тонно возрастающие неограниченные последовательности $\{t'_n\}$, $\{t''_n\}$, где $0 < t'_1 < t''_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < t''_n < t'_{n+1} < \ldots$, такие, что $d(P'_n, \Omega') < d/3$ для $P'_n = \gamma_P(t'_n)$ и $d(P''_n, \Omega'') < d/3$ для $P''_n = \gamma_P(t''_n)$. Каждая дуга $\overset{\frown}{P'_n P''_n}$ имеет своим началом точку множества $C' = \{P'\}$, для которого $\inf d(P', Q') \leqslant d/3$, и своим концом точку множества $C'' = \{P''\}$, для которого $\inf d(P'', Q'') \leqslant d/3$. Так как оба множества C', C'' замкнуты и $C' \cap C''$ пусто, то можно найти момент времени t_n, $t'_n < t_n < t''_n$, для которого $P_n = \gamma_P(t_n) \notin C' \cup C''$ и при этом $d[P_n, \Omega(\gamma)] > d/3$. Точки P_n обладают по крайней мере одной предельной точкой $Q \in \Omega(\gamma)$, но это противоречит неравенству $d[Q, \Omega(\gamma)] \geqslant d/3$.

Другое важное свойство предельного множества сформулируем в следующей теореме.

Теорема 2.7.2. *Если точка Q принадлежит множеству $\Omega(\gamma)$ и является начальной точкой характеристики $\Gamma = \gamma_Q(t)$, то*

$$\Gamma \subset \Omega(\gamma). \tag{2.7.6}$$

Доказательство. Существует неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\}$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} d[\gamma_P(t_n), \Gamma(0)] = 0, \quad \Gamma(0) = Q. \tag{2.7.7}$$

Пусть теперь $Q(t)$ — произвольная точка характеристики Γ.

Так как эта характеристика непрерывно зависит от ее начальной точки Q, можно каждому сколь угодно малому числу $\varepsilon > 0$ поставить в соответствие некоторое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, что

$$d[\gamma_Q(\tau), \gamma_{Q'}(\tau)] \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t, \text{ если } d[Q, Q'] \leqslant \delta.$$

Выберем N достаточно большим и положим $Q' = P_n = \gamma_P(t_n)$, где $n \geqslant N$. Тогда получим

$$d\left[\gamma_Q(t), \gamma_{P_n}(t)\right] = d[Q(t), P(t + t_n)] \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant N = N(\varepsilon).$$

Этим доказано, что последовательность точек $\{\gamma_P(t + t_n)\}$ сходится к точке $Q(t)$. Отсюда следует, что $Q(t) \in \Omega(\gamma)$.

Всякая характеристика, которая принадлежит хотя бы одному из предельных множеств $\Omega(\gamma)$ $(A(\gamma))$, называется *ω-предельной характеристикой* (*α-предельной характеристикой*).

Задача теперь заключается в том, чтобы исследовать структуру предельных множеств и установить, в каких случаях такое множество содержит определенные характеристики особых видов. Далее будут изучаться форма предельных характеристик и их свойства, а также связь их с характеристиками, порождающими предельное множество.

Теорема 2.7.3. *Если Γ — предельная характеристика, принадлежащая множеству $\Omega(\gamma)$, то последнее содержит также множества $\Omega(\Gamma)$ $(A(\Gamma))$.*

Действительно, либо $\Omega(\Gamma)$ $(A(\Gamma))$ пусто, либо каждая точка $\Omega(\Gamma)$ $(A(\Gamma))$, как предельная точка множества $\Gamma \subset \Omega(\gamma)$, принадлежит $\Omega(\gamma)$.

По свойствам предельного множества $\Omega(\gamma)$ классифицируют характеристики γ. Существуют следующие возможности:

1) множество $\Omega(\gamma)$ пусто;

2) оно непусто, но пересечение $\gamma \cap \Omega(\gamma)$ пусто;

3) пересечение $\gamma \cap \Omega(\gamma)$ непусто, так что $\gamma \subset \Omega(\gamma)$.

Первый случай имеет место, когда полухарактеристика $\gamma^+ \subset \gamma$ неограничена; в этом случае говорят, что γ есть *ω-расходящаяся* характеристика. Второй случай соответствует *ω-асимптотически устойчивой* характеристике; третий — *ω-устойчивости характеристики γ в смысле Пуассона*. Здесь γ, очевидно, является предельной характеристикой.

Наибольший интерес представляют последние два случая. Случай 2) встречается тогда, когда γ при $t \to \infty$ стремится к циклу или к особой точке. Случай 3) наблюдается, например, когда характеристика γ есть цикл или особая точка.

