§ 30. Положения равновесия автономной системы второго порядка

Здесь будут классифицированы и изучены невырожденные положения равновесия нормальной автономной системы уравнений второго порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \tag{1}$$

причем будет предполагаться, что правые части дважды непрерывно дифференцируемы, а в теореме 23 — что они трижды непрерывно дифференцируемы.

Невырожденные положения равновесия

Так как положение равновесия всегда можно принять за начало координат, то мы будем предполагать, что подлежащее изучению положение равновесия системы (1) есть начало координат. Линеаризуя систему (1) в точке (0, 0), т. е. разлагая правые части системы (1) в ряды Тейлора по x и y и отбрасывая члены второго порядка, получаем линейную систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y, \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть λ и μ — собственные значения матрицы (a_j^i). Положение равновесия (0, 0) системы (1) называется *невырожденным*, если числа λ и μ не равны между собой и их действительные части отличны от нуля. Поведение траекторий линейной системы (2) было детально изучено в § 16. Здесь будет показано, что для невырожденного положения равновесия поведение траекторий вблизи положения равновесия (0, 0) системы (1) в существенном совпадает с поведением траекторий вблизи положения равновесия (0, 0) системы (2).

За положением равновесия (0, 0) системы (1) сохраняется наименование, данное в § 16. Если числа λ и μ оба действительны и отрицательны, то положение равновесия называется *устойчивым узлом*. Если числа λ и μ оба действительны и положительны, то положение равновесия называется *неустойчивым узлом*. Если числа λ и μ комплексно-сопряжены и имеют отрицательную действительную часть, то положение равновесия называется *устойчивым фокусом*. Если числа λ и μ комплексно-сопряжены и имеют положительную действительную часть, то положение равновесия называется *неустойчивым фокусом*. Наконец, если числа λ и μ действительны и имеют различные знаки, то положение равновесия называется *седлом*.

Наиболее простые свойства поведения траекторий вблизи положений равновесия можно установить, непосредственно опираясь на теорему Ляпунова (теорема 19) и предложение Е) § 26. Таким образом, мы получаем предложение:

А) Устойчивый узел и устойчивый фокус являются асимптотически устойчивыми положениями равновесия. Неустойчивый узел и неустойчивый фокус являются вполне неустойчивыми положениями равновесия.

Это предложение в значительной степени уже решает вопрос о поведении траекторий вблизи узла и фокуса. Действительно, если известно, что данное положение равновесия является асимптотически устойчивым, то с точки зрения приложений уже часто бывает неважно, каким именно способом стремятся к нему траектории. То же самое относится и ко вполне неустойчивому положению равновесия. Совсем другую роль играет седло: зная поведение траекторий вблизи него, можно высказать ценные суждения о поведении траекторий на всей плоскости. В то же время теорема о поведении траекторий вблизи седла доказывается значительно труднее, чем соответствующие теоремы относительно узла и фокуса.

Произведем теперь в фазовой плоскости системы (1) линейное преобразование координат, с тем, чтобы придать ей наиболее простой вид:

Б) Разлагая правые части системы (1) в ряды Тейлора по x и y с точностью до членов второго порядка, получим:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1^1 x + a_2^1 y + r(x, y), \\ \dot{y} = a_1^2 x + a_2^2 y + s(x, y), \end{cases} \tag{3}$$

где остаточные члены $r(x, y)$ и $s(x, y)$ в точке $x=0$, $y=0$ обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по x и y и могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} r(x, y) = r_{11}x^2 + 2r_{12}xy + r_{22}y^2, \\ s(x, y) = s_{11}x^2 + 2s_{12}xy + s_{22}y^2, \end{cases} \tag{4}$$

причем коэффициенты r_{ij} и s_{ij} этих «квадратичных форм» являются функциями переменных x, y, ограниченными вблизи начала координат. Оказывается, что, производя действительное линейное преобразование величин x, y в величины ξ, η, можно привести систему (3) к простому виду, причем следует различать два случая: 1) Если собственные значения λ, μ матрицы (a_j^i) действительны и различны, то система уравнений для ξ и η записывается в виде:

$$\dot{\xi} = \lambda\xi + \rho(\xi, \eta), \qquad \dot{\eta} = \mu\eta + \sigma(\xi, \eta). \tag{5}$$

2) Если собственные значения матрицы (a_j^i) комплексно-сопряжены, т. е. имеют вид $\mu + i\nu$ и $\mu - i\nu$, то система уравнений для ξ и η

записывается в виде:

$$\dot{\xi} = \mu\xi - \nu\eta + \rho(\xi, \eta), \qquad \dot{\eta} = \nu\xi + \mu\eta + \sigma(\xi, \eta). \tag{6}$$

В обоих случаях остаточные члены $\rho(\xi, \eta)$ и $\sigma(\xi, \eta)$ обладают теми свойствами, которые были отмечены выше для функций $r(x, y)$ и $s(x, y)$. В первом случае система принимает вид (5), если принять за оси направления собственных векторов матрицы (a_j^i).

Для доказательства предложения Б) достаточно найти такое линейное преобразование координат x, y в координаты ξ, η, чтобы линейная система (2) приобрела простой вид. Такое преобразование уже было найдено (см. § 14, Е)). Применяя то же преобразование к системе (3), мы получим систему (5) или, соответственно, систему (6).

Поведение траекторий вблизи седла

Теорема 22. *Предположим, что положение равновесия $O = (0, 0)$ системы (1) является седлом. Пусть P — прямая, проходящая через точку O в направлении собственного вектора матрицы (a_j^i) с отрицательным собственным значением, а Q — прямая, проходящая через точку O в направлении собственного вектора матрицы (a_j^i) с положительным собственным значением. Тогда* (рис. 58) *существуют ровно две траектории U_1 и U_2 системы* (1), *которые при $t \to +\infty$ асимптотически приближаются к точке O. Эти траектории вместе с точкой O образуют непрерывную дифференцируемую кривую U, касающуюся прямой P в точке O. Точно так же существуют ровно две траектории V_1 и V_2 системы* (1), *которые при $t \to -\infty$ асимптотически приближаются к точке O; эти траектории вместе с точкой O образуют непрерывную дифференцируемую кривую V, касающуюся прямой Q в точке O. Остальные траектории системы* (1), *проходящие вблизи точки O, ведут себя, в общем, так же, как в случае линейного уравнения* (см. § 16).

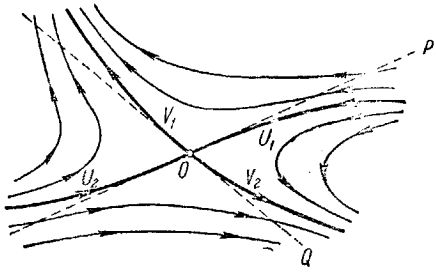

Рис. 58.

Траектории U_1 и U_2 называются *устойчивыми усами* седла O, а траектории V_1 и V_2 называются *неустойчивыми усами* седла O.

Доказательство. Прежде всего примем прямую P за ось абсцисс, а прямую Q — за ось ординат; тогда система (1) запишется в виде (5). Переходя снова к обозначениям x и y вместо ξ и η, мы

получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = \lambda x + r(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y) = \mu y + s(x, y), \end{cases} \tag{7}$$

где $r(x, y)$ и $s(x, y)$ имеют вид (4); здесь $\lambda < 0$, $\mu > 0$. Отметим для дальнейшего, что в последующем доказательстве будут использованы лишь следующие свойства правых частей системы (7): непрерывная дифференцируемость правых частей по x и y и ограниченность функций r_j^i и s_j^i (см. (4)) вблизи начала координат.

Доказательство распадается на две главные части: а) доказательство существования уса U_1, подходящего к точке O вдоль положительной части оси абсцисс при убывании координаты x; б) доказательство его единственности. Существование и единственность уса U_3 доказываются аналогично. Для рассмотрения усов V_1 и V_2 достаточно изменить знак времени t: при этом устойчивые усы перейдут в неустойчивые и наоборот.

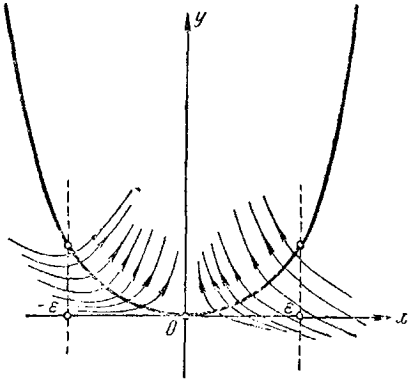

Рис. 59.

Перейдем к доказательству существования уса U_1. Для этого положим:

$$\omega(x, y) = y - \alpha x^2 \qquad (\alpha > 0)$$

и рассмотрим в плоскости (x, y) параболу, определяемую уравнением

$$\omega(x, y) = 0. \tag{8}$$

Парабола (8) разбивает плоскость на две части: положительную, содержащую положительную полуось ординат, и отрицательную. Положительная область является внутренней для параболы. Покажем прежде всего, что, если α — достаточно большое положительное число, а x достаточно мало ($|x| \leqslant \varepsilon$), то все траектории системы (7) (за исключением положения равновесия O), пересекающие участок $|x| \leqslant \varepsilon$ параболы (8), переходят с отрицательной стороны на положительную, т. е. снаружи внутрь (рис. 59). Для этого вычислим производную $\dot{\omega}_{(7)}(x, y)$ функции $\omega(x, y)$. В силу системы (7) в точках параболы (8) мы имеем:

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2) = \dot{y} - 2\alpha x \dot{x} = \alpha(\mu - 2\lambda) x^2 + s_{11} x^2 + \ldots$$

(здесь невыписанные члены содержат x по крайней мере в 3-й степени). Число $\mu - 2\lambda$ положительно, а функция s_{11} ограничена в окрестности начала координат; поэтому можно выбрать настолько

большое число α, что

$$\alpha(\mu - 2\lambda) - |s_{11}| > \delta, \qquad \delta > 0.$$

Опущенные члены выражения для $\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2)$ имеют, по крайней мере, третий порядок малости по x, и потому существует такое положительное ε, что при $|x| \leqslant \varepsilon$ мы имеем:

$$\dot{\omega}_{(7)}(x, \alpha x^2) \geqslant 0,$$

причем равенство имеет место лишь при $x = 0$, т. е. в точке O. Из доказанного следует, что все траектории системы (1), за исключением положения равновесия O, пересекают рассмотренный участок параболы (8) в направлении роста функции $\omega(x, y)$, т. е. снаружи внутрь.

Точно так же доказывается, что участок $|x| \leqslant \varepsilon$ параболы

$$y + \alpha x^2 = 0 \tag{9}$$

пересекается всеми траекториями системы (7), за исключением положения равновесия O, снаружи внутрь (внутренняя часть параболы (9) содержит отрицательную полуось ординат, рис. 60).

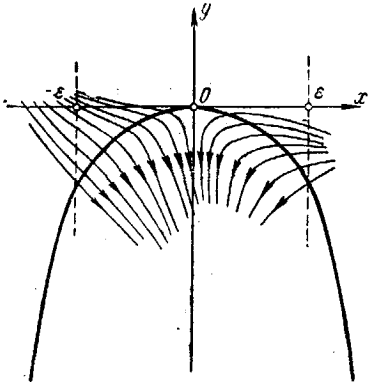

Рис. 60.

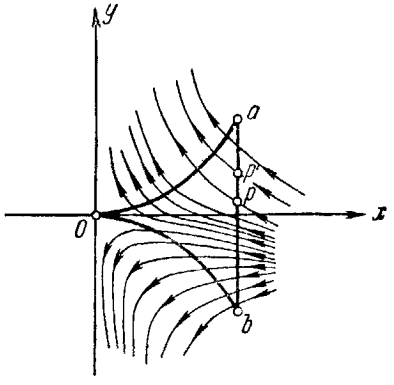

Рис. 61.

Пусть a и b — точки, в которых прямая $x = \varepsilon$ пересекает соответственно параболы (8) и (9). Рассмотрим треугольник $[O, a, b]$, составленный из двух кусков парабол (8) и (9) и прямолинейного отрезка $[a, b]$. Если ε достаточно мало, то все траектории системы (1), проходящие в треугольнике $[O, a, b]$, идут справа налево (рис. 61), в частности пересекают отрезок $[a, b]$ справа налево, входя в треугольник $[O, a, b]$. Это следует из того, что выражение

$$\dot{x} = \lambda x + r(x, y)$$

(см. (7)) при $0 < x \leqslant \varepsilon$, $|y| < \alpha x^2$ отрицательно, так как $\lambda < 0$, а

$r(x, y)$ есть «квадратичная форма» по x и y с ограниченными коэффициентами.

Пусть $\varphi(t, p)$ — траектория системы (7), начинающаяся при $t=0$ в некоторой точке p интервала (a, b). Эта траектория входит в треугольник $[O, a, b]$ через сторону $[a, b]$. Она может при возрастании t либо выйти из треугольника через дуги парабол Oa, Ob, либо вовсе не выйти из треугольника. В последнем случае траектория при $t \to \infty$ асимптотически приближается к точке O. Геометрически видно, что если траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, то и траектория $\varphi(t, p')$, где p' есть точка интервала (a, p), также выходит из треугольника через дугу Oa (рис. 61). Далее, если траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, то, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (теорема 14 и предложение Д) § 23), траектория $\varphi(t, p'')$, где p'' — точка, достаточно близкая к p', также выходит через дугу Oa. Таким образом, совокупность всех таких точек p интервала (a, b), для которых траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через дугу Oa, составляет некоторый интервал (a, a'). (Этот интервал непуст, т. е. $a' \neq a$, ибо траектории, начинающиеся в точках p, достаточно близких к a, очевидно, пересекают дугу Oa.) Точно так же совокупность всех таких точек p, для которых траектория $\varphi(t, p)$ выходит из треугольника через сторону Ob, составляет интервал (b, b'). Интервалы (a, a') и (b, b') не могут пересекаться, так что точка a' лежит выше точки b' или, в крайнем случае, совпадает с ней. (В действительности имеет место совпадение, но это требует еще сравнительно сложного доказательства.) Таким образом, отрезок $[a', b']$ содержит хотя бы одну точку, и потому существует траектория $\varphi(t, p_0)$, начинающаяся на отрезке $[a', b']$ и асимптотически приближающаяся к точке O.

