

Р.Рейссиг, Г.Сансоне, Р.Конти

Качественная
теория нелинейных
дифференциальных
уравнений

Р. РЕЙССИГ, Г. САНСОНЕ, Р. КОНТИ

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Перевод с немецкого И. П. МАКАРОВА

Под редакцией Б. П. ДЕМИДОВИЧА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1974

517.2

Р 35

УДК 51

Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р., Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1974.

Книга известных специалистов в области качественной теории дифференциальных уравнений Р. Рейссига, Г. Сансоне и Р. Конти посвящена в основном вопросам устойчивости, D -поведению и существованию периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Большое внимание уделено количественным оценкам.

Книга представляет интерес для студентов, специализирующихся по теории дифференциальных уравнений, научных работников, а также для инженеров-теоретиков.

Библ. 217 назв., рис. 46.

R. REISSIG — G. SANSONE — R. CONTI

QUALITATIVE THEORIE
NICHTLINEARER
DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

EDIZIONI CREMONESE
ROMA

1963

P 20203—124 63-74
053(02)-74

© Перевод на русский язык.
Главная редакция физико-математической литературы издательства
«Наука», 1974.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	4
Предисловие авторов к русскому переводу	6
Предисловие	7
ГЛАВА 1	11
ГЛАВА 2	16
2.1. Основы общих методов	16
2.2. Метод Важевского	18
2.3. Некоторые понятия и теоремы из теории устойчивости Ляпунова	23
2.4. Критерий D -поведения, получаемые из теории Ляпунова	30
2.5. Критерий Иошизавы	36
2.6. Критерий Мизохаты — Ямагути	47
2.7. Понятие предельной точки движения по Биркгофу	49
2.8. Теория Пуанкаре — Бендиксона	60
2.9. Теория преобразований и теоремы о неподвижной точке	74
2.10. Топологическая теория устойчивости	85
ГЛАВА 3	94
3.1. Периодические решения уравнения $x'' + g(x) = 0$. Оценка периода	94
3.2. Семейство периодических решений уравнения Льенара	104
ГЛАВА 4	115
4.1. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + x = 0$	115
4.2. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$	129
4.3. Дифференциальное уравнение $x'' + F(x') + g(x) = 0$	148
4.4. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x, x') + g(x) = 0$	152
ГЛАВА 5	166
5.1. Дифференциальное уравнение $x'' + g(x) = e(t)$	166
5.2. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + x = e(t)$	174
5.3. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + g(x) = e(t)$	180
5.4. Дифференциальное уравнение $x'' + kf(x)x' + g(x) = ke(t)$	206
5.5. Дифференциальное уравнение $x'' + F(x') + g(x) = e(t)$	235
5.6. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x, x')x' + g(x) = e(t)$ и более общие типы уравнений	252
ГЛАВА 6	283
Библиография	307
Предметный указатель	317

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга принадлежит известным специалистам в области качественной теории дифференциальных уравнений Р. Рейссигу, Г. Сансоне и Р. Конти. Она дает систематическое изложение основных понятий теории устойчивости Ляпунова, D -поведения систем, нахождения периодических решений дифференциальных уравнений и других вопросов. В основном рассматриваются нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, которые расположены по типам. Затронутые вопросы излагаются достаточно подробно, в частности, широко использована журнальная литература. Приведена обширная библиография.

Несмотря на то, что книга на немецком языке была опубликована в 1963 году, она продолжает оставаться актуальной для нашего читателя, так как за истекшее время основные вопросы книги, связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка, не подверглись существенной переработке.

Первые две главы книги носят вводный характер. Здесь дается общее представление о методах качественного исследования известных типов дифференциальных уравнений. Приводятся классические результаты Ляпунова, Пуанкаре, Бендиксона, Биркгофа и др. Даётся понятие о более современных методах исследований в этой области. Изложены топологический метод Важевского и основные теоремы о неподвижных точках.

Следующие три главы посвящены условиям предельной ограниченности решений и существованию периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, как автономных, так и неавтономных. Здесь подробно изложены результаты Опяля, Зейферта, Левинсона, Картрайт, Литтлвуда и др. Большое внимание уделено нахождению областей предельной ограниченности и оценкам периода решений.

В последней главе рассмотрены вопросы устойчивости различных типов систем дифференциальных уравнений второго порядка.

В общем, по содержанию книга Рейссига, Сансоне и Конти служит хорошим, более современным дополнением к известной книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова «Качественная теория дифференциальных уравнений».

Вопросы, связанные с нелинейными дифференциальными уравнениями высших порядков, изложены в новой книге авторов: R. Reissig, G. Sansone, R. Conti, Nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung, Edizioni Cremonese, Roma, 1969.

Б. П. Демидович

1973 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Мы надеемся, что перевод нашей монографии на русский язык вызовет интерес у советских читателей.

Многие математики и представители прикладных дисциплин в СССР работают в области теории нелинейных дифференциальных уравнений. Многочисленные вклады советских ученых в эту теорию занимают в ней ведущее место. Определенная часть настоящей книги основана на результатах исследований советских математиков.

Мы убеждены в том, что подобные переводы усиливают роль науки как связующего звена между народами, улучшают международное сотрудничество и способствуют дальнейшему развитию научных исследований.

Мы считаем своим приятным долгом выразить сердечную благодарность профессорам И. П. Макарову и Б. П. Демидовичу, проделавшим большую работу по переводу и его редактированию.

P. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти

1973 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Геометрические исследования А. Пуанкаре [1] кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, его сочинение [2] о развитии аналитических методов в небесной механике и диссертация А. М. Ляпунова [1], посвященная проблемам устойчивости движения, заложили в конце прошлого столетия основы теории нелинейных дифференциальных уравнений.

Вклад в развитие этой теории в первые тридцать лет текущего столетия был внесен работами некоторых математиков, интересующихся физикой, среди них, прежде всего, И. Бендикисоном [1], Т. Леви-Чивита [1], Э. Коттоном [1] и особенно Г. Д. Биркгофом [2], создателем теории динамических систем.

Между тем широко применявшимся технические способы линеаризации оказывались все менее подходящими для изучения процессов колебаний. В 1920 году появилось убедительное доказательство этого факта, когда Ван дер Поль ввел свое знаменитое уравнение для описания действия триодного колебательного контура. Существование изолированных предельных циклов было невозможно объяснить с помощью линейной теории; это было показано графическими методами Ван дер Полем, а затем аналитическими способами Э. и А. Картанами и А. Льенаром.

Но только в 1929 году А. А. Андронов нашел возможности применения аналитико-геометрических конструкций Пуанкаре в различных областях, как, например, в электротехнике, механике, химии, биологии.

После этого связи между теорией Пуанкаре (а также теориями Ляпунова и Биркгофа) и нелинейными явлениями стали интенсивно укрепляться. Значительное количество теоретических и экспериментальных результатов появилось уже между 1930 и 1940 годами в Научно-исследовательском институте колебаний в Москве; например, можно указать работы Л. И. Мандельштама, Н. Д. Папалекси, А. А. Андронова, С. Э. Хайкина, А. А. Витта и др. На основе этих работ была создана первая монография по теории нелинейных колебаний, опубликованная в Москве в 1937 году А. А. Андроновым и С. Э. Хайкиным.

В это же время в Киеве была издана монография Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, объединившая в себе результаты уточненных аналитических исследований, проведенных к этому времени в киевской школе.

В тот же период возникли и другие школы: в Казани (Н. Г. Четаев, И. Г. Малкин, К. П. Персидский), в Москве (А. Н. Колмогоров, А. А. Марков, Н. Д. Моисеев, В. В. Немыцкий, И. Г. Петровский, Л. С. Понтрягин, В. В. Степанов), в Мюнхене (О. Перрон).

В послевоенное время, когда вновь оживился научный обмен, стало необходимым знакомить все более широкие круги с новыми методами и результатами, возникшими под влиянием возрастающих требований техники, привлекать к ним все более и более внимание ученых.

Заслугой Н. Минорского [1] является опубликование им содер жательного трактата по нелинейной механике. Этот труд приобрел широкую известность и надолго определил направление дальнейших исследований.

Большая заслуга в развитии теории принадлежит С. Лефешцу, который перевел на английский язык книги Крылова и Боголюбова [1], Андронова, Витта и Хайкина [1], систематически публиковал в «Mathematical Reviews» подробные рефераты статей из центральных и периферийных советских журналов и, кроме того, выпустил в свет работу [2] о дифференциальных уравнениях, оказавшую большое влияние на дальнейшее развитие теории.

В разработку классических, а также современных методов и результатов значительный вклад был внесен ценным обзором Р. Беллмана [1].

Начиная с 1946 года появился ряд работ, одной из первых среди которых была монография об устойчивости движения Н. Г. Четаева [1]. Через год появился обширный труд В. В. Немыцкого и В. В. Степанова [1], оригинальная трактовка материала в котором вызвала большой отклик в математическом мире.

Если не учитывать теории динамических систем, динамической топологии, эргодической теории, возникших из изучения дифференциальных уравнений и достигнувших определенной самостоятельности, то это приведет к грубому подразделению научной продукции последних двадцати лет на три различных направления, а именно: теорию устойчивости, аналитические методы и качественную теорию дифференциальных уравнений.

После появления основополагающего труда Ляпунова и упомянутого выше сочинения Четаева теории устойчивости были посвящены многочисленные монографии. Отметим книгу И. Г. Малкина [2] (1950), переведенную в 1959 году на немецкий язык В. Ханом и Р. Рейссигом; книгу Р. Беллмана [2], появившуюся в 1953 году; монографию В. И. Зубова [1]

(1957) и, наконец, опубликованные в 1959 году монографии В. Хана [2], Н. Н. Красовского [1] и В. И. Зубова [2].

К области аналитических исследований, идущих от Пуанкаре («Небесная механика») и Н. Минорского и продолженных в киевской школе, принадлежит работа Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [1] (1955).

Преимущественно аналитический характер имеют две книги И. Г. Малкина [1] (1949) и [4] (1956). Несколько особое положение в аналитической теории занимает книга И. М. Рапорта [1] (1954), посвященная асимптотическим методам изучения линейных уравнений.

К качественной теории дифференциальных уравнений, развитой Немыцким и Степановым, примыкает книга Е. А. Колдингтона и Н. Левинсона [1] (1955), отличающаяся полнотой избранного материала и элегантностью изложения. Она определила характер труда Г. Сансоне и Р. Конти [2] (1956), в котором авторы непосредственно, без вспомогательного материала, элементарно излагают основы теории. В обзоре литературных источников приведен тщательно составленный анализ свойств решений автономных и неавтономных систем и прежде всего систем с одной степенью свободы. Дальнейший вклад в теорию был сделан С. Лефшечем (1957) новым и частично расширенным изданием [4] уже названной книги [2].

С. Лефшеч является руководителем активной школы по теории дифференциальных уравнений (упомянем пять томов «Статей по теории нелинейных колебаний», которые были опубликованы в серии «Annals of Mathematics Studies» под номерами 20 (1950), 29 (1952), 36 (1956), 41 (1958), 45 (1960)). Его же заслугой является недавно сделанный перевод на английский язык книги Немыцкого и Степанова.

Вместе с преобладающими теоретическими работами появились также работы и технического аспекта. Среди них выделяются монографии И. Стокера [1] и Т. Хаяси [1], книга А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина [1], а также опубликованный А. Блэкьером [1] томик «Memorial». Наконец, вышло в свет второе, дополненное издание книги Н. Минорского.

Труды, краткий обзор которых мы дали, явились исходным пунктом для огромного количества статей, опубликованных в тысячах математических, физических и технических журналов. Постоянное развитие этой части науки делает упорядоченное, всеохватывающее описание особенно полезным; сюда мы причисляем, например, изданную в 1959 году монографию Л. Чезари [1], имеющую большое значение не только из-за библиографического материала, но и из-за целенаправленности сообщений, охватывающих отдельные области теории.

В предлагаемом изложении, близком к книге Сансоне и Конти, прежде всего рассматриваются результаты многочисленных

авторов, занимающихся определенными основными типами (автономных и неавтономных) нелинейных систем дифференциальных уравнений второго порядка; эти уравнения описывают интереснейшие явления колебаний, которые до сих пор исследовались лишь при изучении систем с одной степенью свободы.

Главы 1 и 2 носят общий характер; они излагают классические результаты Ляпунова, Пуанкаре, Бендиксона, Биркгофа и содержат, кроме того, новые основные исследования различных авторов. Эти главы дают почти полное представление о методах, применяющихся для качественного исследования названных там дифференциальных уравнений.

В главах 3—6 подробно рассматривается асимптотическое поведение решений, при этом в последней из указанных глав проводятся практические исследования устойчивости.

В конце книги помещен список литературы по затронутым вопросам; авторы старались сделать этот перечень достаточно полным.

Хотя авторы и представляют себе, что эта книга не может претендовать на полноту изложения всех вопросов, однако они попытались снабдить ее указаниями на все существенные литературные источники; авторы надеются, что книга даст достаточное представление о специальных работах и о некотором синтезе их результатов, т. е. будет способствовать дальнейшему развитию чистой и прикладной математики.

P. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти

ГЛАВА 1

После того как мы в предисловии изложили цели книги, перейдем ближе к описанию круга затрагиваемых вопросов. Мы интересуемся определенной ветвью прикладной механики, так называемой *нелинейной механикой*, которая занимается почти исключительно нелинейными дифференциальными уравнениями. Такие уравнения охватывают многочисленные задачи и вопросы, связанные с практикой. Возникающие при этом проблемы относятся не только к движению, но в большей степени к явлениям, изучаемым в физике, так что название «механика» здесь является слишком узким. Употребляется также название *теория нелинейных колебаний*, но и оно не отражает всего содержания теории, изучающей, вообще говоря, не только процессы колебательного характера. Исследования, проводившиеся до сих пор, касались главным образом динамических систем с сосредоточенными параметрами (системы с конечным числом степеней свободы), описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. Из этого не вытекает, что системы с распределенными параметрами, которые могут быть представлены дифференциальными уравнениями в частных производных, имеют ограниченное значение. Однако их использование вызывает настолько значительные математические трудности, что приходится довольствоваться изучением нелинейных систем первого вида.

В основе теории лежит дифференциальное уравнение в векторной форме

$$\dot{x} = f(x, t).$$

Мы положим, что для любых заданных начальных условий x_0, t_0 существует единственное решение $\dot{x}(t) = f(x(t), t)$, $x(t_0) = x_0$, определенное по крайней мере для $t \geq t_0$ и непрерывно зависящее от совокупности аргументов t, x_0, t_0 .

Хотя рассматриваемые решения могут соответствовать любым физическим процессам, мы условимся эти решения называть *движениями*, их начальные условия — *начальными возмущениями*, постоянные решения — *точками покоя*, периодические решения — *колебаниями*. Конечно, можно избежать этих

выражений и применять только математические понятия; но нам кажется более уместным строить изложение так, чтобы оно напоминало о физическом происхождении обсуждаемой проблемы. Кроме того, формулировки с помощью понятий физики являются более простыми и наглядными.