Теорема 2.7.4. *Если γ — замкнутая характеристика (цикл или особая точка), то $\gamma = \Omega(\gamma) = A(\gamma)$.*

Доказательство. Пусть $P \in \gamma$. Рассмотрим полухарактеристику $\gamma_P^+(t)$, $\gamma_P^+(0) = P$. Так как γ замкнута, существует момент времени $T > 0$ такой, что $\gamma_P^+(t+T) = \gamma_P^+(t)$ и $\gamma_P^+(nT) = P$ для $n = 1, 2, \ldots$ Таким образом, для последовательности точек $\{\gamma_P^+(nT)\}$ выполнено условие (2.7.4), где $t_n = nT$, $Q = P$, и, следовательно, $P \in \Omega(\gamma)$.

С помощью последовательности $\{\gamma_P^-(-nT)\}$ аналогично доказывается, что $P \in A(\gamma)$.

Пусть, далее, $P \in \Omega(\gamma)$; тогда $\inf d[P, \gamma(t)] = 0$ для $t \in [0, T]$. Так как функция $d[P, \gamma(t)]$ непрерывна, то она достигает своей нижней грани в некоторой определенной точке замкнутого интервала $[0, T]$, а это значит, что $P \in \gamma$.

Точки фазовой плоскости xy, которые не являются особыми точками (вырожденными характеристиками) системы (2.7.1), называют *регулярными точками*. Таким образом, регулярными точками (x, y) являются те и только те точки, для которых $X^2(x, y) + Y^2(x, y) > 0$.

На основании того, что функции X, Y непрерывны, множество регулярных точек открыто, и поэтому каждой регулярной точке можно поставить в соответствие некоторое число $\rho > 0$ так, что любая точка Q в замкнутом круге $C = C(P, \rho)$ с центром P и радиусом ρ регулярна. При этом число ρ может быть выбрано столь малым, что для двух любых точек Q и Q', принадлежащих C, ориентированные касательные к γ_Q и $\gamma_{Q'}$ пересекаются под углом, не превышающим $\pi/4$. Круг C, удовлетворяющий этому дополнительному условию, назовем *кругом регулярности точки P*.

Очевидно, круг $C' = C(P, \rho')$, где $0 < \rho' < \rho$, есть также круг регулярности точки P. Диаметр круга регулярности, перпендикулярный γ_P, назовем *нормальным диаметром*. Он является *дугой без контакта* в смысле Пуанкаре, так как пересекает характеристики поля уравнения (2.7.1) и не содержит особых точек. Все характеристики, проходящие через точки нормального диаметра, пересекают его в том же направлении, что и γ_P. Нормальный диаметр разбивает круг регулярности на два полукруга: *положительный*, если γ_P входит в него после пересечения диаметра, и *отрицательный*, если γ_P входит в него до пересечения диаметра.

Для всякой регулярной точки P существует бесконечно много ее кругов регулярности. Пусть ρ_P есть верхняя грань радиусов ρ, для которых $C(P, \rho)$ является кругом регулярности точки P. Тогда для любой точки регулярности P либо $\rho_P = +\infty$ и все точки фазовой плоскости регулярны, либо ρ_P конечно.

Пусть γ — регулярная (т. е. составлена из регулярных точек) характеристика и $\overset{\frown}{AB}$ — некоторая дуга этой характеристики. Если $A = B$, то, очевидно, γ есть цикл. Для каждой точки $P \in \overset{\frown}{AB}$ мы найдем ранее определенную величину ρ_P, причем исключим малоинтересный случай, когда все точки плоскости регулярны. Легко убедиться, что ρ_P непрерывно зависит от изменения положения точки P на дуге $\overset{\frown}{AB}$. Действительно, если функция ρ_P не является непрерывно зависящей от P, то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для сколь угодно малого числа $\delta > 0$ ($\delta < \varepsilon$) найдется точка $Q \in \overset{\frown}{AB}$, для которой

$$d(P, Q) \leqslant \delta, \quad |\rho_P - \rho_Q| \geqslant \varepsilon.$$

Выбирая $\delta \leqslant \varepsilon/2$ при $|\rho_P - \rho_Q| \geqslant \varepsilon$, получим, что круг $C(Q, \rho_Q)$ будет лежать внутри круга $C(P, \rho_P)$, если $\rho_P - \rho_Q \geqslant \varepsilon$, и, наоборот, вне его, если $\rho_Q - \rho_P \geqslant \varepsilon$. А это противоречит определению величины ρ_Q или соответственно ρ_P.