Касательная к траектории $\varphi(t, p_0)$ в точке (x, y) имеет угловой коэффициент

$$k(x, y) = \frac{\mu y + s(x, y)}{\lambda x + r(x, y)}.$$

Так как точка (x, y) траектории $\varphi(t, p_0)$ принадлежит треугольнику $[O, a, b]$, то

$$|y| < \alpha x^2, \qquad 0 < x < \varepsilon, \tag{10}$$

а из этого следует, что число $k(x, y)$ остается конечным и при $x \to 0$ стремится к нулю. С другой стороны, угловой коэффициент $l(x, y)$ секущей, проведенной из точки O в точку (x, y) траектории $\varphi(t, p_0)$, равен $\frac{y}{x}$, а так как имеют место неравенства (10), то при $x \to 0$ имеем $l(x, y) \to 0$. Таким образом, кривая $\varphi(t, p_0)$, упирающаяся в точку O, имеет в точке O непрерывную производную и касается оси абсцисс. Траектория $\varphi(t, p_0)$ представляет собой ус U_1. Ус U_2, подходящий к точке O вдоль отрицательной части оси абсцисс, также

касается в точке O оси абсцисс; оба эти уса составляют вместе кривую U с уравнением

$$y = u(x), \tag{11}$$

где $u(x)$ есть непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция переменного x, причем $u'(0) = 0$.

Итак, существование устойчивых усов U_1 и U_2, составляющих вместе с точкой O кривую U, определяемую уравнением (11), доказано. Докажем теперь единственность этих усов. Для этого преобразуем в окрестности начала координат плоскости (x, y) систему координат так, чтобы кривая (11) стала осью абсцисс. Мы добьемся этой цели, введя вместо неизвестной функции y новую неизвестную функцию z по формуле

$$y = u(x) + z. \tag{12}$$

Произведя в системе (7) замену (12), получаем новую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u(x) + z) = F(x, z), \\ \dot{z} = g(x, u(x) + z) - u'(x) f(x, u(x) + z) = G(x, z), \end{cases} \tag{13}$$

где неизвестными функциями являются x и z. Так как функция $u(x)$ имеет непрерывную производную, то функция $F(x, z)$ имеет непрерывные производные по обеим переменным x и z, а функция $G(x, z)$ непрерывна по x и имеет непрерывную производную по z. Однако существование непрерывной производной функции $G(x, z)$ по x не установлено. Таким образом, не установлено, что для системы (13) выполнены обычные наши предположения о непрерывной дифференцируемости правых частей по всем переменным, являющимся неизвестными функциями. Очевидно, однако, что каждому решению системы (13) соответствует в силу (12) решение системы (7) и обратно. Таким образом, по поведению траекторий системы (13) можно судить о поведении траекторий системы (7).

Устойчивые усы U_1 и U_2 системы (7) перешли в отрезки оси абсцисс плоскости (x, z), и потому система (13) имеет решения, в которых функция x некоторым образом монотонно меняется, асимптотически приближаясь к нулю, а функция z тождественно равна нулю. Из этого следует, что

$$G(x, 0) \equiv 0.$$

Ниже будет показано (см. В)), что функция $G(x, z)$ может быть записана в виде:

$$G(x, z) = zH(x, z), \tag{14}$$

где $H(x, z)$ — непрерывная функция переменных x и z. Из соот-

ношения (14) в силу непрерывности функции $H(x, z)$ мы получаем:

$$\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \lim_{z\to 0}\frac{G(0, z)-G(0, 0)}{z-0} = \lim_{z\to 0}\frac{G(0, z)}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0} H(0, z) = H(0, 0).$$

Но в силу (7) и (13) мы имеем $\left.\frac{\partial G(x, z)}{\partial z}\right|_{\substack{x=0\\z=0}} = \mu$, так что

$$H(0, 0) = \mu.$$

Таким образом, второе из уравнений системы (13) имеет вид:

$$\dot{z} = zH(x, z),$$

где $H(x, z)$ близко к μ в окрестности начала координат и, следовательно, положительно. Из этого следует, что в окрестности начала координат вдоль каждой траектории, отличной от усов U_1 и U_2, координата z сохраняет знак и по модулю увеличивается при увеличении t. Таким образом, ни одна траектория, протекающая вне оси абсцисс плоскости (x, z), не может асимптотически приближаться к точке O, и единственность устойчивых усов U_1 и U_2 доказана.

Теперь доказано, что на интервале (a, b) существует лишь одна такая точка p_0, что выходящая из нее траектория системы (7) при $t \to \infty$ асимптотически приближается к точке O, образуя ус U_1. Если точка p лежит на интервале (a, p_0), то выходящая из нее траектория пересекает дугу Oa, а если точка p лежит на интервале (b, p_0), то выходящая из нее траектория пересекает дугу Ob.

Исходя из парабол

$$x - \alpha y^2 = 0, \tag{15}$$

$$x + \alpha y^2 = 0 \tag{16}$$

и прямой

$$y = \varepsilon$$

(рис. 62), можно построить треугольник $[O, c, d]$, обладающий свойствами, аналогичными свойствам треугольника $[O, a, b]$. Существует лишь одна такая точка q_0 на интервале (c, d), что выходящая из нее траектория при убывающем t асимптотически приближается к точке O и образует неустойчивый ус V_1. Если точка q лежит на интервале (c, q_0), то выходящая из нее при убывающем t траектория пересекает дугу Oc, а если точка q лежит на интервале (q_0, d), то выходящая из нее при убывающем t траектория пересекает дугу Od.

Рассмотрим теперь кривую

$$f(x, y) = 0 \tag{17}$$

(см. (7)). Легко видеть, что она касается оси ординат в точке O.

Так как функция $f(x, y)$ имеет вторые непрерывные производные, и потому кривая (17) имеет в точке O определенный радиус кривизны, то число α можно выбрать настолько большим, а число ε — настолько малым, что на отрезке $|y| \leqslant \varepsilon$ кривая (17) проходит между

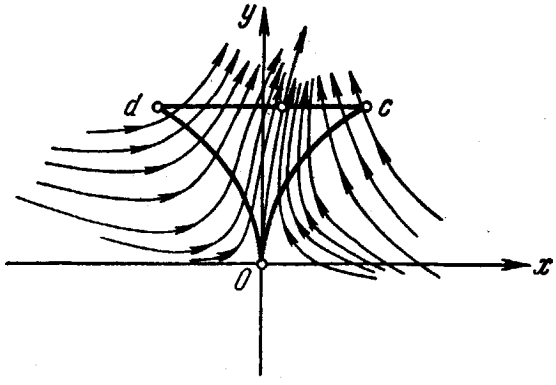

Рис. 62.

параболами (15) и (16) (рис. 63). Справа от кривой (17) функция $f(x, y)$ отрицательна, и потому векторы фазовой скорости в точках, лежащих справа от кривой (17), направлены налево. Проведем из точки c вертикальный отрезок $[ce]$, нижний конец e которого лежит на усе U_1. Пусть p — точка интервала (a, p_0). Если точка p достаточно близка к точке p_0, то, в силу теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных значений (теорема 14 и предложение Д) § 23), точка, вышедшая из p, пройдет достаточно близко к началу координат и потому пересечет отрезок $[c, e]$. При дальнейшем движении она обязательно пересечет дугу Oc. В самом деле, если движущаяся точка пересекает линию (17), то она обязательно пересекает перед этим дугу Oc. Если же движущая точка не пересекает линии (17), то она перемещается все время налево, а расстояние z от этой точки до линии (11), измеряемое по вертикали, растет; таким образом, и в этом случае траектория пересекает дугу Oc.

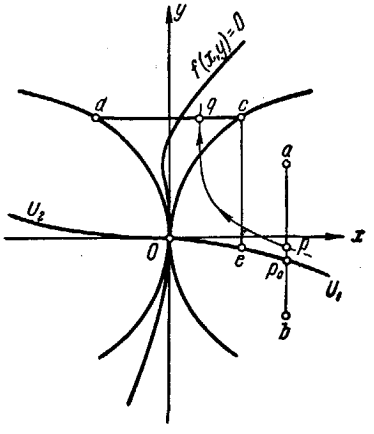

Рис. 63.

Таким образом, рассматриваемая траектория входит в треугольник $[O, c, d]$. После этого траектория уже должна будет пересечь интервал (c, q_0) в некоторой точке q. Если, наоборот, пустить из точки q' интервала (c, q_0) траекторию в направлении убывания t, то при достаточной близости точек q и q_0 эта траектория, пройдя вблизи начала координат, пересечет интервал (a, p_0) в некоторой точке p' (рис. 64). Сопоставляя эти два обстоятельства, легко прийти к выводу, что при $p \to p_0$ имеем $q \to q_0$. Это дает полное качественное представление о поведении траекторий вблизи седла.

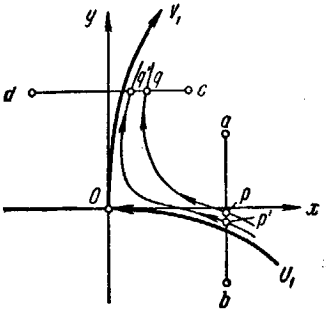

Рис. 64.

Таким образом, теорема 22 доказана.

Докажем теперь свойство (14) функции $G(x, z)$.

В) Пусть $G(x, z)$ — непрерывная функция, определенная вблизи значений $x = z = 0$ и обладающая непрерывной производной $\frac{\partial}{\partial z} G(x, z)$. Если

$$G(x, 0) \equiv 0,$$

то

$$G(x, z) = zH(x, z),$$

где $H(x, z)$ — непрерывная функция.

Для доказательства предложения В) определим функцию $H(x, z)$, положив:

$$\left.\begin{aligned} H(x, z) &= \frac{G(x, z)}{z} && \text{при } z \neq 0, \\ H(x, z) &= \frac{\partial}{\partial z} G(x, z) && \text{при } z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

и покажем, что определенная таким образом функция непрерывна. При $z \neq 0$ функция, определенная соотношениями (18), очевидно, непрерывна. Докажем, что она непрерывна в точке $(x_0, 0)$. Мы имеем:

$$G(x, z) = G(x, z) - G(x, 0) = z \frac{\partial}{\partial z} G(x, \theta z),$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Так как функция $\frac{\partial}{\partial z} G(x, z)$ непрерывна, то при $x \to x_0$, $z \to 0$ $(z \neq 0)$ имеем $\frac{G(x, z)}{z} = \frac{\partial}{\partial z} G(x, \theta z) \to \frac{\partial}{\partial z} G(x_0, 0)$.

Таким образом, предложение В) доказано.

Поведение траекторий вблизи узла и фокуса

Изучение узла и фокуса значительно проще, чем изучение седла. При этом достаточно рассмотреть лишь случай устойчивости, так как неустойчивые узлы и фокусы получаются из устойчивых переменой направления течения времени. Основным приемом при исследовании узла и фокуса является введение полярных координат.

Теорема 23. *Пусть $O=(0,0)$ — устойчивый узел системы* (1) *с собственными значениями λ и μ, причем $\mu<\lambda<0$. В направлении собственного вектора с собственным значением λ проведем через O прямую P, а в направлении собственного вектора с собственным значением μ — прямую Q. Оказывается, что каждая траектория, начинающаяся достаточно близко к точке O, асимптотически приближается к O и имеет в точке O касательную. При этом только две траектории касаются прямой Q, подходя к точке O с противоположных сторон, остальные же все касаются прямой P. В случае неустойчивого узла $(0<\lambda<\mu)$ поведение траекторий при $t\to-\infty$ аналогично.*

Доказательство будет проведено в предположении трехкратной дифференцируемости правых частей системы (1). В силу предложения Б) система (1) может быть записана в виде (5); обозначая переменные ξ и η вновь через x и y, получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x,\ y)=\lambda x+r(x,\ y), \\ \dot{y}=g(x,y)=\mu y+s(x,\ y). \end{cases} \tag{19}$$

При этом функции $r(x,\ y)$ и $s(x,\ y)$ трижды непрерывно дифференцируемы и в точке O обращаются в нуль вместе со своими первыми производными по x и y.

Введем теперь полярные координаты, т. е. положим:

$$x=\rho\cos\varphi,\qquad y=\rho\sin\varphi. \tag{20}$$

Дифференцируя соотношения (20) и подставляя их в систему (19), получаем:

$$\begin{cases} \dot{\rho}\cos\varphi-\rho\dot{\varphi}\sin\varphi=\lambda\rho\cos\varphi+r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi), \\ \dot{\rho}\sin\varphi+\rho\dot{\varphi}\cos\varphi=\mu\rho\sin\varphi+s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi). \end{cases}$$

Разрешая полученные соотношения относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\rho}=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\ \varphi), \\ \rho\dot{\varphi}=(\mu-\lambda)\rho\sin\varphi\cos\varphi+G(\rho,\ \varphi), \end{cases} \tag{21}$$

где функции

$$F(\rho,\ \varphi)=\cos\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)+\sin\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi),$$

$$G(\rho,\ \varphi)=-\sin\varphi\cdot r(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)+\cos\varphi\cdot s(\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi)$$

периодичны по φ с периодом 2π, трижды непрерывно дифференцируемы по ρ и φ и при $\rho=0$ обращаются в нуль вместе со своими первыми частными производными по ρ:

$$F(0,\ \varphi)=G(0,\ \varphi)=\frac{\partial F(0,\ \varphi)}{\partial\rho}=\frac{\partial G(0,\ \varphi)}{\partial\rho}=0. \tag{22}$$

В силу приводимого ниже предложения Г) функция $G(\rho,\ \varphi)$ может быть записана в виде:

$$G(\rho,\ \varphi)=\rho H(\rho,\ \varphi),$$

где $H(\rho,\ \varphi)$ — дважды непрерывно дифференцируемая по ρ и φ функция, обращающаяся в нуль при $\rho=0$ (и любом φ, см. (31) и (22)):

$$H(0,\ \varphi)=0, \tag{23}$$

так что

$$\frac{\partial H(0,\ \varphi)}{\partial\varphi}=0. \tag{24}$$

Деля второе из соотношений (21) на ρ, мы получаем систему

$$\begin{cases}\dot\rho=\rho(\lambda\cos^2\varphi+\mu\sin^2\varphi)+F(\rho,\ \varphi),\\ \dot\varphi=(\mu-\lambda)\sin\varphi\cos\varphi+H(\rho,\ \varphi).\end{cases} \tag{25}$$

Систему (25) будем рассматривать на фазовой плоскости переменных ρ и φ, откладывая φ по оси абсцисс, а ρ — по оси ординат. Системы (19) и (25) отнюдь не эквивалентны друг другу, так как преобразование (20) плоскости $(x,\ y)$ в плоскость $(\rho,\ \varphi)$ не взаимно однозначно; тем не менее из поведения траекторий системы (25) можно делать выводы о поведении траекторий системы (19). Поведение траекторий системы (25) мы будем рассматривать только в полосе $|\rho|<\varepsilon$.