Вопросы, возникающие на практике, относительно легко разрешаются, если известна явная формула для множества решений (совокупности движений). Но такая возможность встречается очень редко, так что в большинстве случаев неизбежно приходится отказываться от применения явной формулы при решении весьма важных вопросов. Это, например, имеет место при изучении проблем, являющихся решающими в изучении поведения рассматриваемой динамической системы. А именно, речь идет об исследовании характера стационарных состояний. Стационарные состояния в практически важных случаях оказывают сильное влияние на структуру множества движений, так как все другие (нестационарные) явления с течением времени к ним стремятся. Поэтому проблемы существования постоянных и периодических решений являются первоочередными. Несмотря на то, что только устойчивые решения соответствуют реализуемым процессам, проблема устойчивости не становится от этого менее важной. Впоследствии потребуется изучение колебаний и близких к ним движений в переходных процессах.

Чтобы найти ответы на поставленные вопросы, как было указано в предисловии, существуют различные способы. Одни из них являются количественными исследованиями, ведущими к числовым результатам с помощью аналитических средств. Такие методы объединяются под общим названием *косвенных методов*. Их сущность состоит в том, что отдельные решения, вызывающие интерес, конструируются главным образом в виде разложений в ряды. Если при этом ограничиться несколькими начальными членами ряда, то будет получено приближенное выражение для решений. Чтобы обеспечить сходимость ряда, иногда приходится предварительно полагать, что параметры дифференциальных уравнений, определяющие степень нелинейности, обладают достаточно малым модулем. По этой причине косвенный метод часто оказывается применимым только в узкой краевой области нелинейной механики. Другим недостатком этих методов является то, что они позволяют получить достаточно точную информацию об отдельных решениях, но не дают никакого представления о строении семейства решений в целом.

Противоположным свойством обладают качественные исследования, которые объединяются под названием *прямых методов*. О них будет рассказано в главе второй. Как об этом говорит само название, прямые методы оперируют непосредственно с самими дифференциальными уравнениями. Их цель — общие высказывания относительно некоторой части множества решений или о всем множестве решений, а также, по возможности, выяс-

нить их расположение. Важными вопросами, решаемыми с помощью прямых методов, являются проблемы ограниченности движений, существования колебаний и их устойчивости. Анализ устойчивости, получаемый прямыми методами, уже превратился в настоящее время в обширную законченную теорию. Этой теории мы сможем посвятить лишь п. 2.3, отсылая в остальном к специальной литературе, например: В. Хан [2], Малкин [2]. При изложении критериев устойчивости по Ляпунову в первую очередь мы выделим условия ограниченности; во вторую очередь наше внимание будет обращено на вопросы практического применения критериев устойчивости, что становится все более и более необходимым. В главе шестой на одном примере проведено подробное исследование устойчивости на основе центральной теоремы Ляпунова.

Нашим основным стремлением является описание с единой точки зрения многочисленных новых результатов, полученных прямыми методами, относительно ограниченности решений, существования периодических решений и их устойчивости для некоторых нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Эти дифференциальные уравнения не являются произвольно выбранными; в большинстве случаев рассматриваются важные уравнения нелинейной механики, которые до настоящего времени были особенно успешно изучены. Соответствующие динамические системы основательно исследованы, что позволяет на этих примерах получить хорошее принципиальное представление о возникновении колебаний. В противоположность этому широкие области нелинейной механики, несмотря на многочисленные исследования, еще представляют собой картину со многими «белыми пятнами».

К названным дифференциальным уравнениям мы приходим от линейного уравнения

$$x'' + 2Dx' + x = e(t),$$

общее решение которого хорошо известно. Это уравнение можно рассматривать как первое приближение к уравнению

$$x'' + f(x)x' + g(x) = e(t) \quad (1.1)$$

(уравнение Льенара). Более общими являются уравнения

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = e(t), \quad (1.2)$$

$$x'' + F(x') + g(x) = e(t) \quad (1.3)$$

(уравнения Рэлея).

Уравнениями (1.1) — (1.3) можно описать различные динамические системы, имеющие *существенно* нелинейный характер. Здесь, прежде всего, уточняются выражения средних членов с содержащимися в них функциями x и x' [$f(x)x'$; $f(x, x')x'$; $F(x')$], в частности, изучаются такие свойства динамических систем,

которые не могут быть охарактеризованы членом вида $2Dx'$. Если говорить о механических приложениях, то при наличии соответствующей комбинации отрицательного и положительного затуханий система приобретает способность иметь колебания в отсутствие консервативных сил или периодического возбуждения. Система определяет тогда частоту своих колебаний автономно, так как энергетический обмен с данным запасом энергии управляется только амплитудой x и скоростью x' . В этом важном случае самовозбуждения, который описывается исключительно нелинейной системой, функции $f(x)$, $f(x, x')$, $F(x')$ и $g(x)$ в (1.1) — (1.3) имеют следующий смысл: $g(x)$, как всегда, представляет собой возвращающую силу, без которой невозможны колебания в системе; конечно, могут существовать многие притягивающие центры и между ними нейтральные зоны, где $g(x) \equiv 0$; $f(x)$ — вообще изменяющийся декремент затухания, который для малых отклонений от нуля отрицателен, однако для больших значений модуля x положителен; $f(x, x')$ — соответственно отрицательная функция для мало отклоняющегося медленного вибратора и, наоборот, положительная для далеко удаленного от нулевого положения быстрого вибратора. Если желательно избежать свободных колебаний (с постоянной энергией), то нужно положить, что ни для какого решения дифференциального уравнения (1.2) не выполняется тождество $f(x(t), x'(t)) \equiv 0$. Наконец, $F(x')$ есть движущая сила при малых модулях скорости $[F(x')x' < 0]$ и сила сопротивления при больших модулях скорости $[F(x')x' > 0]$.

Если система автономна, то $e(t) \equiv 0$. Однако при наличии постороннего возбуждения функция $e(t)$ для $t \geq 0$ является ограниченной и в большинстве случаев колеблющейся или периодической функцией. В последнем случае рассматриваются прежде всего вынужденные колебания. Наоборот, для автономной системы интересны главным образом изолированные собственные колебания; но иногда ищутся также свободные колебания, образующие континuum. Для второго случая недостаточны ранее названные условия. Здесь требуется, например, чтобы коэффициент затухания $f(x)$ при переходе через нуль менял знак или чтобы член $F(x')$, характеризующий затухание, был некоторой определенной или полуопределенной функцией от x' .

Замечания относительно вида нелинейных членов в уравнениях (1.1) — (1.3), основанные на простых физических соображениях, встречаются почти во всех работах, которые нам известны. Само собой понятно, что этих соображений недостаточно для решения конкретной задачи, как, например, для доказательства существования колебаний. Дополнительные требования, которые тогда нужно ввести в уравнения (1.1) — (1.3), у разных авторов различны и зависят от способов решений, применяемых ими. Подробно об этом будет рассказано ниже.

Как было сказано выше, глава 6 посвящена проблемам устойчивости. Мы при этом ограничиваемся обобщенным уравнением Льенара с членом, характеризующим возбуждение. В этом специальном случае дается оценка времени протекания переходных процессов. А именно, эта оценка получается, во-первых, на основании соответствующего критерия теории Ляпунова и хорошо известного его обобщения на линейные системы, во-вторых, аналитико-топологическими способами, где для сравнения привлекается некоторая кусочно-линейная система. Исследования устойчивости не претендуют на полноту; они должны дать представление об успешном применении некоторых методов и о силе и действенности прямых методов. Отметим, что эти практические рассуждения находятся в начальной стадии и во многих отношениях могут быть продолжены и улучшены.

2.1. Основы общих методов

Мы опишем теперь некоторые общие методы аналитико-топологической природы, пригодные для изучения асимптотических свойств решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Вообще будем полагать, что система уравнений имеет любой порядок n :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \quad (2.1.1)$$

но часто будем ограничиваться случаем $n = 2$:

$$x' = f(x, y, t), \quad y' = g(x, y, t). \quad (2.1.2)$$

В основном было бы достаточно изложить методы и теоремы для этого специального случая, так как в дальнейшем мы хотим их применить к уравнениям типов (1.1)–(1.3), перечисленным в главе 1. Однако в последующих рассмотрениях мы будем обращаться предпочтительно к общей системе (2.1.1).

В центре наших исследований стоит вопрос о периодических решениях. Мы интересуемся главным образом условиями, при выполнении которых динамические системы обладают колебаниями, выясняем виды отдельных колебаний и множество всех возможных колебаний. Наличие колебаний обеспечивает известную устойчивость динамической системы, и, обратно, существуют некоторые формы устойчивости, которые являются достаточными условиями для появления колебаний. В частности, один из видов устойчивости описывает процесс $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ (со специальными начальными условиями \mathbf{x}_0, t_0), все компоненты которого ограничены (мы всегда имеем в виду возрастание времени):

$$|x_i(t)| = |x_i(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq a_i(\mathbf{x}_0, t_0), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (2.1.3)$$

или

$$|\mathbf{x}(t)| = |\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq a(\mathbf{x}_0, t_0) \quad \text{для } t \geq t_0.$$

Достаточно общий топологический метод, применимый для доказательства ограниченности решений, а также для изучения

асимптотического поведения решений, был разработан Важевским [2]. Этот метод не связан с системой дифференциальных уравнений, он использует структуру движений в xt -пространстве (пространство движений), для которого предполагается только существование и однозначность траекторий (движений).

Во многих практически важных случаях все процессы ограничены и даже равномерно ограничены при $t \rightarrow \infty$, так что либо

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq a(\rho, t), \quad t \geq t_0, \quad |\mathbf{x}_0| \leq \rho, \quad (2.1.4)$$

либо

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq a_0, \quad t \geq t_0 + \tau(\mathbf{x}_0, t_0), \quad (2.1.5)$$

где граница a_0 характеризует систему, в то время как «время перехода» τ зависит от протекания процесса. В случае (2.1.4) мы будем называть динамическую систему *устойчивой*, в случае (2.1.5) — *асимптотически устойчивой*. С точки зрения физики асимптотически устойчивые системы диссипативны в большом и, по Левинсону, относятся к классу D . Мы будем называть их иногда *D-системами* или *системами с D-поведением интегральных кривых*.

Важная группа способов охватывает критерии принадлежности к классу D или к подобным классам систем. Мы покажем, что такие критерии простыми рассуждениями могут быть выведены из основных теорем теории устойчивости по Ляпунову. Аналогичные, но несколько более общие критерии были получены Иошизавой [11, 14], а также другими авторами. В случае $n = 2$ геометрические исследования фазового портрета на xy -плоскости ведут к еще более сильным критериям, которые могут быть применены в весьма запутанных случаях (как, например, проблема вынужденных колебаний с комбинированным трением, см. Рейссиг [2, 3]).

Исследования ограниченности решений автономных и неавтономных систем мы проводим отдельно. Для автономных систем порядка $n = 2$ теория Пуанкаре — Бендиксона дает методы рассмотрения фазовой картины на плоскости, которые мы подробно рассматриваем при изучении стационарных состояний (т. е. постоянных и периодических решений) и их устойчивости.

Из неавтономных систем n -го порядка мы интересуемся прежде всего такими, у которых внешнее возбуждение действует периодически, т. е. $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t + \theta) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$. Тогда многообразию движений $\{\mathbf{x}(t)\}$ в xt -пространстве принадлежит всякий сдвиг $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{x}, t + k\theta)$, где k — целое число, и $\mathbf{x}(t + k\theta)$ есть решение, если решением является $\mathbf{x}(t)$. Фундаментальное значение для изучения вынужденных колебаний (с периодом θ) и свойств их устойчивости имеет точечное преобразование T \mathbf{x} -фазового пространства, где $T\{\mathbf{x}_0\} = \mathbf{x}(t_0 + \theta, \mathbf{x}_0, t_0)$ и t_0 фиксировано. Неподвижные точки этого преобразования соответствуют начальными возмущениям исследуемых колебаний. В случае $n = 2$ существуют простые критерии существования таких неподвижных

точек, основанные на определении ограниченности решений и теореме Броуэра [1] о неподвижной точке. Массера [3] предложил критерий, который предполагает лишь существование одного ограниченного при $t \rightarrow +\infty$ решения. В другой своей работе [1] он, а также Картрат [2] и Левинсон [4] исходят из D -поведения системы.

Используя неподвижные точки итерированного преобразования T^k , а также ограниченность некоторого вида асимптотическую устойчивость решений, Трефффц [1] находит устойчивые вынужденные колебания периода $k\theta$ (так называемые *субгармонические колебания* k -го порядка). Рассуждения Трефффа развивает Ла-Салль [2] в весьма общих исследованиях устойчивости на топологической основе. Они относятся к последовательности состояний $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t_0 + \theta)$, $\mathbf{x}(t_0 + 2\theta)$, ..., в то время как теория Ляпунова связана с непрерывным процессом $\mathbf{x}(t)$, $t \geq t_0$.

В большом числе практических исследований имеют значение динамические системы с определенными свойствами симметрии, играющие существенную роль в доказательствах. Если взять основное уравнение в векторной форме (2.1.1), где функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ должна удовлетворять ряду условий, то указанная симметрия состоит в том, что для вектора $\bar{\mathbf{x}}(t) = -\mathbf{x}(t)$ существует уравнение $\bar{\mathbf{x}}' = \bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$, в котором функция $\bar{\mathbf{f}}(\bar{\mathbf{x}}, t) = -\mathbf{f}(-\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет этим же условиям. В случае динамической системы второго порядка можно ограничиться изучением фазовой картины только на одной половине фазовой плоскости, например только на верхней или только на правой, так как на другой половине плоскости благодаря симметрии наблюдаются аналогичные соотношения. В этом заключается применение симметрии.

Здесь же следует подчеркнуть, что условия симметрии, выражаемые в форме неравенств, практически вызывают еще больший интерес, чем условия в форме уравнений, так как нет возможности физически реализовать точные уравнения и, кроме того, можно отказаться от некоторых условий, заданных уравнениями, что существенно изменяет математическую модель.

2.2. Метод Важевского

Излагая метод Важевского, будем следовать его статьям [2, 4], отказавшись, однако, в отличие от них, сначала от предположения, что рассматриваемая динамическая система описана некоторым числом дифференциальных уравнений первого порядка, а затем от предположения о единственности расположения интегральных кривых в строгом смысле. Мы примем, что состояние системы определяется n величинами x_1, x_2, \dots, x_n , которые будем рассматривать как *фазовый вектор* \mathbf{x} . Вектор $\dot{\mathbf{x}}$

мы будем представлять себе отображенными в соответствующую точку евклидова пространства E_n (фазовое пространство). Пусть все возможные моментные состояния системы образуют заданную область $\Omega_n \subset E_n$, изменяющуюся при известных условиях во времени. Если интересуются тем, как протекают процессы в системе, то каждому ее состоянию ставят в соответствие время и, таким образом, получают точку $P(x, t)$ в евклидовом пространстве E_{n+1} (пространство движений). Фазы и им принадлежащие моменты времени образуют (связную) область $\Omega = \Omega_n \subset E_{n+1}$, в которой описывается история системы. Относительно системы мы предположим, что всякое начальное условие $P_0(x_0, t_0) \in \Omega$ (начальное возмущение) задает однозначно определенный процесс $P(t) = x(t, x_0, t_0)$, $t \geq t_0$, который непрерывно зависит как от времени t , так и от начального возмущения P_0 . Процесс представляется другой кривой, выходящей из точки P_0 . Эта дуга не может разветвляться, но две различные дуги могут соединиться и далее идти вместе. Последующие объяснения относятся к траекториям (полутраекториям), которые иногда называют *движениями*. Мы не будем учитывать прошлое движений при отображении их на траектории в пространстве движений, так как оно не имеет значения при изучении будущих (асимптотических) соотношений. В связи с этим для $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ можно также писать $x_+(t) = x_+(t, x_0, t_0)$.

