

Таким образом,

$$g^{k+1}(y) = 0, \dots, g^n(y) = 0.$$

Ввиду этого система (16) фактически оказывается автономной системой порядка k .

Линейное уравнение в частных производных первого порядка

Соотношение (3) можно рассматривать как *уравнение в частных производных* относительно неизвестной функции $u(x)$ переменных x^1, \dots, x^n . В предложениях Б) и В) установлено, что при $f(a) \neq 0$ в окрестности точки a существуют $n - 1$ независимых решений этого уравнения и что, имея $n - 1$ независимых решений его, можно получить всякое другое при помощи формулы (12). При этом ясно, что всякая функция, задаваемая формулой (12), является решением уравнения (3). В этом смысле можно считать, что уравнение (3) решено именно, показано, что, умея решать систему (1), мы тем самым умеем решать и уравнение (3). Можно, однако, подойти к решению уравнения (3) с другой точки зрения, а именно можно поставить и решить *краевую задачу* для уравнения (3) и даже для уравнения, более общего чем (3).

Д) Пусть

$$\sum_{i=1}^n f^i(x) \frac{\partial u}{\partial x^i} = F(x, u) \quad (17)$$

— уравнение в частных производных относительно неизвестной функции $u(x)$, где $F(x, u)$ — некоторая заданная функция, имеющая непрерывные производные первого порядка по всем своим аргументам. Пусть, далее,

$$x = \xi(t^1, \dots, t^{n-1}) \quad (18)$$

— заданная в векторной форме параметрическая запись некоторой поверхности размерности $n - 1$, проходящей через точку a при $t^1 = \dots = t^{n-1} = 0$, так что

$$\xi(0, \dots, 0) = a.$$

Мы будем предполагать, что поверхность (18) дифференцируема и в точке a не касается вектора $f(a)$, т. е. векторы

$$\frac{\partial \xi}{\partial t^1}(0, \dots, 0), \dots, \frac{\partial \xi}{\partial t^{n-1}}(0, \dots, 0), f(a) \quad (19)$$

линейно независимы. Пусть, наконец,

$$u_0(t^1, \dots, t^{n-1}) \quad (20)$$

— некоторая функция, заданная на поверхности (18). Оказывается, что в окрестности точки a существует, и притом единственное, решение $u(x)$ уравнения (17), совпадающее на поверхности (18) с заданной функцией (20), так что

$$u(\xi(t^1, \dots, t^{n-1})) = u_0(t^1, \dots, t^{n-1}).$$

Для нахождения решения $u(x)$ используются траектории системы (1), начинающиеся на поверхности (18). Эти траектории называются *характеристиками* уравнения (17).

Докажем предложение Д). Для этого введем в окрестности точки a фазового пространства системы (1) новые координаты вместо координат x^1, \dots, x^n . Пусть $x = \varphi(t, t^1, \dots, t^{n-1})$ — решение уравнения (2), начинающееся в точке $\xi(t^1, \dots, t^{n-1})$ поверхности (18), т. е. решение с начальными значениями $0, \xi(t^1, \dots, t^{n-1})$.

Мы имеем тогда систему соотношений

$$x^i = \varphi^i(t, t^1, \dots, t^{n-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (21)$$

правые части которых имеют непрерывные частные производные по переменным t, t^1, \dots, t^{n-1} (см. теорему 17). Если считать в ней неизвестными величинами переменные

$$t, t^1, \dots, t^{n-1}, \quad (22)$$

то система эта при $x = a$ имеет очевидное решение

$$t = t^1 = \dots = t^{n-1} = 0,$$

и функциональный определитель ее не обращается в нуль в этой точке, как это следует из линейной независимости векторов (19).

В самом деле, $\varphi(0, t^1, \dots, t^{n-1}) = \xi(t^1, \dots, t^{n-1})$, и потому частная производная $\frac{\partial}{\partial t^k} \varphi(0, \dots, 0)$ равна $\frac{\partial}{\partial t^k} \xi(0, \dots, 0)$; далее, $\frac{\partial}{\partial t} \varphi(0, \dots, 0) = f(a)$. Таким образом, система соотношений (21) дает возможность ввести в некоторой окрестности точки a вместо координат x^1, \dots, x^n новые координаты (22) (см. § 33). В этих новых координатах уравнение (17) записывается особенно просто, и легко может быть решена поставленная в предложении Д) краевая задача. Пусть $v(x)$ — некоторая функция, определенная в окрестности точки a . Подставим в ней вместо переменных x^1, \dots, x^n переменные (22) по формулам (21); тогда мы получим функцию

$$v(t, t^1, \dots, t^{n-1}) = v(\varphi(t, t^1, \dots, t^{n-1})).$$

Мы имеем:

$$\frac{\partial v(t, t^1, \dots, t^{n-1})}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x^i} f^i(x),$$

где $x = \varphi(t, t^1, \dots, t^{n-1})$. Таким образом, в переменных (22) уравнение (17) получает вид:

$$\frac{\partial v(t, t^1, \dots, t^{n-1})}{\partial t} = F(\varphi(t, t^1, \dots, t^{n-1}), v(t, t^1, \dots, t^{n-1})). \quad (23)$$

Так как поверхность (18) в координатах (22) задается уравнением $t = 0$, то нам следует найти решение уравнения (23), обращающееся в заданную функцию $u_0(t^1, \dots, t^{n-1})$ при $t = 0$. Для нахождения такого решения следует решить уравнение (23), считая его обыкновенным дифференциальным уравнением с независимым переменным t , а переменные t^1, \dots, t^{n-1} — параметрами. При этом следует искать решения с начальными значениями

$$0, u_0(t^1, \dots, t^{n-1}).$$

Получающаяся функция $v(t, t^1, \dots, t^{n-1})$, в силу теоремы 18, имеет непрерывные производные по всем переменным.

Этим краевая задача, поставленная в Д), решена.

Замечание. Пусть

$$\dot{x}^i = f^i(t, x^1, \dots, x^n) \quad (24)$$

— неавтономная система дифференциальных уравнений. Для того чтобы ввести понятие первого интеграла этой системы, преобразуем ее в автономную систему, введя дополнительную неизвестную функцию

$$x^{n+1} = t.$$

Тогда система (24), дополненная уравнением

$$\dot{x}^{n+1} = 1,$$

будет автономной; ее первые интегралы считают первыми интегралами системы (24).

Пример

Пусть

$$H = H(x^1, \dots, x^n; y^1, \dots, y^n) = H(x, y) \quad (25)$$

— функция двух систем переменных. Система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}^i = \frac{\partial}{\partial y^i} H(x, y), \quad \dot{y}^i = -\frac{\partial}{\partial x^i} H(x, y), \quad i = 1, \dots, n, \quad (26)$$

называется *гамильтоновой системой*, а функция $H(x, y)$ — *гамильтоновой функцией* этой системы. Непосредственно проверяется, что функция (25) является первым интегралом системы (26).

ГЛАВА ПЯТАЯ

УСТОЙЧИВОСТЬ

Работа очень многих механических, электрических и другого типа устройств (машин, приборов и т. п.) описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет всегда бесконечное множество решений, и для задания одного определенного решения нужно указать его начальные значения. Между тем употребляемые в практике устройства обычно работают на вполне определенном режиме, и в их работе, во всяком случае на первый взгляд, невозможно обнаружить наличия бесконечного множества режимов работы, соответствующих различным решениям системы уравнений. Это может объясняться либо тем, что начальные значения решения при запуске устройства выбираются каким-то определенным образом, либо тем, что начальные значения при продолжительной работе прибора утрачивают свое влияние, и устройство само стабилизирует свою работу на стационарном решении. С последним явлением мы уже сталкивались, когда разбирали работу электрических цепей. Приведем еще один пример. Стенные часы идут с совершенно определенным размахом маятника, хотя при запуске их маятник можно отклонить от вертикального положения более или менее сильно. Если при запуске часов маятник отклонить не достаточно сильно, то после небольшого числа колебаний он остановится. Если же отклонение достаточно велико, то через короткое время амплитуда колебаний маятника станет вполне определенной, и часы будут идти с этой амплитудой колебаний неопределенно долго, практически бесконечно долго. Таким образом, у системы уравнений, описывающей работу часов, имеются два стационарных решения: положение равновесия, соответствующее отсутствию хода, и периодическое решение, соответствующее нормальному ходу часов. Всякое другое решение, а этих решений, несомненно, имеется бесконечное множество, очень быстро приближается к одному из этих двух стационарных и по истечении некоторого времени становится практически не отличимым от него. Каждое из отмеченных двух стационарных решений является

в некотором смысле *устойчивым*. Это значит, что если мы берем не стационарное решение, а решение, отклоняющееся от стационарного в начальный момент и притом не слишком сильно, то взятое нестационарное решение приближается к стационарному. Таково не вполне точно формулированное определение устойчивости решения. На этом же примере видно, что фазовое пространство системы уравнений, описывающей работу часов, распадается на две *области притяжения*. Если взять начальное значение в одной из областей, то решение будет стремиться к положению равновесия; если взять начальные значения в другой области, то решение будет стремиться к периодическому решению.

Из сказанного уже видно, что для полного понимания работы какого-либо устройства желательно иметь хорошее представление о фазовом пространстве системы уравнений, описывающей работу этого устройства. При этом важнее всего знать все *устойчивые решения* этой системы уравнений.

Из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (см. § 23) мы уже знаем, что если задаться определенным конечным промежутком времени, то при достаточно малом отклонении начальных значений решение отклонится мало на всем заданном промежутке времени, но это свойство решения вовсе не означает устойчивости. Когда речь идет об устойчивости, отклонение на *неопределенно большом* отрезке времени должно быть малым, если только отклонение начальных значений мало.

Настоящая глава в основном посвящена проблеме устойчивости положений равновесия и периодических решений.

В нее включены также два важных приложения к техническим задачам: излагается исследование Вышнеградского о работе паровой машины с регулятором Уатта и исследование Андронова о работе лампового генератора электрических незатухающих колебаний. Первое из этих исследований явилось основополагающим в теории автоматического регулирования, второе — в теории нелинейных колебаний.

В § 30 проводится исследование поведения траекторий вблизи положений равновесия автономной системы второго порядка, что не вполне относится к проблеме устойчивости. Этот параграф по своей трудности несколько превосходит средний уровень книги. Еще более трудным по своему содержанию является последний параграф этой главы (§ 31).

§ 26. Теорема Ляпунова

Здесь будут даны понятие устойчивости по Ляпунову и достаточные условия устойчивости применительно к положению равновесия автономной системы (см. § 15).

УСТОЙЧИВОСТЬ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

Пусть

$$\dot{x}^l = f^l(x^1, \dots, x^n), \quad l=1, \dots, n \quad (1)$$

— нормальная автономная система, и

$$\dot{x} = f(x) \quad (2)$$

— ее векторная запись. Относительно функций

$$f^l(x^1, \dots, x^n), \quad l=1, \dots, n \quad (3)$$

мы будем предполагать, что они определены и имеют непрерывные частные производные первого порядка на некотором открытом множестве Δ пространства переменных x^1, \dots, x^n . В дальнейшем при установлении критерия устойчивости требования дифференцируемости будут усилены: именно, будет предполагаться, что функции (3) имеют на множестве Δ непрерывные частные производные второго порядка.

Не давая формального определения устойчивости по Ляпунову, постараюсь прежде всего выразить идею устойчивости. Положение равновесия $a = (a^1, \dots, a^n)$ уравнения (2) следует считать устойчивым, если всякое решение уравнения (2), исходящее при $t=0$ из точки, достаточно близкой к a , остается в течение всего дальнейшего своего изменения (т. е. при $t > 0$) вблизи точки a . Физический смысл устойчивости ясен. Физический объект (например, какая-либо машина), движения которого управляются уравнением (2), может находиться в положении равновесия a лишь тогда, когда это положение равновесия устойчиво, так как в противном случае ничтожное отклонение от положения равновесия, вызванное случайным толчком, может повлечь уход объекта далеко от положения равновесия.

Ниже через $\Phi(t, \xi)$ будет обозначаться решение уравнения (2) с начальными значениями $t=0$, $x=\xi$, так что $\Phi(t, \xi)$ есть векторная функция скалярного времени t и векторного переменного ξ , удовлетворяющая условию

$$\Phi(0, \xi) = \xi. \quad (4)$$

Определение. Положение равновесия a уравнения (2) называется *устойчивым по Ляпунову*, если 1) существует настолько малое положительное число ρ , что при $|\xi - a| < \rho$ решение $\Phi(t, \xi)$ уравнения (2) определено для всех положительных t ; 2) для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta < \rho$, что при $|\xi - a| < \delta$ имеем $|\Phi(t, \xi) - a| < \varepsilon$ при всех $t > 0$. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия a уравнения (2) называется *асимп-*

тотически устойчивым, если 3) существует настолько малое положительное число $\sigma < \rho$, что при $|\xi - a| < \sigma$ имеем:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |\Phi(t, \xi) - a| = 0.$$

Дадим прежде всего достаточные условия устойчивости положения равновесия для линейной однородной системы с постоянными коэффициентами:

А) Пусть

$$\dot{x} = Ax \quad (6)$$

— линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами, взятое в векторной записи. Решение его с начальными значениями $0, \xi$ обозначим через $\Psi(t, \xi)$. Если все собственные значения матрицы A имеют отрицательные действительные части, то существуют такие положительные числа α и r , что выполнено неравенство

$$|\Psi(t, \xi)| \leq r |\xi| e^{-\alpha t}, \quad t \geq 0. \quad (6)$$

Из неравенства (6) непосредственно следует, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (5) является устойчивым по Ляпунову и асимптотически устойчивым.

Докажем неравенство (6). Положим:

$$A = (a_j^i); \quad L(p) = (a_j^i - p \delta_j^i).$$

Тогда, пользуясь символом дифференцирования p (см. § 7), уравнение (5) в скалярной форме можно записать в виде системы

$$\sum_{j=1}^n L_j^i(p) x^j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Пусть $M_i^l(p)$ — минор элемента $L_j^i(p)$ матрицы $L(p)$, взятый с надлежащим знаком, так что выполнено тождество

$$\sum_{i=1}^n M_i^k(p) L_j^i(p) = \delta_j^k D(p),$$

где $D(p)$ — детерминант матрицы $L(p)$. Умножая соотношение (7) на многочлен $M_i^k(p)$ и суммируя полученное соотношение по i , получаем

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_i^k(p) L_j^i(p) x^j = \sum_{j=1}^n \delta_j^k D(p) x^j = D(p) x^k.$$

Таким образом, если

— некоторое решение уравнения (5), то каждая функция x^i удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$D(p)x^i = 0.$$

Так как все корни многочлена $D(p)$ по предположению имеют отрицательные действительные части, то (см. § 9, А)) для функции x^i выполнено неравенство

$$|x^i| \leq R e^{-\alpha t}, \quad i = 1, \dots, n; \quad t \geq 0,$$

где R и α — положительные числа, не зависящие от номера i . Из этого неравенства следует неравенство

$$|x| \leq \sqrt{n} R e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0).$$

Последнее неравенство уже было доказано ранее (см. § 11, Б)) в более общих предположениях; здесь это доказательство проведено заново.

