоторой непрерывной функции φ. Так как все функции последовательности (21) принадлежат семейству Ω_r, то и функция φ принадлежит ему (см. (15)). Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (7). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0,\quad A\varphi_1,\ \ldots,\ A\varphi_i,\ \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$; действительно, мы имеем:

$$\|A\varphi-A\varphi_i\|\leqslant k\|\varphi-\varphi_i\|.$$

Переходя в соотношении (23) к пределу при $i\to\infty$, получаем:

$$\varphi=A\varphi.$$

Итак, *существование решения* $x=\varphi(t)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющего начальному условию* (3), *доказано; при этом установлено, что решение* $x=\varphi(t)$ *определено на интервале* $|t-t_0|<r$, *где* r — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* (14), (17) *и* (20).

Перейдем теперь к доказательству единственности. Пусть $x=\psi(t)$ и $x=\chi(t)$ — два решения уравнения (1) с общими начальными значениями t_0, x_0 и $r_1<t<r_2$ — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений ψ и χ; очевидно, что $r_1<t_0<r_2$. Покажем, что если решения $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1<t<r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $|t-t_1|<r$, где r — достаточно малое положительное число. Положим $x_1=\psi(t_1)=\chi(t_1)$; тогда величины t_1, x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $x=\psi(t)$ и $x=\chi(t)$. В этом смысле точка (t_1, x_1) ничем не отличается от точки (t_0, x_0), и поэтому мы сохраним за точкой (t_1, x_1) обозначение (t_0, x_0): это позволит нам сохранить и другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (1) к интегральному уравнению (4), мы получаем для обеих функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ интегральные равенства, которые в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$\psi=A\psi,\quad \chi=A\chi. \tag{24}$$

Выберем теперь, как и прежде, в открытом множестве Γ прямоугольник Π с центром в точке (t_0, x_0), а затем прямоугольник Π_r таким образом, чтобы число r кроме неравенств (14), (17), (20) удовлетворяло еще тому условию, что при $|t-t_0| \leqslant r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам

$$|\psi(t)-x_0| \leqslant a, \qquad |\chi(t)-x_0| \leqslant a.$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $|t-t_0| \leqslant r$, входят в семейство Ω_r, и, следовательно, в силу неравенства (16) и соотношений (24) получаем:

$$\|\psi-\chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\,\|\psi-\chi\|,$$

а это возможно только тогда, когда $\|\psi-\chi\|=0$, т. е. когда функции ψ и χ совпадают на отрезке $|t-t_0| \leqslant r$.

Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Допустим противоположное, именно, что существует точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$, для которой $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определенности будем считать, что $t^* > t_0$.

Обозначим через N множество всех тех точек t отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, для которых $\psi(t)=\chi(t)$, и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность точек множества N, сходящаяся к некоторой точке τ. Тогда $\psi(\tau_i)=\chi(\tau_i)$, и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ,

$$\psi(\tau) = \lim_{i\to\infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i\to\infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т. е. точка τ также принадлежит множеству N.

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т. е. $\psi(t_1)=\chi(t_1)$; следовательно, $t_1 < t^*$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $|t-t_1| < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Итак, теорема 1 доказана.

Пример

Для весьма простого уравнения

$$\dot{x} = x$$

найдем решение методом последовательных приближений. Решение будем искать с начальными значениями

$$t_0 = 0, \qquad x_0 = 1.$$

Соответствующее интегральное уравнение запишется в виде:

$$\varphi(t)=1+\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau.$$

Будем строить теперь последовательность

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots$$

Мы имеем:

$$\varphi_0(t)\equiv 1,$$

$$\varphi_1(t)=1+\int_0^t d\tau=1+t,$$

$$\varphi_2(t)=1+\int_0^t (1+\tau)\,d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2,$$

$$\varphi_3(t)=1+\int_0^t \left(1+\tau+\frac{1}{2!}\tau^2\right)d\tau=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3,$$

. . . . . .

$$\varphi_n(t)=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{3!}t^3+\ldots+\frac{1}{n!}t^n,$$

. . . . . .

Пределом этой последовательности (равномерно сходящейся на любом отрезке числовой оси) является функция $\varphi(t)=e^t$.

§ 21. Доказательство теоремы существования и единственности для нормальной системы уравнений

Здесь будет доказана сформулированная в § 3 теорема 2 существования и единственности для нормальной системы уравнений

$$\dot{x}^i=f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{1}$$

правые части $f^i(t, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ которой вместе с их частными производными $\dfrac{\partial f^i(t, x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^j}$, $i, j=1, \ldots, n$, определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства переменных $t, x^1, \ldots, x^n$. Полагая

$$\boldsymbol{x}=(x^1, \ldots, x^n), \tag{2}$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})=(f^1(t, \boldsymbol{x}), f^2(t, \boldsymbol{x}), \ldots, f^n(t, \boldsymbol{x})),$$

мы перепишем систему (1) в векторной форме (ср. § 14, А)):

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}). \tag{3}$$

Доказательство будет проводиться в векторной форме методом последовательных приближений и будет представлять собой почти буквальное повторение доказательства теоремы 1, данного в предыдущем параграфе. Кроме доказательства теоремы 2 здесь будет дано доказательство теоремы 3, также методом последовательных приближений, но несколько видоизмененным по сравнению с доказательством теоремы 2.

Вспомогательные предложения

Для того чтобы непринужденно пользоваться векторными обозначениями, установим прежде всего некоторые естественные определения и простые неравенства для векторов и векторных функций.

Длина или *модуль* $|\boldsymbol{x}|$ вектора (2), как известно, определяется формулой

$$|\boldsymbol{x}| = +\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}.$$

Известно и без труда доказывается, что если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ суть два вектора, то имеет место неравенство

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|.$$

Из этого неравенства следует аналогичное неравенство и для произвольного числа векторов $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_l$, именно:

$$|\boldsymbol{x}_1 + \ldots + \boldsymbol{x}_l| \leqslant |\boldsymbol{x}_1| + \ldots + |\boldsymbol{x}_l|. \tag{4}$$

Пусть $\varphi(t) = (\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))$ — непрерывная векторная функция действительного переменного t, т. е. вектор, координаты которого являются непрерывными функциями переменного t. Если функция $\varphi(t)$ определена на интервале $r_1 < t < r_2$, то при $r_1 < t_0 < r_2$ на том же интервале можно определить векторную функцию

$$\psi(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau,$$

задав компоненты $\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$ вектора $\psi(t)$ формулами

$$\psi^i(t) = \int_{t_0}^{t} \varphi^i(\tau)\, d\tau;$$

при этом имеет место неравенство

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right| \leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau\right|. \tag{5}$$

Для доказательства этого неравенства разобьем отрезок интегрирования на m равных частей, положив:

$$\Delta = \frac{t - t_0}{m}; \quad t_k = t_0 + k\Delta, \qquad k = 1, \ldots, m$$

(число Δ будет положительным при $t > t_0$ и отрицательным при $t < t_0$). Тогда согласно определению интеграла от векторной функции и в силу (4), мы имеем:

$$\left|\int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\, d\tau\right| = \left|\lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \varphi(t_k)\Delta\right| \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |\varphi(t_k)| \cdot |\Delta| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|\, d\tau\right|.$$

Установим еще одно неравенство для *векторной функции*

$$g(x) = (g^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, g^n(x^1, \ldots, x^n))$$

векторного переменного x, заданной на выпуклом множестве Δ пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$. Предположим, что имеют место неравенства:

$$\left|\frac{\partial g^i(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^j}\right| \leqslant K,$$

где K — положительное число. Оказывается тогда, что для двух любых точек x и y множества Δ выполнены неравенства

$$|g(x) - g(y)| \leqslant n^2 K |x - y|. \tag{6}$$

Для доказательства неравенства (6) введем в рассмотрение *отрезок*, соединяющий точки x и y, именно положим:

$$z(s) = y + s(x - y).$$

Когда s пробегает значения $0 \leqslant s \leqslant 1$, точка $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий точки x и y, и, ввиду выпуклости множества Δ, все время остается в нем. Мы получаем (применяя формулу Лагранжа):

$$g^i(x) - g^i(y) = g^i(z(1)) - g^i(z(0)) = \frac{dg^i(z(s))}{ds}\bigg|_{s=\theta}.$$

Вычисляя производную $\frac{dg^i(z(s))}{ds}$ по формуле производной от сложной функции, получаем:

$$\frac{dg^i(z(s))}{ds} = \frac{dg^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{ds} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{\partial x^k} \cdot \frac{dz^k(s)}{ds} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g^i(z^1(s), \ldots, z^n(s))}{\partial x^k}(x^k - y^k).$$

Таким образом,

$$|g^i(x)-g^i(y)|\leqslant\sum_{k=1}^{n}K|x^k-y^k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}K|x-y|\leqslant nK|x-y|.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат, суммируя его по i, и извлекая корень, получаем:

$$|g(x)-g(y)|\leqslant n^{\frac{3}{2}}K|x-y|\leqslant n^2K|x-y|.$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1, от дифференциального уравнения (3) перейдем к интегральному.

А) Пусть $x=\varphi(t)$ — некоторое решение дифференциального уравнения (3), так что выполнено тождество

$$\dot{\varphi}(t)=f(t,\ \varphi(t)), \tag{7}$$

и пусть

$$\varphi(t_0)=x_0 \tag{8}$$

— начальное условие, которому это решение удовлетворяет. Оказывается, что совокупность соотношений (7) и (8) эквивалентна одному соотношению

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{9}$$

Докажем это. Допустим, что выполнено интегральное тождество (9). Подставляя в него $t=t_0$, получаем равенство (8), а дифференцируя его по t, получаем тождество (7). Допустим теперь, что выполнены соотношения (7) и (8). Интегрируя соотношение (7) в пределах от t_0 до t и принимая во внимание соотношение (8), мы получаем соотношение (9).

Б) Пользуясь правой частью тождества (9), каждой векторной функции $\varphi(t)$, график которой проходит в множестве Γ, поставим в соответствие функцию $\varphi^*(t)$, положив:

$$\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(\tau,\ \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{10}$$

Кратко, в операторной форме то же соотношение запишем в виде:

$$\varphi^*=A\varphi. \tag{11}$$

Уравнение (9) теперь может быть записано в виде:

$$\varphi=A\varphi. \tag{12}$$

В) Пусть $\varphi(t)$ — непрерывная векторная функция, заданная на отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$. Определим *норму* $\|\varphi\|$ этой функции, положив:

$$\|\varphi\|=\max_{r_1\leqslant t\leqslant r_2}|\varphi(t)|.$$

Пользуясь понятием нормы, можно формулировать определение равномерной сходимости последовательности

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_i,\ \ldots \tag{13}$$

непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Последовательность (13) векторных функций равномерно сходится к непрерывной функции φ, заданной на том же отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, если

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того чтобы последовательность (13) равномерно сходилась, достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i,$$

где числа $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_i,\ \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2

Так как точка $(t_0,\ \boldsymbol{x}_0) = (t_0,\ x_0^1,\ x_0^2,\ \ldots,\ x_0^n)$ принадлежит открытому множеству Г, то существуют такие положительные числа q и a, что все точки $(t,\ \boldsymbol{x})$, удовлетворяющие условиям

$$|t - t_0| \leqslant q,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a, \tag{14}$$

лежат в множестве Г. Так как множество П, состоящее из всех точек $(t,\ \boldsymbol{x})$, удовлетворяющих условиям (14), замкнуто и ограничено (рис. 40), то непрерывные функции

$$|\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})| \text{ и } \left|\frac{\partial f^i(t,\ x)}{\partial x^j}\right|, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

ограничены на нем, т. е. существуют такие положительные числа M и K, что

$$|\boldsymbol{f}(t,\ \boldsymbol{x})| \leqslant M,\ \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

на множестве П.