Так как дуга $\overset{\frown}{AB}$ есть замкнутое множество, то величина ρ_P достигает своей нижней грани ρ_* по крайней мере в одной из точек дуги.

Множество точек Q плоскости, для которых $d(Q, \overset{\frown}{AB}) \leqslant \rho$, где $0 < \rho \leqslant \rho_*$, назовем *$\rho$-окрестностью дуги $\overset{\frown}{AB}$ регулярной характеристики.*

Если точка Q лежит в круге $C(P, \rho)$ регулярной точки P, то характеристика γ_Q не обязательно пересекает нормальный диаметр круга $C(P, \rho)$. Однако имеет место

Теорема 2.7.5. *Пусть $C(P, \rho)$ — круг регулярности точки P. Если Q принадлежит кругу $C(P, \rho')$, где $0 < \rho' \leqslant \rho/\sqrt{2}$, то γ_Q содержит в $C(P, \rho)$ дугу, которая пересекает нормальный диаметр, т. е. диаметр, перпендикулярный к касательной к траектории γ_P в точке P круга $C(P, \rho)$.*

Доказательство. Через точку Q проведем полупрямую, параллельную ориентированной касательной дуги γ_P в точке P, и два луча, образующих с ней углы $\pi/4$ (рис. 2.7.1). Тогда получим угол, внутренность которого содержит дугу траектории γ_Q, лежащую в круге $C(P,\rho)$. Квадрат, вписанный в круг, диагональю которого является нормальный диаметр, очевидно, содержит точку Q. Нормальный диаметр пересекает ранее построенный угол и, следовательно, пересечет также и траекторию γ_Q. Это и подавно будет иметь место, если Q находится в круге, вписанном в квадрат, т. е. $Q \in C(P,\rho')$, где $0 < \rho' \leqslant \rho/\sqrt{2}$.

Теорема 2.7.6. *Каждая характеристика γ системы* (2.7.1), *ω-устойчивая* (*α-устойчивая*) *в смысле Пуассона, замкнута, т. е. либо является циклом, либо особой точкой, так что* $\gamma = \Omega(\gamma) = A(\gamma)$.

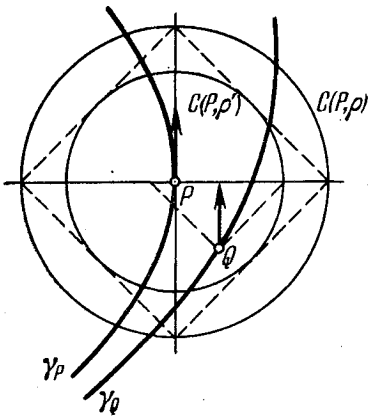

Рис. 2.7.1.

Доказательство. Пусть γ — характеристика, устойчивая по Пуассону, т. е. $\gamma \subset \Omega(\gamma)$, и P — одна из ее точек. Если P — особая точка, то $P = \gamma = \Omega(\gamma)$, и теорема доказана. Положим теперь, что P — регулярная точка, и покажем, что $\gamma = \gamma_P(t)$ должна быть циклом.

Пусть $C(P,\rho)$ — круг регулярности точки P. Так как $P \in \Omega(\gamma)$, то для любого числа ρ', где $0 < \rho' \leqslant \rho$, существует неограниченная возрастающая последовательность $\{t_n\}$ такая, что точки $P_n = \gamma_P(t_n)$ принадлежат кругу $C(P,\rho')$. Благодаря тому, что γ_P не вырождается в точку, можно ρ' выбрать столь малым, что γ_P^+ пересечет окружность круга $C(P,\rho')$. Пусть это произойдет в первый раз в точке P'. Если γ_P не является циклом, то дуга $\overset{\frown}{PP'}$ может содержать лишь конечное число точек P_n. Пусть P_k — первая по времени точка P_n, следующая за P'. Если предположить, что $\rho' \leqslant \rho/\sqrt{2}$, то траектория γ_{P_k}, а следовательно и траектория γ_P^+, пересечет в некоторой точке $P'' \neq P$ нормальный диаметр круга $C(P,\rho)$. Все характеристики пересекают этот диаметр в одном направлении, так что возможны только две картины расположения характеристик (рис. 2.7.2). Пусть $d = d(P,P'')$, тогда ни одна точка траектории $\gamma_{P''}^+$ не может попасть в круг $C(P,\ d/\sqrt{2})$. Действительно, в этом случае некоторая дуга $\gamma_{P''}^+$ пересекала бы нормальный диаметр круга $C(P,d)$, а также круга $C(P,\rho)$ в противоположных направлениях, что невозможно. Поэтому все точки полухарактеристики

$\gamma_{P''}^{+}$ удалены от P больше, чем на $d/\sqrt{2}$, но это противоречит предположению $P \in \Omega(\gamma)$. Таким образом, γ_P необходимо является циклом.