Пусть e_i — единичный координатный вектор номера i , так что

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0),$$

где единица стоит на i -м месте. Пусть, далее, $\Psi_i(t)$ — решение уравнения (5) с начальным значением e_i , так что

$$\Psi_i(0) = e_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда решение $\Psi(t, \xi)$ уравнения (5) с начальным значением

$$\xi = (\xi^1, \dots, \xi^n),$$

очевидно, запишется в виде:

$$\Psi(t, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \Psi_i(t). \quad (8)$$

Так как для каждого решения $\Psi_i(t)$ выполнено неравенство

$$|\Psi_i(t)| \leq \sqrt{n} R e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0),$$

то для решения $\Psi(t, \xi)$, очевидно, выполнено неравенство (6).

Устойчивость по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ непосредственно вытекает из неравенства (6). Действительно, если ε — заданное положительное число, то достаточно принять за δ число $\frac{\varepsilon}{r}$. Асимптотическая устойчивость также вытекает из неравенства (6).

Функция Ляпунова

При установлении критерия устойчивости положения равновесия **нелинейной** системы (1) пользуются так называемым *дифференцированием в силу системы уравнений*; дифференцирование это находит применения не только при доказательстве теоремы Ляпунова.

Б) Пусть

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(\mathbf{x})$$

— некоторая дифференцируемая функция переменных x^1, \dots, x^n , определенная на множестве Δ . Ее производная по t в силу системы уравнений (1) в точке $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ определяется следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее при некотором значении $t = t_0$ начальному условию:

$$\varphi(t_0) = \mathbf{x}.$$

Производная

$$\dot{F}_{(1)}(\mathbf{x})$$

в силу системы (1) определяется формулой

$$\dot{F}_{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))|_{t=t_0},$$

или в силу формулы полной производной

$$\dot{F}_{(1)}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(\mathbf{x})}{\partial x^i} f^i(\mathbf{x}). \quad (9)$$

Из формулы (9) видно, что $\dot{F}_{(1)}(\mathbf{x})$ не зависит от решения $\varphi(t)$, а однозначно определяется выбором точки \mathbf{x} .

Докажем теперь одно свойство автономной системы.

В) Решение автономного уравнения (2) с начальными значениями $0, \xi$ по-прежнему будем обозначать через $\varphi(t, \xi)$. Оказывается, что функция $\varphi(t, \xi)$ удовлетворяет тождеству

$$\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(s + t, \xi). \quad (10)$$

Докажем формулу (10). Положим:

$$\eta = \varphi(s, \xi), \quad (11)$$

где s — фиксированное число, и рассмотрим решение

$$\varphi_1(t) = \varphi(t, \eta)$$

уравнения (2). Так как $\varphi(t, \xi)$ есть решение уравнения (2), то в силу автономности этого уравнения (см. § 15, А)) решением является и функция $\varphi_2(t)$, определяемая соотношением:

$$\varphi_2(t) = \varphi(t + s, \xi).$$

Мы имеем, таким образом, два решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ уравнения (2). Далее,

$$\varphi_1(0) = \varphi(0, \eta) = \eta$$

(см. (4)),

$$\varphi_2(0) = \varphi(s, \xi) = \eta$$

(см. (11)). Таким образом, решения $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ имеют общие начальные значения и потому совпадают, а это и означает, что соотношение (10) выполнено.

В доказательстве теоремы Ляпунова основную роль играет некоторая положительно определенная квадратичная форма, называемая *функцией Ляпунова*. Отметим сначала некоторые свойства положительно определенных квадратичных форм (см. Г)), а затем построим и самую функцию Ляпунова (см. Д)).

Г) Пусть

$$\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n) \quad (12)$$

— переменный вектор n -мерного пространства. *Квадратичной формой* от вектора \mathbf{x} называется его функция $W(\mathbf{x})$, определяемая формулой

$$W(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^n w_{ij} x^i x^j,$$

где $w_{ij} = w_{ji}$ — действительные числа. Квадратичная форма $W(\mathbf{x})$ называется *положительно определенной*, если при $\mathbf{x} \neq 0$ имеем:

$$W(\mathbf{x}) > 0.$$

Оказывается, что для любой положительно определенной квадратичной формы $W(\mathbf{x})$ всегда можно подобрать два таких положительных числа μ , ν , что для произвольного вектора \mathbf{x} имеют место неравенства

$$\mu |\mathbf{x}|^2 \leq W(\mathbf{x}) \leq \nu |\mathbf{x}|^2. \quad (13)$$

Из этого следует, что для произвольного \mathbf{x} (см. (12)) имеет место неравенство

$$|x^i| \leq \sqrt{\frac{1}{\mu} W(\mathbf{x})}. \quad (14)$$

Докажем существование чисел μ и ν . Для этого рассмотрим значение функции $W(\xi)$, когда вектор ξ принадлежит единичной сфере, т. е. удовлетворяет условию

$$|\xi| = 1. \quad (15)$$

Так как сфера (15) представляет собой замкнутое ограниченное множество, а функция $W(\xi)$ непрерывна, то на сфере (15) она достигает своего минимума μ и своего максимума ν . Так как все векторы сферы (15) отличны от нуля, то числа μ и ν положительны. Пусть \mathbf{x} — произвольный вектор; тогда мы имеем $\mathbf{x} = \lambda \xi$, где вектор ξ при-

належит сфере (15), и потому для вектора ξ выполнено неравенство

$$\mu \leqslant W(\xi) \leqslant \nu.$$

Умножая это неравенство на λ^2 , получаем неравенства (13).

Перейдем теперь к построению функции Ляпунова.

Д) Пусть

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

— линейная однородная система уравнений с постоянными коэффициентами, причем все собственные значения матрицы $A = (a_j^i)$ имеют отрицательные действительные части. Существует тогда положительно определенная квадратичная форма $W(x)$, производная которой в силу системы (16) (см. Б)) удовлетворяет неравенству

$$\dot{W}_{(16)}(x) \leqslant -\beta W(x), \quad (17)$$

где x — произвольный вектор, а β — положительное число, не зависящее от вектора x .

Построим форму $W(x)$. Будем считать, что система (16) есть скалярная запись векторного уравнения (5). Решение уравнения (5) с начальными значениями 0, ξ будем, как и в предложении А), обозначать через $\psi(t, \xi)$; тогда мы имеем:

$$\psi(t, \xi) = \sum_{i=1}^n \xi^i \psi_i(t) \quad (18)$$

(см. (8)). Положим теперь

$$W(\xi) = \int_0^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \quad (19)$$

Мы имеем в силу (18)

$$W(\xi) = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \xi^j \int_0^\infty (\psi_i(\tau), \psi_j(\tau)) d\tau. \quad (20)$$

Так как каждая функция $\psi_i(t)$ удовлетворяет неравенству (6), то каждый несобственный интеграл, стоящий в правой части равенства (20), сходится, и потому $W(x)$ есть квадратичная форма относительно вектора ξ . Эта квадратичная форма является положительно определенной, так как при $\xi \neq 0$ подынтегральное выражение в формуле (19) положительно, и, следовательно, $W(\xi) > 0$. Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(16)}(\xi)$ функции $W(\xi)$ в силу системы (16). Для этого, согласно предложению Б), мы проведем через точку ξ решение $\psi(t, \xi)$

и затем вычислим производную при $t=0$ от функции $W(\psi(t, \xi))$. Заметим предварительно, что в силу В)

$$\psi(\tau, \psi(t, \xi)) = \psi(\tau + t, \xi),$$

так что

$$\begin{aligned} W(\psi(t, \xi)) &= \int_0^\infty |\psi(\tau, \psi(t, \xi))|^2 d\tau = \\ &= \int_0^\infty |\psi(t + \tau, \xi)|^2 d\tau = \int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, мы имеем:

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(16)}(\xi) &= \frac{d}{dt} W(\psi(t, \xi)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \int_t^\infty |\psi(\tau, \xi)|^2 d\tau \Big|_{t=0} = \\ &= -|\psi(t, \xi)|^2 \Big|_{t=0} = -|\xi|^2. \end{aligned}$$

Итак, мы получили равенство

$$\dot{W}_{(16)}(\xi) = -|\xi|^2,$$

но в силу второго из неравенств (13) имеем:

$$-|\xi|^2 \leq -\frac{1}{v} W(\xi),$$

и потому получаем:

$$\dot{W}_{(16)}(\xi) \leq -\frac{1}{v} W(\xi).$$

Таким образом, неравенство (17) доказано.

Теорема Ляпунова

Перейдем, наконец, к формулировке и доказательству теоремы Ляпунова.

Пусть

$$a = (a^1, \dots, a^n)$$

— положение равновесия автономной системы (1). Положим:

$$x^i = a^i + \Delta x^i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (21)$$

и примем за новые неизвестные функции величины

$$\Delta x^1, \dots, \Delta x^n. \quad (22)$$

Производя подстановку (21) в системе (1) и разлагая правые части в ряд Тейлора по переменным (22), получаем:

$$\Delta \dot{x}^i = f^i(a) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} \Delta x^j + R^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (23)$$

где R^i — член второго порядка малости относительно неизвестных (22). Так как a есть положение равновесия системы (1), то

$$f^i(a) = 0;$$

далее, полагая

$$a_j^i = \frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}, \quad (24)$$

мы можем записать систему (23) в виде:

$$\Delta \dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i \Delta x^j + R^i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (25)$$

Теорема 19. Если все собственные значения матрицы $A = (a_j^i)$ (см. (24)) имеют отрицательные действительные части, то положение равновесия a системы (1) асимптотически устойчиво; более полно, существует настолько малое положительное число σ , что при $|\xi - a| < \sigma$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t, \xi) - a| \leq r |\xi - a| e^{-\alpha t}, \quad (26)$$

где r и α — положительные числа, не зависящие от ξ .

Доказательство. Будем считать, что положение равновесия a системы (1) совпадает с началом координат, т. е. что $a = 0$. Этого всегда можно достичь, произведя параллельный перенос системы координат; при этом матрица A не изменится. Предполагая, что $a = 0$, мы имеем:

$$\Delta x^i = x^i,$$

и потому система (25) записывается в виде:

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j + R^i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (27)$$

где

$$R^i = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n \frac{\partial^2 f^i(\theta x)}{\partial x^j \partial x^k} x^j x^k.$$

Пусть теперь $W(x)$ — функция Ляпунова (см. Д)) для линейной системы

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i x^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (28)$$

получаемой из системы (27) линеаризацией, т. е. отбрасыванием остаточных членов R^i . Вычислим производную $\dot{W}_{(27)}(x)$ функции $W(x)$

в силу системы (27). Мы имеем:

$$\begin{aligned}\dot{W}_{(27)}(\mathbf{x}) &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} a_j^i x^j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} R^i = \\ &= \dot{W}_{(28)}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} R^i.\end{aligned}$$

Так как функция $W(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию (17), то мы имеем:

$$\dot{W}_{(27)}(\mathbf{x}) \leq -\beta W(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} R^i.$$

Выберем теперь настолько малое положительное число b , чтобы при

$$W(\mathbf{x}) \leq b \quad (29)$$

вектор \mathbf{x} принадлежал множеству Δ (такое число b существует в силу (13)). Вторые производные $\frac{\partial^2 f^i(\theta \mathbf{x})}{\partial x^i \partial x^k}$, будучи непрерывными функциями, ограничены в эллипсоиде (29) и потому в этом эллипсоиде

$$|R^i| \leq k |\mathbf{x}|^2 \leq \frac{k}{\mu} W(\mathbf{x}),$$

где k — некоторая константа. Далее, так как $\frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i}$ есть линейная форма относительно x^1, \dots, x^n , то

$$\left| \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} \right| \leq l \sqrt{W(\mathbf{x})},$$

где l — некоторая константа (см. (14)). Таким образом, существует такое положительное число q , что при $W(\mathbf{x}) \leq b$ мы имеем:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial W(\mathbf{x})}{\partial x^i} R^i \leq q W(\mathbf{x})^{3/2}.$$

Выберем теперь положительное число c таким образом, чтобы было

$$c \leq b, \quad q \sqrt{c} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Тогда мы будем иметь:

$$\dot{W}_{(27)}(\mathbf{x}) \leq -\frac{\beta}{2} W(\mathbf{x}),$$

если только выполнено неравенство

$$W(\mathbf{x}) \leq c. \quad (30)$$

Полагая $\alpha = \frac{b}{4}$, получаем неравенство

$$\dot{W}_{(27)}(x) \leq -2\alpha W(x),$$

справедливое, если для x выполнено неравенство (30).

Пусть ξ — внутренняя точка эллипсоида (30), т. е. точка, удовлетворяющая неравенству

$$W(\xi) < c. \quad (31)$$

Решение системы (27) с начальными значениями $0, \xi$, как и раньше, обозначим через $\varphi(t, \xi)$ и положим:

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Функция $w(t)$ определена для всех тех значений $t \geq 0$, для которых определено решение $\varphi(t, \xi)$, и в силу Б) она удовлетворяет условию

$$\dot{w}(t) \leq -2\alpha w(t) \quad (32)$$

до тех пор, пока для нее выполнено неравенство

$$w(t) \leq c. \quad (33)$$

Если бы решение $\varphi(t, \xi)$ существовало не для всех положительных значений t , то точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно должна была бы при возрастающем t покинуть эллипсоид (30) (см. § 22, В). Допустим, что точка $x = \varphi(t, \xi)$ покидает этот эллипсоид и пусть $t' > 0$ — это значение t , при котором она впервые попадает на его границу. Тогда на отрезке $0 \leq t \leq t'$ точка $\varphi(t, \xi)$ принадлежит эллипсоиду (30), и потому выполнено неравенство (32), так что $\dot{w}(t)$ неположительно. Следовательно, $c = w(t') \leq w(0) < c$, что противоречиво.