Наряду с множеством П рассмотрим содержащееся в нем множество Π_r, определяемое неравенствами

$$|t - t_0| \leqslant r,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| \leqslant a,$$

где

$$r \leqslant q \tag{16}$$

(рис. 40). Обозначим через Ω_r семейство всех непрерывных векторных функций, заданных на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, графики которых проходят в Π_r. Таким образом, функция φ, определенная на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, тогда и только тогда принадлежит семейству Ω_r, когда

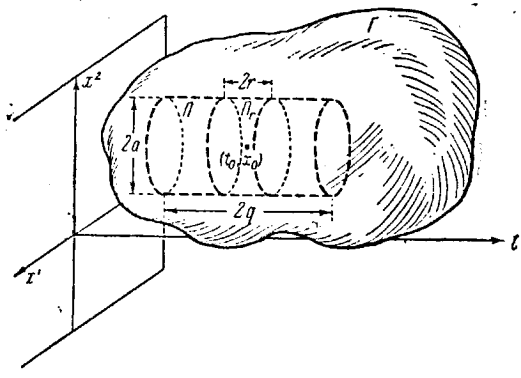

Рис. 40.

для любого t, принадлежащего этому отрезку, выполнено неравенство

$$|\varphi(t)-x_0|\leqslant a. \tag{17}$$

Постараемся выбрать теперь число r таким образом, чтобы были выполнены следующие два условия:

а) Если функция φ принадлежит семейству Ω_r, то функция $\varphi^*=Ap$ (см. (10), (11)) также принадлежит семейству Ω_r.

б) Существует такое число k, $0<k<1$, что для любых двух функций ψ и χ семейства Ω_r имеет место неравенство

$$\|A\psi-A\chi\|\leqslant k\|\psi-\chi\|. \tag{18}$$

Рассмотрим условие а). Для того чтобы функция $\varphi^*=A\varphi$ принадлежала семейству Ω_r, необходимо и достаточно, чтобы при $|t-t_0|\leqslant r$ было выполнено неравенство:

$$|\varphi^*(t)-x_0|\leqslant a.$$

В силу (10), (5) и (15) мы имеем:

$$|\varphi^*(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t} f(\tau,\varphi(\tau))\,d\tau\right|\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\varphi(\tau))|\,d\tau\right|\leqslant Mr.$$

Из этого видно, что при

$$r\leqslant\frac{a}{M} \tag{19}$$

условие а) выполнено.

Рассмотрим теперь условие б). Мы имеем:

$$|\psi^*(t)-\chi^*(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}(f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau)))\,d\tau\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{t_0}^{t}|f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|\,d\tau\right|. \qquad (20)$$

Оценим теперь последнее подынтегральное выражение, пользуясь неравенствами (6) и (15):

$$|f(\tau,\psi(\tau))-f(\tau,\chi(\tau))|\leqslant n^2K|\psi(\tau)-\chi(\tau)|. \qquad (21)$$

Из (20) и (21) следует

$$\|A\psi-A\chi\|=\|\psi^*-\chi^*\|\leqslant n^2Kr\|\psi-\chi\|.$$

Таким образом, условие б) выполнено, если

$$r\leqslant\frac{k}{n^2K}, \qquad (22)$$

где $k<1$.

Итак, если число r удовлетворяет неравенствам (16), (19), (22) (которые мы в дальнейшем будем считать выполненными), то для семейства Ω_r выполнены условия а) и б).

Построим теперь последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t)\equiv x_0,\quad \varphi_1(t),\ \ldots,\quad \varphi_i(t),\ \ldots, \qquad (23)$$

определенных на отрезке $|t-t_0|\leqslant r$, положив

$$\varphi_{i+1}=A\varphi_i,\quad i=0,\ 1,\ \ldots \qquad (24)$$

Так как функция φ_0 принадлежит семейству Ω_r, то и все функции последовательности (23) принадлежат этому же семейству (см. условие а)). Далее, мы имеем (см. (17)):

$$\|\varphi_1-\varphi_0\|=\max_{|t-t_0|\leqslant r}|\varphi_1(t)-x_0|\leqslant a.$$

В силу (18) получаем:

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|=\|A\varphi_i-A\varphi_{i-1}\|\leqslant k\|\varphi_i-\varphi_{i-1}\|,$$

откуда

$$\|\varphi_{i+1}-\varphi_i\|\leqslant ak^i. \qquad (25)$$

Таким образом, в силу В) последовательность (23) равномерно сходится к некоторой непрерывной функции φ, принадлежащей семейству Ω_r. Покажем, что функция φ удовлетворяет уравнению (12). Для этого заметим, что последовательность

$$A\varphi_0,\ A\varphi_1,\ \ldots,\ A\varphi_i,\ \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$; действительно, мы имеем (см. (18)):

$$\|A\varphi - A\varphi_i\| \leqslant k\|\varphi - \varphi_i\|.$$

Переходя в соотношении (24) к пределу при $i \to \infty$, получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Итак, *существование решения* $x = \varphi(t)$ *уравнения* (3), *удовлетворяющего начальному условию* (8), *доказано; при этом установлено, что решение* $x = \varphi(t)$ *определено на интервале* $|t - t_0| < r$, *где* r — *произвольное число, удовлетворяющее неравенствам* (16), (19), (22).

Перейдем теперь к доказательству единственности. Пусть $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$ — два решения уравнения (3) с общими начальными значениями t_0, x_0 и $r_1 < t < r_2$ — интервал, являющийся пересечением интервалов существования решений ψ и χ; очевидно, что $r_1 < t_0 < r_2$. Покажем, что если решения $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают в некоторой точке t_1 интервала $r_1 < t < r_2$, то они совпадают и на некотором интервале $|t - t_1| < r$, где r — достаточно малое положительное число. Положим $x_1 = \psi(t_1) = \chi(t_1)$; тогда величины t_1, x_1 могут быть приняты за начальные значения обоих решений $x = \psi(t)$ и $x = \chi(t)$. В этом смысле точка (t_1, x_1) ничем не отличается от точки (t_0, x_0) и потому мы сохраним за точкой (t_1, x_1) обозначение (t_0, x_0); это позволит нам сохранить и другие прежние обозначения. Переходя от дифференциального уравнения (3) к интегральному уравнению (9), мы получаем для обеих функций $\psi(t)$ и $\chi(t)$ интегральные равенства, которые в операторной форме могут быть записаны в виде:

$$\psi = A\psi, \quad \chi = A\chi. \tag{26}$$

Выберем теперь, как и прежде, в множестве Γ множество Π с центром в точке (t_0, x_0) (см. неравенства (14)), содержащееся в Γ, а затем множество Π_r таким образом, чтобы число r, кроме неравенств (16), (19), (22), удовлетворяло еще тому условию, что при $|t - t_0| \leqslant r$ функции ψ и χ определены и удовлетворяют неравенствам:

$$|\psi(t) - x_0| \leqslant a, \quad |\chi(t) - x_0| \leqslant a.$$

Это возможно, так как функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ непрерывны. Тогда функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$, рассматриваемые на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$, входят в семейство Ω_r и, следовательно, в силу неравенства (18) и соотношений (26), получаем:

$$\|\psi - \chi\| = \|A\psi - A\chi\| \leqslant k\|\psi - \chi\|,$$

а это возможно только тогда, когда $\|\psi - \chi\| = 0$, т. е. когда функции ψ и χ совпадают на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$.

Докажем теперь, что функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ совпадают на всем интервале $r_1 < t < r_2$. Допустим противоположное, именно, что существует точка t^* интервала $r_1 < t < r_2$, для которой $\psi(t^*) \neq \chi(t^*)$. Ясно, что $t^* \neq t_0$. Для определенности будем считать, что $t^* > t_0$. Обозначим через N множество всех тех точек t отрезка $t_0 \leqslant t \leqslant t^*$, для которых $\psi(t) = \chi(t)$, и докажем, что множество N замкнуто. В самом деле, пусть $\tau_1, \tau_2, \ldots$ — последовательность точек множества N, сходящаяся к некоторой точке τ. Тогда $\psi(\tau_i) = \chi(\tau_i)$, и потому, в силу непрерывности функций ψ и χ,

$$\psi(\tau) = \lim_{i \to \infty} \psi(\tau_i) = \lim_{i \to \infty} \chi(\tau_i) = \chi(\tau),$$

т. е. точка τ также принадлежит множеству N.

Обозначим через t_1 точную верхнюю грань множества N. Так как N замкнуто, то t_1 принадлежит этому множеству, т. е. $\psi(t_1) = \chi(t_1)$; следовательно, $t_1 < t^*$. Но тогда, в силу ранее доказанного, функции $\psi(t)$ и $\chi(t)$ должны совпадать на некотором интервале $|t - t_1| < r$, и точка t_1 не может быть точной верхней гранью множества N. Таким образом, мы пришли к противоречию.

Итак, теорема 2 доказана.

Выделим теперь в виде отдельного предложения некоторые факты, установленные при доказательстве теоремы 2 и нужные в дальнейшем:

Г) Предположим, что правые части системы (1) (или, в векторной форме, уравнения (3)) определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на открытом множестве Г. Пусть (t_0, x_0) — некоторая точка множества Г, а q и a — такие положительные числа, что множество П, состоящее из всех точек, удовлетворяющих неравенствам (14), содержится в Г. Пусть, далее, M и K — такие положительные числа, что для всех точек (t, x), удовлетворяющих неравенствам (14), выполнены неравенства (15). Пусть, наконец, r — какое-либо положительное число, удовлетворяющее неравенствам (16), (19), (22). Тогда решение уравнения (3) с начальными значениями (t_0, x_0) определено на интервале $|t - t_0| < r$. Более того, оно на отрезке $|t - t_0| \leqslant r$ получается как предел последовательности функций (23), индуктивно заданных соотношением (24), причем для этих функций выполнено неравенство (25).

Доказательство теоремы 3

Перейдем к доказательству теоремы 3, утверждающей, что для нормальной линейной системы

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i(t) x^j + b^i(t) = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{27}$$

коэффициенты $a_j^i(t)$ и свободные члены $b^i(t)$ которой определены и непрерывны на интервале $q_1 < t < q_2$, существует решение с произвольными начальными значениями

$$t_0, x_0^1, \ldots, x_0^n, \quad q_1 < t_0 < q_2, \tag{28}$$

определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$. Мы покажем, что тот же самый оператор A (см. (10), (11)), применявшийся при доказательстве теоремы 2, но построенный теперь при помощи правых частей системы (27), порождает последовательность векторных функций

$$\varphi_0(t), \quad \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad \varphi_i(t), \ldots, \tag{29}$$

сходящуюся на всем интервале $q_1 < t < q_2$, причем равномерно на любом отрезке, содержащемся в этом интервале. При этом за $\varphi_0(t)$ можно принять произвольную непрерывную векторную функцию, заданную на интервале $q_1 < t < q_2$. Для проведения метода последовательных приближений нам здесь потребуется более точно оценить числа $\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\|$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ При этом будет видно, что в рассматриваемом случае метод последовательных приближений не укладывается в рамки метода сжатых отображений.

Пусть A — оператор, определенный соотношениями (10) и (11), исходя из системы (27) дифференциальных уравнений и начальных значений (28). Оператор A применим, очевидно, к любой непрерывной функции $\varphi(t)$, определенной на интервале $q_1 < t < q_2$. Из предложения А) следует, что система (27) с начальными условиями (28) равносильна операторному уравнению

$$\varphi = A\varphi, \tag{30}$$

для которого мы и найдем решение, определенное на всем интервале $q_1 < t < q_2$. Функции последовательности (29), заданной индуктивным соотношением

$$\varphi_{i+1} = A\varphi_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

определены на интервале $q_1 < t < q_2$.