Найдем прежде всего положения равновесия системы (25). Из первого уравнения (25) видно, что при достаточно малом $\rho\neq 0$ величина $\dot\rho$ отлична от нуля (см. (22)), и потому в полосе $|\rho|<\varepsilon$ все положения равновесия лежат на оси $\rho=0$. После этого из второго уравнения (25) находим все положения равновесия (см. (23))

$$\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2};\qquad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

Линеаризуя систему (25) в точке $\rho=0,\ \varphi=\frac{k\pi}{2}$, получаем (см. (22) и (24)):

$$\begin{cases}\Delta\dot\rho=\mu_k\Delta\rho,\\ \Delta\dot\varphi=(\mu-\lambda)\cdot(-1)^k\Delta\varphi+\alpha_k\Delta\rho,\end{cases}$$

где μ_k (равное λ при k четном и μ при k нечетном) есть отрица-

тельное число. Таким образом, точка $\rho=0$, $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ есть устойчивый узел системы (25) при четном k и седло при нечетном k (рис. 65). Неустойчивые усы седла при этом направлены по оси φ, а устойчивые — по кривым, приближающимся к седлу сверху и снизу (см. теорему 22).

Покажем теперь, что при достаточно малом положительном ε каждое решение системы (25), начинающееся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, либо является устойчивым усом одного из седел системы (25), либо, не выходя из полосы $|\rho|<\varepsilon$, асимптотически приближается к одному из узлов системы (25).

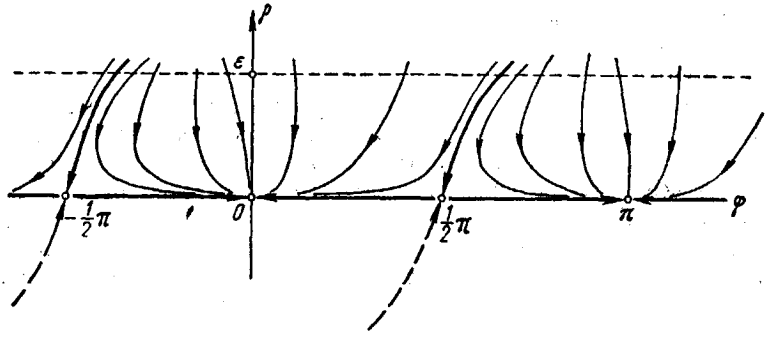

Рис. 65.

Каждому положению равновесия $\rho=0$, $\varphi=\frac{k\pi}{2}$ поставим в соответствие его окрестность U_k, определяемую неравенствами $|\rho|<\delta$, $\left|\varphi-\frac{k\pi}{2}\right|<\delta$, где δ — положительное число. Если k четно, то рассматриваемое положение равновесия является устойчивым узлом, и в силу его асимптотической устойчивости существует настолько малое положительное число δ, что каждое решение, начинающееся в окрестности U_k, асимптотически приближается к узлу. Если k нечетно, то соответствующее положение равновесия есть седло, и существует настолько малое положительное число δ, что отличное от положения равновесия решение, начинающееся в U_k, либо описывает устойчивый ус седла, либо покидает окрестность U_k (см. теорему 22). Так как правые части системы (25) периодичны по φ, то можно выбрать положительное δ, общее для всех окрестностей U_k. Теперь можно выбрать настолько малое положительное число $\varepsilon\leqslant\delta$, что в полосе $|\rho|<\varepsilon$ правая часть первого из уравнений (25) имеет знак, противоположный знаку ρ, так что на каждом решении, начинающемся в этой полосе, величина $|\rho|$ убывает. Далее, при фиксированном δ можно выбрать настолько малое положительное число ε, что в

прямоугольнике

$$|\rho|<\varepsilon, \quad \frac{k\pi}{2}+\delta\leqslant\varphi\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}-\delta$$

правая часть второго из уравнений (25) сохраняет знак и по модулю превосходит некоторое положительное число α, так что решение, начинающееся в этом прямоугольнике, покидает его через время, не превосходящее числа $\frac{\pi}{2\alpha}$, и входит в ту из окрестностей U_k или U_{k+1}, которая соответствует устойчивому узлу. В силу периодичности системы (25) по φ число ε можно считать общим для всех прямоугольников рассматриваемого вида.

Мы видим теперь, что при выбранном ε каждое решение, начинающееся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, либо пробегает устойчивый ус седла, либо асимптотически приближается к устойчивому узлу.

Каждому решению системы (25), начинающемуся в полосе $|\rho|<\varepsilon$, соответствует решение системы (19), начинающееся на расстоянии, меньшем чем ε, от устойчивого узла O этой системы. Для того чтобы получить все такие решения системы (19), достаточно рассматривать лишь решения системы (25), начинающиеся при $0\leqslant\rho<\varepsilon$. В силу периодичности системы (25) по φ и периодичности преобразования (20) существуют лишь два решения системы (19), соответствующие устойчивым усам седел системы (25), проходящим при $\rho>0$, и эти решения системы (19) асимптотически приближаются к положению равновесия O, касаясь прямой Q и подходя к O с противоположных сторон. Решениям системы (25), стремящимся к устойчивым узлам, соответствуют решения системы (19), стремящиеся к положению равновесия O и касающиеся при подходе к O прямой P.

Таким образом, теорема 23 доказана.

Теорема 24. *Допустим, что начало координат O системы* (1) *представляет собой фокус, т. е. собственные значения матрицы (a_j^i) являются комплексно сопряженными числами*

$$\lambda=\mu+i\nu, \quad \bar{\lambda}=\mu-i\nu,$$

причем $\mu\neq 0$, $\nu\neq 0$. Оказывается, что если $\mu<0$, то при $t\to\infty$ все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на начало координат O как спирали; если же $\mu>0$, то при $t\to-\infty$ все траектории, проходящие вблизи точки O, наматываются на начало координат O, как спирали.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся каноническим видом (6), переименовав в нем переменные ξ и η в переменные x и y. Таким образом, нам следует изучить систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}=f(x, y)=\mu x-\nu y+r(x, y), \\ \dot{y}=g(x, y)=\nu x+\mu y+s(x, y). \end{cases} \tag{26}$$

Введем полярные координаты, т. е. положим:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \tag{27}$$

Дифференцируя соотношения (27) и подставляя полученные выражения в систему (26), получаем:

$$\dot{\rho} \cos \varphi - \rho\dot{\varphi} \sin \varphi = \mu\rho \cos \varphi - \nu\rho \sin \varphi + r(\rho \cos \varphi, \ \rho \sin \varphi),$$

$$\dot{\rho} \sin \varphi + \rho\dot{\varphi} \cos \varphi = \nu\rho \cos \varphi + \mu\rho \sin \varphi + s(\rho \cos\varphi, \ \rho \sin\varphi).$$

Решая полученную систему уравнений относительно $\dot{\rho}$ и $\dot{\varphi}$, получаем

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \mu\rho + \rho^2 \cdot p(\rho, \varphi), \\ \dot{\varphi} = \nu + \rho \cdot q(\rho, \varphi), \end{cases} \tag{28}$$

где $p(\rho, \varphi)$ и $q(\rho, \varphi)$ — функций, ограниченные при малых ρ и периодические по φ с периодом 2π. Будем для определенности считать, что $\mu < 0$. Рассмотрим траекторию системы (28), начинающуюся в точке (ρ_0, φ_0), где $0 < \rho_0 < \varepsilon$, а ε — достаточно малое число. Из уравнений (28) следует, что траектория эта асимптотически приближается к оси $\rho = 0$, причем φ стремится либо к $+\infty$, либо — к $-\infty$ в зависимости от того, положительно число ν или отрицательно. Из этого следует, что соответствующая траектория в плоскости (x, y) навертывается, как спираль, на начало координат.

Таким образом, теорема 24 доказана. Нижеследующее предложение Г), являющееся существенным обобщением доказанного выше предложения В), используется только при доказательстве теоремы 23.

Г) Пусть $G(\rho, \varphi)$ — функция, определенная в области W, заданной неравенствами $|\rho| < \varepsilon$, $\beta_1 < \varphi < \beta_2$, удовлетворяющая условию

$$G(0, \varphi) = 0 \tag{29}$$

и обладающая тем свойством, что функция

$$\frac{\partial G(\rho, \varphi)}{\partial \rho}$$

существует и имеет непрерывные частные производные до порядка r включительно. Тогда функция $G(\rho, \varphi)$ в области W может быть записана в виде:

$$G(\rho, \varphi) = \rho H(\rho, \varphi), \tag{30}$$

где функция $H(\rho, \varphi)$ определяется равенствами

$$\left.\begin{aligned} H(\rho, \varphi) &= \frac{G(\rho, \varphi)}{\rho} \quad \text{при } \rho \neq 0, \\ H(0, \varphi) &= \frac{\partial G(0, \varphi)}{\partial \rho} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

и имеет в области W непрерывные частные производные до порядка r включительно. (При $r=0$ доказываемое предложение Г) превращается в предложение В).)

Для доказательства предложения Г) рассмотрим функцию

$$K(\rho, \varphi)=\frac{\partial G(\rho, \varphi)}{\partial \varphi^{r-s}}, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r. \tag{32}$$

Эта функция обладает в области W непрерывными частными производными по ρ до порядка $s+1$ включительно и удовлетворяет условию

$$K(0, \varphi)=0 \tag{33}$$

(см. (29)). Докажем, что при $\rho \neq 0$ имеет место равенство

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)=\sum_{l=0}^{k} \gamma_l \frac{\partial^{k+1} K(\theta_l \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant s, \tag{34}$$

где числа $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ при каждом фиксированном k не зависят от функции $G(\rho, \varphi)$ и удовлетворяют условию

$$\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_k=\frac{1}{k+1}, \tag{35}$$

а числа $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_k$ удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \theta_l \leqslant 1; \qquad l=0, 1, \ldots, k. \tag{36}$$

Вычисляя производную $\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)$ по формуле Лейбница, получаем:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{1}{\rho} \cdot K(\rho, \varphi)\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}} \sum_{l=0}^{k} a_l \rho^l \frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}, \tag{37}$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_k$ при каждом фиксированном k не зависят от функции $G(\rho, \varphi)$. Разлагая каждую из функций $\frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}$ $l=0, 1, \ldots, k$ в ряд Тэйлора по ρ, получаем:

$$\frac{\partial^l K(\rho, \varphi)}{\partial \rho^l}=\frac{\partial^l K(0, \varphi)}{\partial \rho^l}+\frac{\rho}{1!} \frac{\partial^{l+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{l+1}}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{\rho^{k-l}}{(k-l)!} \cdot \frac{\partial^k K(0, \varphi)}{\partial \rho^k}+\frac{\rho^{k-l+1}}{(k-l+1)!} \cdot \frac{\partial^{k+1} K(\theta_l \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}. \tag{38}$$

Далее, подставляя выражения (38) и (37), мы получаем в силу (33)

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right)=\frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{l=1}^{k} b_l \rho^l \frac{\partial^l K(0, \varphi)}{\partial \rho^l}+\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \rho^{k+1} \frac{\partial^{k+1} K(\theta_j \rho, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}\right], \tag{39}$$

где b_i и γ_j — константы, не зависящие (при каждом фиксированном k) от выбора функции $G(\rho, \varphi)$.

Для доказательства соотношения (34) достаточно теперь установить, что константы $b_1, \ldots, b_k$ равны нулю, а константы $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_k$ удовлетворяют условию (35). Так как перечисленные константы не зависят от выбора функции $G(\rho, \varphi)$, то указанные их свойства достаточно установить для функций $G(\rho, \varphi)$ какого-либо специального вида. Рассмотрим случай, когда $G(\rho, \varphi)$ является многочленом:

$$G(\rho, \varphi) = \frac{\varphi^{r-s}}{(r-s)!} \cdot \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\alpha_i}{i!} \rho^i. \tag{40}$$

В силу (32) находим:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \frac{\alpha_{k+1}}{k+1}. \tag{41}$$

С другой стороны, равенство (39) для многочлена (40) имеет вид:

$$\frac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\frac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) = \frac{1}{\rho^{k+1}}\left[\sum_{i=1}^{k} b_i \rho^i \alpha_i + \alpha_{k+1}\rho^{k+1} \sum_{j=0}^{k} \gamma_j\right]. \tag{42}$$

Правые части равенств (41) и (42) должны совпадать при $|\rho| < \varepsilon$, $\rho \neq 0$, а так как числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k+1}$ произвольны, то из этого вытекает равенство нулю чисел $b_1, \ldots, b_k$ и соотношение (35).

Таким образом, формула (34) доказана.

Введем в рассмотрение функцию $L_k(\rho, \varphi)$, $k = 0, 1, \ldots, s$, положив:

$$\begin{cases} L_k(\rho, \varphi) = \dfrac{\partial^k}{\partial \rho^k}\left(\dfrac{K(\rho, \varphi)}{\rho}\right) & \text{при } \rho \neq 0, \\ L_k(0, \varphi) = \dfrac{1}{k+1} \dfrac{\partial^{k+1} K(0, \varphi)}{\partial \rho^{k+1}}. \end{cases} \tag{43}$$

Из равенств (34) и (35) следует, что $L_k(\rho, \varphi)$ есть непрерывная функция пары переменных ρ, φ во всей области W. Очевидно, что при $\rho \neq 0$ выполнены равенства

$$L_{k+1}(\rho, \varphi) = \frac{\partial L_k(\rho, \varphi)}{\partial \rho}, \qquad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{44}$$

Докажем, что эти равенства справедливы и при $\rho = 0$. Пусть $0 < \rho_0 < \varepsilon$, $0 < \rho < \varepsilon$; тогда мы имеем:

$$L_k(\rho, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{45}$$

Так как функции, стоящие в левой и правой частях этого равенства, непрерывны, то равенство это справедливо и при $\rho = 0$, так

что мы имеем:

$$L_k(0, \varphi) = L_k(\rho_0, \varphi) + \int_{\rho_0}^{0} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi. \tag{46}$$

Вычитая соотношение (46) из (45) и деля результат на ρ, находим:

$$\frac{L_k(\rho, \varphi) - L_k(0, \varphi)}{\rho} = \frac{\int_0^{\rho} L_{k+1}(\xi, \varphi)\, d\xi}{\rho} \qquad (\rho > 0).$$

Переходя к пределу при $\rho \to 0$, мы видим, что правая производная функции $L_k(\rho, \varphi)$ по ρ в точке $\rho = 0$ существует и равна $L_{k+1}(0, \varphi)$. Точно так же доказывается, что и левая производная равна $L_{k+1}(0, \varphi)$. Таким образом, равенство (44) справедливо во всей области W.

Из соотношений (43), (32) при $k = 0$, $s = r$ следуют равенства (30), (31), а из соотношений (44) и (32) следует, что функция $H(\rho, \varphi)$ обладает непрерывной производной

$$\frac{\partial^{r-s+k} H(\rho, \varphi)}{\partial \rho^k \partial \varphi^{r-s}}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant s, \qquad 0 \leqslant s \leqslant r,$$

а это и значит, что функция $H(\rho, \varphi)$ обладает всеми непрерывными частными производными до порядка r включительно.

Итак, предложение Г) доказано.

§ 31. Устойчивость периодических решений

В этом параграфе будет рассматриваться вопрос об устойчивости периодических решений автономных систем, а также систем с периодическими правыми частями.