Таким образом, решение $\varphi(t, \xi)$, а вместе с ним и функция $w(t)$ определены для всех положительных значений t и для всех этих значений выполнено неравенство (32). Если $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$, и мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (32)

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \leq -2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \leq -2\alpha t \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$\ln w(t) - \ln w(0) \leq -2\alpha t.$$

Последнее неравенство дает:

$$W(\varphi(t, \xi)) \leq W(\xi) e^{-2\alpha t}.$$

Из этого неравенства, используя неравенства (13), мы получаем:

$$|\varphi(t, \xi)|^2 \leq \frac{\gamma}{\mu} |\xi|^2 e^{-2\alpha t}, \quad t \geq 0, \quad (34)$$

причем это верно, если только для ξ выполнено неравенство (31).

В силу второго из неравенств (13), из соотношения

$$|\xi| < \sigma = \sqrt{\frac{c}{\nu}} \quad (35)$$

следует неравенство (81). Таким образом, если выполнено неравенство (85), то верно неравенство (34). Извлекая из него квадратный корень, получаем неравенство:

$$|\varphi(t, \xi)| \leq \sqrt{\frac{\nu}{\mu}} |\xi| e^{-at}; \quad t \geq 0,$$

которое совпадает с неравенством (26), причем $r = \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}$, а $a = 0$. Итак, теорема 19 доказана.

Нижеследующее предложение Е) описывает случай, в некотором смысле противоположный рассмотренному в теореме 19.

Е) Положение равновесия α уравнения (2) будем называть *вполне неустойчивым*, если существует такое положительное число σ , что всякое решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (2), начинающееся в точке $\xi \neq \alpha$ шара $|\xi - \alpha| < \sigma$, обязательно покидает этот шар и больше в нем уже не возвращается, т. е. найдется такое положительное число $T = T(\xi)$, что при $t = T$ решение $\varphi(t, \xi)$ определено, и для всех значений $t > T$, для которых это решение определено, оно удовлетворяет неравенству $|\varphi(t, \xi) - \alpha| \geq \sigma$. Оказывается, что если все собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j} \right)$ имеют положительные действительные части, то положение равновесия α уравнения (2) является вполне неустойчивым.

Для доказательства предложения Е) используем некоторые результаты, установленные в процессе доказательства теоремы 19; при этом, как и раньше, будем считать, что $\alpha = 0$. Для этого, наряду с уравнением (2), для которого по предположению все собственные значения матрицы $\frac{\partial f^i(a)}{\partial x^j}$ имеют положительные действительные части, рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -f(x), \quad (36)$$

для которого точка $\mathbf{0}$, очевидно, удовлетворяет условиям теоремы 19. В силу конструкции, данной при доказательстве теоремы 19, для уравнения (36) существует функция Ляпунова $W(x)$, удовлетворяющая неравенству

$$\dot{W}_{(36)}(x) \leq -2\alpha W(x)$$

при условии (30). Выписывая левую часть этого неравенства в явном виде (см. (9)), получаем:

$$\dot{W}_{(36)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(x)}{\partial x^i} (-f^i(x)) \leq -2\alpha W(x),$$

или, иначе,

$$\dot{W}_{(1)}(x) \geq 2\alpha W(x).$$

Это неравенство заведомо верно, когда выполнено неравенство (30). Пусть теперь ξ — некоторая внутренняя точка эллипсоида (30) (см. (31)). Положим:

$$w(t) = W(\varphi(t, \xi)).$$

Для функции $w(t)$ выполнено неравенство

$$\dot{w}(t) \geq 2\alpha w(t), \quad (37)$$

когда для нее имеет место неравенство

$$w(t) \leq c.$$

Так как $\xi \neq 0$, то $w(t) > 0$, и можно произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (37):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)} \geq 2\alpha; \quad \int_0^t \frac{\dot{w}(t)}{w(t)} dt \geq 2\alpha t \quad \text{при } t \geq 0;$$

$$w(t) \geq w(0) e^{2\alpha t}; \quad W(\varphi(t, \xi)) \geq W(\xi) e^{2\alpha t}.$$

Из последнего неравенства следует, что при росте t точка $x = \varphi(t, \xi)$ непременно выйдет на границу эллипсоида (30) и, следовательно, покинет его внутренность. Покажем, что после этого она уже не вернется внутрь эллипсоида (30). Допустим противоположное; тогда найдется такое положительное значение t' , что $w(t') = c$, а при всех положительных достаточно малых значениях Δt выполнено неравенство $w(t' + \Delta t) < c$. Из последних двух соотношений следует, что $\dot{w}(t') \leq 0$, а это противоречит неравенству (37), которое верно при $t = t'$, так как $w(t') = c$.

Таким образом, доказано, что траектория $x = \varphi(t, \xi)$, где $\xi \neq 0$ — внутренняя точка эллипсоида (30), обязательно уходит из эллипсоида (30) и больше в него уже не возвращается. В силу второго из неравенств (13), из неравенств (35) следует неравенство (31), так что шар (35) содержится в эллипсоиде (30). Ввиду этого из доказанного следует правильность утверждения Е).

Пример

В дополнение к предложению А) покажем, что если матрица A имеет собственное значение λ с положительной действительной частью, то положение равновесия $x = 0$ уравнения (5) уже не является устойчивым по Ляпунову. Действительно, в силу предложения А) § 14 решением уравнения (5) является векторная функция $x = che^{\lambda t}$, где c — произвольная действительная константа, а λ — собственный

вектор матрицы A с собственным значением λ . Если λ — действительное число, то при достаточно малом c указанное решение начинается в точке sh , сколь угодно близкой к положению равновесия $x = 0$, но с течением времени становится сколь угодно большим по модулю. Если же λ — комплексное число, то тем же свойством обладает решение $c(h e^{\lambda t} + \bar{h} e^{\bar{\lambda} t})$ уравнения (5).

§ 27. Центробежный регулятор (исследования Вышнеградского)

В современной технике благодаря изобилию приборов автоматического управления чрезвычайно большую роль играет теория автоматического регулирования. Одним из важнейших

вопросов, возникающих перед конструктором автоматического регулятора, является вопрос об устойчивости работы системы машина — регулятор. Этот вопрос во многих случаях может быть решен на основании теоремы Ляпунова (см. § 26).

Наиболее давно существующей системой автоматического регулирования является система паровая машина — центробежный регулятор Уатта. Центробежный регулятор, вполне хорошо справлявшийся со своей задачей в конце XVIII и в первой половине XIX века, в середине XIX века ввиду его конструктивных изменений стал работать ненадежно. Широкие круги теоретиков и инженеров искали выхода

из возникшего кризиса. Вопрос с полной ясностью и простотой был решен выдающимся русским инженером Вышнеградским, основателем теории автоматического регулирования. Работой Вышнеградского «О регуляторах прямого действия» (1876 г.) начинается теория регулирования машин, отвечающая на вопросы промышленной практики. В настоящем параграфе в упрощенном виде излагается исследование Вышнеградского.

Центробежный регулятор (рис. 41) представляет собой вертикальный стержень S , могущий вращаться вокруг своей вертикальной оси, в верхнем конце которого на шарницах прикреплены два одинаковых стержня L_1 и L_2 с одинаковыми грузами на концах. Стержни L_1 и L_2 скреплены дополнительными шарнирами, так что отклоняться от своего вертикального положения они могут лишь

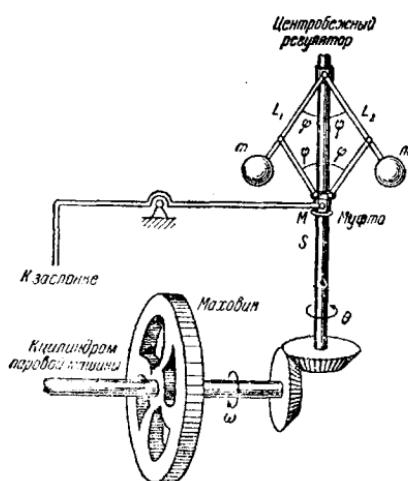


Рис. 41.

одновременно на один и тот же угол φ , находясь в одной и той же вертикальной плоскости, неподвижно связанной со стержнем S . Когда стержни L_1 и L_2 отклоняются от своего вертикального положения на угол φ , они при помощи шарниров приводят в движение специальную муфту M , надетую на стержень S , так что расстояние этой муфты до верхнего конца стержня S пропорционально $\cos \varphi$. Длину вертикальных стержней L_1 и L_2 примем за единицу, а массу каждого грузов, прикрепленных на их концах, обозначим через m . Если стержень S вращается с угловой скоростью θ , а стержни L_1 и L_2 отклонены от вертикального положения на угол φ , то на каждый из грузов действует центробежная сила

$$m\theta^2 \sin \varphi. \quad (1)$$

Одновременно на каждый груз действует сила тяжести, равная

$$mg. \quad (2)$$

Так как в направлении стержня L_i силы, действующие на груз, уравновешиваются реакцией стержня L_i , то для расчета силы, действующей на груз, следует разложить обе упомянутые силы по осям, первая из которых направлена вдоль стержня, а вторая — в перпендикулярном направлении, в сторону возрастания угла φ . Непосредственно видно (рис. 42), что составляющая силы (1) в направлении возрастания угла φ равна

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad (3)$$

а составляющая силы тяжести (2) в том же направлении равна

$$-mg \sin \varphi. \quad (4)$$

Таким образом, равнодействующая обеих сил (3) и (4) задается формулой

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi. \quad (5)$$

Упрощенное объяснение работы центробежного регулятора заключается в том, что при заданной угловой скорости θ стержни L_1 и L_2 отклоняются под действием сил (1), (2) на угол φ , определяемый из равенства

$$m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi = 0, \quad (6)$$

т. е. путем приравнивания нулю силы (5). Из соотношения (6) угол φ определяется как однозначная монотонно возрастающая функция скорости θ ; в этом смысле регулятор Уатта может рассматриваться как измеритель скорости вращения. Это есть так называемое стати-

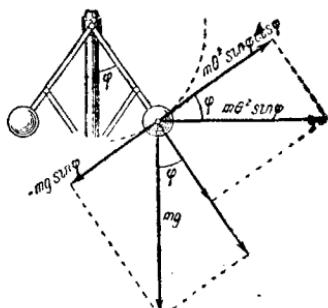


Рис. 42.

ческое рассмотрение регулятора. В действительности мы имеем здесь динамическое явление. Масса m , находясь под воздействием силы (5), совершает движение, описываемое дифференциальным уравнением. Кроме силы (5), на массу m действует при ее движении сила трения в сочленениях шарниров. Сила эта весьма сложным образом зависит от происходящего движения. Существенно упрощая имеющуюся здесь сложность, мы будем считать, что сила трения пропорциональна скорости $\dot{\varphi}$ движения массы m и имеет знак, противоположный этой скорости, т. е. имеет величину

$$-b\dot{\varphi},$$

где b — постоянная. Таким образом, если принять φ за координату, определяющую положение массы m , то мы получим для φ дифференциальное уравнение:

$$m\ddot{\varphi} = m\theta^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\dot{\varphi}. \quad (7)$$

(Расчет силы (5) проведен здесь в предположении, что θ и φ постоянны. При меняющихся θ и φ возникают добавочные силы, которые, однако, уравновешиваются реакциями стержней и шарниров, заставляющих стержни двигаться в одной плоскости. Таким образом, уравнение (7) оказывается справедливым.)

Паровая машина представляет собой маховик колесо с моментом инерции J , приводимое во вращательное движение силой пара и способное совершать полезную работу, например поднимать клеть из шахты. Дифференциальное уравнение паровой машины может быть, таким образом, записано в виде:

$$J\ddot{\omega} = P_1 - P, \quad (8)$$

где ω — угловая скорость вращения маховика, P_1 — момент силы действия пара, P — момент силы воздействия на маховик тяжести клети. Момент силы воздействия пара P_1 зависит от того, насколько приоткрыта заслонка, подающая пар в цилиндры паровой машины, а момент P зависит от загруженности клети.

Центробежный регулятор присоединяется к паровой машине с целью поддержать равномерность ее хода. Он «измеряет» скорость вращения махового колеса ω , если она оказывается слишком большой, уменьшает подачу пара, а если она оказывается слишком малой — увеличивает подачу пара. Для осуществления этой цели маховое колесо паровой машины связывается при помощи зубчатой передачи с вертикальным стержнем регулятора (рис. 41), так что между угловыми скоростями ω и θ возникает постоянная связь:

$$\theta = n\omega, \quad (9)$$

где n — так называемое *передаточное число*. Таково воздействие машины на регулятор, в результате которого осуществляется

измерение скорости вращения маховика. С другой стороны, муфта M регулятора связана с заслонкой, подающей пар, так что

$$P_1 = F_1 + k(\cos \varphi - \cos \varphi^*), \quad (10)$$

где φ^* — некоторое «среднее» значение φ , вблизи которого должно поддерживаться значение регулируемой величины φ , F_1 — значение силы воздействия пара P_1 при $\varphi = \varphi^*$, а $k > 0$ — постоянный коэффициент пропорциональности.

Как видно из (10), обратное воздействие регулятора на паровую машину осуществляется таким образом, что при увеличении угла φ подача пара (а вместе с ней и сила воздействия пара P_1) уменьшается. В результате описанных взаимодействий машины и регулятора, последний, казалось бы, полностью осуществляет поставленную перед ним задачу, увеличивая подачу пара при уменьшении скорости вращения маховика и уменьшая подачу пара при увеличении скорости. В связи с этим естественно ожидать, что скорость вращения маховика будет стабилизироваться. Это и наблюдалось в паровых машинах, строившихся до середины XIX столетия. Для того чтобы выяснить причины начавшего наблюдаться после середины XIX столетия нарушения работы регулятора, необходимо было точно изучить динамику работы системы машина — регулятор и исследовать ее устойчивость, что и было сделано Вышнеградским.