Пусть $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ — произвольный отрезок, содержащий внутри себя точку t_0 и содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$, так что

$$q_1 < r_1 < t_0 < r_2 < q_2.$$

Покажем, что последовательность (29) равномерно сходится на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ к решению уравнения (30). Для правых частей уравнений (27) мы имеем:

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j} = a_j^i(t),$$

и потому при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ имеют место неравенства

$$\left|\frac{\partial f^i}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

где K — некоторое положительное число. Так как функции $\varphi_0(t)$ и $\varphi_1(t)$ ограничены на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, то на этом отрезке имеет место неравенство

$$|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)| \leqslant C,$$

где C — некоторая константа. Далее, на том же отрезке мы получаем последовательно (см. (5) и (6)):

$$|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau)))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_1(\tau)) - f(\tau, \varphi_0(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant n^2 K |t - t_0|;$$

$$|\varphi_3(t) - \varphi_2(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi_2(\tau)) - f(\tau, \varphi_1(\tau)))\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_2(\tau)) - f(\tau, \varphi_1(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant \frac{(n^2K)^2 C}{2!} |t - t_0|^2;$$

. . . . . .

$$|\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)| = \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau)))\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi_{i-1}(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant \frac{(n^2K)^i C}{i!} |t - t_0|^i.$$

Отсюда получаем:

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant C\, \frac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i}.$$

Так как числа $C\,\dfrac{(n^2K(r_2 - r_1))^i}{i!}$ образуют сходящийся ряд, то последовательность (29) равномерно сходится на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ к некоторой непрерывной функции $\varphi(t)$. Для этой функции мы имеем:

$$\|A\varphi_i - A\varphi\| \leqslant \max_{r_1 \leqslant t \leqslant r_2} \left|\int_{t_0}^{t} |f(\tau, \varphi_i(\tau)) - f(\tau, \varphi(\tau))|\, d\tau\right| \leqslant$$

$$\leqslant n^2K(r_2 - r_1)\|\varphi_i - \varphi\|$$

так что последовательность функций

$$A\varphi_0, \quad A\varphi_1, \quad \ldots, \quad A\varphi_i, \quad \ldots$$

равномерно сходится к функции $A\varphi$ на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Переходя к пределу в соотношении (31), мы получаем:

$$\varphi = A\varphi.$$

Так как $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ есть произвольный отрезок, содержащий точку t_0 и содержащийся в интервале $q_1 < t < q_2$, то последовательность (29) сходится в каждой точке интервала $q_1 < t < q_2$, и потому функция $\varphi(t)$ определена на всем интервале $q_1 < t < q_2$ и на всем этом интервале является решением уравнения (30).

Итак, теорема 3 доказана.

Пользуясь методом доказательства теоремы 3, установим нижеследующее важное для дальнейшего предложение:

Д) Допустим, что заданная на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ непрерывная (скалярная) функция $u(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$u(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha u(\tau) + \beta)\, d\tau, \qquad \alpha > 0, \ \beta > 0; \tag{32}$$

оказывается тогда, что она удовлетворяет неравенству

$$u(t) \leqslant \frac{\beta}{\alpha} (e^{\alpha(t-t_0)} - 1). \tag{33}$$

Для доказательства предложения Д) рассмотрим наряду с интегральным неравенством (32) интегральное уравнение

$$v(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v(\tau) + \beta)\, d\tau \tag{34}$$

и покажем, что имеет место неравенство $u(t) \leqslant v(t)$. Для этого будем решать интегральное уравнение (34) методом последовательных приближений. Так как подынтегральное выражение в (34) линейно относительно функции $v(t)$, то последовательность приближений равномерно сходится на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ (см. доказательство теоремы 3). За исходную функцию при построении последовательных приближений примем функцию $v_0(t) = u(t)$. Далее положим:

$$v_{i+1}(t) = \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)\, d\tau. \tag{35}$$

Мы докажем индукцией по i, что каждая функция $v_i(t)$ удовлетворяет интегральному неравенству

$$v_i(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} (\alpha v_i(\tau) + \beta)\, d\tau. \tag{36}$$

При $i=0$ это неравенство верно, так как $v_0(t)=u(t)$ (см. (32)). Допустим, что оно справедливо для функции $v_i(t)$, и докажем его для функции $v_{i+1}(t)$. В силу предположения индукции, мы имеем:

$$v_{i+1}(t)=\int_{t_0}^{t}(\alpha v_i(\tau)+\beta)\,d\tau \geqslant v_i(t).$$

Таким образом,

$$v_{i+1}(t)\geqslant v_i(t). \tag{37}$$

Поэтому, ввиду положительности числа α, мы получаем из (35):

$$v_{i+1}(t)\leqslant\int_{t_0}^{t}(\alpha v_{i+1}(\tau)+\beta)\,d\tau.$$

Проведенная индукция доказывает неравенство (36); одновременно установлено неравенство (37). Из этого следует, что предел $v(t)$ последовательности $v_0(t)=u(t), v_1(t),\ldots, v_i(t),\ldots$ не меньше каждой из функций $v_i(t)$, и в частности $v(t)\geqslant u(t)$.

Теперь для завершения доказательства предложения Д) достаточно показать, что решение $v(t)$ интегрального уравнения (34) совпадает с правой частью неравенства (33). В силу предложения А) § 20 решение $v(t)$ уравнения (34) совпадает с решением дифференциального уравнения

$$\dot{v}(t)=\alpha v(t)+\beta$$

при начальном условии $v(t_0)=0$, т. е. с правой частью неравенства (33). Таким образом, предложение Д) доказано.

§ 22. Непродолжаемые решения

В § 3 было введено понятие непродолжаемого решения (см. § 3, А)). Здесь при помощи совершенно элементарных соображений из теоремы 2 будет выведено, что каждое решение может быть продолжено до решения, далее непродолжаемого (см. А)). В этом смысле непродолжаемые решения исчерпывают совокупность всех решений. Далее, в предложениях Б) и В) будет установлено одно важное свойство непродолжаемых решений, которое найдет свои применения в следующих параграфах этой главы.

Пусть

$$\dot{x}=f(t, x) \tag{1}$$

— векторная запись нормальной системы уравнений (см. § 21, (1), (3)), правые части которой определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$.

А) 1) Существует непродолжаемое решение уравнения (1) с произвольными начальными значениями из Г.

2) Если некоторое непродолжаемое решение уравнения (1) совпадает с некоторым другим решением уравнения (1) хотя бы при одном значении t, то оно является продолжением этого решения.

3) Если два непродолжаемых решения уравнения (1) совпадают между собой хотя бы для одного значения t, то они полностью совпадают, т. е. имеют один и тот же интервал определения и равны на нем.

Докажем предложение А).

Пусть (t_0, x_0) — произвольная точка из Г. Построим такое решение $x=\tilde{\varphi}(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, что оно является продолжением любого решения уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0.

Каждому решению уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 соответствует свой интервал определения. Множество всех правых концов этих интервалов обозначим через R_2, а множество всех их левых концов — через R_1. Точную верхнюю грань множества R_2 обозначим через m_2 (в частности, может оказаться, что $m_2=\infty$), а точную нижнюю грань множества R_1 обозначим через m_1 (в частности, может оказаться, что $m_1=-\infty$). Построим решение $x=\tilde{\varphi}(t)$ с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $m_1<t<m_2$. Пусть t^* — произвольная точка этого интервала. Допустим для определенности, что $t_0\leqslant t^*$. Так как m_2 есть точная верхняя грань множества R_2, то существует решение $x=\psi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, интервал определения которого содержит точку t^*, и мы положим $\tilde{\varphi}(t^*)=\psi(t^*)$. Полученное значение функции $\tilde{\varphi}$ в точке t^* не зависит от случайно выбранного решения $x=\psi(t)$. Действительно, если бы вместо решения $x=\psi(t)$ мы взяли решение $x=\chi(t)$ с начальными значениями t_0, x_0 и интервалом определения, также содержащим точку t^*, то, в силу единственности (см. теорему 2), мы имели бы $\psi(t^*)=\chi(t^*)$. Таким образом, функция $\tilde{\varphi}(t)$ однозначно определена на всем интервале $m_1<t<m_2$. В то же время она является решением уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, так как вблизи каждой точки t^* интервала $m_1<t<m_2$ функция $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает, по построению, с некоторым решением уравнения (1).

Пусть теперь $x=\varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $r_1<t<r_2$. Тогда r_1 — элемент множества R_1, а r_2 — элемент множества R_2, и потому $m_1\leqslant r_1$, $r_2\leqslant m_2$, т. е. интервал $r_1<t<r_2$ содержится в интервале $m_1<t<m_2$. Так как решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ имеют одни и те же начальные значения, то, в силу теоремы 2, они совпадают всюду,

где они оба определены, т. е. на интервале $r_1 < t < r_2$, а это и значит, что решение $\tilde{\varphi}(t)$ является продолжением решения $\varphi(t)$.

Построенное решение $\tilde{\varphi}(t)$, очевидно, непродолжаемо. В самом деле, пусть решение $\psi(t)$ является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$. Тогда t_0, x_0 можно принять за начальные значения решения $\psi(t)$ и, в силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжение решения $\psi(t)$, а это значит, что решения $\tilde{\varphi}(t)$ и $\psi(t)$ полностью совпадают. Из таких же соображений следует, что $\tilde{\varphi}(t)$ есть единственное непродолжаемое решение с начальными значениями t_0, x_0.

Допустим теперь, что непродолжаемое решение $\tilde{\varphi}(t)$ совпадает с некоторым другим решением $\varphi(t)$ хотя бы при одном значении t. Обозначим это значение t через t_0 и положим $\tilde{\varphi}(t_0) = x_0$. Тогда t_0, x_0 являются начальными значениями для непродолжаемого решения $\tilde{\varphi}(t)$ и для решения $\varphi(t)$. В силу доказанного выше, решение $\tilde{\varphi}(t)$ есть продолжение решения $\varphi(t)$. Если решение $\varphi(t)$ непродолжаемо, то, в силу тех же соображений, оно является продолжением решения $\tilde{\varphi}(t)$, и потому решения $\varphi(t)$ и $\tilde{\varphi}(t)$ полностью совпадают.

Итак, предложение А) доказано.

Б) Пусть E — замкнутое ограниченное множество пространства R, содержащееся в открытом множестве Γ, и $x = \tilde{\varphi}(t)$ — некоторое непродолжаемое решение (см. А)) уравнения (1), определенное на интервале $m_1 < t < m_2$. Тогда существуют такие числа r_1 и r_2, $m_1 < r_1 < r_2 < m_2$, что точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ пространства R находится вне множества E, когда t не принадлежит отрезку $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$.

Мы докажем лишь существование такого числа $r_2 < m_2$, что при $r_2 < t < m_2$ точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E. Существование числа r_1 доказывается аналогично. Если $m_2 = \infty$, то существование числа r_2 очевидно, так как при t, возрастающем до бесконечности, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$, первая координата которой равна t, обязательно должна покинуть ограниченное множество E.

Будем считать поэтому, что $m_2 < \infty$, и докажем существование числа r_2. При этом мы используем оценку числа r, данную в предложении Г) § 21. В пространстве R введем евклидову метрику. Так как множество E замкнуто и ограничено, а дополнение к открытому множеству Γ замкнуто, то расстояние ρ между множеством E и дополнением к множеству Γ (см. § 32, пример 3) положительно. Пусть E^* — множество всех точек пространства R, расстояние которых до множества E не превосходит числа $\frac{1}{2}\rho$. Тогда E^* — замкнутое ограниченное множество, содержащееся в Γ, так что правые части системы (1) и их производные по x^i, $i = 1, \ldots, n$, определены на множестве E^* и ограничены на нем. Таким образом, для любой точки (t, x) из

E^* выполнены неравенства

$$|f(t, x)| \leqslant M, \left|\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}\right| \leqslant K, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где M и K — некоторые положительные числа. Выберем два таких положительных числа q и a, что $q^2 + a^2 < \frac{\rho^2}{4}$. Если (t_0, x_0) — некоторая точка множества E и Π — множество всех точек (t, x), удовлетворяющих неравенствам $|t - t_0| \leqslant q$, $|x - x_0| \leqslant a$, то, очевидно, множество Π содержится в E^*, и потому для всех точек (t, x) множества Π выполнены неравенства (2). Таким образом, если число r удовлетворяет неравенствам (16), (19), (22) § 21, то существует решение $x = \varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0, определенное на интервале $|t - t_0| < r$. Здесь важно лишь то, что найденное число r является одним и тем же для всех точек (t_0, x_0) множества E. Покажем, что за r_2 можно принять число $m_2 - r$. Допустим противное, т. е. что при некотором $t_0 > m_2 - r$ точка $(t_0, \tilde{\varphi}(t_0))$ лежит в множестве E. Тогда мы можем принять величины t_0 и $\tilde{\varphi}(t_0)$ за начальные значения решения $x = \tilde{\varphi}(t)$ и, в силу сказанного выше, интервал $|t - t_0| < r$ должен содержаться в интервале $m_1 < t < m_2$. Но это противоречит неравенству $t_0 > m_2 - r$. Таким образом, предложение Б) доказано.