Понятие устойчивости

В параграфе 26 уже было дано определение устойчивости по Ляпунову положения равновесия автономной системы. Здесь мы, прежде всего, дадим определение устойчивости по Ляпунову решения произвольной системы уравнений.

Пусть

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1}$$

— векторная запись произвольной нормальной системы уравнений порядка n, правые части которой вместе с их производными $\frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j}$ определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства переменных t, x. Решение уравнения (1) с начальными значениями θ, ξ обозначим через $\varphi(t, \theta, \xi)$.

Определение. Решение $\varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 называется *устойчивым по Ляпунову*, если выполнены условия: 1) Существует такое положительное число ρ, что при $|x_1 - x_0| < \rho$ решение $\varphi(t, t_0, x_1)$ определено для всех значений $t \geqslant t_0$, в частности и само решение $\varphi(t)$ определено для всех $t \geqslant t_0$. 2) Для всякого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число $\delta \leqslant \rho$, что при $|x_1 - x_0| < \delta$ выполнено неравенство $|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Устойчивое по Ляпунову решение $\varphi(t)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0 называется *асимптотически устойчивым*, если найдется такое положительное число $\sigma \leqslant \rho$, что при $|x_1 - x_0| < \sigma$ имеем:

$$|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty.$$

Приведенные здесь определения устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости инвариантны относительно случайного выбора начальных значений t_0, x_0 решения $\varphi(t)$. Это легко может быть выведено из предложения Д) § 23.

В частном случае, когда система (1) автономна, а решение $\varphi(t)$ есть положение равновесия, приведенные здесь определения устойчивости совпадают с данными в § 26.

Ниже будут рассмотрены системы (1), правые части которых зависят от t периодически с периодом τ:

$$f(t + \tau, x) = f(t, x), \tag{2}$$

а также системы (1), являющиеся автономными:

$$f(t, x) = f(x). \tag{3}$$

В том и другом случае будет исследоваться вопрос об устойчивости периодического решения $\varphi(t)$ периода τ:

$$\varphi(t + \tau) = \varphi(t), \tag{4}$$

которое в случае автономной системы будет предполагаться отличным от положения равновесия. В случае периодической системы (см. (2)) будут даны достаточные условия асимптотической устойчивости решения (4) периода τ. Автономная система является частным случаем периодической, и потому можно было бы ожидать, что эти условия применимы и для периодического решения автономной системы. Оказывается, однако, что для нее они невыполнимы (периодическое решение автономной системы не может быть асимптотически устойчивым), и потому для устойчивости по Ляпунову периодического решения автономной системы даются другие, более слабые условия.

А) Для того чтобы изучить поведение решений уравнения (1) вблизи решения $\varphi(t)$, введем новую неизвестную векторную функцию y, положив:

$$x = \varphi(t) + y. \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем считать, что правые части системы (1) имеют на множестве Г вторые непрерывные производные по координатам вектора x. Произведя в системе (1) замену переменных (5), принимая во внимание, что $\varphi(t)$ есть решение уравнения (1), и разлагая правые части по y, получаем:

$$\dot{y}^i = \sum_j \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j} y^j + r^i(t, y). \tag{6}$$

Линеаризуя эту систему, т. е. отбрасывая члены r^i второго порядка малости относительно y, получаем линейную систему:

$$\dot{y} = A(t)y, \tag{7}$$

где $A(t)$ — матрица с элементами

$$a_j^i(t) = \frac{\partial f^i(t, \varphi(t))}{\partial x^j}.$$

Будем считать теперь, что правая часть уравнения (1) — периодическая периода τ по t (см. (2)) и что решение $\varphi(t)$ — также периодическое периода τ. При этих предположениях линейная система (7) является периодической периода τ:

$$a_j^i(t+\tau) = a_j^i(t), \qquad i, j = 1, \ldots, n,$$

так что можно говорить о ее характеристических числах (см. § 19, Д)). Оказывается, что в случае, когда система (1) автономна (см. (3)), а ее периодическое решение $\varphi(t)$ отлично от положения равновесия, линейная система (7) обязательно имеет одно характеристическое число равным единице.

Докажем последнее утверждение. Пусть $\Psi(t)$ — матрица, удовлетворяющая матричному уравнению

$$\dot{\Psi} = A(t)\Psi$$

с начальным условием

$$\Psi(t_0) = E, \tag{8}$$

и пусть C — основная матрица решения $\Psi(t)$ (см. 19, А)), так что

$$\Psi(t+\tau) = \Psi(t)C. \tag{9}$$

Непосредственно проверяется, что всякое решение $\psi(t)$ векторного уравнения (7) записывается в виде:

$$\psi(t) = \Psi(t)\psi(t_0).$$

Из этого и из соотношений (8) и (9) следует

$$\psi(t_0+\tau) = C\psi(t_0). \tag{10}$$

Примем теперь во внимание, что система (1) автономна. Мы имеем (см. (3)):

$$\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t));$$

дифференцируя это соотношение по t, получаем:

$$\ddot{\varphi}(t) = A(t)\dot{\varphi}(t).$$

Таким образом, векторная функция $\dot{\varphi}(t)$ удовлетворяет векторному уравнению (7). Но векторная функция $\dot{\varphi}(t)$ является периодической с периодом τ; таким образом, из (10) получаем:

$$\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0 + \tau) = C\dot{\varphi}(t_0), \tag{11}$$

а так как $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ (ибо $\varphi(t)$ не есть положение равновесия), то из этого следует, что матрица C имеет собственное значение, равное единице, и, следовательно, одно из характеристических чисел уравнения (7) равно единице.

Теоремы Ляпунова и Андронова—Витта

Теперь мы можем формулировать достаточные условия устойчивости периодического решения $\varphi(t)$ для случая, когда система (1) периодична, и для случая, когда она автономна.

Теорема 25. *Пусть уравнение* (1) *периодично по t с периодом* τ (см. (2)) *и* $\varphi(t)$ — *его периодическое решение также периода* τ (см. (4)). *Если все характеристические числа уравнения* (7) (см. § 19, Д)) *по модулю меньше единицы, то решение* $\varphi(t)$ *асимптотически устойчиво; более того, существует такое число* $\sigma > 0$, *что при* $|x_1 - x_0| < \sigma$ *имеет место оценка:*

$$|\varphi(t; t_0, x_1) - \varphi(t)| < re^{-\alpha(t-t_0)}|x_1 - x_0|, \qquad t \geqslant t_0, \tag{12}$$

где r *и* α — *два положительных числа, не зависящих от* x_1.

Теорема 26. *Пусть уравнение* (1) *автономно, и* $\varphi(t)$ — *его периодическое решение периода* τ, *отличное от положения равновесия. Если характеристическое число уравнения* (7), *равное единице, имеет кратность единица, а все остальные характеристические числа уравнения* (7) *по модулю меньше единицы, то решение* $\varphi(t)$ *устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 25 принадлежит Ляпунову. Теорема 26 принадлежит Андронову и Витту, которые получили ее как довольно простое следствие одной весьма тонкой теоремы Ляпунова. Здесь дается другое доказательство теоремы 26, опирающееся на метод Ляпунова.

Доказательствам теорем 25 и 26 предпошлем построения, нужные в обоих случаях.

В § 26 было дано определение производной некоторой функции в силу автономной системы уравнений. Дадим его здесь для случая неавтономной системы.

Б) Пусть

$$F(x) = F(x^1, \ldots, x^n)$$

— некоторая скалярная функция векторного переменного x. Производную $\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0)$ этой функции в силу системы (1) в точке t_0, x_0 определим следующим образом. Пусть $\varphi(t)$ — решение уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_0. Положим:

$$\dot{F}_{(1)}(t_0, x_0) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))\Big|_{t=t_0}.$$

Осуществляя указанное справа дифференцирование, получаем:

$$\dot{F}_{(1)}(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} f^i(t, x).$$

В случае, если система (1) автономна, производная $\dot{F}_{(1)}(t, x)$ функции $F(x)$ в силу системы (1) в точке t, x не зависит от t.

В) Пусть

$$\dot{z} = Bz + p(t, z) \tag{13}$$

— нормальная система дифференциальных уравнений в векторной записи, где $B = (b^i_j)$ — постоянная матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части, а $p(t, z)$ — остаточный член, определенный при $t \geqslant t_0$, $|z| < c$ $(c > 0)$ и допускающий оценку

$$|p(t, z)| \leqslant p|z|^2, \tag{14}$$

где p — положительное число. Оказывается, что решение $z = 0$ уравнения (13) асимптотически устойчиво; более того, для решения $z = \chi(t, z_1)$ с начальными значениями t_0, z_1, $|z_1| < c_1 < c$ имеет место оценка

$$|\chi(t, z_1)| \leqslant r|z_1|e^{-\alpha(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{15}$$

где r, α — положительные числа, не зависящие от z_1.

Предложение В) доказывается совершенно так же, как теорема Ляпунова (см. § 26). Проведем это доказательство без излишней детализации.

Пусть $W(z)$ — функция Ляпунова для линейной системы

$$\dot{z} = Bz \tag{16}$$

с постоянными коэффициентами (см. § 26, Д)), так что выполнено неравенство

$$\dot{W}_{(16)}(z) = \sum_{i,j} \frac{\partial W(z)}{\partial z^i} b^i_j z^j \leqslant -2\beta W(z) \qquad (\beta > 0).$$

Из этого неравенства в силу оценки (14) получаем при

$$W(z) \leqslant c_2$$

неравенство

$$\dot{W}_{(13)}(z)=\sum_{i,j}\frac{\partial W(z)}{\partial z^i}b^i_j z^j+\sum_i\frac{\partial W(z)}{\partial z^i}p^i(t,\ z)\leqslant -2\alpha W(z),$$

где $\alpha<\beta$ и c_2 — некоторые положительные числа. Положим:

$$w(t)=W(\chi(t,\ z_1)),\ \text{где}\ W(z_1)<c_2.$$

Для функции $w(t)$, $t\geqslant t_0$ выполнено неравенство

$$\dot{w}(t)\leqslant -2\alpha w(t), \tag{17}$$

если только для нее имеет место соотношение

$$w(t)\leqslant c_2.$$

Из (17) следует, что пока имеет место неравенство $w(t)\leqslant c_2$, функция $w(t)$ убывает, точнее не возрастает, а так как в начальный момент $t=t_0$ выполнено неравенство $w(t)<c_2$, то точка $\chi(t,\ z_1)$ не может покинуть замкнутого множества F, определяемого неравенством $W(z)\leqslant c_2$, и потому решение $\chi(t,\ z_1)$ определено для всех значений $t\geqslant t_0$ (ср. § 22, Б), В)) и для всех этих значений имеет место неравенство (17). Считая теперь, что $z_1\neq 0$, мы можем произвести следующие выкладки, исходя из неравенства (17):

$$\frac{\dot{w}(t)}{w(t)}\leqslant -2\alpha$$

или, интегрируя, получаем:

$$\ln w(t)-\ln w(t_0)\leqslant -2\alpha(t-t_0),$$

а из этого следует:

$$w(t)\leqslant w(t_0)\,e^{-2\alpha(t-t_0)},$$

или, что то же,

$$W(\chi(t,\ z_1))\leqslant W(z_1)\,e^{-2\alpha(t-t_0)}.$$

Из этой оценки непосредственно вытекает оценка (15).

Таким образом, предложение В) доказано.

Доказательство теоремы 25

В силу теоремы 12 существует преобразование

$$y=T(t)\,z, \tag{18}$$

где матрица $T(t)$ действительна и имеет период 2τ, при котором уравнение (7) переходит в уравнение

$$\dot{z}=Bz$$

с постоянной действительной матрицей B. Решением уравнения $\dot{z}=Bz$ является матрица e^{tB} (см. § 19, В)), и потому матрица $e^{2\tau B}$ является основной для этого уравнения, а значит, и для уравнения (7). Таким образом, в силу предположений теоремы 25 все собственные значения матрицы $e^{2\tau B}$ по модулю меньше единицы. Но согласно теореме 29 собственные значения матрицы $e^{2\tau B}$ имеют вид $e^{2\tau\lambda}$, где λ пробегает все собственные значения матрицы B. Таким образом, $|e^{2\tau\lambda}|<1$, и потому все собственные значения матрицы B имеют отрицательные действительные части. Применяя преобразование переменных (18) к уравнению (6), мы приводим его к виду (13), и для его решения $z=\chi(t, z_1)$ получаем оценку (15). Из этой оценки в силу невырожденности матрицы $T(t)$ получается оценка (12).

Таким образом, теорема 25 доказана.

Доказательство теоремы 26

Исходя из предположения, что уравнение (7) имеет характеристическое число единица кратности один, а все остальные его характеристические числа по модулю меньше единицы, покажем, что существует такое преобразование:

$$y=T(t)z \tag{19}$$

с действительной матрицей $T(t)$ периода 2τ, переводящее уравнение (7) в уравнение

$$\dot{z}=Bz \tag{20}$$

с постоянной матрицей B, которая имеет вид:

$$B=\left(\begin{array}{c|c} B^* & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \tag{21}$$

где B^* — квадратная матрица порядка $n-1$, все собственные значения которой имеют отрицательные действительные части.

Пусть C — основная матрица некоторого решения матричного уравнения (см. (7))

$$\dot{Y}=A(t)Y. \tag{22}$$

Так как матрица C имеет собственное значение единицу кратности один, то в некотором базисе она имеет вид:

$$\left(\begin{array}{c|c} C^* & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right), \tag{23}$$

где C^* — действительная квадратная матрица порядка $n-1$, все собственные значения которой по модулю меньше единицы (см. § 34, Ж), З)).

Так как матрица C и матрица (23) получаются друг из друга трансформацией, то матрица (23) является основной для некоторого решения уравнения (22); мы будем считать, что C совпадает с матрицей (23). В силу предложения Г) § 35 существует действительная матрица B^*, удовлетворяющая условию:

$$e^{2\tau B^*} = C^{*2},$$

причем в силу теоремы 29 все собственные значения матрицы B^* имеют отрицательные действительные части. Очевидно, что матрица B (см. (21)) удовлетворяет условию:

$$e^{2\tau B} = C^2$$

(см. (23)). Таким образом (ср. доказательство теоремы 12), существует преобразование (19), переводящее уравнение (7) в уравнение (20).