Как видно из соотношений (7) — (10), система машина — регулятор описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{\varphi} &= m n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - mg \sin \varphi - b\dot{\varphi}, \\ J\ddot{\omega} &= k \cos \varphi - F, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где $F = P - F_1 + k \cos \varphi^*$ — величина, зависящая от нагрузки. Первое из этих уравнений имеет второй порядок. Для приведения системы к нормальному виду введем новое переменное ψ , положив:

$$\psi = \dot{\varphi}.$$

Тогда система (11) запишется в нормальной форме:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varphi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= n^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - g \sin \varphi - \frac{b}{m} \psi, \\ \ddot{\omega} &= \frac{k}{J} \cos \varphi - \frac{F}{J}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Правильная работа паровой машины заключается в том, что угловая скорость ω вращения ее маховика остается постоянной при неизменной нагрузке P , т. е. при постоянном F , а заслонка, подающая пар, неподвижна. Последнее означает, что угол φ остается

неизменным. Таким образом, речь идет об отыскании такого решения системы (12), которое имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0, \quad \psi = 0, \quad \omega = \omega_0,$$

т. е. об отыскании положения равновесия этой системы. Задача заключается в том, чтобы, найдя положение равновесия системы (12), исследовать его устойчивость.

Приравнивая нуль правые части соотношений (12) и решая получающиеся уравнения, найдем координаты положения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \psi_0 &= 0, \\ \cos \varphi_0 &= \frac{F}{k}, \\ n^2 \omega_0^2 &= \frac{g}{\cos \varphi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Положим:

$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi, \quad \psi = \psi_0 + \Delta\psi, \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega.$$

В результате такой замены и линеаризации уравнений (12), мы получаем систему:

$$\Delta\dot{\varphi} = \Delta\psi,$$

$$\Delta\dot{\psi} = n^2 \omega_0^2 \cos 2\varphi_0 \Delta\varphi + n^2 \omega_0 \sin 2\varphi_0 \Delta\omega - g \cos \varphi_0 \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi,$$

$$\Delta\dot{\omega} = -\frac{k}{J} \sin \varphi_0 \Delta\varphi.$$

Подставляя во второе из этих уравнений значение величины $n^2 \omega_0^2$ из (13), получаем после простых вычислений:

$$\Delta\dot{\psi} = -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} \Delta\varphi - \frac{b}{m} \Delta\psi + \frac{2g \sin \varphi_0}{\omega_0} \Delta\omega.$$

Характеристический многочлен полученной линейной системы уравнений для $\Delta\varphi$, $\Delta\psi$, $\Delta\omega$ равен:

$$D(p) = \begin{vmatrix} -p & 1 & 0 \\ -\frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} & -\frac{b}{m} - p & \frac{2g \sin \varphi_0}{\omega_0} \\ -\frac{k}{J} \sin \varphi_0 & 0 & -p \end{vmatrix},$$

или, после вычисления определителя и умножения на -1 ,

$$-D(p) = p^3 + \frac{b}{m} p^2 + \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} p + \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0}.$$

Все коэффициенты этого многочлена положительны, и потому необходимым и достаточным условием его устойчивости является (в силу

теоремы 6) выполнение неравенства

$$\frac{b}{m} \cdot \frac{g \sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} > 1 \cdot \frac{2kg \sin^2 \varphi_0}{J\omega_0},$$

или, иначе, неравенства

$$\frac{bJ}{m} > \frac{2k \cos \varphi_0}{\omega_0} = \frac{2F}{\omega_0} \quad (14)$$

(см. (13)). Соотношение (14) представляет собой, в силу теоремы Ляпунова (теорема 19), достаточное условие устойчивости системы машина — регулятор.

Для того чтобы выяснить смысл правой части последнего неравенства, введем играющее важную роль в технике понятие *неравномерности хода* паровой машины. Из соотношений (13) видно, что при изменении величины $F = P - F_1 + k \cos \varphi^*$ (т. е. при изменении нагрузки P) меняется стабильная скорость ω_0 . Величина $\frac{d\omega_0}{dP}$ характеризует скорость изменения величины ω_0 при изменении нагрузки P ; ее абсолютная величина $v = \left| \frac{d\omega_0}{dP} \right|$ (как мы сейчас увидим, производная $\frac{d\omega_0}{dP}$ отрицательна) и называется *неравномерностью хода* паровой машины. Мы имеем в силу (13):

$$F\omega_0^2 = \text{const},$$

и потому, дифференцируя, получаем:

$$\frac{d\omega_0}{dF} = -\frac{\omega_0}{2F}.$$

Таким образом,

$$v = \frac{\omega_0}{2F},$$

и условие устойчивости (14) переписывается окончательно в виде:

$$\frac{bJ}{m} \cdot v > 1. \quad (15)$$

Из формулы (15) Вышнеградским были сделаны следующие выводы:

1. Увеличение массы m шаров вредно влияет на устойчивость.
2. Уменьшение коэффициента трения b вредно влияет на устойчивость.
3. Уменьшение моментов инерции J маховика вредно влияет на устойчивость.
4. Уменьшение неравномерности v вредно влияет на устойчивость.

Чтобы сделать свои выводы доступными для инженеров и привлечь внимание к наиболее важным из них, Вышнеградский формулирует в конце работы свои знаменитые «тезисы».

Первый тезис: Катаракт (трение) есть существенная принадлежность чувствительного и правильно действующего регулятора, короче: «без катаракта нет регулятора».

Второй тезис: астатические регуляторы (т. е. регуляторы с нулевой неравномерностью) даже и с катарактом не должны быть употребляемы, короче: «без неравномерности нет регулятора».

Нарушения работы регуляторов в середине XIX столетия объясняются тем, что благодаря развитию техники все четыре величины, входящие в соотношение (15), стали изменяться в направлении, ухудшающем устойчивость. Именно, ввиду увеличения веса заслонок (связанного с возрастанием мощности машин) стали применяться все более тяжелые шары. Совершенствование обработки поверхностей деталей приводило к уменьшению трения. Увеличение рабочей скорости машин сделало необходимым уменьшение момента инерции J маховика. Наконец, стремление уменьшить зависимость скорости от нагрузки приводило к уменьшению неравномерности хода.

Уяснив неблагоприятное влияние всех указанных факторов, Вышнеградский в своих тезисах рекомендует искусственное увеличение трения (при помощи специального устройства — катаракта) и увеличение неравномерности хода (за счет изменения чисел n и k , зависящих от конструкции машины).

§ 28. Предельные циклы

В этом параграфе будет определено и до некоторой степени изучено понятие предельного цикла, введенное великим французским математиком Пуанкаре, а также дан один критерий, позволяющий в некоторых случаях установить существование предельного цикла. Понятие предельного цикла играет важнейшую роль как в самой теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в ее приложениях к технике.

Мы будем рассматривать нормальную автономную (см. § 15) систему уравнений

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

правые части которых определены и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial f^i}{\partial x^j}$ на некотором открытом множестве Δ фазового пространства R переменных x^1, \dots, x^n . Мы будем пользоваться также векторной записью этой системы:

$$\dot{x} = f(x). \quad (2)$$

Все наиболее существенные построения этого параграфа будут относиться к случаю $n = 2$. Чтобы подчеркнуть двумерность, мы будем говорить о фазовой плоскости P системы (1), а не о ее фазо-

вом пространстве R . При рассмотрении фазовой плоскости будут играть существенную роль геометрические построения, обладающие большой наглядностью. Случай, когда открытое множество Δ совпадает со всей фазовой плоскостью P , отнюдь не является тривиальным, и для простоты можно сосредоточить все внимание на нем.

Пределный цикл и поведение траекторий вблизи него

Пределным циклом уравнения (2) ($n = 2$) называется изолированное периодическое решение этого уравнения. Более полно, пусть $\mathbf{x} = \varphi(t)$ — периодическое решение уравнения (2) и K — описываемая этим решением замкнутая кривая в плоскости P . Решение $\mathbf{x} = \varphi(t)$ (а также траектория K) считается *изолированным* периодическим решением и называется *пределным циклом*, если существует такое положительное число ρ , что, какова бы ни была точка ξ плоскости P , находящаяся от кривой K на положительном расстоянии, меньшем чем ρ , решение уравнения (2), проходящее через точку ξ , не является периодическим.

Сказанное означает геометрически, что в фазовой картине уравнения (2) на плоскости P вблизи замкнутой траектории K не проходит других замкнутых траекторий этого уравнения. Вопрос о том, как ведут себя траектории уравнения (2) вблизи предельного цикла K , решается следующей теоремой.

Теорема 20. *Пусть $\mathbf{x} = \varphi(t)$ — предельный цикл уравнения (2) ($n = 2$) и K — замкнутая траектория, описываемая этим решением на плоскости P . Замкнутая кривая, как известно, разбивает плоскость на две области: внутреннюю и внешнюю, а так как траектории уравнения (2) не могут между собой пересекаться, то каждая отличная от K траектория является внутренней или внешней по отношению к траектории K . Оказывается, что как для внешних, так и для внутренних траекторий имеются две взаимно исключающие друг друга возможности поведения вблизи K . Именно, все внутренние траектории, начинающиеся вблизи K , наматываются на K , как спирали, либо при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 43, а), либо при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 43, б). То же самое имеет место и для внешних траекторий (рис. 43, а, б).*

Если все траектории (как внешние, так и внутренние), начинающиеся вблизи K , наматываются на K при $t \rightarrow +\infty$, то предельный цикл называется *устойчивым* (рис. 43, а). Если все траектории, начинающиеся вблизи K , наматываются на K при $t \rightarrow -\infty$, то предельный цикл K называется *вполне неустойчивым* (рис. 43, б), в двух других случаях (т. е. если внутренние траектории наматываются на K при $t \rightarrow -\infty$, а внешние — при $t \rightarrow +\infty$, или наоборот) предельный цикл K называется *полуустойчивым* (рис. 43, в).

Как само доказательство теоремы 20, так и более полное описание «наматывания» траекторий на предельный цикл опираются на понятие *функции последования*. Эта функция имеет наглядный геометрический смысл и без детального доказательства ее свойств может быть описана сравнительно коротко.

Дадим это описание. Пусть K — замкнутая кривая на фазовой плоскости P , соответствующая периодическому решению с периодом τ .

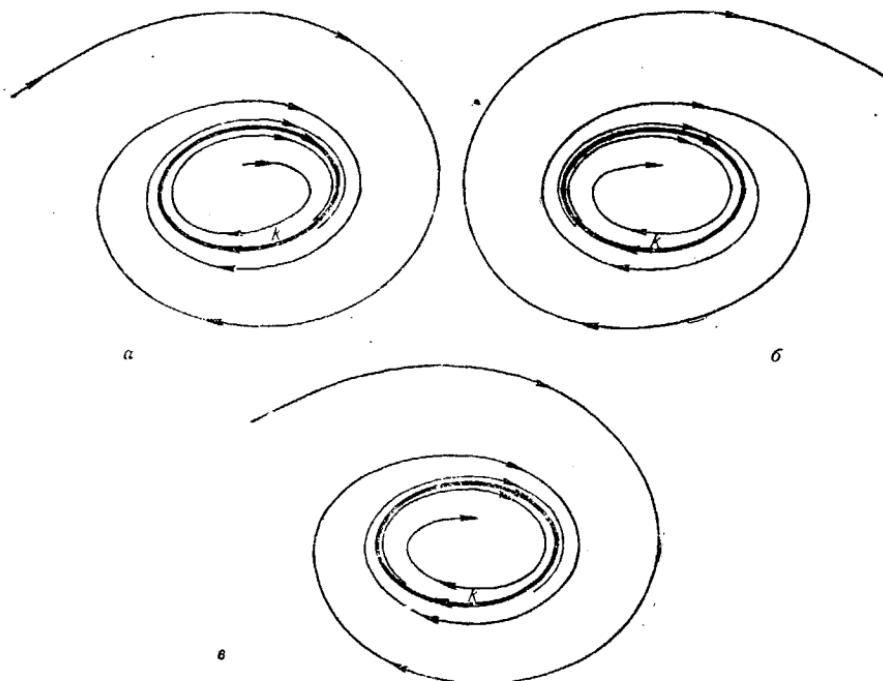


Рис. 43.

Пусть, далее, L — прямолинейный отрезок в плоскости P , пересекающий кривую K , не касаясь ее, в единственной точке a , внутренней для отрезка L . На отрезке L (точнее, на прямой, содержащей этот отрезок) обычным образом введем числовую координату. Координату точки a обозначим через u_0 . Через точку p отрезка L с координатой u проведем траекторию уравнения (2) и будем двигаться по ней в направлении возрастания времени t .

Геометрически ясно, что если точка p близка к a , то мы будем двигаться вблизи кривой K , и потому вновь и вновь будем встречать отрезок L . Первая встреча произойдет через время, близкое к τ , в некоторой точке q (рис. 44), координату которой мы обозначим

через $\chi_1(u)$. Точно так же, если мы будем двигаться из точки p по траектории в направлении убывания времени, то через время, близкое к t , мы впервые встретим отрезок L в некоторой точке r , координату которой обозначим через $\chi_{-1}(u)$. Обе функции χ_1 и χ_{-1} непрерывны и взаимно обратны, т. е.

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Действительно, если двигаться из точки q в направлении убывания времени, то мы впервые встретим отрезок L в точке p , так что $\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u$. Точно так же, при движении из точки r в направлении возрастания времени мы впервые встретим отрезок L в точке p , т. е. $\chi_1(\chi_{-1}(u)) = u$. Функция $\chi = \chi_1$ называется *функцией последований*; для дальнейшего существенно, что она непрерывна и имеет непрерывную обратную функцию $\chi^{-1} = \chi_{-1}$.

В действительности функции χ и χ^{-1} имеют непрерывные производные (см. В)), но это их свойство не будет использовано при доказательстве теоремы 20.

Приведенные здесь геометрические соображения наглядно достаточно убедительны. Читатель, склонный удовольствоваться ими, может ознакомиться с доказательством теоремы 20, читая предложений А) и Б), в которых существование и свойства функции последований доказываются строго.

А) Обозначим через $\varphi(t, \xi)$ решение уравнения (2) с начальными значениями $0, \xi$. Пусть L — прямолинейный отрезок на фазовой плоскости P уравнения (2), на котором введена числовая координата v , так что в параметрической форме отрезок задается линейным уравнением:

$$x = g(v).$$

Допустим, что траектория $\varphi(t, \xi_0)$ пересекает отрезок L в его внутренней точке a с координатой v_0 в момент времени t_0 , так что

$$\varphi(t_0, \xi_0) = g(v_0),$$

причем траектория $\varphi(t, \xi_0)$ в момент времени t_0 не касается отрезка L . Существуют тогда такие положительные числа δ и ε , что: 1) при $|\xi - \xi_0| < \delta$ определены непрерывные функции $t(\xi)$ и $v(\xi)$, удовлетворяющие условиям

$$\varphi(t(\xi), \xi) = g(v(\xi)); \quad t(\xi_0) = t_0; \quad v(\xi_0) = v_0; \quad |t(\xi) - t_0| < \varepsilon; \quad (3)$$

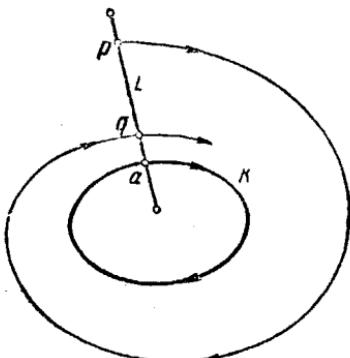


Рис. 44.