В области Ω рассматривается открытая подобласть ω (трубка); границу множества ω относительно Ω , т. е. множество граничных точек множества ω , принадлежащих Ω , обозначим через F_ω . Далее, введем обозначение $\bar{\omega} = \omega \cup F_\omega$. Траектория $x_+(t, x_0, t_0)$, $P_0 \in \omega$, содержащаяся целиком внутри ω , называется *асимптотической* в ω . Траектория с начальной точкой $P_0 \in \omega$, не являющаяся асимптотической в ω , имеет первую точку $P_1(x_1, t_1) = C_\omega(P_0)$, принадлежащую множеству F_ω ; эта точка называется *точкой выхода* относительно ω . Точка P_1^* называется *точкой выхода* в строгом смысле, если траектория $x(t, x_0, t_1)$ в некотором интервале после момента t_1 проходит вне ω , т. е. $(x(t, x_0, t_1), t) \in \Omega - \bar{\omega}$ для $t_1 < t < t_1 + h$. Пусть S_ω есть множество всех точек выхода, т. е. множество точек $C_\omega(P_0)$, которые поставлены в соответствие точкам $P_0 \in \omega$; пусть, далее, $S_\omega^* \subset S_\omega$ есть множество всех точек строгого выхода. Для любого подмножества s из S_ω назовем *левой тенью* $G(s)$ множества s те точки $P_0 \in \omega$, для которых $P_1 = C_\omega(P_0)$ существует и содержится в s .

Особый интерес вызывает область $\omega \setminus G(S_\omega)$, содержащая в себе все движения, асимптотические в ω . Поэтому ищут условия топологической природы, при выполнении которых множество $\omega \setminus G(S_\omega)$ непусто. Здесь большую роль играет понятие *ретракта*, которое следующим образом определяется по Борсуку.

В данном пространстве рассматриваются два множества: $A = UP_A$ и $B = UP_B \supset A$. Непрерывное в B точечное

преобразование $P_A = f(P_B)$, при котором $f(P_A) = P_A$, образует ретракцию B в A . Если по крайней мере одно такое преобразование существует, то A называется ретрактом множества B .

Рассмотрим отображение области ω на ее границу, получающееся с помощью рассматриваемой системы. При этом естественно в качестве образов рассматривать точки выхода, а в качестве прообразов — точки левой тени множества S_ω . Если взять прообраз $P_0 \in G(S_\omega^*) \subset \omega$, образом которого является точка строгого выхода $C_\omega(P_0) = P_1 \in S_\omega^*$, то преобразование $P_0 \rightarrow P_1^*$ непрерывно. Это непосредственно следует из того, что движение $x(t, P_0)$ непрерывно зависит от его начального возмущения.

Важевский [2] доказал следующую теорему.

Теорема 2.2.1. Пусть ω — открытая область в Ω и s — множество точек выхода относительно ω . Если это множество s не состоит из точек строгого выхода, т. е. $s \not\subset S_\omega^*$, то принимается, что отображение $P_1 = C_\omega(P_0)$ в левой тени $G(s)$ непрерывно. Наконец, предполагается, что существует множество $z \subset \omega \cup s$ такое, что $z \cap s$ не является ретрактом для z , но представляет ретракт для s .

Тогда найдется точка $P_0 \in z \cap \omega$ такая, что либо $C_\omega(P_0)$ не существует, либо принадлежит множеству $S_\omega \setminus s$.

Действительно, пусть для всякой точки $P_0 \in z \cap \omega$ существует $C_\omega(P_0)$, причем эта точка не принадлежит множеству $S_\omega \setminus s$, но принадлежит множеству s . Рассмотрим преобразование

$$P_1 = f(P_0) = \begin{cases} C_\omega(P_0), & \text{если } P_0 \in z \cap \omega, \\ P_0, & \text{если } P_0 \in z \cap s. \end{cases}$$

Оно непрерывно на z и переводит z в некоторую часть множества s , которая содержит в себе $z \cap s$. Если $P_2 = g(P_1)$ есть преобразование, образующее ретракцию s в $z \cap s$, то $P_2 = g[f(P_0)]$ — ретракция z в $z \cap s$, т. е. $z \cap s$ есть ретракт z , что противоречит предположению.

Заметим, что если условия теоремы выполнены для множества всех точек выхода из ω , т. е. $s = S_\omega$, то в множестве $z \cap \omega$ содержится по меньшей мере одна точка P_0 , для которой $C_\omega(P_0)$ не существует. Тогда движение $P(t)$ с начальной точкой P_0 не может покинуть область ω .

Если, кроме того, имеется часть ω , заключенная между фиксированной плоскостью $t = a$ и плоскостью $t = b > a$, ограниченная и при $b \rightarrow \infty$ содержащаяся еще в Ω , то движение $P(t)$ продолжимо по t внутри ω до ∞ .

Отметим один простой, но очень важный частный случай. Пусть трубка ω определена для $t \geq 0$, имеет ограниченную проекцию в фазовое пространство и обладает границей без точек выхода. Тогда все траектории, начинающиеся в ω , и в даль-

нейшем остаются внутри ω и, следовательно, равномерно ограничены.

Теорема Важевского дает общий способ для исследования асимптотического поведения динамической системы, например для установления ограниченности определенных координат движения, или стремления движений к пределам, или же для изучения хода процесса вблизи стационарных состояний. В каждом конкретном случае, используя соответствующие физические законы, нужно конструировать область ω в пространстве движений так, чтобы для нее выполнялись условия теоремы. Кроме того, траектории, не покидающие область ω , должны удовлетворять требованиям, обеспечивающим их асимптотическое поведение. Этим, по существу, определяется ω : существование ω налагает на свойства системы определенные ограничения, представляющие основной интерес.

Мы хотим проиллюстрировать изложенный метод двумя примерами и прежде всего, следуя Миколайской [1], рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$x' = f(x, y, t), \quad y' = g(x, f(x, y, t), t).$$

В цитируемой работе доказывается следующая теорема.

Теорема 2.2.2. Пусть:

1. Функции $f(x, y, t)$, $g(x, y, t)$ определены и непрерывны для всех x, y и для $t \geq 0$ и, кроме того, они таковы, что обеспечено существование и единственность решений.

2. Справедливы оценки

$$|f(x, y, t)| \leq |y|\varphi(t), \quad |g(x, f(x, y, t), t)| \leq |x|\psi(t),$$

при этом $\varphi(t) > 0$, $\psi(t) \geq 0$ (но $\not\equiv 0$) для $t \geq 0$ и

$$\int_0^t \varphi(\tau) \Psi(\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(\tau) \int_0^\tau \psi(\theta) d\theta d\tau \rightarrow J_0 < \infty$$

при $t \rightarrow \infty$.

Тогда для всякого числа c существует семейство решений $\{x(t), y(t)\}$, $t \geq t_0$, обладающих свойством $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$.

Для доказательства теоремы Миколайской будем следовать рассуждениям цитируемой работы [1]. Выберем число T так, чтобы

$$0 < i(t) = \int_t^\infty \varphi(\tau) \Psi(\tau) d\tau < \frac{1}{3}, \quad T \leq t < \infty.$$

Пусть $c \neq 0$ произвольно. В xyt -пространстве определим область ω следующим образом:

$$|x - c| < 3|c|i(t), \quad |y| < 2|c|\Psi(t), \quad t \geq T.$$

В качестве области Ω рассмотрим полупространство $t \geq T$. Границные точки области ω относительно Ω образуют множества

$$S: |x - c| = 3|c|i(t), \quad |y| \leq 2|c|\Psi(t), \quad t \geq T,$$

$$E: |x - c| < 3|c|i(t), \quad |y| = 2|c|\Psi(t), \quad t \geq T.$$

На множестве S имеем

$$\frac{d}{dt}(|x - c| - 3|c|i(t)) \geq |c|\varphi(t)\Psi(t) > 0,$$

аналогично на множестве E получим

$$\frac{d}{dt}(|y| - 2|c|\Psi(t)) \leq -|c|\psi(t) + 3|c|i(t)\psi(t) \leq 0.$$

Поэтому S есть множество точек выхода, которые, очевидно, являются точками строгого выхода, т. е. $S = S_\omega = S_\omega^*$. Множество E состоит из точек входа.

В качестве множества z выберем отрезок

$$|x - c| \leq 3|c|i(t), \quad y = y_0, \quad \text{где } |y_0| < 2|c|\Psi(t), \quad t = T.$$

Множество $S \cap z$ содержит только концевые точки отрезка, не может быть его непрерывным отображением, а также не является ретрактом отрезка. Легко убедиться в том, что множество S ретракцией может быть переведено в эту пару точек. Таким образом, условия теоремы Важевского выполнены, и, следовательно, внутри отрезка найдется точка P_0 , для которой $C_\omega(P_0)$ не существует. Из этой точки выходит движение $P(t)$, навсегда остающееся в области ω . Так как $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$, то об-

ласть ω стягивается к плоскости $x = c$, и, значит, утверждение теоремы доказано. Ввиду того, что в определении множества z величина y_0 может варьироваться, существует по меньшей мере однопараметрическое семейство движений, для которого $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = c$.

Чтобы утверждение теоремы доказать для $c = 0$, область ω выбирают следующим образом:

$$|x| < 3i(t), \quad |y| < 2\Psi(t), \quad t \geq T,$$

и приходят к тем же заключениям.

Барблат [4], применяя метод Важевского к дифференциальному уравнению $x'' = f(x, x', t)$ или к эквивалентной системе $x' = y, y' = f(x, y, t)$, с помощью теоремы 2.2.1 доказал существование бесконечного семейства решений $x(t)$, ограниченных при $t \geq 0$, а также существование бесконечного семейства решений, ограниченных при $t \leq 0$. При этом предполагается:

1. Функция $f(x, y, t)$ в области $\Omega(a < x < b)$ пространства движений $Oxyt$ непрерывна и обеспечивает там существование и единственность решения дифференциального уравнения.

2. Существуют два значения x_1, x_2 ($a < x_1 < x_2 < b$), для которых

$$f(x_1, 0, t) < 0, \quad f(x_2, 0, t) > 0. \quad (2.2.1)$$

Область $\omega \subset \Omega$ определяется неравенствами $x_1 < x < x_2$; ее граница F_ω образована плоскостями $x = x_1, x = x_2$. На F_ω лежат точки строгого выхода $P_1^-(x_1, y < 0, t), P_2^+(x_2, y > 0, t)$ и точки строгого входа $P_1^+(x_1, y > 0, t), P_2^-(x_2, y < 0, t)$. Точки $P_1^0(x_1, 0, t)$ и $P_2^0(x_2, 0, t)$ оказываются такими, что проходящие через них интегральные кривые $\{x(t), y(t)\}$, в силу (2.2.1), в некоторой двусторонней окрестности момента времени t находятся соответственно вне области ω .

Положим теперь $s = S_\omega^* = \{P_1^-\} \cup \{P_2^+\}$ и выберем в качестве множества z некоторую непрерывную кривую γ , которая соединяет внутри ω любую пару точек (P_1^-, P_2^+) . Очевидно, $z \cap s = s$, и потому эта пара точек не может быть ретрактом z , так как кривая γ не допускает непрерывного отображения на свои концевые конечные точки. Но $z \cap s$ есть ретракт множества s , так как можно $\{P_1^-\}$ непрерывно отобразить на P_1^- и $\{P_2^+\}$ — на P_2^+ . Таким образом, внутри ω (в $z \cap \omega$) имеется точка P_0 , для которой $C_\omega(P_0)$ не существует, т. е. из этой точки выходит интегральная кривая, не покидающая область ω .

Если теперь t заменить на $-t$, то получим доказательство существования решений, ограниченных при $t \leq 0$.

2.3. Некоторые понятия и теоремы из теории устойчивости Ляпунова

Рассмотрим опять динамическую систему произвольного порядка n , описывающую в этом случае некоторый процесс посредством вектора состояния $p(t) = \{p_1(t), \dots, p_n(t)\}$, удовлетворяющего векторному дифференциальному уравнению

$$\dot{p}' = F(p, t), \quad F = (F_1, \dots, F_n). \quad (2.3.1)$$

Пусть правая часть в области $\Omega_0: 0 \leq |p| < \infty, t \geq 0$, непрерывна и обеспечивает существование и единственность решений, которые непрерывно зависят от начальных условий.

Если речь идет об определении устойчивости данного решения $p(t)$, имеющего смысл при $t \geq 0$ (которое обычно называют *невозмущенным движением*), то нужно близкие решения $x(t) + p(t)$ (*возмущенные движения*) сравнить с данным. Вопрос об устойчивости решает поведение дополнительного члена $x(t)$ (так называемого *возмущения*), удовлетворяющего дифференциальному уравнению

$$\dot{x}' = f(x, t) \equiv \{F[p(t) + x, t] - F[p(t), t]\} \quad (2.3.2)$$

(уравнение возмущения или уравнение возмущенного движения). Нулевое решение соответствует невозмущенному движению. Решение, относящееся к начальным данным \mathbf{x}_0 , $t_0 \geq 0$, обозначают обычно $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ [$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{x}_0, t_0) = \mathbf{x}_0$].

Современная теория устойчивости основывается на большом количестве определений, из которых мы приведем лишь некоторые. После этого будет рассказано о критериях устойчивости и неустойчивости. При этом нам придется довольствоваться лишь кратким представлением; детальный же обзор большого комплекса проблем устойчивости имеется, например, у Хана [2].

Определение 2.3.1. Тривиальное решение уравнения (2.3.2) является *устойчивым* (слабо), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq \varepsilon \quad \text{для } t \geq t_0, \quad |\mathbf{x}_0| \leq \delta.$$

Определение 2.3.2. Нулевое решение *равномерно устойчиво*, если $\delta = \delta(\varepsilon)$ (от t_0 не зависит).

Определение 2.3.3. Нулевое решение *асимптотически устойчиво*, если оно устойчиво и если, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) = 0 \quad \text{при } |\mathbf{x}_0| \leq \eta(t_0),$$

т. е. $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq \varepsilon$ (произвольно мало) для $t \geq t_0 + \tau(\varepsilon, \mathbf{x}_0, t_0)$.

Определение 2.3.4. Нулевое решение *эквасимптотически устойчиво*, если $\tau = \tau(\varepsilon, t_0)$ (от \mathbf{x}_0 не зависит).

Определение 2.3.5. Нулевое решение *равномерно асимптотически устойчиво*, если оно равномерно устойчиво и, кроме того,

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq \varepsilon \quad \text{для } t \geq t_0 + \tau(\varepsilon), \quad |\mathbf{x}_0| \leq \eta_0$$

(η_0 фиксировано).