Выясним теперь, каким условиям должна удовлетворять матрица $T(t)$, для того чтобы преобразование (19) переводило уравнение (7) в уравнение (20). Дифференцируя соотношение (19), получаем:

$$\dot{y} = \dot{T}(t)z + T(t)\dot{z} = \dot{T}(t)z + T(t)Bz.$$

Заменяя в этом соотношении z по формуле $z = T^{-1}(t)y$, получаем:

$$\dot{y} = (\dot{T}(t) + T(t)B)\,T^{-1}(t)y.$$

Так как это уравнение совпадает с уравнением (7), то мы имеем:

$$(\dot{T}(t) + T(t)B)\,T^{-1}(t) = A(t)$$

и, умножая это соотношение справа на матрицу $T(t)$, получаем:

$$\dot{T}(t) + T(t)B = A(t)\,T(t). \tag{24}$$

Это условие, налагаемое на матрицу $T(t)$, является необходимым и достаточным для того, чтобы преобразование (19) переводило уравнение (7) в уравнение (20). Расщепим соотношение (24) на два, представив матрицу $T(t)$ в виде:

$$T(t) = (T^*(t),\ \boldsymbol{t}(t)),$$

где матрица $T^*(t)$ имеет n строк и $n-1$ столбцов, а матрица $\boldsymbol{t}(t)$ представляет собой последний столбец матрицы $T(t)$ и потому является отличным от нуля вектором. Мы имеем (см. (21)):

$$\dot{T}^*(t) + T^*(t)B^* = A(t)\,T^*(t), \tag{25}$$

$$\dot{\boldsymbol{t}}(t) = A(t)\,\boldsymbol{t}(t). \tag{26}$$

Из последнего соотношения видно, что $\boldsymbol{t}(t)$ есть периодическое решение периода 2τ уравнения (7) и потому для него выполнено

условие (ср. (10)):

$$t(t_0) = t(t_0 + 2\tau) = C^2 t(t_0).$$

Таким образом, вектор $t(t_0)$ есть собственный вектор матрицы C^2 с собственным значением единица. Так как матрица

$$C^2 = \left(\begin{array}{c|c} C^{*2} & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right)$$

имеет единицу собственным значением кратности один, и уже известен один вектор $\dot{\varphi}(t_0) \neq 0$ с этим собственным значением у матрицы C^2 (см. (11)), то мы имеем:

$$t(t_0) = \gamma\dot{\varphi}(t_0)$$

и потому

$$t(t) = \gamma\dot{\varphi}(t)$$

(ибо обе векторные функции $t(t)$, $\dot{\varphi}(t)$ являются решениями уравнения (7)). Из этого видно, что если в матрице $T(t)$ заменить ее последний столбец $t(t)$ вектором $\dot{\varphi}(t)$, то вновь полученная матрица $(T^*(t), \dot{\varphi}(t))$ будет удовлетворять условиям (25) и (26). Поэтому мы будем считать, что

$$T(t) = (T^*(t), \dot{\varphi}(t)). \tag{27}$$

Исходя из полученных соотношений (25), (27), преобразуем неизвестную функцию x уравнения (1) в автономном случае (см. (3)) в новые неизвестные функции z^*, s, где $z^* = (z^1, \ldots, z^{n-1})$ есть вектор размерности $n-1$, который в дальнейшем мы будем рассматривать как матрицу с одним столбцом, а s — новое скалярное переменное. Для этого положим:

$$x = T^*(s)\,z^* + \varphi(s) = g(z^*, s). \tag{28}$$

Это преобразование периодично по s с периодом 2τ. Каждой паре z^*, s при достаточно малом $|z^*|$ соотношение (28) ставит в соответствие точку x, близкую к точке $\varphi(s)$ периодической траектории K, определяемой решением $x = \varphi(t)$. Вблизи каждой пары $z^* = 0$, $s = s_0$ отображение (28) взаимно однозначно, так как функциональный определитель этого отображения в точке $z^* = 0$, $s = s_0$ равен детерминанту матрицы $T(s_0)$ (см. (27)) и потому отличен от нуля. Координату s пары (z^*, s) будем считать циклической координатой периода 2τ, т. е. будем отождествлять пары (z^*, s) и $(z^*, s + 2\tau)$. Так как пары $(0, s_0)$ и $(0, s_0 + \tau)$ преобразованием (28) переводятся в одну и ту же точку $\varphi(s_0)$ траектории K, то некоторые окрестности пар $(0, s_0)$ и $(0, s_0 + \tau)$ отображаются взаимно однозначно на одну и ту же окрестность точки $\varphi(s_0)$ линии K. Таким образом, отображение (28) двуслойно накладывает множество всех пар (z^*, s) (при достаточно

малых $|z^*|$) на некоторую окрестность линии K. При этом замкнутая кривая, состоящая из всех пар $(0, s)$, $0 \leqslant s \leqslant 2\tau$, дважды накладывается на линию K.

Заменим теперь в уравнении (1) (см. (3)) неизвестный вектор x по формуле (28). Подстановка в левую часть дает:

$$\dot{x} = T^{*\prime}(s)\, z^* \dot{s} + T^*(s)\, \dot{z}^* + \varphi'(s)\, \dot{s}. \tag{29}$$

Подстановка в правую часть дает:

$$f(x) = f(\varphi(s)) + A(s)\, T^*(s)\, z^* + R(s, z^*), \tag{30}$$

где остаточный член $R(s, z^*)$ периодичен по s с периодом 2τ и имеет второй порядок малости относительно вектора z^*. Приравнивая правые части соотношений (29) и (30), получаем:

$$T^*(s)\, \dot{z}^* + \varphi'(s)\, \dot{s} + T^{*\prime}(s)\, z^* \dot{s} = f(\varphi(s)) + A(s)\, T^*(s)\, z^* + R(s, z^*).$$

Заменяя матрицу $A(s)\, T^*(s)$ по формуле (25) и заменяя $f(\varphi(s))$ через $\varphi'(s)$, получаем:

$$T^*(s)\, \dot{z}^* + \varphi'(s)\, \dot{s} + T^{*\prime}(s)\, z^* \dot{s} = \\ = \varphi'(s) + (T^{*\prime}(s) + T^*(s)\, B^*)\, z^* + R(s, z^*),$$

откуда

$$T^*(s)\, (\dot{z}^* - B^* z^*) + (\varphi'(s) + T^{*\prime}(s)\, z^*)\, (\dot{s} - 1) = R(s, z^*). \tag{31}$$

Введем теперь в рассмотрение новые вспомогательные переменные: вектор $u^* = (u^1, \ldots, u^{n-1})$ и скаляр u^n. В n-мерном пространстве переменных $(u^*, u^n) = (u^1, u^2, \ldots, u^n)$ рассмотрим линейное преобразование M, зависящее от параметров s и z^*, положив:

$$M(u^*, u^n) = T^*(s)\, u^* + (\varphi'(s) + T^{*\prime}(s)\, z^*)\, u^n.$$

При $z^* = 0$ преобразование M превращается в $T(s)$, и потому при z^*, близком к нулю, преобразование M невырожденно. Таким образом, уравнение

$$M(u^*, u^n) = R(s, z^*)$$

однозначно разрешимо (при z^*, близком к нулю) относительно неизвестных u^*, u^n, и его решение

$$u^* = q^*(s, z^*),$$
$$u^n = q(s, z^*)$$

периодично по s с периодом 2τ и имеет второй порядок малости относительно вектора z^*. Так как соотношение (31) можно переписать в виде:

$$M(\dot{z}^* - B^* z^*, \dot{s} - 1) = R(s, z^*),$$

то мы получаем:

$$\dot{z}^* - B^* z^* = q^*(s, z^*), \quad \dot{s} - 1 = q(s, z^*).$$

Итак, в пространстве переменных z^*, s уравнение (1) записывается в виде

$$\dot{z}^* = B^* z^* + q^*(s, z^*), \tag{32}$$

$$\dot{s} = 1 + q(s, z^*). \tag{33}$$

Существует теперь такое положительное число ε, что при $|z^*| < \varepsilon$ остаточный член $q(s, z^*)$ удовлетворяет неравенству $|q(s, z^*)| < 1$. При выполнении этого неравенства на каждом решении $z^* = z^*(t)$, $s = s(t)$ за независимое переменное можно вместо t принять s, и уравнения (32), (33) перепишутся тогда в виде:

$$\frac{dz^*}{ds} = \frac{B^* z^* + q^*(s, z^*)}{1 + q(s, z^*)},$$

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{1 + q(s, z^*)},$$

или иначе:

$$\frac{dz^*}{ds} = B^* z^* + k^*(s, z^*), \tag{34}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 + k(s, z^*), \tag{35}$$

где остаточные члены $k^*(s, z^*)$ и $k(s, z^*)$ периодичны по s с периодом 2τ и имеют второй порядок малости относительно вектора z^*.

В системе (34), (35) независимым переменным является s, а z^* и t рассматриваются как неизвестные функции от s. Уравнение (34) не содержит неизвестной функции t, и его можно решать отдельно. Таким образом, для того чтобы найти решение системы (32), (33) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1, следует сначала найти решение $z^*(s, z_1^*, s_1)$ уравнения (34) с начальными значениями z_1^*, s_1, которое в силу предложения В) при достаточно малом $|z_1^*|$ определено для всех значений $s \geqslant s_1$ и имеет оценку

$$|z^*(s, z_1^*, s_1)| \leqslant r |z_1^*| e^{-\alpha s}. \tag{36}$$

После этого следует найти решение уравнения (35) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1; это решение дается очевидной формулой:

$$t = t_0 + \int_{s_1}^{s} (1 + k(s, z^*(s, z_1^*, s_1)))\, ds =$$

$$= t_0 - s_1 + s + \int_{s_1}^{s} k(s, z^*(s, z_1^*, s_1))\, ds. \tag{37}$$

Последнее уравнение можно разрешить относительно s, если только $|z^*|$ достаточно мало, так что мы получаем:

$$s = s(t, z_1^*, s_1). \tag{38}$$

Подставляя это выражение для s в решение $z^*(s, z_1^*, s_1)$ уравнения (34), получаем:

$$z^*(t) = z^*(s(t, z_1^*, s_1), z_1^*, s_1). \tag{39}$$

Формулы (38) и (39) вместе дают решение системы (32), (33) с начальными значениями t_0, z_1^*, s_1. Из (37) следует, что при $t \geqslant t_0$ мы имеем:

$$|s(t, z_1^*, s_1) - t| \leqslant |s_1 - t_0| + l|z_1^*|^2, \tag{40}$$

где l — некоторая положительная константа. В частном случае, когда $z_1^* = 0$, $s_1 = t_0$, решение (38), (39) имеет вид:

$$z^*(t) = 0, \qquad s(t) = t.$$

Из оценок (36) и (40) следует, что это решение системы (32), (33) устойчиво по Ляпунову.

Подставляя решение (38), (39) в формулу преобразования (28), мы получим решение $x = \varphi(t, x_1)$ уравнения (1) с начальными значениями $t = t_0$, $x = x_1 = g(z_1^*, s_1)$. Так как отображение (28) взаимно однозначно на некоторой окрестности пары $z^* = 0$, $s = t_0$, то любое решение $\varphi(t, x_1)$ уравнения (1) с начальными значениями t_0, x_1 при достаточно малом $|x_1 - x_0|$ может быть получено таким способом из некоторого решения (38), (39) системы (32), (33). При этом решение $x = \varphi(t)$ получается из решения $z^* = 0$, $s \equiv t$. Теперь из устойчивости по Ляпунову решения $z^* = 0$, $s \equiv t$ вытекает (в силу равномерной непрерывности отображения (28)) устойчивость по Ляпунову исходного периодического решения $x = \varphi(t)$.

Таким образом, теорема 26 доказана.

Применим полученные здесь результаты к случаю предельного цикла.

Г) Будем считать, что автономная система (1) (см. (3)) имеет второй порядок:

$$\dot{x}^i = f^i(x^1, x^2) = f^i(x), \qquad i = 1, 2,$$

и пусть

$$x = \varphi(t)$$

— ее периодическое решение с периодом τ. Система (7) имеет здесь вид:

$$\dot{y}^i = \frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^1} y^1 + \frac{\partial f^i(\varphi(t))}{\partial x^2} y^2, \qquad i = 1, 2.$$

В силу предложения А) одно характеристическое число этой системы равно единице; второе обозначим через λ. Оказывается, что

$$\lambda = e^{\int_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt}. \tag{41}$$

Таким образом, если

$$\int_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt < 0,$$

то периодическое решение $x = \varphi(t)$ устойчиво по Ляпунову. В действительности (см. пример) существует функция последования $\chi(u)$ периодического решения $x = \varphi(t)$ (см. § 28), для которой

$$\chi'(u_0) = \lambda, \tag{42}$$

так что при $\lambda \neq 1$ периодическое решение $x = \varphi(t)$ является грубым предельным циклом. Он устойчив при $\lambda < 1$ и неустойчив при $\lambda > 1$.

Докажем неравенство (41). Основная матрица C решения $Y = \Psi(t)$ уравнения $\dot{Y} = A(t)Y$ с начальным значением $\Psi(0) = E$ (см. А)) задается равенством

$$C = \Psi(\tau).$$

В силу формулы Лиувилля мы имеем:

$$\operatorname{Det}\Psi(\tau) = \operatorname{Det}\Psi(0) \cdot e^{\int_0^\tau S(t)\,dt}$$

где

$$S(t) = a_1^1(t) + a_2^2(t) = \frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}$$

(см. § 17, Ж)). В нашем случае, когда матрица C имеет второй порядок и одно ее собственное значение равно единице, а другое равно λ, имеем:

$$\lambda = \operatorname{Det} C = e^{\int_0^\tau \left(\frac{\partial f^1(\varphi(t))}{\partial x^1} + \frac{\partial f^2(\varphi(t))}{\partial x^2}\right) dt}$$

Пример

Пусть $\varphi(t)$ — периодическое решение автономной системы (1) (см. (3)) периода τ с начальными значениями t_0, x_0. Решение этой системы с начальными значениями t_0, ξ будем обозначать через $\varphi(t, \xi)$. Построим для решения $\varphi(t)$ аналог функции последования (см. § 28), который будет здесь отображением $(n-1)$-мерного пространства переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в себя.