Для автономной системы имеет место предложение В), аналогичное предложению Б) и непосредственно из него вытекающее. Пусть

$$\dot{x} = f(x) \tag{3}$$

— векторная запись автономной системы уравнений, правые части которых непрерывны вместе с их частными производными по $x^1, \ldots, x^n$ в некотором открытом множестве Δ пространства S переменных $x^1, \ldots, x^n$.

В) Пусть F — замкнутое ограниченное множество пространства S, целиком расположенное в Δ, и $x = \tilde{\varphi}(t)$ — некоторое непродолжаемое решение уравнения (3) с интервалом определения $m_1 < t < m_2$. Если $m_2 < \infty$, то существует такое число r_2, $m_1 < r_2 < m_2$, что при t, принадлежащем интервалу $r_2 < t < m_2$, точка $\tilde{\varphi}(t)$ находится вне множества F. Точно так же, если $m_1 > -\infty$, то существует такое число r_1, $m_1 < r_1 < m_2$, что при t, принадлежащем интервалу $m_1 < t < r_1$, точка $\tilde{\varphi}(t)$ находится вне множества F.

При доказательстве предложения В) будем рассматривать лишь случай $m_2 \neq \infty$ и установим существование числа r_2. В пространстве R всех точек (t, x), где x — точка из S, определим открытое множество Γ, состоящее из всех точек (t, x), где t — произвольное число, а x — точка множества Δ. Далее, пусть m — некоторое число, удовлетворяющее условию $m_1 < m < m_2$. Обозначим через E множество,

состоящее из всех точек (t, x), где $m \leqslant t \leqslant m_2$, а x — точка множества F. Очевидно, множество E замкнуто, ограничено и содержится в Γ. В силу предложения Б), существует такое число r_2, что при t, принадлежащем интервалу $r_2 < t < m_2$, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E. Очевидно, мы можем выбрать число r_2 так, чтобы это условие выполнялось и чтобы, кроме того, было $m < r_2$. Тогда при $r_2 < t < m_2$ выполнены неравенства $m \leqslant t \leqslant m_2$ и, следовательно, точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$, у которой $r_2 < t < m_2$, может не принадлежать множеству E лишь благодаря тому, что точка $\tilde{\varphi}(t)$ не принадлежит множеству F. Таким образом, предложение В) доказано.

Примеры

1. Для иллюстрации результатов этого параграфа рассмотрим автономное уравнение первого порядка:

$$\dot{x} = \frac{1}{f(x)}, \tag{4}$$

где $f(x)$ — многочлен, все корни которого действительные и простые. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — их запись в возрастающем порядке. Фазовым пространством уравнения (4) является прямая P, а открытым множеством Δ для него служит совокупность всех точек прямой P, за исключением $a_1, a_2, \ldots, a_n$, так как в них правая часть уравнения (4) обращается в бесконечность. Положим:

$$F(x) = \int_0^x f(\xi)\, d\xi.$$

Тогда совокупность всех решений уравнения (4) описывается соотношением

$$F(x) = t + c.$$

Так как в автономном уравнении сдвиг времени на константу не меняет траектории, то совокупность всех траекторий уравнения (4) вместе с описанием движения по ним точки $x(t)$ дается соотношением

$$F(x) = t.$$

Рассмотрим движение точки $x(t)$ по интервалу $a_1 < x < a_2$. Так как $f(x)$ сохраняет знак на интервале $a_1 < x < a_2$, то $F(a_1) \neq F(a_2)$. Для определенности будем считать, что

$$m_1 = F(a_1) < m_2 = F(a_2).$$

Легко видеть, что в то время, когда t пробегает интервал $m_1 < t < m_2$, точка $x(t)$ пробегает интервал $a_1 < x < a_2$. Отсюда видно, что $x(t)$ есть непродолжаемое решение с интервалом определения $m_1 < t < m_2$. Здесь оба конца этого интервала конечны; это объясняется тем, что

при подходе к концам интервала времени $m_1 < t < m_2$ точка $x(t)$ подходит к граничным точкам области Δ.

2. Предложение Б) в некотором смысле отвечает на вопрос, почему интервал определения непродолжаемого решения может оказаться ограниченным справа или слева. Последим за поведением непродолжаемого решения $x = \tilde{\varphi}(t)$, ограничиваясь для простоты случаем, когда множество Γ ограничено. Границу множества Γ обозначим через G.

Пусть $m_1 < t < m_2$ — интервал определения непродолжаемого решения $x = \tilde{\varphi}(t)$. Так как множество Γ ограничено, то оба числа m_1 и m_2 отличны от $\pm\infty$. Покажем, что при $t \to m_2$ расстояние точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ от множества G стремится к нулю. Пусть ε — произвольное положительное число и E_ε — совокупность всех точек множества Γ, расстояние которых до множества G больше или равно ε. Легко доказывается, что множество E_ε замкнуто в R и ограничено. В силу предложения Б) существует такое число $r_2 < m_2$, что при $r_2 < t < m_2$ точка $(t, \tilde{\varphi}(t))$ не принадлежит множеству E_ε и, следовательно, ее расстояние до множества G меньше ε. Таким образом, при $t \to m_2$ расстояние точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ до множества G стремится к нулю. Приближение точки $(t, \tilde{\varphi}(t))$ при $t \to m_2$ к границе G множества Γ и является причиной того, что решение $x = \tilde{\varphi}(t)$ не может быть продолжено за правый конец m_2 интервала его определения.

§ 23. Непрерывная зависимость решения от начальных значений и параметров

Учитывая зависимость решения заданной системы уравнений от начальных значений этого решения, мы приходим к решению как функции от независимого переменного и начальных значений. Различные свойства этой функции многих переменных имеют важное значение. Здесь будет доказана непрерывность этой функции по совокупности переменных. Доказательство непрерывной зависимости решения от начальных значений будет сведено к теореме о непрерывной зависимости решения при фиксированных начальных значениях от параметров, непрерывно входящих в правые части системы. Эта теорема будет доказана в первую очередь.

Непрерывная зависимость решения от параметров

Мы будем рассматривать нормальную систему уравнений:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

правые части которых зависят от параметров $\mu^1, \ldots, \mu^l$ и определены в некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства $\tilde{R}$ переменных

$t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Будет предполагаться, что правые части системы (1) и их частные производные

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

по переменным $x^1, \ldots, x^n$ являются в $\tilde{\Gamma}$ непрерывными функциями совокупности всех переменных. Полагая

$$\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n); \quad \boldsymbol{\mu} = (\mu^1, \ldots, \mu^l),$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) = (f^1(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}), \ldots, f^n(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})),$$

мы запишем систему (1) в векторной форме:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}). \tag{3}$$

А) Точку пространства $\tilde{R}$ будем обозначать через $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu})$. Зафиксируем начальные значения t_0, $\boldsymbol{x}_0$ и обозначим через M совокупность всех таких $\boldsymbol{\mu}$, что точка $(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\mu})$ принадлежит множеству $\tilde{\Gamma}$. Очевидно, что M является открытым множеством в пространстве переменных $\mu^1, \ldots, \mu^l$. Каждой точке $\boldsymbol{\mu}$ множества M соответствует непродолжаемое решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ с начальными значениями t_0, $\boldsymbol{x}_0$ уравнения (3), определенное на интервале $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$ (см. § 22, А)), который, очевидно, может зависеть от $\boldsymbol{\mu}$, что и выражено в обозначениях. Множество T всех пар t, $\boldsymbol{\mu}$, для которых функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ определена, описывается, очевидно, условиями: точка $\boldsymbol{\mu}$ принадлежит множеству M, а число t удовлетворяет при этом неравенствам $m_1(\boldsymbol{\mu}) < t < m_2(\boldsymbol{\mu})$.

Теорема 13. *Множество T всех пар t, $\boldsymbol{\mu}$, на которых определена функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$, являющаяся при каждом фиксированном $\boldsymbol{\mu}$ непродолжаемым решением уравнения (3) с начальными значениями t_0, $\boldsymbol{x}_0$, представляет собой открытое множество пространства переменных $t, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Далее оказывается, что функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ есть непрерывная функция пары переменных t, $\boldsymbol{\mu}$ на множестве T.*

Следует обратить внимание на нетривиальность и важность того факта, что множество T является открытым.

Доказательство. Пусть t^*, $\boldsymbol{\mu}^*$ — произвольная точка множества T. Докажем, что точка t, $\boldsymbol{\mu}$, достаточно близкая к точке t^*, $\boldsymbol{\mu}^*$, принадлежит множеству T и что разность $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}) - \boldsymbol{\varphi}(t^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ мала. Этим теорема будет доказана.

Сначала мы будем считать, что $t^* \geqslant t_0$. Так как решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ определено при $t = t^*$, то $t^* < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, и потому существует такое число r_2, что $t^* < r_2 < m_2(\boldsymbol{\mu}^*)$, так что решение $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*)$ определено в частности на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$. Когда число t пробегает отрезок $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$, точка $(t, \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}^*), \boldsymbol{\mu}^*)$ описывает в пространстве

$\tilde{R}$ некоторую кривую Q. Пусть a и b — два положительных числа. Обозначим через $\tilde{\Pi}$ совокупность всех точек (t, x, μ) пространства $\tilde{R}$, удовлетворяющих условиям:

$$t_0 \leqslant t \leqslant r_2, \quad |x - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant a, \quad |\mu - \mu^*| \leqslant b. \tag{4}$$

Из того, что Q представляет собой замкнутое ограниченное множество, содержащееся в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$, следует существование таких положительных чисел a и b, что множество $\tilde{\Pi}$ также содержится в $\tilde{\Gamma}$. В дальнейшем мы будем считать, что числа a и b удовлетворяют этому условию. Так как производные (2) непрерывны и потому ограничены по модулю некоторым числом K на множестве $\tilde{\Pi}$, то, в силу неравенства (6) § 21, для точек (t, x_1, μ), (t, x_2, μ) множества $\tilde{\Pi}$ выполнено соотношение

$$|f(t, x_2, \mu) - f(t, x_1, \mu)| \leqslant n^2 K |x_2 - x_1|. \tag{5}$$

Далее, из равномерной непрерывности (см. § 32, И)) функции $f(t, x, \mu)$ на множестве $\tilde{\Pi}$ следует существование такой монотонной положительной функции $\beta_2(\varepsilon)$ положительного переменного ε, стремящейся к нулю вместе с ε, что для точек (t, x, μ^*), (t, x, μ) множества $\tilde{\Pi}$ выполнено соотношение

$$|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu^*)| < \beta_2(|\mu - \mu^*|). \tag{6}$$

Пусть теперь $x = \varphi(t, \mu)$, $|\mu - \mu^*| \leqslant b$ — решение уравнения (3) с начальными значениями (t_0, x_0). В силу предложения Б) § 22 точка $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ должна покинуть замкнутое множество $\tilde{\Pi}$ при $t \to m_2(\mu)$. Через t_2 мы обозначим то значение t, при котором точка $(t, \varphi(t, \mu), \mu)$ впервые достигает границы множества $\tilde{\Pi}$. Очевидно, что $t_0 < t_2 \leqslant r_2$. Дадим оценку разности $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)|$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$. Для этого запишем уравнение (3) в интегральной форме (см. § 21, А)) для значений параметра μ и μ^* и вычтем второе интегральное соотношение из первого; мы получим:

$$\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*) = \int_{t_0}^{t} (f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*))\, d\tau$$
$$(t_0 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Оценим разность, стоящую справа под знаком интеграла. Мы имеем:

$$|f(\tau, \varphi(\tau, \mu), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*)| \leqslant |f(\tau, \varphi(t, \mu), \mu) -$$
$$- f(\tau, \varphi(t, \mu^*), \mu)| + |f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu) - f(\tau, \varphi(\tau, \mu^*), \mu^*)|.$$

Первое из слагаемых, стоящих в правой части, оценивается в силу неравенства (5), второе — в силу неравенства (6); объединяя эти

оценки, получаем:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant \int_{t_0}^{t} [n^2K|\varphi(\tau, \mu) - \varphi(\tau, \mu^*)| + \beta_2(|\mu - \mu^*|)]\, d\tau.$$

Полагая $u(t) = |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)|$, мы, в силу предложения Д) § 21, получаем при $t_0 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| \leqslant \frac{\beta_2(|\mu - \mu^*|)}{n^2K}\left(e^{n^2K(t-t_0)} - 1\right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\beta_2(|\mu - \mu^*|)}{n^2K}\left(e^{n^2K(r_2-t_0)} - 1\right) = c_2\beta_2(|\mu - \mu^*|). \qquad (7)$$

Пусть ρ_2 — положительное число, удовлетворяющее неравенствам:

$$\rho_2 \leqslant b, \qquad (8)$$

$$c_2\beta_2(\rho_2) < a. \qquad (9)$$

В дальнейшем будем считать, что μ удовлетворяет неравенству

$$|\mu - \mu^*| < \rho_2, \qquad (10)$$

и покажем, что $t_2 = r_2$, так что решение $\varphi(t, \mu)$ определено на всем отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$.