Определение 2.3.6. Нулевое решение *экспоненциально устойчиво*, если существуют положительные константы κ , τ и η_0 такие, что

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0) \leq \kappa(\mathbf{x}_0) \exp\{-(t - t_0)/\tau\} \quad \text{для } t \geq t_0, \quad |\mathbf{x}_0| \leq \eta_0.$$

Обычно нулевое решение называется неустойчивым, если не выполнено определение устойчивости 2.3.1. Мы, однако, считаем необходимым более узкое понятие неустойчивости.

Определение 2.3.7. Нулевое решение *неустойчиво* (в узком смысле), если для всякого $\delta > 0$ и некоторого $|\mathbf{x}_0| \leq \delta$ в интервале $t \geq t_0$ выполняется оценка $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \geq \varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0) > 0$.

В частном случае, когда $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$ (т. е. от t_0 не зависит), неустойчивость называется *равномерной*.

Определение 2.3.8. Нулевое решение *асимптотически неустойчиво* или *вполне неустойчиво*, если существует фиксирован-

ное значение ε_0 такое, что для любого $x_0 \neq 0$ выполнено неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t, x_0, t_0)| > \varepsilon_0,$$

т. е.

$$|x(t, x_0, t_0)| \geq \varepsilon, \quad \varepsilon_0 \geq \varepsilon > 0, \quad \text{для } t \geq t_0 + \tau(\varepsilon, x_0, t_0).$$

Асимптотическая неустойчивость является *равномерной*, если для $|x_0| \geq \delta > 0$ время перехода $\tau = \tau(\varepsilon, \delta)$ может быть выбрано не зависящим от t_0 .

В качестве критерия устойчивости по прямому методу Ляпунова применяется некоторая функция $V(x, t)$, $V(0, t) = 0$, которая определена и обладает непрерывными частными производными первого порядка в области ω_H : $|x| \leq H, t \geq 0$.

Такая функция называется *положительно определенной*, если выполняется неравенство

$$V(x, t) \geq \varphi_1(|x|), \quad (2.3.3)$$

где непрерывная функция $\varphi_1(r)$ для $r > 0$ положительна ($\varphi_1(0) = 0$) и строго монотонно возрастает.

Функция $V(x, t)$ называется *равномерно малой*, если

$$V(x, t) \leq \varphi_2(|x|), \quad (2.3.4)$$

где $\varphi_2(r)$ — непрерывная для $r > 0$ функция, которая при $r = 0$ принимает значение нуль и монотонно возрастает в собственном смысле. Это значит, что

$$V(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } |x| \rightarrow 0.$$

Решение вопроса об устойчивости связано с поведением полной производной функции $V(x, t)$ по времени в силу (2.3.2):

$$V'(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Эта полная производная *отрицательно полуопределенная*, если

$$V'(x, t) \leq 0, \quad (2.3.5)$$

и *отрицательно определенная*, если

$$V'(x, t) \leq -\varphi_3(|x|), \quad (2.3.6)$$

где функция $\varphi_3(r)$ непрерывна, положительна, строго монотонно возрастающая и равна нулю при $r = 0$.

Функция $V(x, t)$, пригодная для критерия устойчивости, называется *функцией Ляпунова*.

Следующие теоремы верны и тогда, когда в неравенствах (2.3.3), (2.3.4) и (2.3.6) вместо функций $\varphi_i(r)$ используются непрерывные положительно определенные функции $V_i(x)$.

Теорема 2.3.1. *Если существует положительно определенная функция $V(x, t)$ с отрицательно полуопределенной*

производной по времени, то нулевое решение уравнения (2.3.2) устойчиво.

Для доказательства возьмем $h < H$ и для $\varepsilon \leq h$ определим $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) \leq \varepsilon$ из уравнения

$$\max_{|\mathbf{x}_0| \leq \delta} V(\mathbf{x}_0, t_0) = \varphi_1(\varepsilon). \quad (2.3.7)$$

Во временном интервале $t \geq t_0$, для которого возмущение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ остается в области $|\mathbf{x}| \leq H$, справедливы неравенства

$$\varphi_1\{r(t)\} \leq V\{\mathbf{x}(t), t\} \leq V(x_0, t_0) \leq \varphi_1(\varepsilon),$$

т. е. $r(t) = |\mathbf{x}(t)| \leq \varepsilon$, что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание. Если, сверх того, функция Ляпунова равномерно мала, то вместо (2.3.7) можно принять $\varphi_2(\delta) = \varphi_1(\varepsilon)$, т. е. $\delta = \varphi_2^{-1}\{\varphi_1(\varepsilon)\}$, откуда получается равномерная устойчивость.

Теорема 2.3.2. Если существует положительно определенная равномерно мала функция $V(\mathbf{x}, t)$, полная производная которой по времени отрицательно определенная, то нулевое решение равномерно асимптотически устойчиво.

Для доказательства в области $|\mathbf{x}| \leq h < H$, полагая $r = |\mathbf{x}|$, используем оценки

$$\varphi_1(r) \leq V(\mathbf{x}, t) \leq \varphi_2(r), \quad V'(\mathbf{x}, t) \leq -\varphi_3(r); \quad (2.3.8)$$

отсюда, на основании предыдущего замечания, имеем равномерную устойчивость.

Рассмотрим некоторое решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ такое, что $r_0 = |\mathbf{x}_0| \leq \eta_0 = \varphi_2^{-1}[\varphi_1(h)] \leq h$; тогда $r(t) \leq h < H$ для $t \geq t_0$. Отсюда $V'\{\mathbf{x}(t), t\} \leq -\varphi_3\{r(t)\}$, где $r(t) \geq \varphi_2^{-1}\{V(\mathbf{x}(t), t)\}$.

Поэтому $V' \leq -\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(V)\}$ и

$$\int_{\varphi_2(r_0)}^{\varphi_1(r)} \frac{d\varphi}{\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\}} \leq \int_{V_0}^{V(\mathbf{x}, t)} \frac{d\varphi}{\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\}} \leq -(t - t_0).$$

Решая уравнение

$$\int_{\varphi_1(r_0)}^{\varphi_2(r_0)} \frac{d\varphi}{\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\}} = t - t_0,$$

определим положительную функцию

$$\rho = \rho(r_0, t - t_0) \leq \varphi_1^{-1}\{\varphi_2(r_0)\} \leq h,$$

монотонно убывающую относительно $t - t_0$ и монотонно возрастающую относительно r_0 и, кроме того,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(r_0, t - t_0) = 0. \quad (2.3.9)$$

Эта функция, очевидно, является мажорантой для $r(t) = |x(t, x_0, t_0)|$, которую можно выразить с помощью функции Ляпунова $V(x, t)$.

Из неравенства $\rho(r_0, t - t_0) \leq \rho(\eta_0, t - t_0)$ и (2.3.9) следует

$$|x(t, x_0, t)| \leq \varepsilon \quad (\varepsilon \text{ сколь угодно мало}),$$

если только $t - t_0 \geq \tau(\varepsilon)$. Этим теорема доказана.

В некоторых частных случаях можно точнее оценить мажоранту $\rho(r_0, t - t_0)$. Пусть, например,

$$\varphi_1(r) = a_1 r^{\gamma_1}, \quad \varphi_2(r) = a_2 r^{\gamma_2}, \quad \varphi_3(r) = a_3 r^{\gamma_3}$$

$$(\gamma_2 \geq \gamma_1 > 0, \gamma_3 > 0).$$

Тогда

$$\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\} = \frac{a_3}{a_2^{\gamma_3/\gamma_2}} \varphi^{\gamma_3/\gamma_2}$$

и, следовательно,

$$\frac{a_3(t - t_0)}{a_2^{\gamma_3/\gamma_2}} = \int_{a_1 \rho^{\gamma_1}}^{a_2 r_0^{\gamma_2}} \varphi^{-\gamma_3/\gamma_2} d\varphi = \left[\frac{\varphi^{1-\gamma_3/\gamma_2}}{1 - \gamma_3/\gamma_2} \right]_{a_1 \rho^{\gamma_1}}^{a_2 r_0^{\gamma_2}}$$

если $\gamma_2 \neq \gamma_3$. Отсюда вытекает, что

$$\rho(r_0, t - t_0) = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/\gamma_1} \left\{ r_0^{\gamma_2 - \gamma_1} - (1 - \gamma_3/\gamma_2) \frac{a_3}{a_2} (t - t_0) \right\}^{\gamma_2/[\gamma_1(\gamma_2 - \gamma_3)]}$$

В случае $\gamma_2 = \gamma_3$ получаем

$$\rho(r_0, t - t_0) = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{1/\gamma_1} r_0^{\gamma_2/\gamma_1} \exp \left\{ - \frac{a_3}{\gamma_1 a_2} (t - t_0) \right\},$$

причем при $\gamma_1 = \gamma_2$ имеем экспоненциальную устойчивость.

Замечание 1. Область начальных возмущений

$$\text{на } \eta_0: |x_0| \leq \eta_0, \quad t_0 \geq 0, \quad \text{где } x(t, x_0, t_0) \rightarrow 0,$$

называют *областью притяжения* или *областью устойчивости*. Она, очевидно, зависит от величины h и от способа вывода оценки (2.3.8). Часто бывает практически интересно не связывать себя точной областью притяжения, поэтому целесообразно найти какой-то другой путь доказательства, который мы и изложим в п. 2.4.

Замечание 2. Если правая часть дифференциального уравнения (2.3.2) не зависит явно от t , то нулевое решение асимптотически устойчиво тогда, когда существует положительно определенная функция $V(x)$, полная производная которой по времени $V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x)$ отрицательно полуопределенная и не равна тождественно нулю вдоль каждого решения $x(t)$.

Мы приведем здесь только идею доказательства.

Положим $\min_{|\mathbf{x}|=H} V(\mathbf{x}) = C_1$ и допустим, что $V(\mathbf{x}) = C$, $0 \leq C \leq C_1$, представляет собой семейство замкнутых поверхностей, вложенных одна в другую так, что при этом большим значениям параметра C соответствуют более удаленные поверхности.

Определим границу η (для модуля начального возмущения) из соотношения $\max_{|\mathbf{x}|=\eta} V(\mathbf{x}) < C_1$. Этим достигается то, что неравенство $|\mathbf{x}_0| \leq \eta$ обеспечивает оценку $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq H$.

Пусть вдоль решения $\mathbf{x}(t)$ будет определена строго монотонно убывающая функция $v(t) = V(\mathbf{x}(t))$, для которой существует $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = C_0 \geq 0$. Нужно показать невозможность неравенства $C_0 > 0$.

Построим теперь все интегральные кривые, выходящие при $t = 0$ из точек поверхности $V(\mathbf{x}) = C_0$ до некоторого момента времени $\tau > 0$. Концевые точки этих кривых образуют вновь некоторую замкнутую поверхность, которая целиком лежит внутри исходной поверхности. С другой стороны, рассматриваемое решение $\mathbf{x}(t)$ содержится вне этой поверхности, неограниченно приближаясь к ней, но не достигая самой поверхности, что противоречит непрерывной зависимости решений от начальных условий. Следует учесть также, что всякая интегральная кривая автономной системы допускает любой сдвиг по времени.

Таким образом, $C_0 = 0$, и теорема доказана.

Теорема 2.3.3. *Нулевое решение уравнения (2.3.2) равномерно неустойчиво, если существует положительно определенная равномерно малая функция $V(\mathbf{x}, t)$, полная производная которой по времени $V'(\mathbf{x}, t)$ положительно полуопределенная.*

Для доказательства рассмотрим решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, $|\mathbf{x}_0| \geq \delta$ ($0 < \delta \leq h$), $t_0 \geq 0$, и положим $\varepsilon = \varphi_2^{-1}\{\varphi_1(\delta)\} \leq \delta$. Тогда при $r(t) \leq h$ для $t \geq t_0$ справедливы неравенства

$$\varphi_2\{r(t)\} \geq V(\mathbf{x}(t), t) \geq V_0 \geq \varphi_1(\delta).$$

Таким образом, $r(t) \geq \varepsilon$. Этим заканчивается доказательство.

Теорема 2.3.4. *Нулевое решение (равномерно) асимптотически неустойчиво, если полная производная по времени функции $V(\mathbf{x}, t)$ положительно определенная.*

Положим $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 = \varphi_2^{-1}\{\varphi_1(h)\} \leq h$ и рассмотрим решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, где $h \geq |\mathbf{x}_0| \geq \delta > 0$ (ε и δ — любые). Для интервала $t \geq t_0$, где $r(t) \leq h$, получаем

$$V' \geq \varphi_3(r) \geq \varphi_3\{\varphi_2^{-1}(V)\}$$

и

$$\int_{V_0}^V \frac{d\varphi}{\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\}} \geq t - t_0.$$

Таким образом, решение уравнения

$$\int_{\varphi_1(r_0)}^{\varphi_2(\rho)} \frac{d\varphi}{\varphi_3\{\varphi_2^{-1}(\varphi)\}} = t - t_0$$

для $r(t)$ является минорантой

$$\rho(r_0, t - t_0) \geq \rho(r_0, 0) = \varphi_2^{-1}\{\varphi_1(r_0)\},$$

монотонно возрастающей относительно каждого из двух аргументов.

Если $\delta \geq \varphi_1^{-1}\{\varphi_2(\varepsilon)\}$, то начинают с $r(t) \geq \varepsilon$ и полагают $\tau(\varepsilon, \delta) = 0$.

Если же выполнено противоположное неравенство, то из соотношения $\rho(\delta, \tau) = \varepsilon$ определяют наименьшее положительное значение $\tau = \tau(\varepsilon, \delta)$ такое, что $r(t)$ при $t \geq \tau$ всегда превышает ε .

Пока решение остается в области $r \leq h$, выполняется неравенство $r(t) \geq \rho(r_0, t - t_0) \geq \rho(\delta, t - t_0)$. Но если решение в какой-то момент покинет эту область, а потом вновь вернется в нее, то в соответствующий момент будем иметь $\varphi_2(r) \geq V(x, t) \geq \varphi_1(h)$, т. е. $r \geq \varepsilon_0 \geq \varepsilon$.

Другой критерий для асимптотической устойчивости получают из теоремы С. К. Персидского (ср. В. Хан [2]).

Теорема 2.3.5. Тривиальное решение уравнения (2.3.2) асимптотически неустойчиво, если в области $\Omega_0: 0 \leq |x| < \infty, t \geq 0$, существует функция $V(x, t)$, обладающая следующими свойствами:

- a) $V(x, t) > 0$ для $x \neq 0$;
- b) $V'(x, t) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \geq 0$;
- c) в Ω_H : $|x| \leq H, t \geq 0$, имеем

$$V(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

Доказательство очевидно.

В главе 6 мы применим изложенные критерии устойчивости к примеру из нелинейной механики; тогда наша задача в основном сводится к построению подходящих функций Ляпунова. В следующем пункте мы используем критерии неустойчивости для доказательства теорем об ограниченности решений системы (2.3.1), которую будем писать в общепринятой форме

$$x' = f(x, t).$$

2.4. Критерии D -поведения, получаемые из теории Ляпунова

Рассмотрим задачу об ограниченности в смысле п. 2.1 при $t \rightarrow \infty$ всех решений $\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_n(t)\}$ векторного уравнения

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad (2.4.1)$$

правая часть которого определена и непрерывна в области Ω_0 : $0 \leq |x| < \infty, t \leq 0$ (так называемое D -поведение или асимптотическая устойчивость динамической системы).