Пусть

$$x = g(u); \qquad u = (u^1, \ldots, u^{n-1}) \tag{43}$$

— уравнение поверхности, пересекающей траекторию $\varphi(t)$ в единственной точке

$$x_0 = \varphi(t_0, x_0) = g(u_0) \tag{44}$$

и не касающейся в этой точке траектории $\varphi(t)$, так что векторы

$$\dot{\varphi}(t_0), \quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial g(u_0)}{\partial u^{n-1}} \tag{45}$$

линейно независимы. Найдем пересечение траектории $\varphi(t, g(u))$ с поверхностью (43) при t, близком к $t_0+\tau$, считая, что $|u-u_0|$ мало. Пусть $g(v)$ — точка пересечения; тогда справедливо соотношение:

$$\varphi(t, g(u)) - g(v) = 0. \tag{46}$$

При $u=u_0$ мы имеем очевидное решение уравнения (16):

$$t=t_0+\tau; \qquad v=u_0$$

(см. (4) и (44)). Здесь мы считаем u независимым переменным, а t, v — неизвестными величинами. Так как функциональный определитель системы (46) при $t=t_0+\tau$, $u=u_0$, $v=u_0$ по неизвестным функциям t и v не равен нулю в силу линейной независимости векторов (45), то при малом $|u-u_0|$ существует решение

$$t=t(u), \qquad v=\chi(u)$$

системы (46) с малыми $|t(u)-(t_0+\tau)|$ и $|\chi(u)-u_0|$. Отображение $\chi(u)$ пространства переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$ в себя (определенное при малом $|u-u_0|$) будем называть *отображением последования*. Каждому решению $u=u_1$ уравнения

$$\chi(u)-u=0 \tag{47}$$

соответствует периодическое решение $\varphi(t, g(u_1))$ автономного уравнения (1) (см. (3)) с периодом, близким к τ; в частности, решению $u=u_0$ соответствует исходное периодическое решение $\varphi(t)=\varphi(t, g(u_0))$. Если функциональная матрица

$$M=\left(\frac{\partial\chi^i(u_0)}{\partial u^j}\right) \qquad (i, j=1, \ldots, n-1)$$

не имеет собственных значений, равных единице, то решение $u=u_0$ уравнения (47) является изолированным. В самом деле, функциональная матрица уравнения (47) при $u=u_0$ равна

$$M-E^*.$$

Для того чтобы детерминант этой матрицы не обращался в нуль, необходимо и достаточно, чтобы матрица M не имела собственного значения, равного единице.

Выясним теперь вопрос о том, всякая ли периодическая траектория K_1, проходящая вблизи траектории K, описываемой решением $\varphi(t)$, описывается решением $\varphi(t, g(u_1))$, где u_1 есть некоторое решение уравнения (47). Именно так обстояло дело в плоском случае ($n=2$). Оказывается, что при $n\geqslant 3$ дело обстоит уже не так. Разберем этот

вопрос. Будем считать, что τ есть минимальный период решения $\varphi(t)$, т. е. что равенство

$$\varphi(t_0+t)=\varphi(t_0)$$

может иметь место лишь при условии, что $t=k\tau$, где k — целое число (см. § 15, В)). Если траектория K_1 близка к траектории K, то она пересекается с поверхностью (43) в некоторой точке $g(u_1)$, причем $|u_1-u_0|$ близко к нулю. Положим:

$$u_2=\chi(u_1), \qquad u_3=\chi(u_2), \ \ldots, \qquad u_{i+1}=\chi(u_i), \ \ldots$$

Так как траектория K_1 — замкнутая, то в этой последовательности найдется точка, совпадающая с точкой u_1; пусть u_{k+1} будет первая из них. Тогда траектория K_1 описывается решением $\varphi(t, g(u_1))$, причем минимальный ее период близок к числу $k\tau$; решение $\varphi(t, g(u_1))$ замыкается только после того, как оно k раз обойдет вдоль траектории $\varphi(t)$. В плоском случае возможен лишь случай $k=1$. Будем называть число k *кратностью* траектории K_1. Для отыскания двукратных траекторий нужно решать не уравнение (47), а уравнение

$$\chi(\chi(u))-u=0;$$

для отыскания трехкратных траекторий нужно решать уравнение:

$$\chi[\chi(\chi(u))]-u=0$$

и т. д. Функции $\chi(\chi(u))$, $\chi[\chi(\chi(u))]$, ... называются *итерациями* функции $\chi(u)$; k-кратную итерацию обозначим через $\chi^k(u)$. Таким образом, для нахождения всех k-кратных периодических решений, близких к решению $\varphi(t)$, следует решать уравнение

$$\chi^k(u)-u=0, \tag{48}$$

но из всех решений уравнения (48) следует брать лишь те, которые не являются решениями уравнений предшествующих кратностей; решение $u=u_0$ уравнения (47) является решением и всякого уравнения (48). Функциональная матрица уравнения (48) при $u=u_0$ равна, очевидно, M^k-E^*; таким образом, для того чтобы уравнение (48) имело лишь одно решение $u=u_0$, близкое к u_0, достаточно, чтобы детерминант матрицы M^k-E^* был отличен от нуля, или, что то же, чтобы матрица M^k не имела собственных значений, равных единице, или, наконец, чтобы матрица M не имела собственных значений, равных $\sqrt[k]{1}$. Таким образом, для того чтобы вблизи траектории K не было периодических траекторий данной кратности k, достаточно, чтобы матрица M не имела собственных значений, равных $\sqrt[k]{1}$. В частности, таких собственных значений у матрицы M нет, если все ее собственные значения по модулю меньше единицы.

Из сказанного видно, какую важную роль играет матрица M в изучении траекторий автономного уравнения (1) (см. (3)), близких

к периодическому решению $\varphi(t)$. Покажем теперь, что если уравнение (7) имеет характеристическое число единица кратности единица, то при некотором выборе поверхности (43) матрица M совпадает с матрицей C^* (см. (23)). Положим:

$$\psi^i_j(t) = \frac{\partial \varphi^i(t, \xi)}{\partial \xi^j}\Big|_{\xi = x_0}; \qquad \Psi(t) = (\psi^i_j(t)).$$

В силу предложения В) § 24, мы имеем:

$$\dot{\Psi}(t) = A(t)\Psi(t), \tag{49}$$

причем выполнено начальное условие:

$$\Psi(t_0) = E.$$

Таким образом, матрица $\Psi(t)$ представляет собой решение матричного уравнения (49), являющегося матричной записью уравнения (7), и потому

$$\Psi(t_0 + \tau) = C.$$

Так как матрица C имеет собственное значение единица кратности единица, то в пространстве векторов $\boldsymbol{y}$ (см. А)) можно выбрать такой базис, что матрица C запишется в виде (23). Выберем теперь за координаты в фазовом пространстве уравнения (1) (см. (3)) компоненты вектора $\boldsymbol{y}$, положив:

$$\boldsymbol{x} = \varphi(t_0) + \boldsymbol{y}$$

(ср. (5)). Полученные таким образом в фазовом пространстве координаты вновь обозначим через $x^1, \ldots, x^n$ и поверхность (43) зададим уравнениями:

$$x^1 = u^1, \ldots, \qquad x^{n-1} = u^{n-1}, \qquad x^n = 0.$$

Дифференцируя соотношение (46) по $u^1, \ldots, u^{n-1}$ при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, $t = t_0 + \tau$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ в предположении, что $t = t(\boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{v} = \chi(\boldsymbol{u})$ — функции переменных $u^1, \ldots, u^{n-1}$, получим равенство

$$C^* = M. \tag{50}$$

В случае, когда $n = 2$, матрица C^* есть скаляр λ, и соотношение (50) дает равенство (42).

Если все собственные значения матрицы C^* по модулю меньше единицы, то вблизи траектории K нет периодических решений никакой кратности. Это следует из оценки (36).

ДОБАВЛЕНИЕ I

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АНАЛИЗА

Это добавление содержит два параграфа, посвященных двум совершенно различным вопросам анализа.

В § 32 приведены основные факты, относящиеся к понятию непрерывности в пространстве многих переменных; важное место в этом параграфе занимает понятие открытого множества. Я придаю существенное значение тому, что правые части дифференциальных уравнений считаются заданными на открытых множествах. Точно так же я считаю существенным, что решение, зависящее от параметров, оказывается естественным образом определенным на открытом множестве (см. теорему 13). В связи с этим четкое понимание того, что представляет собой открытое множество, совершенно необходимо для понимания теорем существования решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

В § 33 приведено доказательство теорем существования неявных функций и некоторые их применения.

Вопросы, затронутые в этих двух параграфах, не всегда с достаточной точностью и полнотой освещаются в курсе анализа, и потому я позволил себе включить их в эту книгу.

§ 32. Топологические свойства евклидовых пространств

В анализе важную роль играет геометрическое изображение или, как говорят, геометрическая интерпретация аналитических соотношений, т. е. формул. Геометрическая интерпретация дает возможность установить связь между формулами и геометрическими образами и тем самым на помощь анализу привлекает геометрическую интуицию. Образец такой связи между формулами и геометрическими образами дает аналитическая геометрия. В прямом смысле слова геометрические образы могут рассматриваться на плоскости и в трехмерном пространстве, но анализ, имеющий дело с многими переменными, пользуется геометрическим языком и в многомерных пространствах. Здесь мы

будем рассматривать многомерные евклидовы пространства, представляя их себе одновременно как векторные. Важнейшими геометрическими свойствами геометрических образов являются топологические свойства; на простейших из них мы здесь и остановимся.

Евклидовы пространства

Напомним прежде всего понятие n-мерного евклидова векторного пространства.

А) Будем называть ***n-мерным вектором*** последовательность из n действительных чисел; числа эти называются *координатами* вектора. Их мы, как правило, будем обозначать одной и той же буквой с номерами в виде индексов наверху, например через $x^1, x^2, \ldots, x^n$; сам вектор будем обозначать той же буквой, только жирной, в данном случае — буквой $\boldsymbol{x}$. Формулой это запишем в виде:

$$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Совокупность всех n-мерных векторов будем называть ***n-мерным векторным пространством*** и обозначать одной большой буквой, например через R. *Сумма* и *разность* двух векторов

$$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n), \qquad \boldsymbol{y} = (y^1, y^2, \ldots, y^n)$$

определяются формулами:

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x^1 + y^1, \ldots, x^n + y^n); \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = (x^1 - y^1, \ldots, x^n - y^n).$$

Произведение вектора $\boldsymbol{x}$ на действительное число α определяется формулой

$$\alpha\boldsymbol{x} = (\alpha x^1, \ldots, \alpha x^n).$$

Особую роль в векторном пространстве играет нулевой вектор $\mathbf{0}$, все координаты которого равны нулю. Таким образом, в векторном пространстве определены алгебраические операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число. В евклидовом векторном пространстве определена, кроме того, операция скалярного произведения двух векторов. Именно, если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ — два произвольных вектора, то в соответствие им ставится число $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, называемое их *скалярным произведением* и определяемое формулой

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = x^1y^1 + \ldots + x^ny^n.$$

Если вектор $\boldsymbol{y}$ совпадает с вектором $\boldsymbol{x}$, то мы получаем *скалярный квадрат* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = x^2$ этого вектора, который всегда неотрицателен и обращается в нуль только при $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. *Длина*, или *модуль*, вектора $\boldsymbol{x}$ определяется формулой

$$|\boldsymbol{x}| = +\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}.$$

В дальнейшем мы часто будем векторы называть также *точками*

евклидова пространства R. За расстояние между двумя точками x и y принимается модуль разности векторов x и y, т. е. число $|x-y|$.

Установим теперь некоторые основные неравенства для скалярного произведения и расстояния в евклидовом пространстве.

Б) Для любых двух векторов x и y евклидова векторного пространства имеют место неравенства:

$$(x, y)^2 \leqslant x^2 y^2, \tag{1}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{2}$$

Далее, для любых трех точек a, b, c евклидова пространства имеет место неравенство

$$|a-c| \leqslant |a-b| + |b-c|. \tag{3}$$

Для доказательства первого неравенства рассмотрим вектор $\alpha x + y$, где α — произвольное действительное число, и составим скалярный квадрат этого вектора. Мы имеем:

$$(\alpha x + y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha (x, y) + y^2.$$

Так как скалярный квадрат вектора не может быть отрицательным, то величина, стоящая в правой части последнего равенства, ни при каком значении α не может принимать отрицательного значения, и потому квадратное уравнение

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha (x, y) + y^2 = 0$$

относительно неизвестной величины α не может иметь двух различных действительных корней. Отсюда следует, что дискриминант этого квадратного уравнения, т. е. получаемое при его решении подкоренное выражение $(x, y)^2 - x^2 y^2$, неположителен, а это и значит, что выполнено неравенство (1).

Для доказательства неравенства (2) возведем в квадрат его левую часть; мы будем иметь:

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2(x, y) + y^2,$$

а это, в силу неравенства (1), дает:

$$|x+y|^2 \leqslant |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2.$$

Из этого непосредственно следует неравенство (2) (так как оба числа $|x|$, $|y|$ неотрицательны).

Наконец, для доказательства неравенства (3) достаточно в неравенстве (2) положить $x = a - b$, $y = b - c$.

Итак, предложение Б) доказано.

Открытые, замкнутые и ограниченные подмножества евклидова пространства

Напомним определения операций объединения и пересечения множеств — в данном случае множеств, расположенных в евклидовом пространстве R. Пусть

$$M_1, M_2, \ldots, M_k \tag{4}$$

— произвольная конечная система множеств пространства R. Определим множество S, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит S, когда она принадлежит хотя бы одному из множеств (4). Множество S называется *объединением* множеств (4). Определим, далее, множество P, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит множеству P, когда она принадлежит каждому из множеств (4). Множество P называется *пересечением* множеств (4).

Пусть M — произвольное множество из R. Определим множество D, считая, что точка x из R тогда и только тогда принадлежит множеству D, когда она не принадлежит множеству M. Множество D называется *дополнением* множества M. Очевидно, что дополнение множества D совпадает с M.

Пусть

$$D_1, D_2, \ldots, D_k \tag{5}$$

— система множеств, дополнительных к множествам (4), так что D_i является дополнением множества M_i. Легко усмотреть, что *дополнение к объединению множеств* (4) *является пересечением множеств* (5) и, наоборот, *дополнение к пересечению множеств* (4) *является объединением множеств* (5).

Перейдем теперь к установлению некоторых простейших топологических свойств множеств, расположенных в евклидовом пространстве. Эти свойства, в основном, связаны с определением понятий открытого и замкнутого множеств в евклидовом пространстве R.

В) Пусть a — произвольная точка евклидова пространства R и r — произвольное положительное число. Множество всех точек из R, расстояние которых до точки a меньше r, называется *шаром* радиуса r с центром в a. Всякий шар с центром в a называется *окрестностью* точки a (ниже — см. пример 3 — понятие окрестности будет расширено). Множество G точек пространства R называется *открытым*, если для всякой точки a из G существует ее окрестность, целиком содержащаяся в множестве G. Пусть M — произвольное множество из R. Точка a из R называется *предельной* для множества M, если каждая окрестность точки a содержит точку множества M, отличную от a. В этом случае каждая окрестность точки a обязательно содержит бесконечное множество точек из M. Множество F точек из R называется *замкнутым*, если каждая его предельная

точка принадлежит ему. Оказывается, что дополнение к любому открытому множеству замкнуто, а дополнение к любому замкнутому множеству открыто.

Докажем предложение В). Покажем прежде всего, что если каждая окрестность точки $\boldsymbol{a}$ содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от $\boldsymbol{a}$, то она содержит бесконечное множество точек множества M. Пусть U_1 — произвольная окрестность точки $\boldsymbol{a}$ и r_1 — ее радиус. Пусть далее $\boldsymbol{x}_1$ — отличная от $\boldsymbol{a}$ точка множества M, содержащаяся в U_1. Так как $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{a}$, то $|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{a}| = r_2 > 0$. Шар U_2 радиуса r_2 с центром в точке $\boldsymbol{a}$ не содержит точки $\boldsymbol{x}_1$, но он содержит некоторую точку $\boldsymbol{x}_2$ множества M, отличную от $\boldsymbol{a}$. Продолжая этот процесс дальше, мы получим бесконечную последовательность $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k, \ldots$ попарно различных точек множества M, содержащихся в U_1.