2) имеет место единственность; именно, если при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|t - t_0| < \epsilon$ имеет место равенство

$$\varphi(t, \xi) - g(v) = 0, \quad (4)$$

то величины ξ , t , v удовлетворяют условиям:

$$t = t(\xi), \quad v = v(\xi). \quad (5)$$

Сказанное означает геометрически, что траектория, выходящая в момент времени $t = 0$ из точки ξ , близкой к ξ_0 , пересекает отрезок L в точке с координатой $v(\xi)$, близкой к v_0 , в момент времени $t(\xi)$, близкий к t_0 , причем пересечение это является единственным на некотором интервале времени $|t - t_0| < \epsilon$, а функции $t(\xi)$ и $v(\xi)$ непрерывны.

Следует заметить, что траектория $\varphi(t, \xi_0)$ может пересекать отрезок L не только в момент времени t_0 , но и в некоторый другой момент времени t_1 , причем точка пересечения может даже совпасть с a (этот случай имеет место, если $\varphi(t, \xi_0)$ — периодическое решение), но функция $t(\xi)$ (а возможно и $v(\xi)$), получаемая из рассмотрения пересечения в момент времени t_1 , будет, очевидно, отличаться от функции, получаемой из рассмотрения пересечения в момент времени t_0 .

Доказательство предложения А) почти непосредственно вытекает из теоремы о неявных функциях (см. § 33), примененной к уравнению (4), в котором ξ считается независимой переменной величиной, а t и v — ее неявными функциями. При $\xi = \xi_0$ уравнение (4) имеет очевидное решение $t = t_0$, $v = v_0$. Для доказательства того, что функциональный определитель левой части уравнения (4) отличен от нуля в точке (ξ_0, t_0, v_0) , запишем уравнение (4) в скалярной форме:

$$\varphi^i(t, \xi) - g^i(v) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Производные от левых частей этих соотношений по t в точке (ξ_0, t_0, v_0) дают компоненты вектора $\dot{\varphi}(t_0, \xi_0)$; производные от левых частей этих соотношений по v в той же точке дают компоненты вектора $-\frac{dg(v_0)}{dv}$. Векторы эти линейно независимы, так как траектория $\varphi(t, \xi_0)$ в момент t_0 не касается отрезка L . Следовательно, функциональный определитель системы (6) отличен от нуля в точке (ξ_0, t_0, v_0) . Таким образом, теорема о неявных функциях к уравнению (4) применима, и существует его непрерывное решение $t(\xi), v(\xi)$, определенное на некоторой окрестности $|\xi - \xi_0| < \alpha$ и обращающееся в t_0, v_0 при $\xi = \xi_0$.

В силу второй части теоремы существования неявных функций, найдется такая окрестность U точки (ξ_0, t_0, v_0) в пространстве переменных ξ, t, v , что всякая точка (ξ, t, v) из этой окрестности, удовлетворяющая уравнению (4), удовлетворяет и уравнениям (5).

В отличие от того, что содержится в формулировке предложения А), эта единственность, в силу теоремы 27, имеет место, когда малы не только величины $|\xi - \xi_0|$ и $|t - t_0|$, но также величина $|\varphi - \varphi_0|$. Для того, чтобы доказать единственность при малости только двух первых из указанных величин, покажем, что если эти две величины малы и точка (ξ, t, v) удовлетворяет условию (4), то величина $|\varphi - \varphi_0|$ также мала. Окрестность U , в которой имеет место единственность в силу теоремы 27, можно задать неравенствами

$$|\xi - \xi_0| < \delta \leq \alpha, \quad |t - t_0| < \varepsilon, \quad |\varphi - \varphi_0| < \beta.$$

Из предложения Г) § 23 следует, что при достаточно малом δ на всем интервале времени $|t - t_0| < \varepsilon$ имеет место неравенство $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi_0)| < \gamma$, где γ — наперед заданное малое число. Таким образом, точка пересечения траектории $\varphi(t, \xi)$ с отрезком L при $|\xi - \xi_0| < \delta$, $|t - t_0| < \varepsilon$ лежит тем ближе к отрезку траектории $\varphi(t, \xi_0)$ ($|t - t_0| < \varepsilon$), чем меньше δ , и потому малость координаты v этого пересечения обеспечивается достаточной малостью числа δ .

Таким образом, предложение А) доказано.

Б) Пусть $\varphi(t, \xi)$ — решение уравнения (2) с начальными значениями 0, ξ ; пусть, далее, $\varphi(t, a)$ — периодическое решение с периодом τ , K — замкнутая кривая на фазовой плоскости P , соответствующая решению $\varphi(t, a)$, и L — прямолинейный отрезок, пересекающий кривую K без касания в единственной точке a , лежащей внутри него. На отрезке L введем числовую координату, так что $x = g(v)$ есть параметрическое уравнение отрезка L , заданное при помощи этой координаты, и пусть $v = u_0$ — координата точки a . Оказывается, что при достаточно малом $\alpha > 0$ траектория $\varphi(t, g(u)) = \varphi(t, u)$, где $|u - u_0| < \alpha$, пересекает отрезок L как при положительных значениях t , так и при отрицательных его значениях. Обозначим через $t_1(u)$ минимальное положительное значение t , при котором траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с L , и через $\chi_1(u)$ — координату этой точки пересечения на отрезке L . Точно так же обозначим через $t_{-1}(u)$ минимальное по модулю отрицательное значение t , при котором траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с L , и через $\chi_{-1}(u)$ — координату этой точки пересечения на отрезке L . Оказывается, далее, что если α достаточно мало, то при $|u - u_0| < \alpha$ все четыре построенные функции

$$t_1(u), \quad \chi_1(u), \quad t_{-1}(u), \quad \chi_{-1}(u)$$

непрерывны и удовлетворяют условиям

$$t_1(u_0) = \tau, \quad \chi_1(u_0) = u_0, \quad t_{-1}(u_0) = -\tau, \quad \chi_{-1}(u_0) = u_0.$$

Кроме того, функции χ_1 и χ_{-1} взаимно обратны при достаточно

малом u , т. е.

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = u, \quad \chi_1(\chi_{-1}(u)) = u.$$

Функция $\chi = \chi_1$ называется *функцией последования*.

Для доказательства предложения Б) используем предложение А), считая, что $\xi_0 = a$, $\xi = g(u)$, $t_0 = k\tau$, где k — произвольное целое число. (В действительности мы используем лишь значения $k = -1, 0, +1$.) В силу предложения А), существуют непрерывные функции $t_k(u) = t_k(g(u))$ и $\chi_k(u) = v_k(g(u))$, удовлетворяющие условиям:

$$\Phi(t_k(u), g(u)) = g(\chi_k(u)), \quad t_k(u_0) = k\tau, \quad \chi_k(u_0) = u_0, \quad (7)$$

причем, в силу единственности, функции, удовлетворяющие этим условиям, определены однозначно. В частности, $\chi_0(u) \equiv u$.

Докажем, что

$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u). \quad (8)$$

Пользуясь соотношением (7) и предложением В) § 26, получаем:
 $g(\chi_k(\chi_l(u))) = \Phi(t_k(\chi_l(u)), g(\chi_l(u))) =$
 $= \Phi(t_k(\chi_l(u)), \Phi(t_l(u), g(u))) = \Phi(t_k(\chi_l(u)) + t_l(u), g(u)),$

причем выполнены условия

$$t_k(\chi_l(u_0)) + t_l(u_0) = t_k(u_0) + t_l(u_0) = (k + l)\tau;$$

$$\chi_k(\chi_l(u_0)) = u_0.$$

С другой стороны, мы имеем:

$$g(\chi_{k+l}(u)) = \Phi(t_{k+l}(u), g(u)),$$

причем

$$\chi_{k+l}(u_0) = u_0,$$

$$t_{k+l}(u_0) = (k + l)\tau.$$

В силу единственности функций, удовлетворяющих условиям (7), мы получаем:

$$t_k(\chi_l(u)) + t_l(u) = t_{k+l}(u);$$

$$\chi_k(\chi_l(u)) = \chi_{k+l}(u).$$

Таким образом, соотношение (8) доказано.

В частных случаях, когда $k = -1, l = +1$ и $k = +1, l = -1$, получаем:

$$\chi_{-1}(\chi_1(u)) = \chi_0(u) = u,$$

$$\chi_1(\chi_{-1}(u)) = \chi_0(u) = u.$$

Таким образом, функции $\chi = \chi_1$ и $\chi^{-1} = \chi_{-1}$ взаимно обратны.

Докажем теперь, что при достаточно малом $|u - u_0|$ траектория $\Phi(t, u)$ первый раз пересекается с L при возрастании t в момент

времени $t_1(u)$, а при убывании t — в момент времени $t_{-1}(u)$. Из единственности пересечения (см. А)) следует, что на каждом из интервалов $|t - (-\tau)| < \epsilon$, $|t| < \alpha$, $|t - \tau| < \epsilon$ траектория $\varphi(t, u)$ пересекается с отрезком L в единственной точке.

Других пересечений с отрезком L траектория $\varphi(t, u)$ при $|t| < (\epsilon + \tau)$ и достаточно малом $|u - u_0|$ вообще не имеет по следующим соображениям.

Часть K^* траектории K , описываемая точкой $\varphi(t, a)$, когда

$$\epsilon \leq t \leq (\tau - \epsilon) \quad \text{или} \quad -(\tau - \epsilon) \leq t \leq -\epsilon, \quad (9)$$

является замкнутым множеством, которое не пересекается с замкнутым множеством L и потому расстояние ρ между множествами K^* и L положительно. Далее, в силу предложения Г) § 23, расстояние между точками $\varphi(t, a)$ и $\varphi(t, u)$, когда t принадлежит множеству (9), меньше ρ , если только величина $|u - u_0|$ достаточно мала.

Таким образом, и траектория $\varphi(t, u)$, когда t принадлежит множеству (9), не пересекается с отрезком L .

Итак, предложение Б) доказано.

Доказательство теоремы 20. Выберем на фазовой плоскости P прямолинейный отрезок L , пересекающий кривую K , не касаясь ее, в единственной точке a , внутренней для отрезка L . Введем на отрезке L числовую координату и обозначим через u_0 координату точки a . Для определенности будем считать, что точкам отрезка L , лежащим вне кривой K , соответствуют координаты, большие u_0 , а точкам, лежащим внутри K — координаты, меньшие u_0 . Через χ обозначим функцию последования, соответствующую отрезку L (см. Б)).

Таким образом, для всех чисел достаточно малого интервала $|u - u_0| < \alpha$ траектория уравнения (2), начинающаяся на отрезке L в точке p с координатой u , при возрастании времени впервые пересекает отрезок L в точке q с координатой $\chi(u) = v$.

Мы имеем, очевидно:

$$\chi(u_0) = u_0.$$

Далее, если для числа u выполнено равенство

$$\chi(u) = u, \quad (10)$$

то траектория, начинающаяся в точке p с координатой u , замкнута. Так как, по предположению, траектория K является изолированной замкнутой траекторией, то существует настолько малое положительное число α , что при $|u - u_0| < \alpha$ уравнение (10) имеет единственное решение $u = u_0$. Из этого следует, что для всех точек интервала $u_0 - \alpha < u < u_0 + \alpha$ имеет место одно из неравенств:

$$\chi(u) < u, \quad (11)$$

$$\chi(u) > u. \quad (12)$$

В самом деле, если бы для некоторых точек этого интервала имело место неравенство (11), а для некоторых — неравенство (12), то, в силу непрерывности функции χ , на том же интервале нашлась бы точка u , для которой выполняется равенство (10), что невозможно. Так как траектория, начинающаяся в точке p с координатой u , принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, не может пересечь траектории K , то обе точки p и q лежат по одну сторону кривой K (а именно, вне K), так что

$$\chi(u) > u_0. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь случай, когда для всех точек интервала $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (11). Пусть u_1 — произвольное число этого интервала. Определим индуктивно последовательность чисел u_1, u_2, \dots , положив:

$$u_{i+1} = \chi(u_i), \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

В силу неравенств (11) и (13) эти числа расположены на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ и образуют убывающую последовательность. Следовательно, они имеют некоторый предел u^* . Переходя в равенстве (14) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем $\chi(u^*) = u^*$, а так как точка u^* принадлежит интервалу $|u - u_0| < \alpha$, то, в силу единственности решения уравнения (10) на этом интервале, $u^* = u_0$. Итак, $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i = u_0$.

Обозначая через p_i точку отрезка L с координатой u_i , мы видим, что последовательные точки p_1, p_2, \dots пересечения траектории, начинающейся в p_1 , с отрезком L сходятся к точке a , лежащей на траектории K . Так как время перехода по нашей траектории от точки p_i до точки p_{i+1} близко к периоду τ предельного цикла K (и, в частности, ограничено), то при росте i весь отрезок траектории от точки p_i до точки p_{i+1} прижимается к траектории K (см. § 23, Г)). Это и значит, что траектория, начинающаяся в точке p_1 , спирально наматывается на траекторию K при $t \rightarrow +\infty$. Таким образом, доказано, что при выполнении неравенства (11) траектория, начинающаяся в любой точке отрезка L с координатой u , принадлежащей интервалу $u_0 < u < u_0 + \alpha$, спирально наматывается на K при $t \rightarrow +\infty$.

Если на интервале $u_0 < u < u_0 + \alpha$ имеет место неравенство (12), то для обратной к χ функции χ^{-1} на некотором интервале $u_0 < v < u_0 + \beta$ имеет место неравенство

$$\chi^{-1}(v) < v.$$

Исходя из него, мы точно так же покажем, что в этом случае любая траектория, начинающаяся в точке отрезка L с координатой v , принадлежащей интервалу $u_0 < v < u_0 + \beta$, спирально наматывается на траекторию K при $t \rightarrow -\infty$.

Аналогично исследуется поведение траекторий, начинающихся на отрезке L в точках с координатами u , из достаточно малого интервала $u_0 > u > u_0 - \gamma$.