Для решения этой задачи применяются не только рассуждения прямого метода Ляпунова, но также аналоги доказательства основных теорем. В частности, это относится к поведению решений уравнения типа (2.4.1), близких к его тривиальному решению $\mathbf{x}(t) \equiv 0$.

Если изменить формулировки теорем, доказанных в п. 2.3, и вместо окрестности начала координат говорить об окрестности бесконечно удаленной точки, то получим теоремы об ограниченности решений или, иначе говоря, об устойчивости системы. Эти результаты являются аналогами соответствующей формы неустойчивости. С другой стороны, устойчивому нулевому решению ставится в соответствие система без D -поведения на бесконечности.

С этой точки зрения, используя достаточные условия Ляпунова полной или асимптотической неустойчивости на бесконечности, можно получить достаточные критерии принадлежности или непринадлежности системы к классу D .

Теорема 2.4.1. Рассматриваемая система принадлежит к классу D (является асимптотически устойчивой), если существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, которая в области Ω_h : $|\mathbf{x}| \geq h, t \geq 0$, обладает следующими свойствами:

- a) $V(\mathbf{x}, t) \geq V_1(\mathbf{x}) > 0$;
- b) $V(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- c) $V' = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t} \geq V_2(\mathbf{x}) > 0$.

Если только $V' \geq 0$, то решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ уравнения (2.4.1) ограничены, возможно, неравномерно (слабая устойчивость системы).

Без специальных оговорок примененные функции сравнения $V_i(\mathbf{x})$ предполагаются непрерывными.

Для стационарных систем условие с) может быть ослаблено.

Теорема 2.4.2. Динамическая система

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (2.4.2)$$

обладает D -поведением, если в области $|x| \geq h$ существует функция $V(x)$ такая, что

a) $V(x) > 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0;$

b) $V' = \frac{dV}{dx} \cdot f(x) \geq 0;$

причем отсутствуют нетривиальные траектории системы, целиком принадлежащие множеству $\{x; V'(x) = 0\}$.

Теорема 2.3.5 соответствует

Теорема 2.4.3. Система принадлежит к классу D , если в области Ω_0 можно найти функцию $V(x, t)$ такую, что

a) $V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) \geq 0;$

b) $V(x, t) \rightarrow 0$ для $t \rightarrow \infty$ в Ω_h .

Теорема 2.4.4. Система не принадлежит к классу D , если в Ω_h существует функция $V(x, t)$ и при этом

a) $V(x, t) \geq V_1(x) > 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x, t) = 0$ для всякого фиксированного значения t ;

b) $V' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) \leq 0.$

Для иллюстрации критериев приведем некоторые простые примеры.

1) Пусть $x' = -x/2$ — система порядка $n = 1$. Ее общее решение $x = x_0 \exp(-t/2)$.

Очевидно, нулевое решение $x(t) \equiv 0$ асимптотически устойчиво в целом. Отсюда следует, что система принадлежит к классу D . Докажем это обстоятельство с помощью критерия 2.4.1. В качестве функции Ляпунова возьмем $V(x) = 1/x^2$, получим $V' = -2x'/x^3 = 1/x^2$. Таким образом, здесь выполняется условие теоремы 2.4.1.

2) Для дифференциального уравнения $x' = -x/(1+t)$ с общим решением $x = x_0/(1+t)$ используем функцию Ляпунова $V(x, t) = 1/[x(1+t)]^2$. Тогда

$$V' = -2x'/[x^3(1+t)^2] - 2/[x^2(1+t)^3] = 0.$$

Так как для $|x| \geq h$, $1+t \geq 1/\sqrt{eh}$ верна оценка $V \leq \varepsilon$, то имеют место условия теоремы 2.4.3.

3) Для уравнения $x' = x/2$ отсутствует D -поведение, так как общее решение есть $x = x_0 \exp(t/2)$.

Соответственно этому функция Ляпунова $V(x) = 1/x^2$ с полной производной по времени $V' = -1/x^2$ удовлетворяет требованиям теоремы 2.4.4.

Если применять в теоремах о D -поведении вместо функции Ляпунова $V(x, t)$ функцию $U = 1/V$, то получаются следующие эквивалентные предложения.

Теорема 2.4.1'. Система $\dot{x} = f(x, t)$ принадлежит к классу D , если в Ω_h можно найти функцию $U(x, t)$, непрерывную и дифференцируемую, такую, что

- $0 < U(x, t) \leq U_1(x) \quad (|x| > 0);$
- $U(x, t) \rightarrow \infty$ для $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по t ;
- $U' = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot f(x, t) \leq -U_2(x) < 0.$

Если лишь $U' \leq 0$, то решения $x(t, x_0, t_0)$ ограничены при $t \rightarrow \infty$, вообще говоря, неравномерно.

Теорема 2.4.2'. Для D -поведения автономной системы (2.4.2) достаточно существования функции $U(x)$ ($|x| \geq h$) такой, чтобы

- $U(x) > 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x) = \infty;$
- $U' = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot f(x) \leq 0,$

причем отсутствуют решения, для которых $U' \equiv 0$.

Теорема 2.4.3'. Уравнение (2.4.1) представляет систему класса D в Ω_0 , если существует функция $U(x, t)$, для которой

- $U' = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot f(x, t) \leq 0;$
- $U(x, t) \rightarrow \infty$ при $|x| \rightarrow \infty$ для $t \rightarrow \infty$ в Ω_h .

Теорема 2.4.4'. Если в Ω_h существует функция $U(x, t)$, обладающая свойствами:

- $0 < U(x, t) \leq U_1(x);$
- $\lim_{|x| \rightarrow \infty} U(x, t) = \infty$ для всякого фиксированного значения t ;
- $U' = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} \cdot f(x, t) \geq 0,$

то D -поведение системы отсутствует.

Для примера 1) $\dot{x} = -x/2$ с функцией $U(x) = x^2$ условия теоремы 2.4.1' выполнены; в примере 2) $\dot{x} = -x/(1+t)$ функция $U(x, t) = x^2(1+t)^2$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4.3'.

Приведем доказательства названных критериев ограниченности, отличные от доказательств в п. 2.3, основанные на соответствующих критериях устойчивости. А именно, мы будем изучать поведение решений системы не в окрестности начала координат, а в окрестности бесконечно удаленной точки. Это особенно удобно, когда система, D -поведение которой подлежит исследованию, однозначно обратима путем непрерывного преобразования координат, при котором бесконечно удаленная точка фазового пространства переходит в начало координат, являющееся особой точкой системы. Тогда теоремы об устойчивости допускают простую перефразировку в новых координатах,

Доказательство теоремы 2.4.1. Рассмотрим решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, где $|\mathbf{x}_0| \geq h$, $t_0 \geq 0$, и положим $\inf V_1(\mathbf{x}) = l_0$ для $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_0|$. Тогда существует число $H_0 > |\mathbf{x}_0|$ такое, что $V(\mathbf{x}, t) < l_0$ для $|\mathbf{x}| > H_0 > h$. Для $|\mathbf{x}_0| = h$ используем обозначения $l_0 = l$ и $H_0 = H$. Так как $V(\mathbf{x}, t)$ на рассматриваемом решении есть возрастающая функция времени в области $|\mathbf{x}| \geq h$, то при $t \geq t_0$ справедливо неравенство

$$V(\mathbf{x}(t), t) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) \geq V_1(\mathbf{x}_0) \geq l_0.$$

Отсюда $|\mathbf{x}(t)| \leq H_0$.

Обозначая теперь $\inf V_1(\mathbf{x}) = m_0$ для $h \leq |\mathbf{x}| \leq H_0$, получим уточненную оценку

$$V(\mathbf{x}(t), t) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) + m_0(t - t_0) \geq l_0 + m_0(t - t_0).$$

Последняя оценка выполняется либо для всех $t \geq t_0$, либо только до некоторого момента времени $t_0 + T_0$, так как потом решение покидает область $|\mathbf{x}| \geq h$. Если оно в этом случае снова войдет в область $|\mathbf{x}| \geq h$, то значения V не будут меньше числа l , откуда следует, что $|\mathbf{x}| \leq H$. В первом случае из данной оценки вытекает, что $V(\mathbf{x}(t), t) \geq l$ и, сверх того, $|\mathbf{x}(t)| \leq H$ для $t \geq t_0 + T_0$. Величина T_0 зависит от начального возмущения (\mathbf{x}_0, t_0) , в то время как граница H для всех решений одна и та же.

Доказательство теоремы 2.4.3. Мы будем рассматривать вновь решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, где $|\mathbf{x}_0| \geq h$, $t_0 \geq 0$. На нем для всех моментов времени $t \geq t_0$ выполняется неравенство $V(\mathbf{x}(t), t) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$.

Так как $V(\mathbf{x}, t) < V(\mathbf{x}_0, t_0)$ для $|\mathbf{x}| \geq h$ и $t > t_0 + T_0$, то, следовательно, решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ навсегда покидает область $|\mathbf{x}| \geq h$ при $t > t_0 + T_0$.

Доказательство теоремы 2.4.4. Выберем произвольно большое число $H > h$ и обозначим $\inf V_1(\mathbf{x}) = l$ для $h \leq |\mathbf{x}| \leq H$. Рассмотрим теперь решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, которое удовлетворяет условиям $|\mathbf{x}_0| \geq h$, $t_0 \geq 0$, причем $V(\mathbf{x}_0, t_0) < l$ и $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq H$. Для этого решения справедлива оценка

$$V_1(\mathbf{x}(t)) \leq V(\mathbf{x}(t), t) \leq V(\mathbf{x}_0, t_0) < l,$$

так что для $t \geq t_0$ имеем $|\mathbf{x}(t)| > H$, вопреки предположению.

Названные критерии ограниченности допускают простое геометрическое толкование. Для этого представим себе в фазовом пространстве нестационарное точечное множество $U(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} = \text{const}$, соответствующее функции Ляпунова $U(\mathbf{x}, t)$. В случаях теорем 2.4.1' и 2.4.4' на основании условия а) существует

$$\sup_{|\mathbf{x}|=h, t \geq 0} U(\mathbf{x}, t) = G.$$

В случае теоремы 2.4.1' каждое точечное множество $U(\mathbf{x}, t) = C > G$, где $t \geq 0$ имеет любое фиксированное значение, охватывает сферу $|\mathbf{x}| = h$ и само является замкнутой поверхностью. Чтобы в этом убедиться, построим еще одну сферу

$|x| = H > h$ так, что $U(x, t) > C$ для $|x| > H, t \geq 0$. Так как $U(x, t) \rightarrow \infty$ для $|x| \rightarrow \infty$ равномерно относительно t , то это возможно. Проведем теперь от $|x| = h$ до $|x| = H$ некоторую непрерывную кривую. Так как на этой кривой функция $U(x, t)$ непрерывно меняется от значения, не большего G , до значения, не меньшего C , то по крайней мере в одной точке кривой $U = C$. Поэтому всякая кривая такого вида пересекает поверхность $U(x, t) = C$. Таким образом, замкнутая поверхность $U(x, t) = C$, которая с течением времени меняет свое положение, всегда лежит внутри сферы $|x| = H$, т. е. остается ограниченной. С другой стороны, в силу неравенства $U(x, t) \leq U_1(x)$ эта поверхность в случаях теоремы 2.4.1' и 2.4.4' допускает минимальное расстояние от границы области определения $|x| \geq h$ (это расстояние неограниченно растет вместе с параметром поверхности). Траектории, которые в области $|x| \geq h$ фазового пространства соответствуют решениям, пересекают поверхности $U = \text{const}$, в случае теоремы 2.4.1' — по направлению к меньшим значениям U ; при этом скорость вдоль траектории убывает вместе с U и в каждой замкнутой области имеет некоторую отрицательную верхнюю границу. Этим обеспечивается, что все траектории в конечное время достигают некоторой сферической поверхности $|x| = h_0 > h$ и в дальнейшем остаются внутри ее. Например, можно положить

$$h_0 = \sup_{U(x, t)=G} |x|.$$

В случае теоремы 2.4.4' интегральная кривая $x = x(t, x_0, t_0)$, где $|x_0|$ достаточно велико, навсегда остается вне любой замкнутой поверхности $U(x, t) = U_0$, так что в этом случае решение не обладает D -свойством.

Иначе обстоит дело в случае теоремы 2.4.3'. Здесь для интегральной кривой $x = x(t, x_0, t_0)$ достаточно рассмотреть изменяющуюся по времени область $U(x, t) \leq U_0$. Траектория навсегда остается в этом множестве и на основании условия б) лишь на конечное время принадлежит области $|x| > h$.

Вместо того, чтобы искать функцию Ляпунова, с помощью которой решается вопрос о принадлежности данной динамической системы к классу D , можно построить некоторое семейство поверхностей с описанными свойствами. Такой геометрический способ особенно удобен в частном случае $n = 2$, где это семейство состоит из плоских кривых. Тогда прежде всего стараются построить стационарное семейство замкнутых, не имеющих двойных точек кривых. Эти кривые должны целиком покрыть всю фазовую плоскость, исключая некоторую окрестность начала координат, и пересекаться всеми траекториями по направлению внутрь. Метод построения таких «кривых без контакта» применяется очень часто и приводит к многочисленным существенным результатам при исследовании дифференциальных уравнений, которым посвящены главы 3—5. Иногда полезно построение

даже одной отдельной кривой. С ее помощью в некоторых случаях удается обнаружить семейство ограниченных решений. Геометрический способ годится также в случаях, когда общая теория неприменима, так как рассматриваемые дифференциальные уравнения не удовлетворяют обычным условиям регулярности. Это, например, имеет место в случае колебаний трения (ср. Рейссиг [2, 3, 11]).

Для $n = 3$ геометрический способ становится существенно сложнее, так как в этом случае речь идет о построении в трехмерном пространстве семейства поверхностей без контакта, которые с трудом поддаются наглядному обозрению. Для $n > 3$ этот способ непрактичен: теряется его преимущество — наглядность.

Важная проблема состоит в нахождении общих принципов или правил, по которым можно было бы в конкретных случаях конструировать функции Ляпунова, играющие в критериях ограниченности решающую роль. Однако решение этой проблемы пока находится лишь в начальной стадии. Лучше обстоит дело с нахождением функций Ляпунова или с построением соответствующих поверхностей без контакта, исходя из физических соображений, например привлекая понятие энергии системы. Можно использовать также обобщения функции Ляпунова, лежащие в основе ряда критериев. Этими вопросами занимался Левин [1]. При формулировке критерия ограниченности он отказывается от требования монотонности изменения функции сравнения вдоль рассматриваемого решения. Более того, монотонность в определенной мере может нарушаться возмущениями. Для сравнения с теоремой 2.4.1 приведем результат Левина.