Так как точка $(t_2, \varphi(t_2, \mu), \mu)$, по предположению, лежит на границе множества $\tilde{\Pi}$, то для этой точки одно из неравенств (4) должно переходить в точное равенство. В силу неравенств (8), (10), имеем $|\mu - \mu^*| < b$. Далее, в силу неравенств (10), (9) и (7), имеем $|\varphi(t_2, \mu) - \varphi(t_2, \mu^*)| < a$. Так как, наконец, $t_2 > t_0$, то из всех неравенств (4) в равенство может переходить лишь неравенство $t_2 \leqslant r_2$, и потому мы имеем $t_2 = r_2$.

Таким образом, доказано, что при $t^* \geqslant t_0$ существуют такое число $r_2 > t^*$ и такое положительное число ρ_2, что при $t_0 \leqslant t \leqslant r_2$ и $|\mu - \mu^*| < \rho_2$ точка (t, μ) принадлежит множеству T и выполнено неравенство (7).

Аналогично доказывается, что при $t^* \leqslant t_0$ существуют такое число $r_1 < t^*$ и такое положительное число ρ_1, что при $r_1 \leqslant t \leqslant t_0$ и $|\mu - \mu^*| < \rho_1$ точка (t, μ) принадлежит множеству T и выполнено неравенство

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < c_1\beta_1(|\mu - \mu^*|), \qquad (11)$$

аналогичное неравенству (7).

Из сказанного следует, что если точка (t^*, μ^*) принадлежит множеству T, то, каково бы ни было расположение точки t^* относительно t_0, всегда существуют такие положительные числа r и ρ, что при

$$|t - t^*| < r, \qquad |\mu - \mu^*| < \rho, \qquad (12)$$

точка (t, μ) принадлежит множеству T и имеет место неравенство

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < c\beta(|\mu - \mu^*|). \qquad (13)$$

Так как совокупность всех точек (t, μ), удовлетворяющих условию (12), составляет окрестность точки (t^*, μ^*), то T есть открытое множество.

Докажем теперь, что функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна в точке (t^*, μ^*). Для этого оценим разность $\varphi(t, \mu) - \varphi(t^*, \mu^*)$. Мы имеем:

$$|\varphi(t, \mu) - \varphi(t^*, \mu^*)| \leqslant |\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| + \\ + |\varphi(t, \mu^*) - \varphi(t^*, \mu^*)|.$$

Первое из слагаемых, стоящих в правой части, мало, когда мало число $|\mu - \mu^*|$ (см. (13)). Второе из слагаемых мало, когда малым является число $|t - t^*|$, в силу непрерывности функции $\varphi(t, \mu^*)$ переменного t. Таким образом, $\varphi(t, \mu)$ есть непрерывная функция пары переменных t, μ.

Итак, теорема 13 доказана.

Непрерывная зависимость решения от начальных значений

Теперь мы будем рассматривать нормальную систему уравнений:

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{14}$$

правые части которых определены и непрерывны вместе со своими частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$. Пусть

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{16}$$

— векторная запись системы (14).

Б) Каждой точке (τ, ξ) множества Γ соответствует непродолжаемое решение $\varphi(t, \tau, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями $t_0 = \tau$, $x_0 = \xi$, определенное на интервале $m_1(\tau, \xi) < t < m_2(\tau, \xi)$ (см. § 22, А)), который зависит от начальных значений τ, ξ. Множество S всех точек (t, τ, ξ) пространства переменных $t, \tau, \xi^1, \ldots, \xi^n$, для которых функция $\varphi(t, \tau, \xi)$ определена, описывается, очевидно, условиями: точка τ, ξ принадлежит множеству Γ, а число t удовлетворяет при этом неравенствам $m_1(\tau, \xi) < t < m_2(\tau, \xi)$.

Теорема 14. *Множество S всех точек (t, τ, ξ), на которых определена функция $\varphi(t, \tau, \xi)$, являющаяся непродолжаемым решением уравнения (16) с начальными значениями τ, ξ, есть открытое множество в пространстве переменных $t, \tau, \xi^1, \ldots, \xi^n$. Далее оказывается, что функция $\varphi(t, \tau, \xi)$ непрерывна по совокупности всех своих аргументов на множестве S.*

Конструкция, излагаемая в нижеследующем предложении В), делает эту теорему непосредственным следствием теоремы 13.

В) Пусть (τ, ξ) — произвольная точка множества Г. Вместо независимого переменного t, имеющегося в уравнении (16), введем новое независимое переменное s по формуле

$$t = \tau + s. \tag{17}$$

Вместо неизвестной векторной функции x, имеющейся в уравнении (16), введем новую неизвестную векторную функцию y по формуле

$$x = \xi + y. \tag{18}$$

В новых переменных уравнение (16) запишется следующим образом:

$$\frac{dy}{ds} = f(\tau + s, \xi + y). \tag{19}$$

Так как функция $f(t, x)$ переменных t, x определена на открытом множестве Г, то функция

$$g(s, y, \tau, \xi) = f(\tau + s, \xi + y) \tag{20}$$

переменных s, y, τ, ξ определена при условии, что точка $(\tau + s, \xi + y)$ принадлежит множеству Г. Это условие, как легко видеть, выделяет в пространстве $\tilde{R}$ переменных s, y, τ, ξ некоторое открытое множество $\tilde{\Gamma}$, и на этом множестве векторная функция (20) непрерывна, а ее компоненты имеют непрерывные частные производные по переменным $y^1, \ldots, y^n$. Будем считать, что величины τ, ξ являются параметрами в уравнении (19), и пусть

$$y = \psi(s, \tau, \xi) \tag{21}$$

— непродолжаемое решение уравнения (19) (см. § 22, А)) с фиксированными начальными значениями $s = 0$, $y = 0$, т. е. решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$\psi(0, \tau, \xi) = 0. \tag{22}$$

Переходя к старым переменным по формулам (17) и (18), мы получим функцию

$$x = \varphi(t, \tau, \xi) = \xi + \psi(t - \tau, \tau, \xi), \tag{23}$$

являющуюся, как показывает непосредственная проверка, решением уравнения (16), удовлетворяющим начальному условию

$$\varphi(\tau, \tau, \xi) = \xi.$$

Из того, что решение (21) непродолжаемо, следует, что решение (23) также непродолжаемо, так как если бы решение (23) можно было продолжить, то можно было бы продолжить и решение (21).

Доказательство теоремы 14. Предложение В) сводит изучение зависимости решения от начальных значений к изучению зависимости решения (при фиксированных начальных значениях) от параметров, входящих в правую часть уравнения. Это изучение было осуществлено в теореме 13. В силу этой теоремы, непродолжаемое решение $y=\psi(s, \tau, \xi)$ уравнения (19), содержащего в правой части параметры τ, ξ, взятое при фиксированных начальных значениях $s_0=0, y_0=0$, определено на некотором открытом множестве T в пространстве переменных s, τ, ξ и непрерывно на этом множестве по совокупности всех своих аргументов. Непродолжаемое решение $x=\varphi(t, \tau, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями τ, ξ выражается через решение $y=\psi(s, \tau, \xi)$ по формуле (23). Переход от аргументов s, τ, ξ функции ψ к аргументам t, τ, ξ функции φ осуществляется формулами

$$t=s+\tau, \qquad \tau=\tau, \qquad \xi=\xi. \tag{24}$$

Это преобразование пространства переменных s, τ, ξ в пространство переменных t, τ, ξ является аффинным и потому переводит открытое множество T, на котором определена функция ψ, в некоторое открытое множество S, на котором определена функция φ (см. § 32, пример 1). Таким образом, множество S всех точек (t, τ, ξ), на котором определена функция φ, является открытым в пространстве переменных t, τ, ξ. Непрерывность функции φ следует из непрерывности функции ψ, в силу формулы перехода (23). Таким образом, теорема 14 доказана.

Теоремы 13 и 14 могут быть объединены в одну:

Теорема 15. *Пусть $x=\varphi(t, \tau, \xi, \mu)$ — непродолжаемое решение уравнения* (3) *с начальными значениями τ, ξ. Тогда функция $\varphi(t, \tau, \xi, \mu)$ определена на некотором открытом множестве пространства переменных t, τ, ξ, μ и непрерывна на нем.*

Эта теорема доказывается так же, как теорема 14, — путем замены переменных (17), (18) и последующей ссылки на теорему 13.

Следствия теорем 13 и 14

Теоремы 13 и 14 представляют собой несколько необычно сформулированные интегральные теоремы непрерывности. Приведенные здесь формулировки интегральных теорем непрерывности (теоремы 13 и 14) являются новыми; они существенно отличаются от формулировок, имевшихся до сих пор в математической литературе. Нижеследующие предложения Г) и Д) являются прямыми следствиями теорем 13 и 14. Эти предложения по своим формулировкам ближе к обычным формулировкам интегральных теорем непрерывности. Следует, однако, отметить, что формулировки теорем 13 и 14 наиболее полно охватывают факты, относящиеся к непрерывной зависимости решений от параметров и начальных значений. Предложение Г) по существу было установлено в процессе доказательства

теоремы 13, но здесь оно выводится из самой теоремы 13, чтобы подчеркнуть полноту ее содержания.

Г) Если решение $\varphi(t, \mu)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 при $\mu = \mu^*$ определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, содержащем t_0 (это означает, что отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ содержится в интервале определения решения $\varphi(t, \mu^*)$), то существует такое положительное число ρ, что при $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$ непродолжаемое решение $\varphi(t, \mu)$ с начальными условиями t_0, x_0 также определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Далее, для всякого положительного ε найдется такое положительное $\delta < \rho$, что при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\mu - \mu^*| < \delta$ имеем $|\varphi(t, \mu) - \varphi(t, \mu^*)| < \varepsilon$.

При доказательстве этого предложения используем теорему 13. Так как множество T всех пар t, μ, на котором определена функция $\varphi(t, \mu)$, открыто, а точки (r_1, μ^*) и (r_2, μ^*) принадлежат ему, то существует настолько малое положительное число ρ, что при $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$ точки (r_1, μ) и (r_2, μ) принадлежат множеству T. Это значит, что интервал определения непродолжаемого решения $\varphi(t, \mu)$ содержит весь отрезок $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, т. е. решение $\varphi(t, \mu)$ определено на этом отрезке. Множество P всех точек (t, μ), для которых $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, $|\mu - \mu^*| \leqslant \rho$, замкнуто, ограничено и расположено в T. Так как P содержится в T, а функция $\varphi(t, \mu)$ непрерывна на T, то она равномерно непрерывна на P. Отсюда непосредственно вытекает правильность второй части предложения Г).