Так как каждая траектория, проходящая достаточно близко от траектории K , пересекает отрезок L в точке с координатой, достаточно близкой к u_0 , то мы разобрали поведение всех траекторий, близких к предельному циклу.

Таким образом, теорема 20 полностью доказана.

Замечание. Для того чтобы объединить в одной формулировке связь между поведением функции $\chi(u)$ вблизи u_0 с поведением как внешних, так и внутренних траекторий, мы рассмотрим неравенства

$$\left. \begin{array}{l} |\chi(u) - u_0| < |u - u_0|, \\ |\chi(u) - u_0| > |u - u_0|. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Если в полуокрестности линии K (внешней или внутренней) выполнено первое из этих неравенств, то точка q находится на линии L ближе к a , чем p , и потому в этой полуокрестности траектории спирально наматываются на K при $t \rightarrow +\infty$. Если же в полуокрестности выполнено второе из неравенств (15), то в этой полуокрестности траектории спирально наматываются на K при $t \rightarrow -\infty$.

В) Функция последований $\chi = \chi_1$ и ее обратная функция $\chi^{-1} = \chi_{-1}$ (см. Б)) имеют непрерывные производные.

Для доказательства напомним, что функция $\chi_k(u)$, $k = \pm 1$, определяется из уравнения (7):

$$\Phi(t_k, g(u)) - g(\chi_k) = 0, \quad (16)$$

где u является независимым переменным, а t_k и χ_k определяются как неявные функции переменного u . Так как функция $\Phi(t, \xi)$ имеет непрерывные частные производные по компонентам вектора ξ (см. теорему 17), а функция $\xi = g(u)$, являющаяся линейной относительно u , имеет непрерывную производную по u , то левая часть соотношения (16) имеет непрерывную производную по u . Поэтому, в силу теоремы 28, неявные функции $t_k(u)$ и $\chi_k(u)$, определяемые уравнением (16), имеют непрерывные производные по u .

Таким образом, предложение В) доказано.

Большую привлекательность имеет геометрическое изучение функции последований $\chi(u)$. Изобразим ее в виде графика уравнения

$$v = \chi(u) \quad (17)$$

в плоскости переменных u , v , считая при этом для удобства, что $u_0 > 0$. Для того чтобы изучить решение уравнения (10), мы рассмотрим наряду с кривой (17) биссектрису первого координатного угла

$$v = u \quad (18)$$

(рис. 45). Для нахождения всех решений уравнения (10) следует найти все точки пересечения линий (17) и (18). Для того чтобы замкнутая траектория K была предельным циклом, необходимо и достаточно, чтобы точка (u_0, u_0) являлась изолированной точкой пересечения графиков (17) и (18).

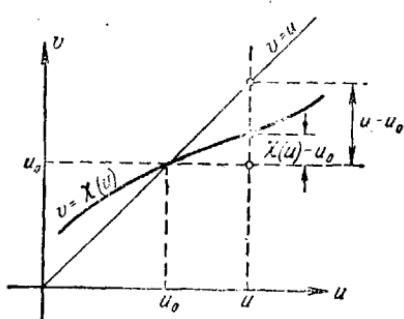


Рис. 45.

Если эти графики не касаются друг друга в точке (u_0, u_0) , т. е. если $\chi'(u_0) \neq 1$, то точка (u_0, u_0) их пересечения обязательно изолированная. В этом случае траектория K называется *грубым* предельным циклом. При $\chi'(u_0) < 1$ (см. рис. 45) в обеих полуокрестностях очевидно выполнено первое из неравенств (15), и, следовательно, предельный цикл K устойчив. При $\chi'(u_0) > 1$ (рис. 46)

выполнено второе из неравенств (15), и, следовательно, предельный цикл K вполне неустойчив.

Если графики (17) и (18) касаются друг друга в точке (u_0, u_0) , но кривая (17) переходит с одной стороны биссектрисы (18) на

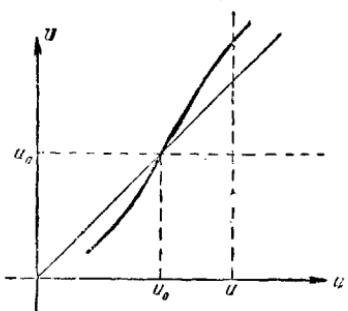


Рис. 46.

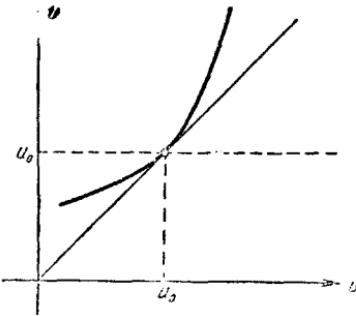


Рис. 47.

другую, то предельный цикл K является либо устойчивым, либо вполне неустойчивым. Если же кривая (17), касаясь биссектрисы (18), находится по одну ее сторону (рис. 47), то соответствующий предельный цикл является полуустойчивым.

Критерий существования предельного цикла

Г) Пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение уравнения (2) (n произвольно), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и остающееся для этих значений t в замкнутом ограниченном множестве F , расположенном в Δ .

Точка p пространства R называется ϕ -предельной точкой решения $\Phi(t)$, если существует такая неограниченно возрастающая последовательность значений (больших t_0)

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k) = p.$$

Совокупность Ω всех ϕ -предельных точек решения $\Phi(t)$ называется его ϕ -предельным множеством. Оказывается, что множество Ω непусто, замкнуто, ограничено и состоит из целых траекторий; последнее означает, что если точка ξ принадлежит Ω , то решение $\Phi(t, \xi)$ с начальными значениями $(0, \xi)$ определено для всех значений t , и вся траектория $\Phi(t, \xi)$ входит в множество Ω . Очевидно, что ϕ -предельное множество траектории $\Phi(t, \xi)$ целиком содержится в Ω .

Докажем предложение Г). Из замкнутости и ограниченности множества F следует, что множество Ω (очевидно, содержащееся в F) непусто и ограничено. Покажем, что оно замкнуто. Пусть

$$p_1, p_2, \dots, p_k, \dots$$

— некоторая последовательность точек множества Ω , сходящаяся к некоторой точке p множества F ; докажем, что p принадлежит Ω . Пусть $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_k, \dots$ и $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots$ — две такие последовательности положительных чисел, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0; \quad \lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \infty.$$

Так как точка p_k принадлежит Ω , то найдется такое значение $t_k \geq s_k$, что расстояние между точками p_k и $\Phi(t_k)$ меньше ϵ_k . Для выбранных значений

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$$

мы получаем

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t_k) = p,$$

а это значит, что точка p входит в Ω .

Покажем теперь, что множество Ω состоит из целых траекторий. Пусть ξ — произвольная точка множества Ω и $\Phi(t, \xi)$ — решение с начальными значениями $(0, \xi)$. Пусть, далее, T — такое значение переменного t (оно может быть и отрицательно), для которого решение $\Phi(t, \xi)$ определено, так что точка $\Phi(T, \xi)$ существует. Так как точка ξ принадлежит Ω , то найдется такая неограниченно возрастающая последовательность

$$t_1, t_2, \dots, t_k, \dots; \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty,$$

что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = \xi. \quad (19)$$

Так как решение $\varphi(t)$ определено для всех достаточно больших значений t , то при заданном T определены (начиная с некоторого k) точки

$$\varphi(t_k + T) = \varphi(T, \varphi(t_k))$$

(см. § 26, В)). Из формулы (19) в силу теоремы 14 мы имеем:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k + T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(T, \varphi(t_k)) = \varphi(T, \xi),$$

а из этого следует, что точка $\varphi(T, \xi)$ принадлежит множеству Ω , а следовательно, и множеству F . Таким образом, траектория $\varphi(t, \xi)$ не может покинуть множества F ни при t возрастающем, ни при t убывающем, а потому в силу предложения В) § 22 она определена для всех значений t .

Итак, предложение Г) доказано.

Рассмотрим некоторые частные случаи ω -предельного множества. Если решение $\varphi(t)$ (см. Г)) есть положение равновесия, т. е. $\varphi(t) \equiv x_0$, то ω -предельное множество решения $\varphi(t)$ состоит, очевидно, из одной точки x_0 . Если $\varphi(t)$ есть периодическое решение, описывающее замкнутую траекторию K , то ω -предельное множество решения $\varphi(t)$, очевидно, совпадает с K . Наконец, если K есть периодическое решение, а $\varphi(t)$ — спирально навертывающаяся на него при $t \rightarrow +\infty$ траектория, то K есть ω -предельное множество решения $\varphi(t)$.

Докажем теперь теорему, дающую возможность установить в некоторых случаях существование периодического решения. В случае аналитических правых частей системы (1) это периодическое решение будет либо предельным циклом, либо будет содержаться внутри семейства периодических траекторий (см. пример 3).

Теорема 21. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (2) ($n = 2$), определенное для всех значений $t \geq t_0$ и остающееся при этих значениях t в замкнутом ограниченном множестве F , содержащемся в Δ , и пусть Ω есть ω -предельное множество решения $\varphi(t)$. Если множество Ω не содержит положений равновесия, то оно состоит из одной замкнутой траектории K . При этом возможны два случая: 1) $\varphi(t)$ есть периодическое решение, а K — описываемая им траектория, 2) траектория, описываемая решением $\varphi(t)$, при $t \rightarrow +\infty$ наматывается на траекторию K , как спираль.

Доказательство. Если $\varphi(t)$ — периодическое решение, то множество Ω состоит из единственной периодической траектории K , описываемой решением $\varphi(t)$, и утверждение теоремы очевидно (слу-

чай 1). Допустим, что решение $\varphi(t)$ не является периодическим и пусть b — произвольная точка множества Ω . Через точку b проведем прямолинейный отрезок L , не коллинеарный вектору $f(b)$ фазовой скорости, выходящему из точки b ($f(b) \neq 0$, так как, по предположению, точка b множества Ω не является положением равновесия), и выберем этот отрезок настолько коротким, чтобы все траектории, проходящие через точки этого отрезка, пересекали его (не касаясь) в том же направлении, что и траектория, проходящая через b (рис. 48). Так как точка b является ω -предельной для траектории $\varphi(t)$, а последняя не является замкнутой, то эта траектория должна, очевидно, бесчисленное множество раз пересечь отрезок L и притом в различных точках (см. А)). Пусть

$a_1 = \varphi(t_1)$ и $a_2 = \varphi(t_2)$ — две следующие друг за другом во времени ($t_1 < t_2$) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L . Кусок траектории $\varphi(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, обозначим через M . Вместе с отрезком $\overline{a_1 a_2}$ он образует замкнутую кривую Q , которая разбивает плоскость на две области G_1 и G_2 . Пусть h — малое положительное число.

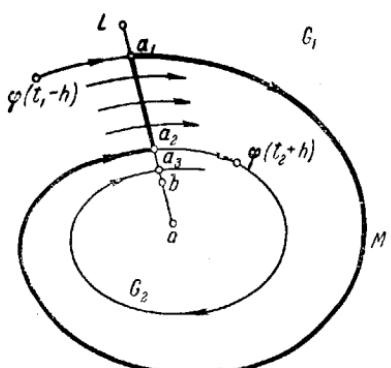


Рис. 49.

ескакается с отрезком L только в своих концах, то концы отрезка L лежат по разные стороны кривой Q . Обозначим через a тот конец отрезка L , который лежит в области G_2 . Траектория $\varphi(t)$, начиная с $t > t_2 + h$, вся протекает в области G_2 и не может пересекать отрезок $\overline{a_1 a_2}$; поэтому точка b не принадлежит отрезку $\overline{a_1 a_2}$ (см. А)), и, следовательно, она должна лежать на отрезке $\overline{aa_2}$. Если теперь $a_3 = \varphi(t_3)$ — следующая (во времени) после a_2 точка пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L , то из аналогичных соображений

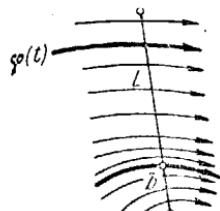


Рис. 48.

видно, что она лежит на отрезке $\overline{ba_2}$ (рис. 49). Обозначая через

$$a_1 = \varphi(t_1), \dots, a_k = \varphi(t_k), \dots$$

следующие друг за другом (во времени) точки пересечения траектории $\varphi(t)$ с отрезком L , мы убедимся, что они образуют на отрезке L монотонную последовательность точек, идущих в направлении от a_1 к b . Покажем, что предел b' последовательности $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ совпадает с b .

Для этого мы, прежде всего, докажем, что последовательность $t_1, t_2, \dots, t_k, \dots$ неограниченно возрастает. Допустим, что $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \tau < +\infty$. Тогда $\varphi(\tau) = b'$ и $f(b') = \varphi'(\tau) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_k)}{\tau - t_k}$, а это невозможно, так как вектор $\varphi(\tau) - \varphi(t_k)$ направлен вдоль отрезка L , а вектор $f(b')$ не коллинеарен этому отрезку. Таким образом, должно быть выполнено соотношение $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = +\infty$, и потому вся траектория $\varphi(t)$ при $t \geq t_1$ пересекается с L лишь в точках $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ Следовательно, эта траектория имеет на отрезке L лишь одну ω -пределную точку b' (см. А)), так что $b' = b$. Отметим, что в проведенном доказательстве было пока использовано лишь то, что сама точка b не является положением равновесия.

Покажем теперь, что траектория $\varphi(t)$ не может входить в ω -пределное множество для какой-либо другой траектории $\Psi(t)$. Допустим противоположное. Тогда каждая точка траектории $\varphi(t)$ является ω -пределной для $\Psi(t)$ (см. Г)); в частности, таковой будет точка a_1 . Так как точка a_1 не является положением равновесия, то в силу доказанного выше последовательные точки

$$b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$$

пересечения траектории $\Psi(t)$ с отрезком L образуют монотонную последовательность, сходящуюся к a_1 , и других ω -пределных точек траектории $\Psi(t)$ на отрезке L не существует. Но это противоречит тому, что все точки a_2, a_3, \dots , лежащие на траектории $\varphi(t)$, являются ω -пределными точками траектории $\Psi(t)$.

Итак, доказано, что *незамкнутая траектория, среди ω -пределных точек которой нет положений равновесия, не может быть сама ω -пределной*.