Если сопоставить теоремы 2.7.4 и 2.7.6, то придем к следующему результату:

Характеристики, ω-устойчивые или α-устойчивые по Пуассону (и только они), замкнуты (они являются циклами или особыми точками). В этом случае имеет место соотношение $\gamma = \Omega(\gamma) = A(\gamma)$.

Следующая теорема относится к устойчивости циклов

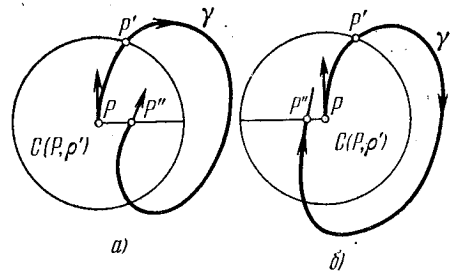

Рис. 2.7.2.

Теорема 2.7.7. *Пусть Γ — цикл. Тогда для каждого числа $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для всех точек $Q \in \gamma_P^{+}$ или $Q \in \gamma_P^{-}$ при выполнении неравенства $d(P, \Gamma) \leqslant \delta$ будет справедливо неравенство $d(Q, \Gamma) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Число $\varepsilon > 0$ будем считать столь малым, что множество точек, лежащих от цикла Γ на расстоянии не больше чем ε, образует регулярную окрестность цикла Γ. Любой точке $G \in \Gamma$ в силу непрерывной зависимости характеристик от ее начальной точки можно поставить в соответствие число δ, $0 < \delta \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}$, так, чтобы для $P \in C(G, \delta)$ выполнялось включение

$$\gamma_P(t) \in C\left[\gamma_G(t),\ \varepsilon/\sqrt{2}\right], \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad (2.7.8)$$

где T — период цикла. При этом, очевидно, $\gamma_G(t) = \Gamma$, $\gamma_G(0) = \gamma_G(T) = G$.

Положим $\gamma_P(T) = P'$, тогда $P' \in C\left(G,\ \varepsilon/\sqrt{2}\right)$. Из теоремы 2.7.5 вытекает, что в круге $C\left(G,\ \varepsilon/\sqrt{2}\right)$ (рис. 2.7.3) лежат две дуги траектории γ_P с концевыми точками P, P_N и P', P'_N, где P_N, P'_N — точки нормального диаметра

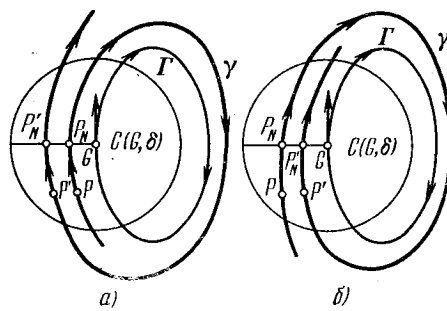

Рис. 2.7.3.

круга $C(G, \varepsilon)$. Следовательно, γ_P содержит дугу $\overset{\frown}{P_N P'_N}$, на которой каждая точка самое большее на ε удалена от цикла Γ, в то время как ее концевые точки лежат на нормали к Γ в точке G,

Для $P_N = P'_N$ теорема доказана. Для $P_N \neq P'_N$ на названной нормали возможно только одно из двух расположений точек: а) $GP_NP'_N$ и б) GP'_NP_N, так как G не может располагаться между P_N и P'_N.

Так как отрезок $\overline{P_NP'_N}$ нормального диаметра может пересекаться траекториями только в одном направлении, то кольцевая область R, ограниченная циклом Г, дугой $\overset{\frown}{P_NP'_N}$ и отрезком $\overline{P_NP'_N}$, целиком содержит в случае а) полухарактеристику $\gamma^-_{P_N}$, в случае б) — полухарактеристику $\gamma^+_{P_{N'}}$. Поэтому для любой точки Q соответствующей полухарактеристики имеем $d(Q, \Gamma) \leqslant \varepsilon$.

Замечание. Из доказательства следует: если γ_P — цикл и $d(P, \Gamma) \leqslant \varepsilon$, то каждой точке $M \in \Gamma$ можно поставить в соответствие точку $M' \in \gamma_P$ такую, что $d(M, M') \leqslant \varepsilon$.