Д) Если решение $\varphi(t, \xi) = \varphi(t, t_0, \xi)$ уравнения (16) с начальными значениями t_0, ξ при $\xi = x_0$ определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$, содержащем t_0, то существует такое положительное число ρ, что при $|\xi - x_0| \leqslant \rho$ непродолжаемое решение $\varphi(t, \xi)$ также определено на отрезке $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$. Далее, для всякого положительного ε найдется такое положительное $\delta < \rho$, что при $r_1 \leqslant t \leqslant r_2$ $|\xi - x_0| < \delta$ имеем:

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, x_0)| < \varepsilon.$$

Предложение Д) выводится из теоремы 14 точно так же, как предложение Г) из теоремы 13.

§ 24. Дифференцируемость решения по начальным значениям и параметрам

В предыдущем параграфе была доказана непрерывность решения по начальным значениям и параметрам. Здесь будет установлено, что в некоторых предположениях решение дифференцируемо по начальным значениям и параметрам.

Так же как в предыдущем параграфе, сначала мы рассмотрим дифференцируемость решения по параметрам, а затем на основе полученных результатов при помощи конструкции, данной в предложении В) § 23, докажем дифференцируемость решения по начальным значениям.

Дифференцируемость по параметрам

Мы будем рассматривать такую же систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

как и в § 23; правые части ее определены и непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ в некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства $\tilde{R}$ переменных $t, x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$. Пусть

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \tag{2}$$

— векторная запись системы (1).

Доказательство дифференцируемости решений по параметрам $\mu^1, \ldots, \mu^l$ будет проведено в предположении, что правые части системы (1) непрерывно дифференцируемы по этим параметрам в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$.

Доказательству дифференцируемости мы предпошлем предложение А), называемое обычно *леммой Адамара*.

А) Пусть $g(t^1, \ldots, t^p, u^1, \ldots, u^q)$ — функция $p+q$ переменных, определенная в области Δ пространства этих переменных, выпуклой относительно переменных $u^1, \ldots, u^q$. Полагая

$$t = (t^1, \ldots, t^p), \qquad u = (u^1, \ldots, u^q),$$

мы сможем записать ее как функцию $g(t, u)$ двух векторов. Будем предполагать, что во всей области своего определения функция $g(t, u)$ и ее частные производные $\frac{\partial g(t, u)}{\partial u^j}$, $j = 1, \ldots, q$, непрерывны. Оказывается тогда, что для любой пары точек (t, u_1), (t, u_2) с одинаковой координатой t из области Δ имеет место соотношение

$$g(t, u_2) - g(t, u_1) = \sum_{j=1}^{q} h_j(t, u_1, u_2)(u_2^j - u_1^j), \tag{3}$$

где функции $h_j(t, u_1, u_2)$, $j = 1, \ldots, q$ определены и непрерывны для всех указанных значений аргументов t, u_1, u_2 (в частности, и при совпадении $u_1 = u_2$), причем $h_j(t, u, u) = \frac{\partial}{\partial u^j} g(t, u)$.

Для доказательства предложения А) положим:

$$w(s) = u_1 + s(u_2 - u_1), \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{4}$$

Мы имеем тогда

$$g(t, u_2) - g(t, u_1) = g(t, w(1)) - g(t, w(0)) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} g(t, w(s))\, ds.$$

Вычислим теперь производную $\frac{\partial}{\partial s} g(t, \boldsymbol{w}(s))$; мы имеем:

$$\frac{\partial}{\partial s} g(t, \boldsymbol{w}(s)) = \frac{\partial}{\partial s} g(t, w^1(s), \ldots, w^q(s)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial g(t, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} \frac{\partial w^j(s)}{\partial s}.$$

Так как, в силу (4), очевидно, имеем:

$$\frac{\partial w^j(s)}{\partial s} = u_2^j - u_1^j, \qquad j = 1, \ldots, q,$$

то, полагая еще

$$h_j(t, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) = \int_0^1 \frac{\partial g(t, \boldsymbol{w}(s))}{\partial w^j} \, ds,$$

мы получаем формулу (3). Так как, по предположению, функции $\frac{\partial g(t, u)}{\partial u^j}$ непрерывны, то функции $h_j(t, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)$ также непрерывны.

Таким образом, предложение А) доказано.

Теорема 16. *В силу теоремы* 13 *непродолжаемое решение* $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu}) = (\varphi^1(t, \boldsymbol{\mu}), \ldots, \varphi^n(t, \boldsymbol{\mu}))$ *уравнения* (2) *при фиксированных начальных значениях* $t_0, \boldsymbol{x}_0$ *определено на некотором открытом множестве* T *пространства переменных* $t, \mu^1, \ldots, \mu^l$ *и является непрерывной функцией всех своих аргументов. Оказывается, что если частные производные правых частей системы* (1) *по аргументам* $\mu^1, \ldots, \mu^l$ *определены и непрерывны в открытом множестве* $\tilde{\Gamma}$, *то частные производные*

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu^k}, \quad i = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, l,$$

определены и непрерывны на всем открытом множестве T. *Кроме того, смешанные частные производные*

$$\frac{\partial^2}{\partial t \, \partial \mu^k} \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}), \quad i = 1, \ldots, n; \; k = 1, \ldots, l,$$

определены, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования на всем множестве T.

Доказательство. Для нахождения производной $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$ мы вычислим разность $\varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_2) - \varphi^i(t, \boldsymbol{\mu}_1)$. Так как функция $\boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\mu})$ удовлетворяет уравнению (2), то вычисление этой разности естественно связано с вычислением разности

$$f^i(t, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{\mu}_2) - f^i(t, \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{\mu}_1).$$

Последнюю разность мы вычислим с помощью леммы Адамара, считая при этом, что

$$t=t,\ u=(x,\ \mu),\qquad g(t,\ u)=f^i(t,\ x,\ \mu).$$

Для того чтобы применить лемму Адамара к этому случаю, прежде всего подходящим образом выделим открытое множество Δ в пространстве переменных $(t,\ u)=(t,\ x,\ \mu)$, выпуклое по паре переменных x, μ. При этом мы будем иметь своей целью доказательство существования и непрерывности производных в окрестности произвольной точки $(t^*,\ \mu^*)$ множества T. Перейдем к построению открытого множества Δ.

Так как решение $\varphi(t,\ \mu^*)$ определено при $t=t^*$, то существует такой отрезок $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, содержащий числа t_0 и t^* внутри себя (т. е. $r_1<t_0<r_2$, $r_1<t^*<r_2$), что решение $\varphi(t,\ \mu^*)$ определено на этом отрезке. Когда t пробегает отрезок $r_1\leqslant t\leqslant r_2$, точка $(t,\ \varphi(t,\ \mu^*),\mu^*)$ описывает в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ непрерывную кривую. Пусть a и b — два таких положительных числа, что множество всех точек $(t,\ x,\ \mu)$, удовлетворяющих условиям

$$r_1\leqslant t\leqslant r_2,\qquad |x-\varphi(t,\ \mu^*)|\leqslant a,\qquad |\mu-\mu^*|\leqslant b, \tag{5}$$

целиком содержится в открытом множестве $\tilde{\Gamma}$. В силу предложения Г) § 23 существует такое положительное число ρ, что $2\rho<b$ и при $|\mu-\mu^*|<2\rho$ решение $\varphi(t,\ \mu)$ определено на всем отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ и на том же отрезке выполнено неравенство $|\varphi(t,\mu)-\varphi(t,\mu^*)|<a$. Открытое множество Δ определим теперь как совокупность всех точек $(t,\ x,\ \mu)$, удовлетворяющих условиям

$$r_1<t<r_2,\qquad |x-\varphi(t,\mu^*)|<a,\qquad |\mu-\mu^*|<2\rho.$$

Очевидно, что открытое множество Δ выпукло по паре переменных (x,μ).

Для вычисления производной $\frac{\partial\varphi^i}{\partial\mu^k}$ обозначим через e_k единичный вектор l-мерного пространства, направленный по k-й оси. Пусть μ_1 — некоторый вектор, удовлетворяющий условию $|\mu_1-\mu^*|<\rho$, и τ — число, удовлетворяющее условию $|\tau|<\rho$. Положим $\mu_2=\mu_1+\tau e_k$. Тогда оба вектора μ_1 и μ_2 удовлетворяют условию

$$|\mu_1-\mu^*|<2\rho,\qquad |\mu_2-\mu^*|<2\rho.$$

Поэтому на всем отрезке $r_1\leqslant t\leqslant r_2$ имеют место неравенства

$$|\varphi(t,\ \mu_1)-\varphi(t,\ \mu^*)|<a,\qquad |\varphi(t,\ \mu_2)-\varphi(t,\ \mu^*)|<a.$$

Таким образом, когда t пробегает интервал $r_1<t<r_2$, точки $(t,\varphi(t,\ \mu_1),\ \mu_1)$ и $(t,\ \varphi(t,\ \mu_2),\ \mu_2)$ описывают кривые, целиком расположенные в открытом множестве Δ. Применяя лемму Адамара к разности

$$f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_2),\ \mu_2)-f^i(t,\ \varphi(t,\ \mu_1),\ \mu_1),$$

мы получим:

$$f^i(t, \varphi(t, \mu_2), \mu_2) - f^i(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1) = \\ = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \mu_1, \tau)\,(\varphi^j(t, \mu_2) - \varphi^j(t, \mu_1)) + \\ + \sum_{k=1}^{l} h_{n+k}^i(t, \mu_1, \tau)\,(\mu_2^k - \mu_1^k). \tag{6}$$

Здесь функции h_j^i, $j = 1, \ldots, n + l$, непрерывно зависят в силу леммы Адамара от величин t, $\varphi(t, \mu_1)$, μ_1, $\varphi(t, \mu_2)$, μ_2 и, следовательно, в конечном итоге, от величин t, μ_1, τ (так как $\mu_2 = \mu_1 + \tau e_k$, а величины $\varphi(t, \mu_1)$ и $\varphi(t, \mu_2)$ непрерывно зависят от t, μ_1 и t, μ_2; см. теорему 13).

Для вычисления производной $\frac{\partial \varphi^i}{\partial \mu^k}$ нужно, очевидно, составить предварительное частное

$$\psi^i(t, \mu_1, \tau) = \frac{\varphi^i(t, \mu_2) - \varphi^i(t, \mu_1)}{\tau}, \quad \tau \neq 0,$$

и перейти в нем к пределу при $\tau \to 0$.