Так как траектория K содержится в ω -пределном множестве Ω траектории $\varphi(t)$, а это множество замкнуто (см. Г)), то все ω -пределные точки траектории K содержатся в Ω и потому не являются положениями равновесия. Таким образом, к траектории K можно применить доказанное выше предложение, так что траектория K должна

быть замкнутой. Из всего построения видно, что траектория $\varphi(t)$ наматывается на K , как спираль, и потому множество Ω состоит лишь из замкнутой траектории K , проходящей через точку b .

Таким образом, теорема 21 доказана.

Примеры

1. Дадим пример системы уравнений вида (1) ($n=2$), имеющей периодические решения различного типа, в частности предельные циклы различных видов. Первоначально мы зададим ее в полярных координатах φ, ρ , а затем уже преобразуем в декартовы координаты x, y . Имея в виду последующее преобразование к декартовым координатам, мы зададим ее в виде:

$$\dot{\varphi} = 1; \quad \dot{\rho} = \rho g(\rho^2), \quad (20)$$

где $g(u)$ — непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, определенная для всех неотрицательных его значений. При рассмотрении в полярных координатах мы будем использовать лишь положительные значения для ρ .

Множество всех положительных значений ρ , для которых $g(\rho^2)=0$, обозначим через N , а его дополнение в множестве положительных чисел — через D . Каждому числу u_0 из N соответствует, очевидно, решение

$$\varphi = t, \quad \rho = u_0$$

уравнения (20); соответствующая траектория K_{u_0} замкнута; она является окружностью в плоскости P с центром в начале координат и радиусом u_0 . Так как множество N замкнуто в совокупности всех положительных чисел, то D открыто и состоит из конечного или счетного числа интервалов, попарно друг друга не пересекающих. Пусть $u_1 < \rho < u_2$ — один из конечных интервалов. Тогда замкнутые траектории K_{u_1} и K_{u_2} ограничивают в плоскости P кольцо Q . Для всех чисел ρ интервала $u_1 < \rho < u_2$ функция $g(\rho^2)$ сохраняет знак, так что на всем интервале имеет место одно из неравенств:

$$g(\rho^2) < 0; \quad g(\rho^2) > 0. \quad (21)$$

Пусть

$$\varphi = t, \quad \rho = \rho(t, u) \quad (22)$$

— решение системы (20) с начальными значениями $t=0, \varphi=0, \rho=u$, где $u_1 < u < u_2$. В силу доказанного в примере 1 § 15 функция $\rho(t, u)$ определена для всех значений t и при $t \rightarrow +\infty$ приближается к одному из концов интервала $u_1 < \rho < u_2$, а при $t \rightarrow -\infty$ — к другому. Из этого следует, что траектория (22) при $t \rightarrow +\infty$ и $t \rightarrow -\infty$ наматывается, как спираль на окружности K_{u_1}, K_{u_2} . Именно, если выполнено первое из неравенств (21), то траектория (22) представляет собой

спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \rightarrow +\infty$ и на K_{u_2} при $t \rightarrow -\infty$ (рис. 50). Если выполнено второе из неравенств (21), то решение (22) представляет собой спираль, наматывающуюся на K_{u_1} при $t \rightarrow -\infty$ и на K_{u_2} при $t \rightarrow +\infty$ (рис. 51). Таким образом, кольцо Q заполнено однотипными спиральями одного из двух видов в зависимости от того, какое из неравенств (21) выполняется на интервале $u_1 < \rho < u_2$. Если множество N ограничено и u^* — его верхняя грань, то на бесконечном интервале $u^* < \rho < +\infty$ траектории (22) в одну сторону наматываются на окружность K_{u^*} , а в другую сторону уходят в бесконечность.

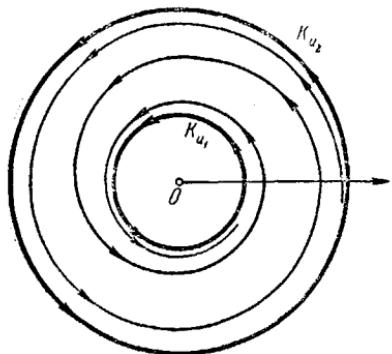


Рис. 50.

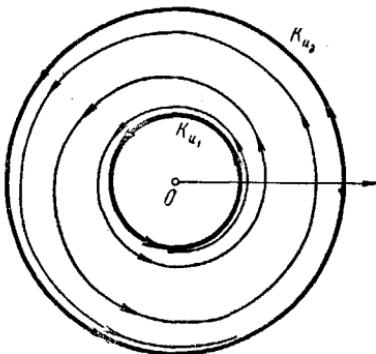


Рис. 51.

Если точка u_0 множества N является его изолированной точкой, то замкнутая траектория K_{u_0} является предельным циклом, вид которого зависит от типа спиралей, заполняющих кольца, примыкающие к траектории K_{u_0} . Если точка u_0 множества N не является его изолированной точкой, то периодическое решение K_{u_0} не является предельным циклом. Если при этом в N содержится целый интервал с центром в u_0 , то периодическое решение K_{u_0} содержитя внутри целого семейства периодических решений, составляющих совокупность концентрических окружностей с общим центром в начале координат. Если к числу u_0 с одной стороны примыкает целый отрезок чисел множества N , а с другой — интервал из D , то траектория K_{u_0} является крайней в семействе замкнутых траекторий, примыкающих к ней с одной стороны, а с другой стороны на нее наматывается семейство спиральных траекторий. Возможны, однако, и более сложные случаи примыкания замкнутых траекторий к периодическому решению K_{u_0} . Их легко себе представить; например, N может быть канторовым совершенным множеством.

Запишем теперь систему (20) в декартовых координатах, положив:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi. \quad (23)$$

Дифференцируя соотношения (23), мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi = \rho g(\rho^2) \cdot \frac{x}{\rho} - \rho \cdot \frac{y}{\rho} = x g(x^2 + y^2) - y; \\ \dot{y} &= \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi = \rho g(\rho^2) \cdot \frac{y}{\rho} + \rho \cdot \frac{x}{\rho} = y g(x^2 + y^2) + x. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Итак, в декартовых координатах система (20) записывается в виде:

$$\dot{x} = xg(x^2 + y^2) - y; \quad \dot{y} = yg(x^2 + y^2) + x. \quad (25)$$

(Здесь g может быть, например, произвольным многочленом.) Система (25) имеет в начале координат положение равновесия.

2. Пусть

$$\dot{x}^1 = f^1(x^1, x^2, \mu); \quad \dot{x}^2 = f^2(x^1, x^2, \mu)$$

— нормальная автономная система второго порядка, правые части которой зависят от числового параметра μ и обладают непрерывными частными производными первого порядка по всем своим аргументам x^1, x^2, μ . Пусть, далее,

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (26)$$

— векторная запись этой системы. Решение уравнения (26) с начальными значениями $0, \xi$ обозначим через $\Phi(t, \xi, \mu)$; предположим, что $\Phi(t, \xi_0, \mu_0)$ есть периодическое решение уравнения (26) при ($\mu = \mu_0$) периода T . Выясним вопрос о том, что происходит с этим решением при изменении параметра μ вблизи значения μ_0 .

Решения уравнения (26) будем изображать в одной и той же плоскости P независимо от значения параметра μ . Пусть K — замкнутая траектория, соответствующая решению $\Phi(t, \xi_0, \mu_0)$ и L — гладкая кривая, заданная в плоскости P параметрическим векторным уравнением

$$x = \psi(u),$$

которая пересекается с траекторией K в единственной точке

$$\xi_0 = \Phi(0, \xi_0, \mu_0) = \Phi(T, \xi_0, \mu_0) = \Psi(u_0), \quad (27)$$

не касаясь ее. Рассмотрим векторное уравнение:

$$\Phi(t, \Psi(u), \mu) - \Psi(v) = 0, \quad (28)$$

в котором независимыми переменными будем считать μ, u , а неизвестными функциями t и v . Независимые переменные пусть меняются: u вблизи u_0 , μ вблизи μ_0 . Решения будем искать при t , близком к T , v , близком к u_0 . При $u = u_0, \mu = \mu_0$ имеется очевидное решение уравнения (28): $t = T, v = u_0$ (см. (27)), и функциональный определитель соответствующей системы уравнений при этих значениях переменных отличен от нуля, так как векторы $f(\xi_0, \mu_0)$ и $\psi'(u_0)$ независимы. При $\mu = \mu_0$ уравнение (28) определяет функцию последования

$v = \chi(u, \mu_0)$ уравнения (26) ($\mu = \mu_0$) вблизи замкнутой траектории K . При μ , близком к μ_0 , функция $v = \chi(u, \mu)$ также определяется из уравнения (28) и может считаться *функцией последовательности* уравнения (26) вблизи периодического решения K . Однако уравнение (26) при $\mu \neq \mu_0$ может и не иметь периодического решения. Для отыскания периодического решения уравнения (26) при μ , близком к μ_0 , рассмотрим уравнение

$$\chi(u, \mu) - u = 0 \quad (29)$$

относительно неизвестной функции $u(\mu)$ переменного μ . Если производная левой части уравнения (29) по переменному u при $u = u_0$, $\mu = \mu_0$ отлична от нуля, т. е. если

$$\frac{\partial}{\partial u} \chi(u_0, \mu_0) \neq 1, \quad (30)$$

то уравнение (29) заведомо имеет дифференцируемое решение $u(\mu)$, и тогда уравнение (26) имеет при μ , близком к μ_0 , единственное

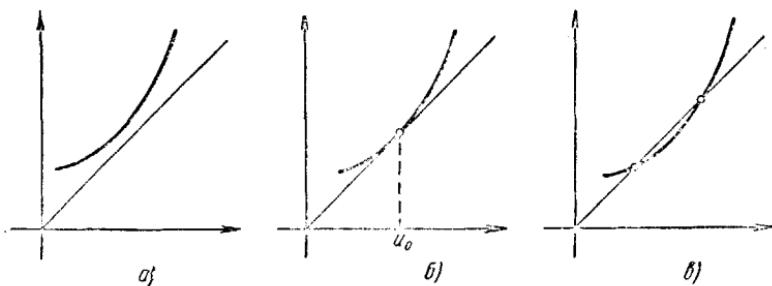


Рис. 52.

периодическое решение, гладко зависящее от μ и превращающееся в K при $\mu = \mu_0$. Условие (30) означает предположение грубости цикла K . В полученном результате заключается оправдание термина «грубый». Грубый предельный цикл не исчезает (и остается грубым) при малых изменениях правых частей системы, он «прочен» при этих изменениях.

Если график уравнения

$$v = \chi(u, \mu) \quad (31)$$

в плоскости переменных u , v при $\mu = \mu_0$ касается в точке (u_0, v_0) биссектрисы

$$v = u \quad (32)$$

с порядком касания единица (рис. 52, б), то кривая (31) при $\mu = \mu_0$ лежит по одну сторону биссектрисы (32), и предельный цикл K является

полуустойчивым (рис. 53, б). При изменениях параметра μ вблизи μ_0 , наиболее естественное поведение графика (31) заключается в том, что при значениях μ , лежащих по одну сторону от μ_0 , точка пересечения графиков (31) и (32) вовсе исчезает (рис. 52, а), а при значениях μ , лежащих по другую сторону, появляются две точки пересечения этих графиков (рис. 52, в), так что у уравнения (26) появляются два грубых предельных цикла, близких к K (рис. 53, в). Таким образом, при прохождении параметра μ через значение μ_0 мы сначала не имеем предельного цикла (рис. 53, а), далее при $\mu = \mu_0$ появляется один полуустойчивый цикл, и при дальнейшем изменении параметра μ он

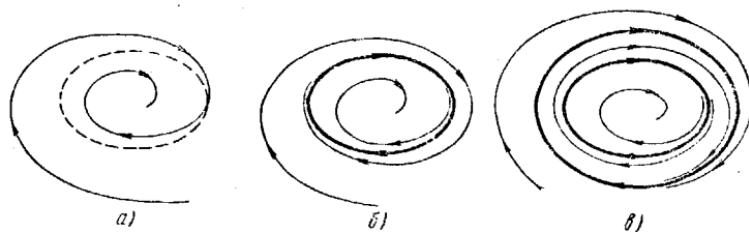


Рис. 53.

распадается на два грубых предельных цикла, близких к K . Описанное явление принято называть «рождением» предельных циклов уравнения (26) при изменении его правой части.

3. Отметим некоторые очень важные свойства периодического решения K уравнения (2) в случае аналитических правых частей. Здесь мы без доказательства используем тот факт, что решение $\varphi(t, \xi)$ уравнения (2) является в этом случае аналитической функцией переменных t и ξ^1, ξ^2 . При построении функции последований будем считать, что кривая L задается аналитическим уравнением. В этих предположениях функция последований $\chi(u)$ оказывается аналитической, будучи решением аналитического уравнения.

Так как нулям функции $\chi(u)$ — u соответствуют периодические решения уравнения (2), то ввиду аналитичности функции $\chi(u)$ возможны лишь два взаимно исключающих друг друга случая: 1) K есть предельный цикл — случай, когда u_0 есть изолированный нуль функции $\chi(u)$ — u ; 2) Периодическое решение K содержится внутри семейства периодических решений — случай, когда функция $\chi(u)$ — u тождественно равна нулю. Если на траекторию K спирально наворачивается какая-либо другая траектория, то K не содержится внутри семейства периодических решений и, следовательно, является предельным циклом. Таким образом, при аналитических правых частях в случае 2) теоремы 21 периодическое решение K является предельным циклом.

§ 29. Ламповый генератор

Здесь схематически будет описано устройство простейшего лампового генератора — прибора, являющегося источником периодических (незатухающих) электрических колебаний. Будет дана качественная

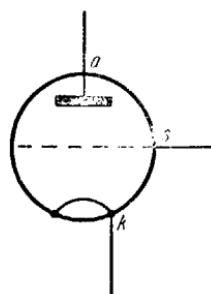


Рис. 54.

математическая теория работы генератора. Уравнение, описывающее работу лампового генератора, нелинейно. Его предельный цикл и соответствует периодическим колебаниям, возбуждаемым генератором. Адекватность математического понятия предельного цикла и физического понятия незатухающего колебания, возбуждаемого ламповым генератором, была впервые установлена выдающимся советским ученым А. А. Андроновым. До исследований Андронова работу лампового генератора пытались объяснить при помощи линейных дифференциальных уравнений, что не могло дать правильной математической картины работы генератора.