Теорема 2.4.5. Все решения дифференциального уравнения $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ ограничены, если в области Ω_h существует дифференцируемая функция $U(\mathbf{x}, t)$ такая, что

a) $0 < U(\mathbf{x}, t) \leqslant U_1(\mathbf{x})$;

b) $U(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;

c) $U' = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial U}{\partial t} \leqslant \varphi_1(t) + \varphi_2(t) U(\mathbf{x}, t)$, где неотрицательные функции $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ интегрируемы в промежутке $[0, \infty)$.

Для доказательства теоремы рассмотрим какое-нибудь решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, где $|\mathbf{x}_0| > h$, $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, и исследуем на нем изменение функции $U(t) = U[\mathbf{x}(t), t]$.

Решение существует по крайней мере в некотором интервале $[t_0, t_1]$, для которого справедлива оценка $|\mathbf{x}(t)| \geqslant h$. Тогда $U'(t) \leqslant \varphi_1(t) + \varphi_2(t) U(t)$, и отсюда

$$U(t) \leqslant U_0 + \int_{t_0}^{\infty} \varphi_1(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t \varphi_2(\tau) U(\tau) d\tau,$$

где

$$U_0 = \sup_{\Omega_h - \Omega_{|\mathbf{x}_0|}} U(\mathbf{x}, t).$$

На основании леммы Беллмана (см. [2]) получаем

$$U(t) \leq \left[U_0 + \int_{t_0}^{\infty} \varphi_1(\tau) d\tau \right] \exp \int_{t_0}^{\infty} \varphi_2(\tau) d\tau,$$

так что

$$|\mathbf{x}(t)| \leq X(|\mathbf{x}_0|) < \infty. \quad (2.4.3)$$

Легко видеть, что рассматриваемое решение существует для всех значений $t \geq t_0$ и при этом справедлива оценка (2.4.3). Этим заканчивается доказательство.

В некоторых важных случаях отказывает также и критерий Левина. Тогда, при известных условиях, может привести к цели признак, вытекающий из общего критерия асимптотической устойчивости (см. Рейссиг [15]). Этот признак использует кусочно-непрерывные функции сравнения и учитывает то, что функция сравнения не обязана быть в основном монотонной на каждом решении уравнения, а ее монотонность должна быть обеспечена лишь для некоторой дискретной последовательности моментов времени. Однако при этом теряются некоторые преимущества прямого метода. Мы не будем более подробно останавливаться на этом критерии, заметим лишь, что его геометрический аналог находит частое применение при доказательствах ограниченности, о которых подробно будет сказано в главах 4 и 5.

2.5. Критерии Иошизавы

Иошизава [1—15] занимается не только D -поведением решений обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.4.1), но также различными видами ограниченности, которые связаны с известными формами устойчивости. Некоторые найденные им критерии ограниченности являются даже необходимыми и достаточными. Теоремы Иошизавы явным образом не используют теоремы Ляпунова об устойчивости, а основываются на аналогии между понятиями ограниченности и устойчивости (см. [6]*)). Прежде чем перейти к критериям Иошизавы, приведем его определения ограниченности.

Определение 2.5.1. Решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ дифференциального уравнения (2.4.1) называется *ограниченным*, если существует положительное число $X = X(t_0, \mathbf{x}_0)$ такое, что

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq X \text{ для } t \geq t_0.$$

Определение 2.5.2. Решения с одинаковым начальным моментом t_0 называются *равноограниченными* (эквиограниченными), если для всех решений таких, что $|\mathbf{x}_0| \leq A$, определена одна и та же граница $X = X(A, t_0)$.

*) Литературные ссылки здесь и далее относятся к работам Иошизавы.

Это свойство системы (2.4.1) было нами названо устойчивостью.

Определение 2.5.3. Решения называются *равномерно ограниченными*, если их граница X при изменяющемся начальном моменте $t_0 \geq 0$ зависит только от границы A начального возмущения x_0 , т. е. $X = X(A)$.

Далее вводятся модификации различных определений понятия *пределной ограниченности*.

Определение 2.5.4. Если для уравнений (2.4.1) существует постоянная $X > 0$ такая, что каждому его решению можно поставить в соответствие некоторое (индивидуальное) положительное число (время перехода) $\tau = \tau(x_0, t_0)$, так что $|x(t, x_0, t_0)| \leq X$ для $t \geq t_0 + \tau$, то решения этого уравнения называются *финально ограниченными в будущем*.

Это определение эквивалентно определению *D-поведения* системы.

Определение 2.5.5. Решения являются *равноограниченными в будущем*, если время перехода τ для фиксированного начального момента t_0 зависит только от границы A начального возмущения $\tau = \tau(A, t_0)$.

Определение 2.5.6. Если при фиксированной границе A время перехода τ не зависит от начального момента времени, т. е. $\tau = \tau(A)$, то решения называются *равномерно ограниченными в будущем*.

В дальнейших определениях Иошизава рассматривает *тотальную ограниченность* (ограниченность при постоянно действующих возмущениях). Мы ее изучать не будем и ограничимся лишь приведенными выше критериями. При этом в основном будем придерживаться рассуждений Иошизавы, иногда изменяя формулировки и ход доказательства.

Пусть дано дифференциальное уравнение (2.4.1). Относительно функции $f(x, t)$ прежде всего предположим, что в области

$$\Omega_0: 0 \leq |x| < \infty, \quad t \geq 0, \quad (2.5.1)$$

она непрерывна. Необходимое и достаточное условие для ограниченности всех решений имеется в [4] (теорема 3).

Теорема 2.5.1. Для того чтобы каждое решение $x(t)$, проходящее через произвольную точку $(x_0, t_0) \in \Omega_0$, имело грань $X = X(x_0, t_0)$ такую, что $|x(t)| \leq X$ для $t \geq t_0$, необходимо и достаточно существование функции $V(x, t)$, удовлетворяющей в области Ω_0 следующим условиям:

- $V(x, t) > 0, V(x, t) \rightarrow 0$ для $|x| \rightarrow \infty$ равномерно по t ;
- $V(x(t), t)$ есть неубывающая функция t для всякого решения $x(t)$.

Если функция Ляпунова $V(x, t)$ вместе с ее частными производными первого порядка непрерывна, то условие b) равносильно неравенству

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x, t) \geq 0,$$

Доказательство. Условия достаточны, так как в силу неравенства $V(\mathbf{x}(t), t) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) > 0$ для $t \geq t_0$ и условия а) имеем $\sup_{t \geq t_0} |\mathbf{x}(t)| < \infty$.

Условия необходимы. Действительно, пусть L_0 есть семейство решений, выходящих из точки $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_0$. По предположению для $\mathbf{x}(t) \in L_0$ справедлива оценка $|\mathbf{x}(t)| \leq X(\mathbf{x}_0, t_0)$, $t \geq t_0$. Поэтому сечение множества L_0 плоскостью $t = t_1 \geq t_0$ есть ограниченное замкнутое множество. Его максимальное расстояние от точки $(0, t_1)$ обозначим через $d(\mathbf{x}_0, t_0; t_1)$. Очевидно,

$$0 \leq d(\mathbf{x}_0, t_0; t_1) \leq X(\mathbf{x}_0, t_0).$$

Пусть

$$\sup_{t_1 \geq t_0} d(\mathbf{x}_0, t_0; t_1) = d(\mathbf{x}_0, t_0) \geq |\mathbf{x}_0|.$$

Положим $\delta(\mathbf{x}_0, t_0) = 1/(1 + d^2)$; тогда

$$0 < 1/(1 + X^2) \leq \delta(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 1/(1 + |\mathbf{x}_0|^2) \leq 1.$$

Если мы выберем достаточно большое положительное число Z и рассмотрим любую точку (\mathbf{x}_0, t_0) , где $|\mathbf{x}_0| \geq Z$, то получим $Z \leq d(\mathbf{x}_0, t_0)$, т. е. $\delta(\mathbf{x}_0, t_0) \leq 1/(1 + Z^2)$.

На основании этого можно подходящим выбором \mathbf{x}_0 реализовать неравенство $\delta(\mathbf{x}_0, t_0) \leq \varepsilon$ для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, иначе говоря, $\delta(\mathbf{x}_0, t_0) \rightarrow 0$ для $|\mathbf{x}_0| \rightarrow \infty$.

Если (\mathbf{x}_0, t_0) и (\mathbf{x}_1, t_1) — две точки одного решения $\mathbf{x}(t)$, то для $t_1 \geq t_0$ справедливы оценки

$$d(\mathbf{x}_0, t_0) \geq d(\mathbf{x}_1, t_1), \quad \delta(\mathbf{x}_0, t_0) \leq \delta(\mathbf{x}_1, t_1).$$

Полагая $V(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}, t)$, получим искомую функцию Ляпунова. Доказанный критерий обобщается на случай равной или равномерной ограниченности системы.

Теорема 2.5.2. Решения с одинаковым фиксированным начальным моментом времени $t_0 \geq 0$ тогда и только тогда равнограницены, когда в области Ω_0 существует функция $V(\mathbf{x}, t)$, обладающая свойствами:

- a) $V(\mathbf{x}, t) \geq 0$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- b) $V(\mathbf{x}(t), t)$ для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ есть неубывающая функция t ;

c) для $|\mathbf{x}| \leq r$ (где r — любое) справедливо неравенство $V(\mathbf{x}, t) \geq \rho(r, t) > 0$, где $\rho(r, t)$ — положительная функция.

Теорема 2.5.3. Решения тогда и только тогда равномерно ограничены, когда в области Ω_0 существует положительная функция $V(\mathbf{x}, t)$ такая, что

- a) $V(\mathbf{x}, t) \geq 0$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- b) $V(\mathbf{x}(t), t)$ для любого решения $\mathbf{x}(t)$ есть неубывающая функция t ;
- c) для $|\mathbf{x}| \leq r$ (где r — любое) $V(\mathbf{x}, t) \geq \rho(r) > 0$.

Доказательство. То, что условия теоремы достаточны, следует из неравенства

$$V(\mathbf{x}(t), t) \geq V(\mathbf{x}_0, t_0) \geq \rho(A, t_0)$$

(или соответственно $V(\mathbf{x}(t), t) \geq \rho(A)$)

для $|\mathbf{x}_0| \leq A$, $t \geq t_0$, что непосредственно вытекает из условия а). Отсюда $|\mathbf{x}(t)| \leq X(A, t_0)$ (или соответственно $|\mathbf{x}(t)| \leq X(A)$) при $t \geq t_0$.

Необходимость условий следует непосредственно из второй части доказательства теоремы 2.5.1.

Для построенной там функции $V(\mathbf{x}_0, t_0) = \delta(\mathbf{x}_0, t_0)$ справедлива оценка $\delta(\mathbf{x}_0, t_0) \geq 1/(1 + X^2)$, где $X = X(A, t_0)$ (или $X(A)$). Таким образом, условие с) при $\rho = 1/(1 + X^2)$ выполнено.

Теоремы 2.5.1—2.5.3 допускают очевидную переформулировку (соответственно теоремам 2.4.1'—2.4.4').

Теорема 2.5.1'—2.5.3'. Для ограниченности (равной ограниченности, равномерной ограниченности) решений уравнения (2.4.1) необходимо и достаточно существование функции $U(\mathbf{x}, t)$ в Ω_0 со следующими свойствами:

- а) $U(\mathbf{x}, t) > 0$, $U(\mathbf{x}, t) \xrightarrow[t]{} \infty$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- б) $U(\mathbf{x}(t), t)$ для всякого решения $\mathbf{x}(t)$ не является возрастающей функцией t ;
- с) $U(\mathbf{x}, t) \leq \rho(r, t)$ (или $\rho(r)$) для $|\mathbf{x}| \leq r$.

Рассмотрим теперь некоторые из многочисленных критериев Иошизавы для финальной ограниченности в будущем решений. Здесь важную роль играют функции $w(\mathbf{x}, t)$, которые в их $(n+1)$ -мерной области определения удовлетворяют относительно \mathbf{x} или (\mathbf{x}, t) условию Липшица

$$|w(\mathbf{x}'', t'') - w(\mathbf{x}', t')| \leq L |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| \quad \text{при } t'' = t'$$

или, в общем случае,

$$|w(\mathbf{x}'', t'') - w(\mathbf{x}', t')| \leq L(|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| + |t'' - t'|). \quad (2.5.2)$$

Условие выполняется локально, если точки (\mathbf{x}', t') , (\mathbf{x}'', t'') расположены в некоторой ограниченной окрестности точки $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ и константа Липшица зависит от этой точки, т. е. $L = L(\mathbf{x}, t)$.

Из условия Липшица относительно (\mathbf{x}, t) следует, что предел

$$\bar{D}_f w = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [w(\mathbf{x} + h f(\mathbf{x}, t), t + h) - w(\mathbf{x}, t)] \quad (2.5.3)$$

существует.

Пусть константа Липшица одинакова для всякой ограниченной области $\omega \subset \Omega$, т. е. $L = L(\omega)$, где (\mathbf{x}', t') , (\mathbf{x}'', t'') — любые две точки из ω .

В этом случае функция $w(\mathbf{x}, t)$, согласно Иошизаве (см. [8]), принадлежит к классу C_0 . Возможные свойства функции $w(\mathbf{x}, t)$, которые позднее будут использованы, мы просто пронумеруем:

- (I) $0 < w(x, t) \leq w_1(r)$ для $|x| \leq r$ при любой мажоранте r ;
 (II) $\bar{D}_f w \leq 0$;

- (III) $\bar{D}_f w \leq -w_2(r) < 0$ для $|x| \leq r$.

Из (II) следует, что функция $w(x, t)$ вдоль решения $x(t)$ дифференциального уравнения (2.4.1) не возрастает. В самом деле, выполняется равенство (ср. Сансоне — Конти [2])

$$\begin{aligned} w(x(t+h), t+h) - w(x(t), t) = \\ = \left\{ w\left(x(t) + \int_t^{t+h} f(x(s), s) ds, t+h\right) - w(x(t) + hf(x(t), t), t+h\right\} + \\ + \{w(x(t) + hf(x(t), t), t+h) - w(x(t), t)\}. \end{aligned}$$

На основании непрерывности функций $f(x, t)$ и $x(t)$ и локального условия Липшица для любого числа $\varepsilon > 0$ существует положительное число δ такое, что для $0 \leq |h| \leq \delta$ будем иметь

$$\begin{aligned} \left| \frac{w(x(t+h), t+h) - w(x(t), t)}{h} - \frac{w(x + hf(x, t), t+h) - w(x, t)}{h} \right| \leq \\ \leq L \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [f(x(s), s) - f(x(t), t)] ds \right| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [w(x(t+h), t+h) - w(x(t), t)] = \bar{D}_f w \leq 0,$$

и, таким образом, $u(t) = w(x(t), t)$ не может возрастать.