Подставляя в систему (1) ее решения $x = \varphi(t, \mu_1)$ и $x = \varphi(t, \mu_2)$ и вычитая первое соотношение из второго, мы получаем, в силу (6):

$$\frac{\partial \psi^i(t, \mu_1, \tau)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \mu_1, \tau)\,\psi^j(t, \mu_1, \tau) + \\ + h_{n+k}^i(t, \mu_1, \tau), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Эти соотношения верны при

$$r_1 < t < r_2, \quad |\mu_1 - \mu^*| < \rho, \quad |\tau| < \rho, \quad \tau \neq 0.$$

Таким образом, функции

$$\psi^1(t, \mu_1, \tau), \ldots, \psi^n(t, \mu_1, \tau) \tag{8}$$

при $\tau \neq 0$ удовлетворяют линейной системе дифференциальных уравнений

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} h_j^i(t, \mu_1, \tau)\,y^j + h_{n+k}^i(t, \mu_1, \tau) \tag{9}$$

с начальными условиями

$$\psi^i(t_0, \mu_1, \tau) = \frac{\varphi^i(t_0, \mu_2) - \varphi^i(t_0, \mu_1)}{\tau} = \frac{x_0^i - x_0^i}{\tau} = 0.$$

В то время как функции $\psi^i(t, \mu_1, \tau)$, $i = 1, \ldots, n$, определены лишь при $\tau \neq 0$, сама система уравнений (9) определена и при $\tau = 0$,

причем правые части ее заданы и непрерывны на открытом множестве, которое описывается неравенствами

$$r_1 < t < r_2, \qquad |\mu_1 - \mu^*| < \rho, \qquad |\tau| < \rho. \tag{10}$$

Так как система (9) линейна, то в силу теорем 3 и 13 эта система имеет решение

$$y^1 = \chi^1(t, \mu_1, \tau), \ \ldots, \qquad y^n = \chi^n(t, \mu_1, \tau) \tag{11}$$

с начальными значениями t_0, 0, определенное и непрерывное на всем открытом множестве (10). Согласно теореме единственности (теорема 2), на всем открытом множестве (10) при $\tau \neq 0$ справедливы равенства

$$\psi^i(t, \mu_1, \tau) = \chi^i(t, \mu_1, \tau), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Но правые части равенств (11) определены и непрерывны на всем открытом множестве (10), включая и значения $\tau = 0$. Поэтому, переходя в равенствах (11) к пределу при $\tau \to 0$, мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k} = \lim_{\tau \to 0} \psi^i(t, \mu_1, \tau) = \lim_{\tau \to 0} \chi^i(t, \mu_1, \tau) = \chi^i(t, \mu_1, 0). \tag{12}$$

Так как правая часть этого равенства определена и непрерывна на открытом множестве

$$r_1 < t < r_2, \qquad |\mu_1 - \mu^*| < \rho, \tag{13}$$

то на всем этом открытом множестве частная производная $\dfrac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k}$ определена и непрерывна. В частности, она определена и непрерывна в некоторой окрестности точки (t^*, μ^*).

Так как, далее, функции $y^i = \chi^i(t, \mu_1, 0)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (9) при $\tau = 0$, то этой же системе уравнений удовлетворяют и функции

$$y^i = \frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial \mu_1^k}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, все эти функции на открытом множестве (13) обладают непрерывными частными производными по t. Иначе говоря, на открытом множестве (13) существует и непрерывна смешанная производная

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial \mu_1^k} \varphi^i(t, \mu_1)\right]. \tag{14}$$

Подставляя в систему (1) ее решение $x^i = \varphi^i(t, \mu_1)$, $i = 1, \ldots, n$, заведомо определенное на открытом множестве (13), мы получаем:

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial t} = f^i(t, \varphi(t, \mu_1), \mu_1), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{15}$$

Так как функции $\varphi^j(t, \mu_1)$, $j=1, \ldots, n$, в силу доказанного имеют непрерывные частные производные по μ_1^k на всем открытом множестве (13), а правые части системы (1) имеют непрерывные производные по переменным $x^1, \ldots, x^n, \mu^1, \ldots, \mu^l$, то правые части соотношений (15) имеют непрерывные частные производные по μ_1^k на всем открытом множестве (13). Таким образом, и левые части соотношений (15) имеют непрерывные частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \mu_1^k}\left(\frac{\partial \varphi^i(t, \mu_1)}{\partial t}\right) \tag{16}$$

на открытом множестве (13).

Итак, обе частные производные (14) и (16) непрерывны на открытом множестве (13), а потому в силу известной теоремы анализа они совпадают между собой на этом множестве.

Так как точка (t^*, μ^*) принадлежит открытому множеству (13), то доказательство теоремы 16 этим полностью завершено.

Дифференцируемость по начальным значениям

Мы будем рассматривать ту же самую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \ldots, x^n), \qquad i=1, \ldots, n, \tag{17}$$

что и в § 23 (см. § 23, формула (14)), правые части которой определены и непрерывны вместе с их частными производными $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t, x^1, \ldots, x^n$. Пусть

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \tag{18}$$

— векторная запись системы (17).

В отличие от § 23, мы будем считать переменным лишь начальное значение ξ неизвестной функции $\boldsymbol{x}$, а начальное значение τ переменного t зафиксируем, положив $\tau = t_0$. Дифференцируемость решения по τ в дальнейшем не используется, а для того, чтобы она имела место, система (17) должна удовлетворять дополнительным условиям (непрерывная дифференцируемость правых частей по t).

Теорема 17. *Пусть*

$$\boldsymbol{\varphi}(t, t_0, \xi) = \boldsymbol{\varphi}(t, \xi) = (\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi))$$

— непродолжаемое решение уравнения (18) *с начальными значениями* t_0, ξ. *Из теоремы* 14 *непосредственно следует, что функция* $\boldsymbol{\varphi}(t, \xi)$ *определена и непрерывна на некотором открытом множестве* S' *в пространстве переменных* $t, \xi^1, \ldots, \xi^n$.

Оказывается, что на всем множестве S' существуют и непрерывны частные производные

$$\frac{\partial\varphi^i(t, \xi)}{\partial\xi^j}; \qquad i, j=1, \ldots, n;$$

кроме того, на этом множестве непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad i, j=1, \ldots, n.$$

Доказательство. Конструкция, данная в предложении В) § 23, сводит доказательство к теореме 16. Так как правая часть уравнения (19) § 23 имеет непрерывные частные производные по всем переменным $y^1, \ldots, y^n, \xi^1, \ldots, \xi^n$, то, в силу теоремы 16, частные производные

$$\frac{\partial\psi^i(t, t_0, \xi)}{\partial\xi^j}, \qquad i, j=1, \ldots, n,$$

функций ψ^i (см. § 23, В)) определены и непрерывны на всем открытом множестве S' и на нем же непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\psi^i(t, t_0, \xi)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad i, j=1, \ldots, n.$$

Далее, так как решение $\varphi(t, \xi)=\varphi(t, t_0, \xi)$ определяется через решение $\psi(t, t_0, \xi)$ по формуле (23) § 23 при $\tau=t_0$, то из найденных свойств функции $\psi^i(t, t_0, \xi)$ вытекают соответствующие свойства функций $\varphi^i(t, \xi)$, указанные в формулировке теоремы 17.

Теоремы 16 и 17 могут быть объединены в одну:

Теорема 18. *Предположим, что правые части системы* (1) *на всем открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ имеют непрерывные производные по параметрам $\mu^1, \ldots, \mu^l$. Пусть*

$$\varphi(t, \xi, \mu)=(\varphi^1(t, \xi, \mu), \ldots, \varphi^n(t, \xi, \mu))$$

— непродолжаемое решение уравнения (2) *с начальными значениями t_0, ξ. Тогда функция $\varphi(t, \xi, \mu)$ определена на некотором открытом множестве $\tilde{\Gamma}$ пространства переменных t, ξ, μ и непрерывна на нем* (см. теорему 15). *Оказывается, что частные производные*

$$\frac{\partial\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial\xi^j}, \qquad \frac{\partial\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial\mu^k} \qquad i, j=1, \ldots, n;\ k=1, \ldots, l,$$

определены и непрерывны на всем открытом множестве $\tilde{\Gamma}$. Кроме того, смешанные частные производные

$$\frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial t\,\partial\xi^j}, \qquad \frac{\partial^2\varphi^i(t, \xi, \mu)}{\partial t\,\partial\mu^k}$$

определены, непрерывны и не зависят от порядка дифференцирования на всем множестве $\tilde{\Gamma}$.

Эта теорема доказывается так же, как теорема 17, — путем замены переменных (17), (18) § 23 (при $\tau = t_0$) и последующей ссылки на теорему 16.

Уравнения в вариациях

Иногда бывает нужно получить некоторые сведения о производных решения $\varphi(t, \mu)$ уравнения (2) по параметрам μ^k при фиксированном значении $\mu = \mu^*$. Оказывается, что для этого нет надобности искать решение $\varphi(t, \mu)$ уравнения (2) при переменном μ и затем дифференцировать его по μ^k, а можно получить эти сведения из рассмотрения некоторой системы линейных дифференциальных уравнений. Аналогично обстоит дело и с изучением производных решения $\varphi(t, \xi)$ уравнения (18) по начальным значениям ξ^j при фиксированном $\xi = x_0$.

Б) Пусть $\varphi(t, \mu) = (\varphi^1(t, \mu), \ldots, \varphi^n(t, \mu))$ — непродолжаемое решение уравнения (2) с начальными значениями t_0, x_0, и пусть $m_1 < t < m_2$ — интервал его определения при фиксированном значении $\mu = \mu^*$. Если частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial \mu^k}$ правых частей системы (1) непрерывны в области $\tilde{\Gamma}$, то, в силу теоремы 16, частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \varphi^i(t, \mu^*) = \psi_k^i(t),$$

вычисленные при $\mu = \mu^*$, определены и непрерывны как функции t на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Положим:

$$f_j^i(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial x^j}; \qquad f_j^i(t) = f_j^i(t, \varphi(t, \mu^*), \mu^*),$$

$$g_k^i(t, x, \mu) = \frac{\partial f^i(t, x, \mu)}{\partial \mu^k}; \qquad g_k^i(t) = g_k^i(t, \varphi(t, \mu^*), \mu^*).$$

В силу теоремы 13, функции $f_j^i(t)$ и $g_k^i(t)$ переменного t определены и непрерывны на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Система линейных уравнений

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i(t) y^j + g_k^i(t), \tag{19}$$

определенная на интервале $m_1 < t < m_2$, называется системой уравнений в вариациях (по параметрам) для системы (1) при $\mu = \mu^*$. Оказывается, что система функций

$$y^1 = \psi_k^1(t), \ldots, y^n = \psi_k^n(t) \tag{20}$$

является решением системы уравнений (19) при начальных условиях

$$\psi_k^i(t_0) = 0. \tag{21}$$

Для доказательства предложения Б) подставим в систему (1) ее решение $x = \varphi(t, \mu)$. Мы получим тождество

$$\frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial t} = f^i(t, \varphi(t, \mu), \mu). \tag{22}$$

В силу теоремы 16 обе части этого тождества имеют производную по μ^k при $\mu = \mu^*$, определенную на всем интервале $m_1 < t < m_2$, причем

$$\frac{\partial}{\partial \mu^k} \frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varphi^i(t, \mu)}{\partial \mu^k}.$$

Дифференцируя тождество (22) по μ^k при $\mu = \mu^*$, мы, в силу сказанного, видим, что функции (20) составляют решения системы (19). Для получения начального условия (21) достаточно продифференцировать по μ^k начальные условия

$$\varphi^i(t_0, \mu) = x_0^i.$$

Таким образом, предложение Б) доказано.

В) Пусть $\varphi(t, \xi) = (\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi))$ — непродолжаемое решение уравнения (18) с начальными значениями t_0, ξ и $m_1 < t < m_2$ — интервал его определения при фиксированном значении $\xi = x_0$. В силу теоремы 17 частные производные

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} \varphi^i(t, x_0) = \psi_j^i(t),$$

вычисленные при $\xi = x_0$, определены и непрерывны как функции t на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Положим

$$f_j^i(t, x) = \frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}, \qquad f_j^i(t) = f_j^i(t, \varphi(t, x_0)).$$

Функции $f_j^i(t)$ переменного t определены на всем интервале $m_1 < t < m_2$. Система линейных уравнений

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} f_j^i(t) y^j, \tag{23}$$

определенная на интервале $m_1 < t < m_2$, называется **системой уравнений в вариациях** (по начальным значениям) для системы (17) при начальных значениях t_0, x_0. Оказывается, что система функций

$$y^1 = \psi_j^1(t), \ \ldots, \quad y^n = \psi_j^n(t) \tag{24}$$

является решением системы уравнений (23) при начальных условиях

$$\psi_j^i(t_0) = \delta_j^i, \tag{25}$$

где $\delta_j^i = 0$ при $i \neq j$, а $\delta_i^i = 1$.

Тот факт, что система функций (24) составляет решение линейной системы (23), доказывается точно так же, как в предложении Б), — путем подстановки в систему (17) решения $x = \varphi(t, \xi)$ и последующего дифференцирования полученного тождества по ξ^j. Начальные условия (25) получаются из начальных условий

$$\varphi^i(t_0, \xi) = \xi^i$$

дифференцированием их по ξ^j.