Пусть Г есть регулярная предельная характеристика и является частью множества $\Omega(\gamma)$ для некоторой определенной характеристики γ. Пусть $\boldsymbol{t}$ — ориентированная касательная к Г в точке Q в смысле возрастающих значений t, и пусть $\boldsymbol{n}_l$, $\boldsymbol{n}_r$ — нормальные полудиаметры для Г в точке Q, так что $(\boldsymbol{n}_l, t) = (\boldsymbol{n}_r, t) = 0$ (рис. 2.7.4).

Пусть, далее, $C(Q, \rho)$ — круг регулярности точки Q, G_l и G_r — множества точек пересечения траектории γ с $\boldsymbol{n}_l$ и соответственно с $\boldsymbol{n}_r$ в круге $C(Q, \rho)$. Если γ — цикл, то $\gamma = \Omega(\gamma) = \Gamma$ и, следовательно, G_l, G_r содержат лишь конечное число точек. Если это не так, то Q — предельная точка для одного и только одного из множеств G_l, G_r. Это очевидно, если Г делит плоскость на две части, т. е. если Г есть цикл или открытая характеристика, неограниченная в обоих направлениях по t.

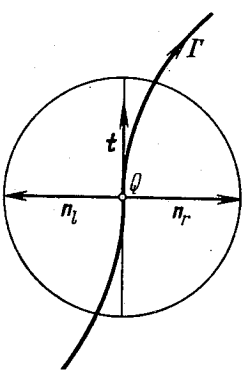

Рис. 2.7.4.

В противном случае рассуждение можно закончить следующим образом. Пусть $P_1(t_1)$ и $P_2(t_2)$, где $t_2 > t_1$, — две последовательные точки объединения множеств $G_l \cup G_r$, так что $\gamma(t) \not\subset G_l \cup G_r$ для $t_1 < t < t_2$. Тогда могут быть три существенно различных расположения точек: P_1QP_2, QP_1P_2 и QP_2P_1, из которых возможны только два, показанные на рис. 2.7.5. Это следует из того, что полухарактеристика $\gamma^+_{P_1}$ должна пересечь прямую P_1P_2, что возможно лишь при надлежащей ориентации ее относительно Г. Поэтому из двух множеств G_l и G_r одно пусто, в то время как другое представляет собой монотонную последовательность $\{P_n\}$, сходящуюся к Q.

Ясно, что то из двух множеств G_l и G_r, которое непусто для некоторой точки $Q \subseteq \Gamma$, остается непустым также, когда Q дви-

жется по Γ. Это следует из непрерывной зависимости характеристик от их исходных точек и свойства единственности, а также из теоремы 2.7.5.

Резюмируя, можно сказать: если асимптотическая характеристика γ имеет регулярную предельную характеристику Γ, то она спиралевидно навивается с одной стороны вокруг Γ.

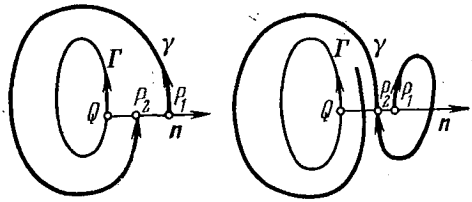

Рис. 2.7.5.

Теорема 2.7.8. *Пусть* Γ — *регулярная предельная характеристика, принадлежащая множеству* Ω(γ) *некоторой данной характеристики* γ. *Если* Ω(Γ) (A(Γ)) *содержит регулярные точки, тогда* Γ *есть цикл и совпадает с* Ω(γ).

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что Γ не является циклом, тогда, на основании теоремы 2.7.6, Γ и Ω(Γ) не имеют общих точек. Пусть Q есть регулярная точка множества Ω(Γ), $C(Q, \rho)$ — ее круг регулярности и NQN' — нормальный диаметр этого круга (рис. 2.7.6). Пусть, далее, P_1, P_2, P_3 — три последовательные точки пересечения Γ и NQN', лежащие в круге $C(Q, \rho/\sqrt{2})$. Как было доказано выше, эти точки расположены в таком порядке: Q, P_3, P_2, P_1. Так как $P_2 \in \Gamma \subset \Omega(\gamma)$, то в любой близости от P_2 в круге $C(Q, \rho/\sqrt{2})$ имеются точки характеристики γ. Поэтому характеристика γ пересекает отрезок NQN', причем в том же направлении, как и Γ. В таком случае γ не может иметь более одной точки пересечения с NQN' между P_1 и P_2, а также между P_2 и P_3, хотя γ, в силу того что $P_2 \in \Omega(\gamma)$, должна иметь бесконечно много таких точек пересечения между P_1 и P_3. Полученное противоречие будет устранено лишь тогда, когда $P_1 = P_2 = P_3$, т. е. если Γ есть цикл. К тому же результату придем, если вместо Ω(Γ) будем рассматривать A(Γ).