Докажем последнее утверждение предложения В). Пусть G — некоторое множество из R и F — его дополнение. Допустим что G — открытое множество, и докажем, что F — замкнутое. Пусть $\boldsymbol{a}$ — предельная точка множества F; покажем, что она принадлежит множеству F, т. е. не принадлежит множеству G. Допустим противоположное, т. е. что точка $\boldsymbol{a}$ принадлежит G. Тогда, в силу предположенной открытости множества G, существует окрестность точки $\boldsymbol{a}$, целиком содержащаяся в G и, следовательно, не содержащая точек из F, а это значит, что точка $\boldsymbol{a}$ не является предельной для F.

Допустим теперь, что множество F замкнуто, и докажем, что множество G открыто. Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольная точка из G. Так как она не принадлежит множеству F, то в силу замкнутости она не является его предельной точкой и потому существует окрестность точки $\boldsymbol{a}$, не содержащая отличных от $\boldsymbol{a}$ точек из F; но $\boldsymbol{a}$ также не принадлежит F, и потому вся эта окрестность содержится в G. Тем самым доказано, что множество G открыто.

Таким образом, предложение В) доказано.

Очевидно, что все пространство R является одновременно открытым и замкнутым. Далее, каждое конечное множество F из R замкнуто. В самом деле, множество F вообще не имеет предельных точек и потому содержит их все, т. е. замкнуто.

В случае, когда размерность векторного пространства R равна единице, это пространство совпадает с множеством всех действительных чисел, и алгебраические операции над векторами превращаются в обычные операции над действительными числами, а модуль совпадает с модулем числа. Расстояние между двумя точками $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в этом случае равно модулю $|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|$ их разности. Непосредственно видно, что в пространстве действительных чисел множество всех точек x, удовлетворяющих неравенству $x < \alpha$ или неравенству $x > \alpha$, где α — фиксированное число, является открытым. Дополнение к этому множеству, определяемое неравенством $x \geqslant \alpha$ или неравенством $x \leqslant \alpha$, замкнуто.

Г) Объединение и пересечение конечного числа открытых множеств евклидова пространства R открыты. Объединение и пересечение конечного числа замкнутых множеств пространства R замкнуты *).

Докажем это. Пусть

$$G_1, G_2, \ldots, G_k \tag{6}$$

— конечная совокупность открытых множеств пространства R. Докажем, что их объединение открыто. Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольная точка, принадлежащая этому объединению; тогда она принадлежит хотя бы одному из множеств (6), например, множеству G_i. Так как множество G_i открыто, то существует окрестность точки $\boldsymbol{a}$, содержащаяся в G_i; но тогда эта окрестность содержится и в объединении множеств (6).

Докажем, что пересечение множеств (6) открыто. Пусть $\boldsymbol{a}$ — произвольная точка из этого пересечения; тогда она принадлежит каждому множеству G_i системы (6). Так как множество G_i открыто, то существует шар радиуса r_i с центром в $\boldsymbol{a}$, содержащийся в G_i. Пусть r — минимальное из чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$; тогда шар радиуса r с центром в $\boldsymbol{a}$ содержится в каждом из множеств системы (6) и, следовательно, принадлежит их пересечению. Таким образом установлено, что пересечение множеств (6) открыто.

Переходя от открытых множеств (6) к их дополнениям, мы получим соответствующие результаты относительно замкнутых множеств (см. В)).

Таким образом, предложение Г) доказано.

Д) Пусть R — евклидово пространство,

$$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \ldots \tag{7}$$

— некоторая бесконечная последовательность точек из R и M — некоторое множество точек из R. Заметим, что последовательность отличается от множества не только тем, что ее точки занумерованы, но также тем, что точки с различными номерами могут совпадать между собой. Поэтому множество всех точек, входящих в бесконечную последовательность, существенно отличается от самой последовательности; в частности, оно может быть конечным. Последовательность (7) называется *ограниченной*, если существует такое число r, что для каждой точки $\boldsymbol{a}_k$ последовательности (7) выполнено неравенство $|\boldsymbol{a}_k| < r$. Точно так же, множество M называется *ограниченным*, если существует такое число r, что для каждой точки $\boldsymbol{x}$ из M выполнено неравенство $|\boldsymbol{x}| < r$. Говорят, что последовательность (7) *сходится* к точке $\boldsymbol{a}$ из R, если имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} |\boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{a}| = 0. \tag{8}$$

---

*) Нетрудно доказать, что всегда объединение любой системы (не обязательно конечной) открытых множеств открыто, а пересечение любой системы замкнутых множеств замкнуто. Нам эти факты не понадобятся.

Если при этом последовательность (7) содержит бесконечное множество различных точек, то точка $\boldsymbol{a}$ является предельной для множества всех точек последовательности (7) и притом единственной предельной точкой этого множества. Оказывается, что из ограниченной последовательности точек всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек. Из этого непосредственно следует, что всякое ограниченное бесконечное множество M имеет предельную точку.

Докажем предложение Д). Допустим, что имеет место соотношение (8) и что множество A всех точек последовательности (7) бесконечно. Из соотношения (8) следует, что каждый шар с центром $\boldsymbol{a}$ содержит все точки последовательности (7), за исключением конечного числа. Так как множество A бесконечно, то из сказанного следует, что каждая окрестность точки $\boldsymbol{a}$ содержит бесконечное множество точек из A. Следовательно, каждая окрестность точки $\boldsymbol{a}$ содержит точки, отличные от $\boldsymbol{a}$, а это и значит, что точка $\boldsymbol{a}$ является предельной для A.

Покажем, что точка $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{a}$ не может быть предельной для A. Расстояние от $\boldsymbol{a}$ до $\boldsymbol{b}$ обозначим через 2ρ; так как $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, то $\rho > 0$. Шары P и Q с центрами в точках $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ радиуса ρ не пересекаются. Это следует из неравенства (3). Так как шар P, по доказанному, содержит все точки множества A, за исключением конечного числа, то шар Q может содержать лишь конечное число точек множества A и потому точка $\boldsymbol{b}$ не является предельной для множества A.

Допустим теперь, что последовательность (7) ограничена, и выберем из нее сходящуюся подпоследовательность. При доказательстве мы используем тот факт, что для числовых подпоследовательностей это возможно. Перейдем к координатной записи точек последовательности (7), положив:

$$\boldsymbol{a}_k = (a_k^1, a_k^2, \ldots, a_k^n), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Так как последовательность (7) ограничена, то существует такое число r, что $|\boldsymbol{a}_k| < r$, а отсюда следует, что

$$|a_k^i| < r, \qquad i = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, последовательность чисел

$$a_1^1, a_2^1, \ldots, a_k^1, \ldots \tag{9}$$

ограничена и потому из нее можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не менять обозначений, мы будем считать, что эта выбранная подпоследовательность есть сама последовательность (9), так что имеет место соотношение

$$\lim_{k \to \infty} a_k^1 = a^1,$$

где a^1 — некоторое число. Теперь из последовательности

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_k^2,\ \ldots \tag{10}$$

ввиду ее ограниченности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Для того чтобы не менять обозначений, мы вновь будем считать, что эта выбранная подпоследовательность есть сама последовательность (10). Продолжая этот процесс по всем номерам 1, 2, ..., n координат, мы выделим такую подпоследовательность

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_l,\ \ldots \tag{11}$$

последовательности (7), что для координат точек этой подпоследовательности имеют место соотношения

$$\lim_{l\to\infty} b_l^i = a^i, \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{12}$$

где a^i — некоторое число.

Положим $a = (a^1, \ldots, a^n)$. Из соотношения (12) непосредственно следует, что

$$\lim_{l\to\infty} |b_l - a| = 0.$$

Таким образом, из последовательности (7) выбрана сходящаяся подпоследовательность (11).

Покажем, наконец, что всякое бесконечное ограниченное множество M имеет предельную точку. Так как множество M бесконечно, то из него можно выбрать бесконечную последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ \ldots,$$

все точки которой попарно различны. В силу уже доказанного, из этой последовательности ввиду ее ограниченности можно выбрать бесконечную подпоследовательность

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_l,\ \ldots, \tag{13}$$

сходящуюся к некоторой точке a. Так как все точки последовательности (13) попарно различны, то точка a является предельной для множества всех точек последовательности (13) и, следовательно, предельной для множества M.

Итак, предложение Д) доказано.

В некоторых вопросах играют важную роль замкнутые ограниченные подмножества евклидовых пространств. Докажем одно характеристическое свойство таких подмножеств; оно называется *компактностью*.

Е) Множество M точек евклидова пространства R называется *компактным*, если каждое его бесконечное подмножество имеет предельную точку, принадлежащую множеству M. Оказывается, что

множество M тогда и только тогда компактно, когда оно одновременно замкнуто и ограничено.

Докажем предложение Е).

Допустим сначала, что множество F замкнуто и ограничено, и пусть M — его произвольное бесконечное подмножество. В силу предложения Д) множество M имеет некоторую предельную точку a. Эта точка является предельной и для множества F. В силу замкнутости F, точка a принадлежит F. Таким образом, всякое бесконечное подмножество M множества F обязательно имеет предельную точку, принадлежащую F, так что F компактно.

Допустим теперь, что множество F компактно. Докажем, что оно ограничено. Допустим противоположное; тогда из F можно выбрать такую последовательность

$$a_1, \ldots, a_k, \ldots \tag{14}$$

попарно различных точек, что

$$|a_k| > k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть a — произвольная точка из R. В силу неравенства (2), мы имеем $|a_k| \leqslant |a_k - a| + |a|$, откуда

$$|a_k - a| \geqslant k - |a|.$$

Это значит, что расстояние от точки a до точки a_k неограниченно возрастает с ростом k, и потому любая окрестность точки a содержит лишь конечное число точек множества (14). Таким образом, бесконечное подмножество (14) множества F не имеет предельной точки, что противоречит компактности множества F.

Докажем, наконец, что компактное множество F замкнуто. Пусть c — его предельная точка. Так как каждая окрестность точки c содержит точку множества F, отличную от c, то из F можно выбрать последовательность

$$c_1, \ldots, c_l, \ldots \tag{15}$$

попарно различных точек, сходящуюся к c. В силу Д) единственной предельной точкой точек последовательности множества (15) является c, а так как, по предположению компактности, это множество должно иметь предельную точку, принадлежащую F, то точка c принадлежит F. Итак, каждая предельная точка c множества F принадлежит ему и, следовательно, множество F замкнуто.

Таким образом, предложение Е) доказано.

Непрерывные отображения

Пусть A и B — два произвольные множества. Говорят, что задано *отображение* f множества A в множество B (или, иначе, *функция* f на множестве A со значениями в множестве B), если каждой точке x

из A поставлена в соответствие вполне определенная точка $y=f(x)$ множества B. Если C — некоторое множество точек из A, то образом $f(C)$ множества C при отображении f называется множество всех точек вида $y=f(x)$, где x — произвольная точка из C. Если D — некоторое множество точек из B, то прообразом $f^{-1}(D)$ множества D при отображении f называется совокупность всех таких точек x из A, что точка $f(x)$ принадлежит D.

Ж) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства, M — некоторое множество точек из R и f — отображение множества M в пространство S. Отображение (или, что то же самое, функция) f называется *непрерывным* в точке a множества M, если для каждого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (где x — точка из M) мы имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Функция f считается непрерывной на всем множестве M, если она непрерывна в каждой точке a этого множества. Функция f называется *равномерно непрерывной*, если для всякого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что при $|x_1-x_2|<\delta$ (где x_1 и x_2 — точки из M) мы имеем $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$. Очевидно, что равномерно непрерывная функция является непрерывной. Перейдем от векторных обозначений к скалярным. Именно, положим

$$x=(x^1, \ldots, x^p); \qquad f(x)=(f^1(x), \ldots, f^q(x)),$$

где p и q — размерности евклидовых пространств R и S соответственно. Тогда вместо одной векторной функции f векторного переменного x мы получим q скалярных функций от p скалярных переменных, именно:

$$f^j(x)=f^j(x^1, \ldots, x^p), \qquad j=1, \ldots, q. \tag{16}$$

Легко доказывается, что непрерывность векторной функции $f(x)$ вектора x равносильна непрерывности всех функций (16) по совокупности переменных $x^1, \ldots, x^p$. То же относится к равномерной непрерывности. Здесь это доказываться не будет.

З) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства и f — непрерывное отображение некоторого открытого множества G из R в пространство S. Оказывается, что прообраз $f^{-1}(H)$ любого открытого множества H пространства S является открытым множеством пространства R.

Докажем это. Пусть H — произвольное открытое множество из S и a — точка множества $f^{-1}(H)$. Так как H — открытое множество и точка $b=f(a)$ принадлежит ему, то существует окрестность V точки b, содержащаяся в H. Окрестность V есть шар некоторого положительного радиуса ε с центром в b. В силу непрерывности отображения f существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (здесь x — точка из G) имеем $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Так как

a — точка открытого множества G, то существует шар с центром в a некоторого радиуса r, содержащийся в G. Пусть s — наименьшее из чисел δ и r; тогда шар радиуса s с центром в a, очевидно, содержится в множестве $f^{-1}(H)$. Следовательно, это множество открыто.

И) Пусть R и S — два евклидовых векторных пространства, F — замкнутое и ограниченное (т. е. компактное) множество из R и f — непрерывное отображение множества F в пространство S. Оказывается тогда, что отображение f равномерно непрерывно, а множество $f(F)$ является замкнутым и ограниченным (т. е. компактным). Из последнего вытекает, в частности, что непрерывная числовая функция f, определенная на компактном множестве F, имеет максимум и минимум.

Докажем прежде всего, что отображение f равномерно непрерывно. Допустим противоположное; тогда существует такое положительное число ε, что при любом положительном δ найдутся две точки a и x из F, для которых $|x-a|<\delta$, а $|f(x)-f(a)|\geqslant\varepsilon$. Пользуясь этим, можно построить бесконечную последовательность пар точек

$$a_1,\ x_1;\quad a_2,\ x_2;\ \ldots;\quad a_k,\ x_k;\ \ldots,$$

для которых выполнены условия

$$|f(x_k)-f(a_k)|\geqslant\varepsilon,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots; \tag{17}$$

$$\lim_{k\to\infty}|x_k-a_k|=0. \tag{18}$$

Так как последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ содержится в замкнутом ограниченном множестве F, то из нее можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке a из F. Для того чтобы не менять обозначений, будем считать, что сама последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ сходится к a.