Действительно, пусть существуют два значения a, b ($a < b$), для которых

$$u(a) < u(b), \quad \frac{u(b) - u(a)}{b - a} = m > 0.$$

Так как

$$\frac{u(b) - u(a)}{b - a} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u(b) - u\left(\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)/2} + \frac{u\left(\frac{a+b}{2}\right) - u(a)}{(b-a)/2} \right\},$$

то обе дроби не могут быть меньше m ; отсюда следует существование частичного отрезка $[a', b'] \subset [a, b]$ длины $(b-a)/2$, на котором $\frac{u(b') - u(a')}{b' - a'} \geq m$. Продолжая деление отрезков, получаем последовательность вложенных друг в друга отрезков $\{[a^{(n)}, b^{(n)}]\}$, где

$$b^{(n)} - a^{(n)} = (b-a)/2^n, \quad [u(b^{(n)}) - u(a^{(n)})]/[b^{(n)} - a^{(n)}] \geq m.$$

Последовательность отрезков определяет точку $s \in [a, b]$. По предположению в этой точке

$$\bar{D}u(s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(s+h) - u(s)}{h} \leq 0,$$

поэтому

$$\frac{u(s+h) - u(s)}{h} \leq \bar{D}u + \varepsilon \leq \varepsilon \quad \text{при } |h| \leq \delta.$$

Полагая $\varepsilon = m/4$ и выбирая целое число n таким, что $2^n \geq (b-a)/\delta$, находим

$$m \leq \frac{u(b^{(n)}) - u(a^{(n)})}{b^{(n)} - a^{(n)}} = \frac{u(b^{(n)}) - u(s)}{b^{(n)} - a^{(n)}} + \frac{u(s) - u(a^{(n)})}{b^{(n)} - a^{(n)}} \leq 2\varepsilon = \frac{m}{2}.$$

Тем самым получено противоречие. Следовательно, функция $u(t) = w(\mathbf{x}(t), t)$ не может быть возрастающей.

Теорема 2.5.4 (см. [6], теорема 11). *Пусть правая часть $f(\mathbf{x}, t)$ дифференциального уравнения (2.4.1) ограничена при любом конечном $|\mathbf{x}|$. Пусть, далее, в области Ω_0 существует функция $U(\mathbf{x}, t)$, которая относительно (\mathbf{x}, t) принадлежит к классу C_0 , обладает свойством (II) и удовлетворяет условиям:*

- a) $U(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- b) для $|\mathbf{x}| \geq h$ (h сколь угодно велико, но фиксировано) имеет место свойство (III).

Тогда решения уравнения (2.4.1) финально ограничены в будущем.

Доказательство (см. Массера [2], теорема 4). Так как предположения теоремы 2.5.1' выполнены, то каждое решение ограничено, т. е. $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq X(\mathbf{x}_0, t_0)$ для $t \geq t_0$. Предположим, что $X > h$ и что существует некоторая расходящаяся, монотонно возрастающая последовательность $\{t_n\}$ такая, что

$$|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0, t_0)| \geq H > h.$$

Так как

$$\left| \frac{d|\mathbf{x}|}{dt} \right| \leq |f(\mathbf{x}, t)| \leq F = F(X) \quad \text{при } |\mathbf{x}| \leq X,$$

то в интервале времени $[t_n - (H-h)/F, t_n + (H-h)/F]$ справедлива оценка $|\mathbf{x}(t)| \geq h$ (можно принять $t_1 - t_0 \geq (H-h)/F$ и $t_{n+1} - t_n \geq 2(H-h)/F$). В силу выполнения условия b) в каждом таком интервале имеем

$$\Delta U(\mathbf{x}(t), t) \leq -U_2(X) \frac{2(H-h)}{F},$$

где $U_2(X)$ — некоторая положительная функция.

Отсюда получаем, что невозрастающая положительная функция $U(\mathbf{x}(t), t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Это невозможно, и, следовательно, $|\mathbf{x}(t)| < H$ для $t > t_0 + \tau(\mathbf{x}_0, t_0)$.

Общую границу $H > h$ здесь можно выбрать произвольно.

Теорема 2.5.5 (см. [9], теорема 2). *Пусть в области Ω_0 функция $f(\mathbf{x}, t)$ принадлежит к классу C_0 относительно x . Решения $\mathbf{x}(t)$ тогда и только тогда равнограницены в будущем,*

когда в Ω_0 существует некоторая неотрицательная непрерывная функция $U(\mathbf{x}, t)$, обладающая следующими свойствами:

- a) $U(\mathbf{x}, t) \geq U_1(|\mathbf{x}|) > 0$ при $|\mathbf{x}| \geq h$, где $U_1(r)$, $r \geq h$ — некоторая непрерывная, возрастающая, неограниченная функция;
- b) $U(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет локальному условию Липшица относительно (\mathbf{x}, t) ;

c) $\bar{D}_f U(\mathbf{x}, t) \leq -U(\mathbf{x}, t)$.

Доказательство. Покажем, что условия достаточны, т. е.

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| < H \quad \text{для } t > t_0 + \tau(A, t_0), \quad |\mathbf{x}_0| \leq A$$

(где граница $H > h$ любая, но фиксированная).

Так как предположения теоремы 2.5.1' выполнены, то все решения ограничены, а это значит, что

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq X = X(\mathbf{x}_0, t_0) \quad \text{для } t \geq t_0.$$

Положим $W(\mathbf{x}, t) = e^t U(\mathbf{x}, t)$.

Функция W имеет следующие свойства:

- a) $W(\mathbf{x}, t) \geq U_1(|\mathbf{x}|) e^t$ для $|\mathbf{x}| \geq h$;
- b) $W(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет относительно (\mathbf{x}, t) локальному условию Липшица;

c) $\bar{D}_f W(\mathbf{x}, t) = e^t [\bar{D}_f U + U] \leq 0$.

Предположим теперь, что для некоторого решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, $|\mathbf{x}_0| \leq A$, на монотонно возрастающей неограниченной последовательности $\{t_n\}$ справедлива оценка $|\mathbf{x}_n| = |\mathbf{x}(t_n, \mathbf{x}_0, t_0)| \geq H$. Из нее следует

$$W(\mathbf{x}_n, t_n) \geq U_1(H) e^{t_n}.$$

С другой стороны, по условию с) имеет место неравенство $W(\mathbf{x}_n, t_n) \leq W(\mathbf{x}_0, t_0)$. Положим $\max_{|\mathbf{x}| \leq A} W(\mathbf{x}, t_0) = M(A, t_0)$; тогда

находим

$$U_1(H) e^{t_n} \leq M(A, t_0)$$

и, таким образом, получаем противоречие, так как $U_1(H) > 0$ и $t_n \rightarrow \infty$. Из последнего соотношения можно определить верхнюю грань $t_0 + \tau(A, t_0)$ моментов времени t_n . Этим доказано, что решения равнограницены в будущем.

Покажем теперь, что условия теоремы необходимы.

Так как решения однозначно определены и непрерывно зависят от начальных условий, по крайней мере для $t \geq 0$, то справедливо утверждение (см. [9], лемма 2):

Если решения равнограницены в будущем, то они также локально (т. е. в малом) равномерно ограничены в будущем.

Под этим понимается следующее: некоторой $(n+1)$ -мерной сфере S с центром в (\mathbf{x}_0, t_0) можно поставить в соответствие константу τ (время затухания) такую, что $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}', t')| < H$ для $t > t' + \tau$, если $(\mathbf{x}', t') \in S$.

Для доказательства выберем константу $A > |\mathbf{x}_0|$ и рассмотрим только такие сферы с центром в (\mathbf{x}_0, t_0) , для которых $|\mathbf{x}| \leq A$. Если среди них не существует сферы с одинаковым временем затухания τ , то найдется последовательность точек $\{(\mathbf{x}_n, t_n), |\mathbf{x}_n| \leq A\} \rightarrow (\mathbf{x}_0, t_0)$, по которой минимальное время затухания τ_n решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_n, t_n)$ монотонно и неограниченно растет. Если выбрать индекс n достаточно большим, то решение $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_n, t_n)$ пересечет плоскость $t = t_0$ [точка пересечения (\mathbf{x}_n, t_0)] и $|\mathbf{x}_n| \leq A$. В таком случае $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_n, t_n) \equiv \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_n, t_0)$ и $|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_n, t_0)| < H$ для $t > t_0 + \tau(A, t_0)$. Отсюда $\tau_n \leq \tau(A, t_0) + (t_0 - t_n) \leq \tau(A, t_0)$ вопреки предположению, что $\tau_n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь функции

$$U_1(r) = (r - H) \cdot I(r - H),$$

где

$$I(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < 0, \\ 1 & \text{при } z \geq 0, \end{cases} \quad (2.5.4)$$

и

$$U(\mathbf{x}, t) = \max_{s \geq t} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}, t)|) e^{s-t} \geq U_1(|\mathbf{x}|), \quad (2.5.5)$$

где $U_1(|\mathbf{x}|) = |\mathbf{x}| - H > 0$ для $|\mathbf{x}| \geq h > H$.

Ясно, что функция U в Ω_0 неотрицательна и непрерывна, кроме того, она удовлетворяет условию а).

Проверим выполнимость условия б). Для этого рассмотрим какую-нибудь точку $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_0$ с такой ее малой окрестностью C , что выходящие из нее решения равномерно ограничены в будущем. (Окрестность C мы можем представить себе ограниченной интегральными кривыми и двумя плоскостями $t = \text{const.}$) Найдем для двух точек $(\mathbf{x}', t') \in C$, $(\mathbf{x}'', t'') \in C$ разность $U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}', t')$ и оценим ее (см. [8], теорема 2):

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}', t')] &= [U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')] + \\ &\quad + [U(\mathbf{x}'', t') - U(\mathbf{x}', t')] \\ [U(\mathbf{x}'', t') - U(\mathbf{x}', t')] &= \max_{s \geq t'} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t')|) e^{s-t'} - \\ &\quad - \max_{s \geq t'} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}', t')|) e^{s-t'}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\max_{s \geq t'} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t')|) e^{s-t'} = U_1(|\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t')|) e^{s''-t'};$$

тогда

$$\begin{aligned} [U(\mathbf{x}'', t') - U(\mathbf{x}', t')] &\leq e^{s''-t'} \{U_1(|\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t')|) - \\ &\quad - U_1(|\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}', t')|)\} \leq e^{\tau(C)} ||\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t')| - |\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}', t')||. \end{aligned}$$

Если же

$$\max_{s \geq t'} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}', t')|) e^{s-t'} = U_1(|\mathbf{x}(s', \mathbf{x}', t')|) e^{s'-t'},$$

то

$$U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}', t') \geq e^{s'' - t''} [U_1(|\mathbf{x}(s', \mathbf{x}'', t')|) - \\ - U_1(|\mathbf{x}(s', \mathbf{x}', t')|)] \geq -e^{\tau(C)} |\mathbf{x}(s', \mathbf{x}'', t')| - |\mathbf{x}(s', \mathbf{x}', t')|.$$

Величину $||\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t')| - |\mathbf{x}(s, \mathbf{x}', t')||$, от которой зависят верхняя и нижняя грани разности $[U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}', t')]$, оценим через модуль разности начальных значений $|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|$.

Из неравенства Шварца $|\mathbf{x}''| + |\mathbf{x}'| \geq \left| \sum_i \mathbf{x}_i'' \mathbf{x}_i' \right|$ следует

$$(|\mathbf{x}''| + |\mathbf{x}'|)^2 \leq \sum_i (\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_i')^2 = |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|^2$$

и

$$||\mathbf{x}''| - |\mathbf{x}'|| \leq |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|.$$

Обозначая для краткости решения, определяемые начальными значениями (\mathbf{x}'', t) и (\mathbf{x}', t') , соответственно $\mathbf{x}'' = \mathbf{x}''(s)$ и $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(s)$, получим

$$|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| = \left[\sqrt{\sum_i (\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_i')^2} \right] = \frac{\sum_i (\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_i') (f_i(\mathbf{x}'', s) - f_i(\mathbf{x}', s))}{|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|} \leq \\ \leq \frac{\sum_i |\mathbf{x}_i'' - \mathbf{x}_i'| |f_i'' - f_i'|}{|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|} \leq nL |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'|.$$

Здесь L есть общая константа Липшица для n функций $f_i(\mathbf{x}, t)$ в $(n+1)$ -мерной области, содержащей все точки $(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}^*, t^*), s)$, $t^* \leq s \leq t^* + \tau(C)$, $(\mathbf{x}^*, t^*) \in C$.

Из дифференциального уравнения (2.4.1) получаем соотношение

$$|\mathbf{x}''(s) - \mathbf{x}'(s)| \leq |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| e^{nL(s-t')},$$

так что

$$|U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')| \leq |\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| e^{(1+nL)\tau(C)}.$$

Далее аналогично выводим

$$[U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')] = \max_{s \geq t''} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t'')|) e^{s-t''} - \\ - \max_{s \geq t'} U_1(|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t')|) e^{s-t'} \leq \\ \leq U_1(|\mathbf{x}(s''', \mathbf{x}'', t'')|) e^{s'''-t''} - U_1(|\mathbf{x}(s''', \mathbf{x}'', t')|) e^{s'''-t'} \leq \\ \leq e^\tau ||\mathbf{x}(s''', \mathbf{x}'', t'')| - |\mathbf{x}(s''', \mathbf{x}'', t')||, \\ [U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')] \geq U_1(|\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t'')|) e^{s''-t''} - \\ - U_1(|\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t')|) e^{s''-t'} \geq \\ \geq -e^\tau ||\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t'')| - |\mathbf{x}(s'', \mathbf{x}'', t')||.$$

Если ввести обозначение $\mathbf{x}(t', \mathbf{x}'', t'') \equiv \mathbf{x}'''$, то на основании предыдущих рассуждений будем иметь

$$|U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')| \leq e^{(1+nL)\tau} |\mathbf{x}''' - \mathbf{x}''|.$$

Так как

$$|x_l(t'', \mathbf{x}'', t'') - x_l(t', \mathbf{x}'', t')| =$$

$$= \left| \int_{t'}^{t''} f_i(\mathbf{x}(s, \mathbf{x}'', t''), s) ds \right| \leq F_i |t'' - t'|,$$

то, следовательно,

$$|\mathbf{x}(t'', \mathbf{x}'', t'') - \mathbf{x}(t', \mathbf{x}'', t')| \leq F |t'' - t'|,$$

где $|f_i(\mathbf{x}, t)| \leq F_i$ в области C и $F_1^2 + \dots + F_n^2 = F^2$. Далее находим

$$|U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}'', t')| \leq F e^{(1+nL)\tau} |t'' - t'|.$$

Отсюда

$$|U(\mathbf{x}'', t'') - U(\mathbf{x}', t')| \leq L' (|\mathbf{x}'' - \mathbf{x}'| + |t'' - t'|),$$

где $L' = e^{(1+nL)\tau} \max(1, F)$, т. е. выполнено условие б).