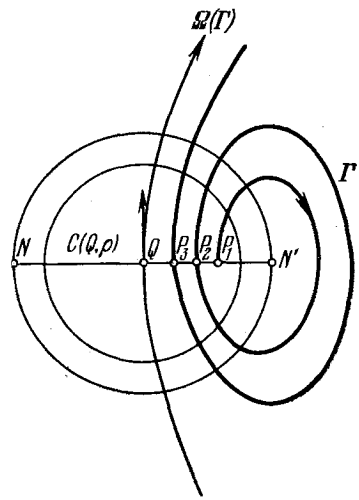

Рис. 2.7.6.

Поскольку $\Gamma \subset \Omega(\gamma)$, то в любой близости от цикла имеются точки характеристики γ, следовательно, по теореме 2.7.7 существует ε-окрестность траектории Γ, в которой находится полухарактеристика γ. Этой полухарактеристикой необходимо является γ^+. Действительно, если эта полухарактеристика — γ^-, то

из доказательства теоремы 2.7.7 следует, что существует кольцеобразная область около Г, в которой γ^+ не может находиться, вопреки предположению: $\Gamma \subset \Omega(\gamma)$.

Так как γ^+ спиралевидно навивается на цикл Г с некоторой стороны его, то для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно найти достаточно большое число $T = T(\varepsilon)$ такое, что γ^+ будет находиться в ε-окрестности Г для $t \geqslant T$. Следовательно, всякая точка множества $\Omega(\gamma)$, не принадлежащая Г, должна лежать в этой ε-окрестности. Это значит, что $\Gamma = \Omega(\gamma)$. Теорема доказана.

Рассмотрим вновь характеристику γ. Пусть ее предельное множество $\Omega(\gamma)$ ограничено и Ω_s — совокупность всех его особых точек.

Если Ω_s пусто, то $\Omega(\gamma)$ включает только регулярные характеристики Г, которые, очевидно, ограничены. Для каждой из них на основании теоремы 2.7.1 множество $\Omega(\Gamma)$ непусто. Множество $\Omega(\Gamma) \subset \Omega(\gamma)$ состоит из регулярных точек. Отсюда на основании теоремы 2.7.8 приходим к заключению, что $\Omega(\gamma)$ есть цикл.

Если множество Ω_s непусто, но ограничено, то оно необходимо замкнуто. Это следует из замкнутости множества $\Omega(\gamma) \supset \supset \Omega_s$, а также из определяющего равенства для особых точек $X^2(x, y) + Y^2(x, y) = 0$, где функции $X(x, y)$ и $Y(x, y)$ непрерывны. Возможно, что Ω_s исчерпывает все множество $\Omega(\gamma)$. Однако может быть, что в $\Omega(\gamma)$ содержится одна или несколько регулярных предельных характеристик Г, которые, естественно, незамкнуты. Для каждой из них на основании теоремы 2.7.8 имеем $A(\Gamma) \subset \Omega_s \subset \Omega(\gamma)$, $\Omega(\Gamma) \subset \Omega_s \subset \Omega(\gamma)$.

Отсюда следует

Теорема 2.7.9. *Пусть $\Omega(\gamma)$ — ограниченное множество. Если оно не содержит особых точек, то оно — цикл. В противном случае оно включает некоторое замкнутое множество особых точек Ω_s, а также, возможно, и незамкнутые предельные характеристики* Г, *из которых каждая ω- и α-асимптотична относительно множества Ω_s, т. е. все ω- и α-предельные точки этих характеристик принадлежат Ω_s. Характеристика γ спиралевидно навивается на каждую из регулярных характеристик* Г.

Эта теорема обобщает некоторые результаты Бендиксона [1]. В п. 2.8 мы займемся дальнейшим изучением работ Бендиксона относительно поведения характеристик в случае конечного числа особых точек. Теорему можно дополнить замечанием, что возможен случай, когда незамкнутые характеристики в $\Omega(\gamma)$ образуют некоторое счетное множество (ср. Солнцев [1]).

Если Ω_s состоит из конечного множества точек, то предельное множество $\Omega(\gamma)$, вообще говоря, имеет вид криволинейного полигона, вершинами которого являются точки множества Ω_s, а сторонами служат незамкнутые предельные характеристики. Характеристика γ приближается к полигону такого вида либо извне, либо изнутри. Такая конфигурация иногда называется *полициклом*.