Примеры

1. Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n) = f^i(x), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{26}$$

— автономная система дифференциальных уравнений и

$$\dot{x} = f(x) \tag{27}$$

— ее векторная запись. Пусть, далее, $a = (a^1, \ldots, a^n)$ — положение равновесия этой системы (см. § 15), так что $f^i(a) = 0$ и система функций $x^1 = a^1, \ldots, x^n = a^n$ составляет решение системы (26). Решение уравнения (27) с начальными значениями 0, ξ обозначим через

$$\varphi(t, \xi) = (\varphi^1(t, \xi), \ldots, \varphi^n(t, \xi)).$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial}{\partial \xi^j} \varphi^i(t, a) = \psi_j^i(t) \tag{28}$$

от функций $\varphi^i(t, \xi)$, вычисленные при $\xi = a$, пользуясь предложением В).

Функции

$$f_j^i(t) = \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} = a_j^i$$

являются в этом случае константами. Таким образом, система уравнений в вариациях (23) в данном случае есть линейная однородная система с постоянными коэффициентами

$$\dot{y}^i = \sum_{j=1}^{n} a_j^i y^j, \tag{29}$$

и производные (28), являющиеся решениями системы (29), легко могут быть найдены в то время как решение $\varphi(t, \xi)$ при переменном ξ найти, вообще говоря, трудно.

Система уравнений в вариациях (29) играет важную роль для изучения поведения решений уравнения (27) вблизи положения равновесия a, как это мы увидим в следующей главе. Там, однако, система (29) появляется не как система уравнений в вариациях, а как линеаризация системы (26) вблизи положения равновесия a. Линеаризация системы (26) осуществляется следующим образом: вместо неизвестных функций $x^1, \ldots, x^n$ вводятся новые неизвестные функции

$$\delta x^1, \ldots, \delta x^n$$

по формулам

$$x^i = a^i + \delta x^i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Производя в системе (26) замену переменных (30) и разлагая правые части в ряды Тейлора по новым неизвестным функциям $\delta x^1, \ldots, \delta x^n$, мы получим:

$$\frac{d}{dt}\delta x^i = f^i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}\delta x^j + \ldots = \sum_{j=1}^{n} a^i_j \delta x^j + \ldots, \tag{31}$$

где не выписаны члены второго порядка малости относительно величины δx^i.

Линеаризуя систему (31), т. е. сохраняя в ней лишь линейные члены, мы получим систему уравнений, совпадающую с системой (29).

§ 25. Первые интегралы

Здесь будет дано понятие о первых интегралах и решена краевая задача для линейных уравнений в частных производных.

Первые интегралы

Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

— нормальная автономная система уравнений, правые части которой вместе с их частными производными определены и непрерывны на некотором открытом множестве Δ пространства переменных $x^1, \ldots, x^n$, и пусть

$$\dot{x} = f(x) \tag{2}$$

— векторная запись этой системы.

А) Функция

$$u(x^1, \ldots, x^n) = u(x),$$

определенная и непрерывная вместе со своими частными производными на некотором открытом множестве G, содержащемся в Δ, называется *первым интегралом* системы (1), если при подстановке в

нее произвольного решения $x=\varphi(t)$ уравнения (2), траектория которого целиком расположена в множестве G, мы получаем постоянную относительно t величину, т. е. функция $u(\varphi(t))$ зависит только от выбора решения $\varphi(t)$, но не от переменной t. Оказывается, что любой первый интеграл $u(x)$ системы (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x^i} f^i(x)=0 \tag{3}$$

и что, обратно, всякая функция $u(x)$, удовлетворяющая условию (3), является первым интегралом системы (1).

Докажем, что первый интеграл $u(x)$ системы (1) удовлетворяет условию (3). Пусть ξ — произвольная точка множества G и $x=\varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ. Мы имеем:

$$0=\frac{d}{dt} u(\varphi(t, \xi))\Big|_{t=0}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi^i} f^i(\xi);$$

так как ξ — произвольная точка из G, то соотношение (3) выполнено на множестве G.

Допустим теперь, что для функции $u(x)$ выполнено соотношение (3), и пусть $x=\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2), траектория которого лежит в G. Подставляя $x=\varphi(t)$ в функцию $u(x)$, мы получим некоторую функцию

$$v(t)=u(\varphi(t)).$$

Дифференцируя эту функцию по t, получаем:

$$\frac{dv(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(\varphi(t))}{\partial x^i} f^i(\varphi(t))=0.$$

Таким образом, $u(\varphi(t))$ не зависит от t.

В дальнейшем изучение первых интегралов системы (1) будет проводиться чисто локально в некоторой окрестности точки a открытого множества Δ, не являющейся положением равновесия системы (1):

$$f(a) \neq 0. \tag{4}$$

Б) Первые интегралы

$$u^1(x), \ldots, u^k(x)$$

системы (1), определенные в некоторой окрестности точки a (см. (4)), называются *независимыми в точке* a или просто независимыми, если функциональная матрица

$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i=1, \ldots, k; \qquad j=1, \ldots, n,$$

имеет ранг k. Оказывается, что в некоторой окрестности точки a (см. (4)) существуют $n-1$ независимых первых интегралов системы уравнений (1).

Докажем это. Так как вектор $f(a)$ отличен от нуля, то отлична от нуля хотя бы одна из его компонент. Будем считать, что

$$f^n(a) \neq 0.$$

Пусть $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, a^n)$ — точка, близкая к точке a, и $x = \varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ. В координатной форме решение это можно записать в виде:

$$x^i = \varphi^i(t, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Будем рассматривать эту систему соотношений как систему уравнений относительно неизвестных

$$\xi^1, \ldots, \xi^{n-1}, t. \tag{6}$$

При $x^i = a^i$, $i = 1, \ldots, n$, эта система уравнений имеет очевидное решение $\xi^1 = a^1, \ldots, \xi^{n-1} = a^{n-1}$, $t = 0$, и функциональный определитель системы (5) отличен от нуля в этой точке.

В самом деле,

$$\varphi^i(0, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) = \xi^i, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$
$$\varphi^n(0, \xi^1, \ldots, \xi^{n-1}) = a^n,$$

и потому

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi^i(0, a^1, \ldots, a^{n-1})}{\partial \xi^j} = \delta^i_j, \qquad i = 1, \ldots, n; \qquad j = 1, \ldots, n-1; \\ &\frac{\partial}{\partial t}\varphi^n(0, a^1, \ldots, a^{n-1}) = f^n(a) \neq 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Отсюда видно, что интересующий нас функциональный определитель отличен от нуля. Таким образом, существует такая окрестность G точки a, что при x, принадлежащих G, система уравнений (5) разрешима относительно неизвестных (6) (см. § 33) и решение записывается в виде:

$$\xi^1 = u^1(x), \ldots, \xi^{n-1} = u^{n-1}(x), \quad t = v(x). \tag{8}$$

Покажем, что функции

$$u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x), \tag{9}$$

входящие в эти соотношения, являются первыми интегралами системы (1), и притом независимыми в точке a. Функциональная матрица системы (5) найдена (см. (7)); из ее вида легко следует, что функциональная матрица

$$\left(\frac{\partial u^i(x)}{\partial x^j}\right), \qquad i, j = 1, \ldots, n-1,$$

является единичной, и потому функции (9) независимы. Покажем, что они являются первыми интегралами системы (1). Для этого достаточно доказать, что при подстановке в функции (9) любого решения $x=\varphi(t)$ уравнения (2) они превращаются в величины, не зависящие от t. Так как система (8) является обращением системы (5), то функции (9) удовлетворяют тождествам

$$u^i(\varphi(t, \xi))=\xi^i, \qquad i=1, \ldots, n-1 \tag{10}$$

(см. § 33, пример 1). Таким образом, при подстановке в функции (9) решения $x=\varphi(t, \xi)$ мы получаем величины, не зависящие от t.

Пусть теперь $x=\varphi(t)$ — произвольное решение уравнения (2), проходящее в окрестности G. Пусть t_0, x_0 — его начальные значения, причем x_0 принадлежит G. Так как система (5) разрешима при $x=x_0$, то существует решение $x=\varphi(t, \xi_0)$, проходящее через точку x_0, и потому решение $\varphi(t)$ может быть записано в виде:

$$\varphi(t)=\varphi(t+c, \xi_0),$$

где c — константа (см. § 15, Б)). Таким образом, при подстановке $x=\varphi(t)$ в функцию $u^i(x)$ получаем, в силу (10):

$$u^i(\varphi(t))=u^i(\varphi(t+c, \xi_0))=\xi_0^i, \qquad i=1, \ldots, n-1.$$

Итак, предложение Б) доказано.

В) Пусть

$$u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x) \tag{11}$$

— независимые в точке a первые интегралы системы уравнений (1), причем

$$u^i(a)=b^i, \ i=1, \ldots, n-1; \ b=(b^1, \ldots, b^{n-1}),$$

и пусть $w(x)$ — некоторый первый интеграл системы (1), определенный в окрестности точки a. Существует тогда такая функция $W(y^1, \ldots, y^{n-1})$, определенная на некоторой окрестности точки b пространства переменных $y^1, \ldots, y^{n-1}$, что имеет место тождество

$$w(x)=W(u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x)) \tag{12}$$

на некоторой окрестности точки a.

Докажем это. В силу А), первые интегралы $u^1(x), \ldots, u^{n-1}(x)$, $w(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u^j(x)}{\partial x^i} f^i(x)=0, \qquad j=1, \ldots, n-1;$$

$$\sum \frac{\partial w(x)}{\partial x^i} f^i(x)=0.$$

Таким образом, эти первые интегралы зависимы (см. (4)). В то же время первые интегралы (11) независимы. Отсюда, в силу известной

теоремы анализа (см. § 33, пример 2), следует существование функции W, для которой выполнено соотношение (12).

Если нам известны некоторые первые интегралы системы (1), то тем самым решение системы (1) облегчается. Точно это обстоятельство формулируется в нижеследующем предложении:

Г) Пусть

$$u^{k+1}(x), \ldots, u^n(x) \tag{13}$$

— система из $n-k$ независимых в точке a (см. Б)) первых интегралов автономной системы уравнений (1). Пользуясь функциями (13), можно понизить порядок системы уравнений (1) на $n-k$ единиц, т. е. заменить ее автономной системой порядка k; в частности, когда имеется максимальное число $n-1$ независимых первых интегралов, порядок автономной системы (1) можно свести до первого и, следовательно (см. § 2, пример 1), решить ее в квадратурах.

Докажем предложение Г). Так как первые интегралы (13) независимы, то в функциональной матрице

$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i=k+1, \ldots, n;\ j=1, \ldots, n,$$

имеется квадратная матрица порядка $n-k$ с отличным от нуля детерминантом. Будем считать для определенности, что отличен от нуля детерминант матрицы

$$\left(\frac{\partial u^i(a)}{\partial x^j}\right), \qquad i,\ j=k+1, \ldots, n.$$

Пользуясь этим, введем в окрестности точки a новые координаты

$$y^1, \ldots, y^n \tag{14}$$

вместо прежних

$$x^1, \ldots, x^n,$$

положив

$$y^1=x^1, \ldots, y^k=x^k;\quad y^{k+1}=u^{k+1}(x), \ldots, y^n=u^n(x). \tag{15}$$

Этими формулами действительно вводятся новые координаты $y^1, \ldots, y^n$, так как функциональный определитель системы соотношений (15) отличен от нуля в окрестности точки a (см. § 33). В новой системе переменных (14) система (1) примет вид:

$$\dot{y}^i=g^i(y^1, \ldots, y^n), \qquad i=1, \ldots, n. \tag{16}$$

Но так как каждая функция (13) удовлетворяет условию (3), то мы будем иметь при $i=k+1, \ldots, n$:

$$\dot{y}^i=\frac{d}{dt}u^i(x^1, \ldots, x^n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u^i(x)}{\partial x^j}f^j(x)=0.$$