Чтобы убедиться, обладает ли функция U также свойством с), рассмотрим функцию

$$u(h) = U(\mathbf{x}(t+h, \mathbf{x}, t), t+h).$$

Полагая $\mathbf{x}(t+h, \mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{x}}$, $t+h = \bar{t}$, при $h \geq 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} u(h) &= \max_{s \geq \bar{t}} (|\mathbf{x}(s, \bar{\mathbf{x}}, \bar{t})|) e^{s-\bar{t}} \leq \\ &\leq \max_{s \geq \bar{t}} (|\mathbf{x}(s, \mathbf{x}, t)|) e^{s-\bar{t}} = u(0) e^{-h} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\frac{u(h) - u(0)}{h} \leq u(0) \frac{e^{-h} - 1}{h};$$

то же самое получим при $h < 0$. Итак,

$$\bar{D}_f U(\mathbf{x}, t) = \bar{D} U(\mathbf{x}(t), t) \leq -U(\mathbf{x}, t).$$

Теорема 2.5.6 (см. [8], теорема 1). Пусть в дифференциальном уравнении (2.4.1) функция $f(\mathbf{x}, t)$ принадлежит к классу C_0 относительно \mathbf{x} . Для того чтобы решения были равномерно ограничены и равноограничены в будущем, необходимо и достаточно, чтобы в области Ω_h : $|\mathbf{x}| \geq h$, $t \geq 0$, существовала непрерывная функция $U(\mathbf{x}, t) > 0$, удовлетворяющая локальному условию Липшица и, кроме того, следующим условиям:

- a) $U(\mathbf{x}, t)$ обладает свойством (I);
- b) $U(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;
- c) $\bar{D}_f U(\mathbf{x}, t) \leq -U_2(|\mathbf{x}|) < 0$, где $U_2(r)$ — непрерывная функция r .

Легко убедиться в том, что условия теоремы необходимы. Действительно, при $t \rightarrow +\infty$ равномерно ограниченные решения являются прежде всего равноограниченными в будущем, так что можно построить функцию $U(x, t)$, $|x| \geq h > H$, как в теореме 2.5.5. В силу равномерной ограниченности решений имеем $|x(s, x, t)| \leq X(A)$ для $s \geq t$, $|x| \leq A$.

Функцию $U(x, t) = \max_{s \geq t} U_1(|x(s, x, t)|) e^{s-t}$ можно оценить сверху:

$$U(x, t) \leq e^{\tau(A)} [X(A) - H] = \bar{U}_1(A),$$

и, таким образом, имеет место свойство (I).

Из неравенств $\bar{D}_f U(x, t) \leq -U(x, t)$ и $U(x, t) \geq U_1(|x|)$ следует

$$\bar{D}_f U(x, t) \leq -U_1(|x|),$$

и, таким образом, для $U_2(|x|) = U_1(|x|)$ условие с) выполнено.

То, что из условий а), б) и $\bar{D}_f(U) \leq 0$ вытекает равномерная ограниченность, доказывается (см. [3], теорема 1) следующим образом. Рассмотрим какое-нибудь решение $x(t, x_0, t_0)$, $|x_0| \leq A$, $t_0 \geq 0$, и выберем $A \geq h$. Определим границу X так, чтобы

$$U(x, t) > \bar{U}_1(A) \quad \text{для } |x| > X.$$

При этом в силу (I) можно предположить, что

$$U(x, t) \leq \bar{U}_1(A) \quad \text{для } |x| \leq A.$$

На основании неравенства $\bar{D}_f U \leq 0$, которое слабее условия с), $U(x, t)$, t является невозрастающей функцией t , т. е.

$$U(x(t), t) \leq U(x_0, t_0) \leq \bar{U}_1(A), \quad t \geq t_0.$$

Отсюда непосредственно заключаем, что

$$|x(t)| \leq X, \quad t \geq t_0.$$

Так как граница X не зависит от начального момента времени $t_0 \geq 0$, то решения равномерно ограничены.

В том, что они, кроме того, равномерно ограничены в будущем (с любой границей $H > h$), можно убедиться так:

Если $X \leq H$, полагаем $\tau = 0$, и доказательство закончено.

Если $X > H$, положим $m = \min U_2(r)$, $H \leq r \leq X$, и можно оценить

$$\bar{D}U(x(t), t) = \bar{D}_f U(x, t) \leq -U_2(|x|) \leq -m,$$

т. е.

$$\bar{D}[U + m(t - t_0)] \leq 0.$$

Отсюда

$$U(x(t), t) + m(t - t_0) \leq U(x_0, t_0)$$

и

$$U(\mathbf{x}(t), t) \leqslant \bar{U}_1(A) - m(t - t_0),$$

вследствие чего должно выполняться неравенство

$$\tau \leqslant \bar{U}_1(A)/m,$$

и, таким образом, граница зависит только от A , а не от t_0 , что и требовалось доказать.

Примеры применения критериев Иошизавы дают нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка, которыми мы займемся подробно позднее.

2.6. Критерий Мизохаты — Ямагути

Мизохата и Ямагути [1] применили один простой и за-служивающий внимания способ, позволяющий, в частности, доказать ограниченность решений уравнения Льенара (1.1) при достаточно общих предположениях. Этот способ, проведенный для $n = 2$, близок по идеи к критерию теоремы 2.5.1 для ограниченности решений уравнения (2.4.1) и в известном смысле обобщает результат Иошизавы [3] (см. также Сансоне и Конти [2]). Мы изложим его, распространяя, однако, на случай любого порядка n . Для этого объединим координаты x_1, \dots, x_m ($m \leq n$) в один вектор $\mathbf{p} = (x_1, \dots, x_m)$, а координаты x_{m+1}, \dots, x_n (в случае $m < n$) — в вектор $\mathbf{q} = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ и вместо (2.4.1) напишем

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{g}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t), \quad (2.6.1)$$

где $\mathbf{g} = (f_1, \dots, f_m)$, $\mathbf{h} = (f_{m+1}, \dots, f_n)$.

Теорема 2.6.1. Пусть в области Ω_h : $|\mathbf{x}| \geq h$, $t \geq 0$, существует непрерывная функция $U(\mathbf{x}, t) > 0$, удовлетворяющая локальному условию Липшица относительно (\mathbf{x}, t) и обладающая свойствами:

- $U(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \Rightarrow \infty$ при $|\mathbf{p}| \rightarrow \infty$ (это значит, что U стремится к бесконечности равномерно относительно \mathbf{q}, t);
- $U(\mathbf{x}, t) \leq U_1(r)$ для $|\mathbf{x}| \leq r$, $U_1(r) > 0$;
- $\bar{D}_f U(\mathbf{x}, t) \leq 0$.

Кроме того, в области $|\mathbf{p}| \leq P$, $|\mathbf{q}| \geq Q(P) > 0$, $t \geq 0$, для любого числа $P > 0$ существует некоторая функция $W(\mathbf{x}, t) > 0$, удовлетворяющая локальному условию Липшица относительно (\mathbf{x}, t) и обладающая свойствами:

- $W(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \Rightarrow \infty$ для $|\mathbf{q}| \rightarrow \infty$ (это значит, что W стремится к бесконечности равномерно относительно \mathbf{p}, t);
- $W(\mathbf{x}, t) \leq W_1(\rho)$, $W_1(\rho) > 0$ для $|\mathbf{q}| = \rho \geq Q$;

f) $\bar{D}_f W(\mathbf{x}, t) \leq 0$.

Тогда всякое решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$, $t_0 \geq 0$, уравнения (2.4.1) ограничено, т. е.

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq X(\mathbf{x}_0, t_0) \quad \text{при } t \geq t_0. \quad (2.6.2)$$

Доказательство. Если для решения с начальным моментом времени $t_0 \geq 0$ выполняется неравенство $|x(t, x_0, t_0)| \leq h$ для всех $t \geq t_0$, то возьмем $X = h$.

Если это неравенство не выполняется, то сначала покажем, что

$$|\mathbf{p}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq P \quad \text{для } t \geq t_0. \quad (2.6.3)$$

Границу $P > h$ определим, например, из условия, что (в случае $|\mathbf{x}_0| \leq r, r \geq h$)

$$U_1(r) < U(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \quad \text{для } |\mathbf{p}| > P.$$

Если рассматриваемое решение в течение отрезка времени $t \geq t_1 \geq t_0$ ($\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1, |\mathbf{x}_1| \leq r$) содержится в области Ω_h , то $U(\mathbf{x}, t) \leq U(\mathbf{x}_1, t_1) \leq U_1(r)$, и поэтому $|\mathbf{p}| \leq P$. Если же решение не лежит в Ω_h , то, очевидно, $|\mathbf{p}| \leq P$.

Теперь, используя функцию $W(\mathbf{x}, t)$, покажем, что $|\mathbf{q}(t, \mathbf{x}_0, t_0)|$ при $t \geq t_0$ также ограничена. Для этой цели положим $\rho = \max[r, Q(P)]$ и выберем $Q' \geq \rho$ так, что

$$W_1(\rho) < W(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \quad \text{для } |\mathbf{q}| > Q'.$$

Предполагая, что $\mathbf{q}(t)$ не остается всегда в области $|\mathbf{q}| \leq Q'$, найдем в рассматриваемом промежутке времени по крайней мере один отрезок $t_1 \leq t \leq t_2$, в котором $|\mathbf{q}(t)| \geq \rho$, $|\mathbf{q}(t_1)| = \rho$, $|\mathbf{q}(t_2)| > Q'$, и поэтому

$$W_1(\rho) \geq W(\mathbf{x}_1, t_1) \geq W(\mathbf{x}_2, t_2) > W_1(\rho).$$

Полученное противоречие исключает наше предположение.

Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание. Из доказательства теоремы следует, что оценка (2.6.2) может быть сделана более точной:

$$|\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)| \leq X(r) \quad \text{для } t \geq t_0, |\mathbf{x}_0| \leq r. \quad (2.6.4)$$

Поэтому ограниченность решений равномерна.

В частном случае $m = n$ доказанная теорема формулируется так (ср. с теоремой 2.5.2'):

Если в области Ω_h существует непрерывная функция $U(\mathbf{x}, t) > 0$, удовлетворяющая локальному условию Липшица относительно (\mathbf{x}, t) и обладающая свойствами:

a) $U(\mathbf{x}, t) \rightarrow \infty$ для $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$;

b) $U(\mathbf{x}, t) \leq U_1(r)$ для $|\mathbf{x}| \leq r, U_1(r) > 0$;

c) $\bar{D}_f U(\mathbf{x}, t) \leq 0$,

то решения $\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0, t_0)$ ($t_0 \geq 0$) уравнения (2.4.1) равномерно ограничены.

2.7. Понятие предельной точки движения по Биркгофу

Как было отмечено в п. 2.1, качественное исследование системы, не сводящееся к установлению ограниченности ее решений, требует новых подходов. При этом существенно различны исследования автономных и неавтономных систем.

Для первых выбор момента времени для начального возмущения не влияет на дальнейший ход процесса. Множество движений, представляемых интегральными кривыми в $(n+1)$ -мерном пространстве (x, t) , допускает поэтому любые перемещения, параллельные оси времени t , и дает в качестве проекции на n -мерное фазовое пространство x семейство фазовых путей, заполняющих в случае однозначности проблемы начальных значений некоторую фазовую область. Даже при наличии свойства единственности траектории движений автономной системы могут совпадать, однако они не могут разветвляться. Хотя расположение и вид траекторий не дают точного представления о ходе процесса, однако они позволяют судить о следовании во времени различных состояний. Более того, фазовый портрет содержит достаточную информацию об асимптотическом поведении автономной динамической системы, например о наличии соответствующих замкнутых траекторий (циклов), о существовании периодических процессов (колебаний), об особых точках и точках покоя.

У систем второго порядка фазовый портрет является семейством плоских кривых и потому он особенно нагляден и обозрим. В этом важном частном случае, которым мы хотим ограничиться, существует очень интересная и содержательная теория Пуанкаре [1] и Бендиクсона [1]. Эта теория занимается структурой семейств кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, и прежде всего классификацией циклов и особых точек. Для случая n -мерного фазового пространства аналогичные, но значительно более общие исследования провел Биркгоф [1], используя общие понятия и методы теории множеств.

Полученные результаты имеют большое значение для качественного исследования автономной динамической системы. Приведем эту теорию, придерживаясь изложения Сансоне и Конти [2], близкого к доказательству основной теоремы Биркгофа, отправляясь от рассуждений Биркгофа, применительно к случаю $n = 2$.

Рассматриваемая автономная динамическая система описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\dot{x} = X(x, y), \quad \dot{y} = Y(x, y). \quad (2.7.1)$$

Пусть функции X, Y непрерывны на всей xy -плоскости (фазовая плоскость) и обеспечивают в каждом конечном интервале времени однозначность решений и их непрерывную зависимость от начальных значений.

Интегральную кривую (характеристику), проходящую в момент времени $t = 0$ через точку $P(x, y)$, обозначим следующим образом:

$$\gamma_P(t) = P(t) = [x(t, P), y(t, P)]. \quad (2.7.2)$$

Полухарактеристику для положительных или отрицательных значений t мы будем обозначать соответственно $\gamma_P^+(t)$ или $\gamma_P^-(t)$:

$$\gamma_P^+(t) = \gamma_P(t), \quad t \geq 0; \quad \gamma_P^-(t) = \gamma_P(t), \quad t \leq 0. \quad (2.7.3)$$

Согласно Биркгофу [1], точка Q фазового пространства называется ω -предельной (α -предельной) точкой характеристики $\gamma_P(t)$, если существует строго монотонная возрастающая (убывающая) неограниченная последовательность $\{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d[P(t_n), Q] = 0, \quad (2.7.4)$$

где

$$d[A, B] = [(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2]^{1/2}.$$

Совокупность всех ω -предельных точек (или α -предельных точек) решения γ образует ω -предельное множество $\Omega(\gamma)$ (или α -предельное множество $A(\gamma)$) характеристики γ . В дальнейшем изложении будем говорить почти всюду только об ω -предельных точках. (Рассуждения при этом могут быть легко перенесены и на α -предельные точки простой заменой t на $-t$.) Для краткости будем говорить просто о предельных точках, предельных множествах и т. д., имея в виду ω -предельные точки, ω -предельные множества и т. д.

Положим, что множество $\Omega(\gamma)$ непусто. Так как каждая точка этого множества есть предельная точка для γ , то множество $\Omega(\gamma)$ принадлежит замыканию $\bar{\gamma}$, т. е.

$$\Omega(\gamma) \subset \bar{\gamma}. \quad (2.7.5)$$

Если H есть предельная точка множества $\Omega(\gamma)$, то, очевидно, $H \in \Omega(\gamma)$. Это значит, что $\Omega(\gamma)$ содержит все свои предельные точки и, следовательно, множество $\Omega(\gamma)$ замкнуто.

Кроме того, справедлива

Теорема 2.7.1. *Если γ содержит некоторую ограниченную полухарактеристику $\gamma^+ = \gamma^+(t)$, то множество $\Omega(\gamma)$ непусто и, кроме того, оно замкнуто и связно.*

Доказательство. Если $\{t_n\}$ — какая-нибудь возрастающая расходящаяся последовательность, то ограниченное множество точек $\gamma_P(t_n)$ на основании теоремы Больцано — Вейерштрасса обладает по меньшей мере одной предельной точкой Q , которая принадлежит $\Omega(\gamma)$. Ясно, что множество $\Omega(\gamma)$ непусто, ограничено и, сверх того, замкнуто.

Для доказательства связности множества $\Omega(\gamma)$ предположим противное. Пусть существуют два замкнутых множества Ω' , Ω'' такие, что $\Omega' \cup \Omega'' = \Omega(\gamma)$ и $d(\Omega', \Omega'') = \inf d(Q', Q'') = d > 0$, где $Q' \in \Omega'$, $Q'' \in \Omega''$. Тогда можно найти две моно-