Мы специально рассмотрим случай множества $\Omega(\gamma)$, вырождающегося в единственную точку, которая, очевидно, является особой.

Верна следующая предварительная теорема.

Теорема 2.7.10. *Если характеристика* γ *при* $t \to \infty$ *стремится к точке* Q, *то* Q *совпадает с предельным множеством* $\Omega(\gamma)$. *Если, наоборот,* $\Omega(\gamma)$ *состоит из единственной точки* Q, *то характеристика* γ *неограниченно приближается к этой точке при* $t \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\gamma \to Q$. Тогда, очевидно, $Q \in \Omega(\gamma)$. Пусть имеется еще одна точка $Q' \in \Omega(\gamma)$ и $d(Q, Q') = d > 0$. В таком случае для любого момента t выполняется неравенство $d \leqslant d[Q, \gamma(t)] + d[Q', \gamma(t)]$. Далее, существует неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\}$ такая, что $d[Q', \gamma(t_n)] \to 0$ и для той же последовательности $d[Q, \gamma(t_n)] \to 0$. Отсюда следует, что $d = 0$, т. е. $Q' = Q$.

В случае, когда $\Omega(\gamma) = Q$, докажем, что для каждого ε должно существовать $T = T(\varepsilon)$ такое, что $d[Q, \gamma(t)] \leqslant \varepsilon$ для $t \geqslant T$. Пусть имеется такое $\varepsilon^* > 0$, для которого это утверждение не выполняется. Тогда существуют сколь угодно большие моменты времени t, для которых $d[Q, \gamma(t)] > \varepsilon^*$. По предположению, найдется неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\}$, для которой $d[Q, \gamma(t_n)] \leqslant \varepsilon^*$. Таким образом, имеется последовательность $\{t_n^*\}$ такая, что $d[Q, \gamma(t_n^*)] = \varepsilon^*$. Так как всякая предельная точка ограниченной последовательности $\gamma(t_n^*)$ принадлежит множеству $\Omega(\gamma)$, то это множество имеет точку, отличную от Q. Мы пришли к противоречию.

Аналогично можно показать, что характеристика γ, у которой предельное множество $\Omega(\gamma)$ непусто и ограничено, должна быть также ограниченной.

Для частного случая мы можем резюмировать полученные результаты в следующей теореме.

Теорема 2.7.11. *Если множество особых точек* Ω_s *в некотором ограниченном множестве* $\Omega(\gamma)$ *состоит из единственной точки* Q, *то тогда либо* $\Omega(\gamma) = Q$, *либо в* $\Omega(\gamma)$ *существует по меньшей мере одна незамкнутая характеристика* Γ *такая, что* $\Omega(\Gamma) = A(\Gamma) = Q$.

Относительно структуры неограниченных множеств $\Omega(\gamma)$ приведем без доказательства две теоремы Р. Виноградa [1].

Теорема 2.7.12. *Если некоторое неограниченное множество* $\Omega(\gamma)$ *не содержит особых точек, то оно состоит из счетного множества компонент, каждая из которых гомеоморфна прямой. Любая ограниченная часть плоскости имеет общие точки только с конечным числом таких компонент.*

Теорема 2.7.13. *Для того чтобы множество* E *точек плоскости было множеством* $\Omega(\gamma)$ *характеристики* γ, *необходимо и достаточно, чтобы* E *было границей некоторой односвязной области.*

2.8. Теория Пуанкаре — Бендиксона

Известно (теорема 2.7.6), что замкнутая характеристика системы

$$x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y), \tag{2.8.1}$$

в частности цикл Г, удовлетворяет соотношению

$$\Gamma = \Omega(\Gamma) = A(\Gamma) \tag{2.8.2}$$

и, таким образом, является предельной характеристикой. Сверх того, будем говорить, что цикл Г есть *предельный цикл*, если он представляет собой множество $\Omega(\gamma)$ или множество $A(\gamma)$ хотя бы для одной характеристики γ, отличной от Г.

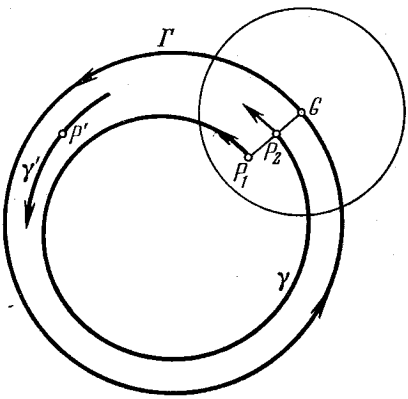

Рис. 2.8.1.