А) Триод (один из видов электронной лампы) представляет собой трехполюсник *aks*. Условное изображение триода показано на рис. 54. Здесь *a* — анод, *k* — катод, *s* — сетка. Между полюсами *s* и *k* подается разность напряжений U_s (сеточное напряжение), однако ток между полюсами *s* и *k* отсутствует; от полюса *a* к полюсу *k* через лампу течет ток I_a (анодный ток). Закон, управляющий работой триода, записывается формулой

$$I_a = f(U_s). \quad (1)$$

Функция f называется *характеристикой* триода. Мы будем считать, что она является монотонно возрастающей и положительной и удовлетворяет условиям:

$$\lim_{U_s \rightarrow -\infty} f(U_s) = 0,$$

$$\lim_{U_s \rightarrow +\infty} f(U_s) = I_N,$$

где I_N — ток насыщения триода (рис. 55). Обычно предполагают также, что максимум функции $f'(U_s)$ достигается в точке $U_s = 0$.

Описанный в А) под наименованием триода трехполюсник в действительности включает в себя, кроме электронной лампы, еще анодную батарею, батарею сеточного смещения и батарею накаливания катода.

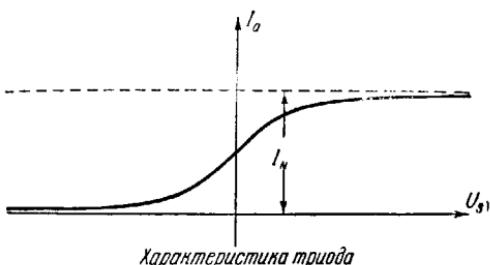


Рис. 55.

Б) Ламповый генератор с колебательным контуром в анодной цепи имеет следующее устройство (рис. 56). Он имеет четыре узла *a*, *k*, *s*, *b* и состоит из триода *aks* (см. А)) с характеристикой $f(U_s)$, конденсатора *ak* с емкостью C , сопротивления *ab* величины R , индуктивности *bk* величины L и еще одной индуктивности *sk*, величина которой не имеет значения.

Индуктивности *kb* и *ks* связаны отрицательной взаимоиндукцией $-M$ ($M > 0$), которая осуществляется так называемую обратную связь в ламповом генераторе. Если обозначить через J силу тока, идущего через сопротивление *ba*, или, что то же самое, через индуктивность *kb*:

$$J = I_{ba} = I_{kb}$$

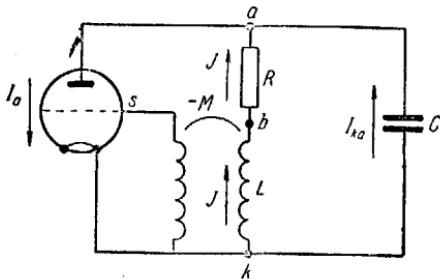


Рис. 56.

то оказывается, что величина J , как функция времени t , удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$L\ddot{J} + R\dot{J} + \frac{J}{C} = \frac{1}{C}f(MJ). \quad (2)$$

Выведем уравнение (2). В силу первого закона Кирхгофа мы имеем:

$$J + I_{ka} = I_a \quad (3)$$

где I_{ka} — ток, идущий через конденсатор *ka*. Кроме того, в силу свойств триода имеем:

$$I_{sk} = 0. \quad (4)$$

Применяя второй закон Кирхгофа к колебательному контуру *kbak*, получаем (см. (4)):

$$L\dot{I}_{kb} + RI_{ba} + \frac{1}{C} \int I_{ak} dt = 0.$$

Дифференцируя это соотношение, получаем:

$$L\ddot{I}_{kb} + R\dot{I}_{ba} + \frac{1}{C} I_{ak} = 0. \quad (5)$$

В силу взаимоиндукции между индуктивностями *kb* и *ks* получаем (см. (4), а также § 13, Б)):

$$U_s = MI_{kb}. \quad (6)$$

Таким образом, из соотношений (1), (3), (5), (6) следует (2).

В) Уравнение (2) в фазовой плоскости переменных J, \dot{J} имеет единственное положение равновесия с координатами:

$$J=f(0), \quad \dot{J}=0. \quad (7)$$

Это положение равновесия асимптотически устойчиво, если

$$R > \frac{M}{C} f'(0), \quad (8)$$

и вполне неустойчиво (см. § 26, Е)), если

$$R < \frac{M}{C} f'(0). \quad (9)$$

Бесконечно удаленная точка плоскости переменных J, \dot{J} во всех случаях вполне неустойчива. Это значит, что существует настолько большой круг K в плоскости J, \dot{J} , что всякая траектория уравнения (2), начиная с некоторого момента времени, приходит в этот круг и остается в нем. При выполнении неравенства (9) положение равновесия (7) также вполне неустойчиво. Таким образом, в силу теоремы 21 (см. § 28) ω -предельное множество любой траектории, отличной от положения равновесия (7), представляет собой замкнутую траекторию. Итак, в случае выполнения неравенства (9), ламповый генератор является источником периодических незатухающих электрических колебаний.

Замечание. При надлежащем выборе характеристики f уравнение (2) имеет единственный предельный цикл, а все остальные траектории уравнения (2), отличные от положения равновесия (7), наматываются на него. Одна из характеристик, обладающих этим свойством, будет указана в примере.

Для доказательства предложения В) введем вместо неизвестной функции J новую неизвестную функцию x , положив:

$$J = x + f(0) \quad (10)$$

с тем, чтобы точке (7) соответствовало начало координат плоскости x, \dot{x} .

Сделав подстановку (10), получаем из уравнения (2) уравнение

$$\ddot{x} + \frac{R}{L} \dot{x} + \frac{1}{LC} x = \frac{1}{LC} [f(M\dot{x}) - f(0)]. \quad (11)$$

Функцию переменного \dot{x} , стоящую в правой части этого уравнения, обозначим через $g(\dot{x})$. Непосредственно видно, что функция g является ограниченной, монотонно возрастающей и обращается в нуль лишь при нулевом значении аргумента (рис. 57). Полагая сверх того,

$$\frac{R}{L} = 2\delta, \quad \frac{1}{LC} = \omega^2,$$

мы запишем уравнение (11) в виде:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = g(\dot{x}).$$

Вводя новое переменное $y = \dot{x}$, мы из этого уравнения получаем нормальную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g(y). \end{cases} \quad (12)$$

Для отыскания положений равновесия системы (12) приравниваем ее правые части нулю:

$$\begin{cases} y = 0, \\ -\omega^2 x - 2\delta y + g(y) = 0. \end{cases}$$

Полученная система имеет единственное решение

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Таким образом, начало координат является единственным положением равновесия системы (12), а из этого следует, что единственным положением равновесия уравнения (2) является точка (7).

Выясним теперь условия устойчивости положения равновесия $(0, 0)$ системы (12), для чего линеаризуем эту систему в точке $(0, 0)$. Мы получаем систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + g'(0)y. \end{cases} \quad (13)$$

Легкие вычисления дают характеристический многочлен

$$\lambda^2 + (2\delta - g'(0))\lambda + \omega^2$$

линейной системы (13). В новых обозначениях условия (8) и (9) соответственно принимают вид: $2\delta > g'(0)$, $2\delta < g'(0)$. Таким образом, при выполнении условия (8) положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво (см. теорему 19 и § 9, Б)), а при выполнении условия (9) оно вполне неустойчиво (см. § 26, Е)).

Для выяснения поведения траекторий системы (12) в **далеких** частях фазовой плоскости x, y рассмотрим линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y, \end{cases} \quad (14)$$

полученную из системы (12) отбрасыванием ограниченного во всей плоскости члена $g(y)$. Легкие вычисления дают характеристический

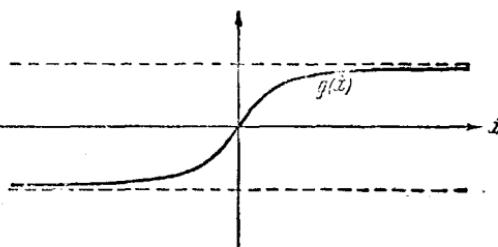


Рис. 57.

многочлен системы (14):

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2; \quad (15)$$

так как числа 2δ и ω^2 положительны, то его корни имеют отрицательные действительные части. Таким образом, в силу предложения Д) § 26 для линейной системы (14) существует функция Ляпунова $W(x, y)$, удовлетворяющая условию:

$$\dot{W}_{(14)}(x, y) \leq -\beta W(x, y). \quad (16)$$

Вычислим теперь производную $\dot{W}_{(12)}(x, y)$ функции $W(x, y)$ в силу системы (12). Мы имеем:

$$\dot{W}_{(12)}(x, y) = \dot{W}_{(14)}(x, y) + \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} g(y). \quad (17)$$

Так как функция $g(y)$ ограничена, то имеет место неравенство

$$\left| \frac{\partial W(x, y)}{\partial y} \cdot g(y) \right| \leq \gamma \sqrt{W(x, y)} \quad (18)$$

(см. формулу (14) § 26), где γ — некоторая положительная константа.

Полагая теперь

$$c = \frac{2\gamma}{\beta}, \quad \alpha = \frac{\beta}{4},$$

мы из (16), (17) и (18) получаем неравенство

$$\dot{W}_{(12)}(x, y) \leq -2\alpha W(x, y) \quad \text{при} \quad W(x, y) \geq c^2. \quad (19)$$

Уравнение

$$W(x, y) = c^2 \quad (20)$$

определяет в плоскости x, y эллипс. Из неравенства (19) непосредственно следует, что в точке (x, y) , принадлежащей эллипсу (20) функция $W(x, y)$ убывает вдоль траектории системы (12), проходящей через точку (x, y) . Таким образом, все траектории системы (12), пересекая эллипс (20), входят внутрь этого эллипса. Если

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (21)$$

— решение системы (12), начинающееся в точке (ξ, η) вне эллипса (20), то, полагая

$$w(t) = W(\varphi(t), \psi(t)),$$

мы для функции $w(t)$ получаем неравенство

$$\dot{w}(t) \leq -2\alpha w(t), \quad (22)$$

верное при условии

$$w(t) \geq c^2.$$

Интегрируя неравенство (22), получаем:

$$W(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \leq W(\xi, \eta) e^{-2at}.$$

Из этого следует, что траектория (21) обязательно входит в эллипс (20). При этом ни одна траектория не может выйти из этого эллипса, так как в его граничных точках все траектории входят внутрь.

Пусть теперь K — некоторая окружность в плоскости x, y , содержащая эллипс (20). Из доказанного следует, что всякая траектория системы (12), отличная от положения равновесия $(0, 0)$, обязательно входит в окружность K и остается в ней. Так как точка $(0, 0)$ вполне неустойчива, то траектория эта не может иметь ее в числе своих ω -пределных точек и потому в силу теоремы 21 (см. § 28) она есть либо спираль, наматывающаяся на периодическое решение, либо периодическое решение.

Итак, предложение В) доказано.

Пример

А. А. Андronov, который впервые составил для лампового генератора нелинейное уравнение (2), рассмотрел случай, когда характеристика f триода имеет особо простой вид, а именно она равна нулю при отрицательных значениях аргумента и равна положительной константе b при положительных значениях аргумента. Считая, что $f(0) = \frac{b}{2}$ и производя замену переменных (10), мы придем к системе (12), в которой функция $g(y)$ определяется условием:

$$g(y) = \begin{cases} -\omega^2 a & \text{при } y < 0, \\ \omega^2 a & \text{при } y > 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $a = \frac{b}{2}$. Система (12) с выбранной таким образом разрывной функцией $g(y)$ записывается при $y > 0$, т. е. в верхней полуплоскости, в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y + \omega^2 a, \end{cases} \quad (24)$$

а при $y < 0$, т. е. в нижней полуплоскости, в виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega^2 x - 2\delta y - \omega^2 a. \end{cases} \quad (25)$$

Мы будем считать, что корни многочлена (15) комплексные. Таким образом, положение равновесия $(0, 0)$ системы (14) представляет собой устойчивый фокус (см. § 16, В)); системы же (24) и (25) отличаются от системы (14) только сдвигом: их положения равновесия помещены не в начале координат, как у системы (14), а в точке $(a, 0)$.

у системы (24) и в точке $(-a, 0)$ у системы (25). Заметим, что спирали линейной системы (14) наматываются на положение равновесия $(0, 0)$ по часовой стрелке и что при прохождении полувитка спирали фазовая точка приближается к началу координат, так что ее первоначальное расстояние от начала координат умножается на некоторое число $\lambda < 1$, не зависящее от начального положения точки (см. § 16, В)).

Для того чтобы представить себе фазовую плоскость системы (12) в случае, когда функция $g(y)$ определяется условиями (23), нужно верхнюю полуплоскость заполнить полувитками спиральных траекторий системы (24), а нижнюю — полувитками спиральных траекторий системы (25); при переходе же через прямую $y = 0$ следует непрерывно переходить с одних траекторий на другие. Исходя из этого описания фазовой картины системы (12) (см. (23)), будем искать ее замкнутые траектории.

Рассмотрим траекторию системы (12) (см. (23)), начинающуюся на оси абсцисс в точке с координатой $\xi > 0$. Так как движение в фазовой плоскости системы (12) происходит по часовой стрелке, то из выбранной точки траектория пойдет в нижнюю полуплоскость и, следовательно, будет управляться системой (25). После прохождения полувитка спирали в нижней полуплоскости фазовая точка вновь попадает на ось абсцисс в точку с координатой

$$-(a + \lambda(a + \xi)). \quad (26)$$

Это следует из того, что при прохождении полувитка спирали расстояние фазовой точки от положения равновесия $(-a, 0)$ умножается на λ . Точка с координатой (26), лежащая на оси абсцисс, будет затем двигаться в силу системы (24) и, после прохождения полувитка спирали в верхней полуплоскости, придет на ось абсцисс в точку с координатой:

$$a + \lambda(2a + \lambda(a + \xi)). \quad (27)$$

Таким образом, траектория, начинающаяся в точке с координатой $\xi > 0$ на положительной части оси абсцисс, после полного обхода вновь попадает на положительную часть оси абсцисс, но уже в точку с координатой (27), и мы получаем отображение χ положительной полуоси абсцисс в себя, определяемое соотношением

$$\chi(\xi) = a + 2\lambda a + \lambda^2 a + \lambda^3 \xi.$$

Функция $\chi(\xi)$ есть функция последования для системы (12) (см. (23)). Имеется лишь одно значение ξ , удовлетворяющее условию

$$\chi(\xi) = \xi,$$

и этому значению ξ соответствует предельный цикл системы (12), притом грубый и устойчивый, так как $\chi'(\xi) = \lambda^3 < 1$ (см. § 28).