Так как функция f непрерывна в точке a, то существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ мы имеем $|f(x)-f(a)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ввиду того, что последовательность $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ сходится к a и имеет место соотношение (18), найдется настолько большой номер k, что $|a_k-a|<\delta$, $|x_k-a|<\delta$ (см. (3)). Для такого k мы имеем

$$|f(x_k)-f(a_k)|<|f(x_k)-f(a)|+|f(a_k)-f(a)|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2},$$

что противоречит неравенству (17).

Докажем теперь, что множество $f(F)$ компактно. Пусть M — произвольное бесконечное множество точек из $f(F)$. Из множества M можно выбрать бесконечную последовательность попарно различных точек

$$b_1, \ldots, b_k, \ldots \tag{19}$$

Для каждой точки b_k этой последовательности выберем такую точку

a_k из F, что $f(a_k)=b_k$, $k=1, 2, \ldots$ Точки $a_1, \ldots, a_k, \ldots$ попарно различны и потому имеют предельную точку a в множестве F. Покажем, что точка $b=f(a)$ является предельной для множества (19). Пусть V — произвольная окрестность точки b, т. е. шар некоторого радиуса $\varepsilon>0$ с центром в b. Так как функция f непрерывна в точке a, то существует такое положительное число δ, что при $|x-a|<\delta$ (здесь x — точка из F) $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. Так как точка a является предельной для множества точек $a_1, \ldots, a_k, \ldots$, то в шаре U радиуса δ с центром a найдутся, по крайней мере, две различные точки a_k и a_l этого множества. Точки b_k и b_l принадлежат шару V, и так как они различны, то, по крайней мере, одна из них не совпадает с точкой b. Таким образом, произвольная окрестность V точки b содержит хотя бы одну точку множества (19), отличную от b. Следовательно, b является предельной точкой для множества (19), а потому и для множества M. Таким образом, множество $f(F)$ компактно.

Если размерность пространства S равна 1, то $f=f$ есть числовая функция. В этом случае множество $f(F)$ есть замкнутое ограниченное множество действительных чисел. Точные верхняя и нижняя грани множества $f(F)$ конечны и принадлежат ему. Точная верхняя грань множества $f(F)$ есть максимум функции f, а точная нижняя грань — ее минимум.

Таким образом, предложение И) доказано.

Примеры

Рассмотрим некоторые примеры непрерывных функций.

1. Пусть R и S — два евклидовых пространства. Каждой точке $x=(x^1, \ldots, x^p)$ пространства R поставим в соответствие точку $y=(y^1, \ldots, y^q)$ пространства S, положив

$$y^j=\sum_{i=1}^{p} a_i^j x^i + b^j, \qquad j=1, \ldots, q. \tag{20}$$

Здесь a_i^j — некоторые числа, составляющие матрицу $A=(a_i^j)$, а b^j — числа, составляющие вектор $b=(b^1, \ldots, b^q)$. Система скалярных соотношений (20) в векторной форме записывается в виде:

$$y=Ax+b. \tag{21}$$

Соотношение (21) определяет так называемое *аффинное отображение* пространства R в пространство S.

Докажем, что аффинное отображение непрерывно. Для краткости обозначим его одной буквой f. Пусть x_1 и x_2 — две точки из R, расстояние между которыми $|x_1-x_2|<\delta$. Оценим расстояние между

точками $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ в пространстве S. Мы имеем:

$$y_1 - y_2 = A(x_1 - x_2),$$

или в скалярной форме

$$y_1^j - y_2^j = \sum_{i=1}^{p} a_i^j (x_1^i - x_2^i), \qquad j = 1, \ldots, q. \tag{22}$$

Пусть γ — максимальное из чисел $|a_i^j|$, так что $|a_i^j| \leqslant \gamma$ для всех i, j. Так как $|x_1 - x_2| < \delta$, то $|x_1^i - x_2^i| < \delta$. Из этих неравенств, в силу соотношения (22), получаем:

$$|y_1^j - y_2^j| < p\gamma\delta, \qquad j = 1, \ldots, q.$$

Возводя это соотношение в квадрат, суммируя по j и извлекая затем квадратный корень, получим $|y_1 - y_2| < \delta p\gamma\sqrt{q}$. Таким образом, чтобы было выполнено неравенство $|y_1 - y_2| < \varepsilon$, достаточно взять $\delta < \frac{\varepsilon}{p\gamma\sqrt{q}}$. Мы видим, что аффинное отображение не только непрерывно, но и равномерно непрерывно.

Из доказанного следует (см. 3)), что если H — некоторое открытое множество пространства S, то его прообраз $f^{-1}(H)$ при аффинном отображении f есть открытое множество в R.

Если матрица A — квадратная (т. е. $p = q$) и невырожденная (т. е. детерминант ее отличен от нуля), то система соотношений (20) может быть разрешена относительно неизвестных $x^1, \ldots, x^p$, так что вектор x однозначно выражается через вектор y:

$$x = Cy + d.$$

Это значит, что аффинное отображение f имеет в этом случае обратное ему отображение f^{-1}, также являющееся аффинным. При этом открытые множества пространства R переходят в открытые множества пространства S; то же самое имеет место и для их дополнений, т. е. для замкнутых множеств. Если невырожденное аффинное отображение f пространства R на пространство S трактовать как преобразование координат в пространстве R, при котором меняется понятие о расстоянии, то мы видим, что *топологические свойства (открытость и замкнутость множеств) не зависят от системы координат, через которую определяется расстояние между точками.*

2. Пусть R — евклидово пространство и a — некоторый его вектор, отличный от нуля. Каждому вектору x из R поставим в соответствие число $y = f(x)$, положив

$$y = (a, x).$$

Функция f, очевидно, является аффинным отображением пространства R в пространство действительных чисел и потому непрерывна. Таким

образом, прообраз любого открытого множества действительных чисел является открытым. Множество всех действительных чисел y, удовлетворяющих неравенству $y<\alpha$ или $y>\alpha$, открыто. Прообраз этого множества в пространстве R определяется неравенством $(a, x)<\alpha$ или $(a, x)>\alpha$. Эти неравенства определяют в пространстве R *открытые полупространства*, на которые пространство R разбивается гиперплоскостью $(a, x)=\alpha$. Дополнения к этим открытым полупространствам определяются неравенствами $(a, x)\geqslant\alpha$ и $(a, x)\leqslant\alpha$. Эти полупространства замкнуты, так как являются дополнениями к открытым.

Конечная система неравенств

$$(a_1, x)<\alpha_1, \ldots, (a_k, x)<\alpha_k,$$

где $a_1, \ldots, a_k$ — векторы, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — числа, определяет в пространстве R открытый выпуклый (вообще говоря, неограниченный) многогранник. Он является открытым множеством, поскольку получен как пересечение нескольких открытых полупространств. Точно так же конечная система неравенств

$$(a_1, x)\leqslant\alpha_1, \ldots, (a_k, x)\leqslant\alpha_k$$

определяет в пространстве R *выпуклый замкнутый многогранник;* он является замкнутым множеством как пересечение замкнутых полупространств.

3. Пусть R — евклидово пространство, а L и M — два его подмножества. *Расстоянием* между множествами L и M называется точная нижняя грань всех чисел $|x-y|$, где x — произвольная точка из L, а y — произвольная точка из M. Если множество L содержит лишь одну точку x, то мы получаем расстояние $f(x)$ точки x до множества M, которое является числовой функцией точки x пространства R.

Легко видеть, что расстояние $f(x)$ точки x до множества M обращается в нуль только тогда, когда точка x либо принадлежит множеству M, либо является предельной для него. Таким образом, в случае замкнутого множества M из соотношения $f(x)=0$ следует, что x принадлежит M.

Докажем, что расстояние $f(x)$ точки x до множества M есть непрерывная функция. Пусть x и y — две точки из R, расстояние между которыми меньше ε: $|x-y|<\varepsilon$, и a — произвольная точка из M; тогда мы имеем, в силу неравенства (3):

$$f(x)\leqslant|x-a|\leqslant|x-y|+|y-a|.$$

Так как это неравенство справедливо для любой точки a множества M, то оно останется справедливым, если мы заменим в нем правую часть ее точной нижней гранью (когда точка a пробегает

все множество M):

$$f(x) \leqslant |x-y| + f(y) < \varepsilon + f(y).$$

Таким образом, $f(x) - f(y) < \varepsilon$. Точно так же доказывается, что $f(y) - f(x) < \varepsilon$. Из этих двух неравенств следует, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Таким образом, из неравенства $|x-y| < \varepsilon$ вытекает, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, а это значит, что функция $f(x)$ не только непрерывна, но и равномерно непрерывна.

Так как расстояние $f(x)$ точки x до множества M есть непрерывная функция, то неравенства $f(x) < \alpha$ и $f(x) > \alpha$ определяют в пространстве R открытые множества (см. З)). Дополнительные множества определяются неравенствами $f(x) \geqslant \alpha$ и $f(x) \leqslant \alpha$. Таким образом, определяемые этими неравенствами множества замкнуты. В частности, множество $\overline{M}$, определяемое неравенством $f(x) \leqslant 0$, замкнуто. Множество $\overline{M}$ получается из M присоединением к нему всех его предельных точек и называется *замыканием* множества M. Если множество M ограничено, то множество, определяемое неравенством $f(x) \leqslant \alpha$, не только замкнуто, но, как легко видеть, и ограничено.

Если замкнутое ограниченное множество F не пересекается с замкнутым множеством M, то расстояние между этими множествами положительно. Для доказательства обозначим вновь через $f(x)$ расстояние точки x до множества M. Так как функция $f(x)$ непрерывна, то на замкнутом ограниченном множестве F она имеет минимум m. Легко видеть, что m и есть расстояние между множествами F и M. Покажем, что $m > 0$. Пусть a — такая точка из F, что $f(a) = m$. Если бы было $m = 0$, то точка a принадлежала бы множеству M (ввиду его замкнутости), а это невозможно, так как множества F и M не пересекаются.

Так как расстояние $f(x)$ точки x до произвольного множества M есть непрерывная функция, то, в частности, расстояние $|x-a|$ точки x до точки a является непрерывной функцией от x. Из этого следует, что всякий шар (см. В)) есть открытое множество. В предложении В) окрестностью точки a был назван произвольный шар с центром в точке a. В ряде случаев бывает удобно считать окрестностью точки a произвольное открытое множество, содержащее a. При таком расширении понятия окрестности определение предельной точки не меняется.

§ 33. Теоремы о неявных функциях

В этом параграфе доказываются известные теоремы анализа о существовании и дифференцируемости неявных функций. Эти теоремы имеют многочисленные применения и, в частности, употребляются в этой книге. Доказательство теоремы существования неявных фун-

кций проводится здесь тем же методом последовательных приближений (или сжатых отображений), который используется в § 20 и 21, а доказательство дифференцируемости неявных функций использует лемму Адамара (см. § 24, А)).

Таким образом, все содержание этого параграфа очень близко примыкает к методам четвертой главы и хорошо их иллюстрирует.

Мы будем рассматривать систему уравнений

$$f^i(t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

относительно неизвестных $x^1, \ldots, x^n$, считая $t^1, \ldots, t^k$ независимыми переменными. В дальнейшем будем предполагать, что левые части уравнений (1), т. е. функции

$$f^i(t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

определены и непрерывны на некотором открытом множестве Γ пространства R переменных $t^1, \ldots, t^k, x^1, \ldots, x^n$ вместе с их частными производными

$$\frac{\partial f^i}{\partial x^j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{3}$$

Полагая $\boldsymbol{t} = (t^1, \ldots, t^k)$; $\boldsymbol{x} = (x^1, \ldots, x^n)$;

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = (f^1(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}), \ldots, f^n(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})),$$

мы можем записать систему уравнений (1) в векторной форме

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}. \tag{4}$$

Решением уравнения (4) будем называть всякую непрерывную векторную функцию $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ векторного аргумента $\boldsymbol{t}$, определенную на некотором открытом множестве G пространства T переменных $t^1, \ldots, t^k$, которая при подстановке в уравнение (4) превращает его в тождество

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})) = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

выполненное для всех точек $\boldsymbol{t}$ открытого множества G.

Теорема 27. *Предположим, что функциональный определитель*

$$\left| \frac{\partial f^i(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})}{\partial x^j} \right|$$

отличен от нуля в каждой точке $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x})$ *открытого множества* Γ. *Тогда для каждой точки* $(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0)$ *открытого множества* Γ, *удовлетворяющей условию*

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{t}_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}, \tag{6}$$

существует непрерывное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})$ *уравнения* (4), *удовлетворяющее условию*

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t}_0) = \boldsymbol{x}_0. \tag{7}$$

Далее, имеет место единственность. Именно, существует такое открытое множество U в пространстве R, содержащее точку (t_0, x_0), что каждая точка (t, x) множества U, удовлетворяющая уравнению (4), удовлетворяет также уравнению $x = \varphi(t)$. Иными словами, вблизи точки (t_0, x_0) нет ни одной точки, удовлетворяющей уравнению (4) и не принадлежащей графику функции $x = \varphi(t)$.

При доказательстве этой теоремы мы используем равномерную сходимость последовательности векторных функций векторного переменного. В § 20 и 21 рассматривались лишь последовательности функций скалярного переменного; поэтому мы повторим здесь относящиеся сюда понятия для случая векторного переменного (ср. § 21, B)).

A) Пусть F — замкнутое ограниченное множество точек пространства T. *Нормой* $\|\varphi\|$ непрерывной векторной функции $x = \varphi(t)$, заданной на множестве F, будем называть максимум ее модуля:

$$\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|.$$

Пользуясь понятием нормы, можно формулировать определение равномерной сходимости последовательности

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_i, \ldots \tag{8}$$

непрерывных векторных функций векторного аргумента, заданных на множестве F: последовательность (8) *равномерно сходится* к непрерывной функции $\varphi(t)$, заданной на том же множестве F, если

$$\lim_{i \to \infty} \|\varphi - \varphi_i\| = 0.$$

Для того чтобы последовательность (8) равномерно сходилась к некоторой непрерывной функции, достаточно, чтобы были выполнены неравенства

$$\|\varphi_{i+1} - \varphi_i\| \leqslant a_i,$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_i, \ldots$ образуют сходящийся ряд.

Доказательство теоремы 27. Для того чтобы применить к уравнению (4) метод последовательных приближений, перепишем это уравнение в несколько измененном виде. Для этого положим

$$b^i_j = \frac{\partial}{\partial x^j} f^i(t_0, x_0), \qquad i, j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Так как функциональный определитель

$$\left| \frac{\partial f^i(t, x)}{\partial x^j} \right|$$

отличен от нуля в каждой точке (t, x) открытого множества Γ, то матрица $B = (b^i_j)$ имеет обратную матрицу B^{-1}. Систему уравнений (1)