В отличие от поведения около особой точки, когда множества $\Omega(\gamma)$ и $A(\gamma)$ образуют одну и ту же характеристику γ, для предельных циклов системы (2.8.1) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.8.1. *Если предельный цикл* Г *для некоторой внутренней (внешней) характеристики* γ *идентичен с множеством* $\Omega(\gamma)$, *то он не может совпадать с множеством* $A(\gamma')$ *для другой внутренней (внешней) характеристики* γ'.

Доказательство. Пусть γ содержится, например, внутри $\Gamma = \Omega(\gamma)$ (рис. 2.8.1). По теореме 2.7.7 можно найти две последовательные точки пересечения P_1, P_2 дуги характеристики γ с нормалью цикла Г в точке G, которые лежат в круге регулярности точки G. Тогда полухарактеристика $\gamma^-_{P_1}$ остается внутри замкнутой кривой, образованной дугой $\overset{\frown}{P_1P_2} \subset \gamma$ и отрезком $\overline{P_1P_2}$. Таким образом, множество $A(\gamma)$ находится на положительном расстоянии от Г и равенство $A(\gamma) = \Gamma$ исключено.

Пусть теперь γ' — характеристика, лежащая внутри Г и отличная от γ. Рассмотрим кольцевую область R между $\overset{\frown}{P_1P_2} \cup \overline{P_1P_2}$ и Г. Можно предположить, что в ней нет особых точек.

В случае $A(\gamma') = \Gamma$ внутри R должна быть хотя бы одна точка $P' \in \gamma'$, при этом полухарактеристика $\gamma^-_{P'}$ должна спиралевидно навиваться на Г. С другой стороны, полухарактеристика $\gamma^+_{P'}$ не может покинуть кольцевую область R, так как отрезок $\overline{P_1P_2}$ пересекается характеристиками только в одном направлении. Поэтому $\Omega(\gamma')$ лежит в R, и так как R не содержит особых

точек, то $\Omega(\gamma')$ в свою очередь является циклом Γ' (теорема 2.7.9). Этот цикл каждую нормаль к циклу Γ может пересечь только один раз, так что в случае $\Gamma \neq \Gamma'$ возникает кольцевая область $R' \subset R$ с границей $\Gamma' \cup \Gamma$. В R', в силу свойства единственности, не могут находиться точки характеристики γ, и, таким образом, равенство $\Omega(\gamma) = \Gamma$ исключено. Однако это противоречит предположению, и поэтому $\Gamma' = \Gamma$. Следовательно, $\Gamma = \Omega(\gamma') = A(\gamma')$, что на основании предыдущих рассуждений невозможно. Тем самым теорема 2.8.1 доказана.

Вместе с тем получаем следующее утверждение.

Теорема 2.8.2. *Если цикл* Γ *представляет собой множество* $\Omega(\gamma)$ *некоторой характеристики* γ, *внутренней* (*внешней*) *для* Γ, *то для* Γ *существует окрестность такая, что все характеристики, расположенные внутри* (*вне*) *цикла* Γ, *имеют цикл* Γ *своим* ω-*предельным множеством.*

Теорема 2.8.3. *Если* γ — *незамкнутая характеристика, которая* ω-*асимптотически приближается к некоторому циклу* Γ (*т. е.* $\Omega(\gamma) = \Gamma$), *то для каждой точки* $P \in \gamma$ *существует круг* $C(P, \rho)$ *такой, что характеристики, рождающиеся в его точках, являются незамкнутыми и* ω-*асимптотическими по отношению к* Γ.

Для доказательства положим $d(P, \Gamma) = d > 0$. Тогда по теореме 2.7.7 существует число $\delta > 0$ такое, что для любой точки M с расстоянием $d(M, \Gamma) \leqslant \delta$ для всех точек $Q \in \gamma_M^+$ (или $Q \in \gamma_M^-$) выполняется неравенство $d(Q, \Gamma) \leqslant \varepsilon = d/3$. С другой стороны, на основании предположения полутраектория γ_P^+ обладает хотя бы одной точкой P_1, принадлежащей $\delta/2$-окрестности цикла Γ. В силу непрерывной зависимости от начальных условий можно построить круг $C(P, \rho)$, $\rho \leqslant d/3$, такой, что выходящие из него наружу положительные полухарактеристики имеют точки M, отстоящие от P_1 максимально на $\delta/2$. Поэтому они принадлежат δ-окрестности цикла Γ, и, следовательно, либо γ_M^+, либо γ_M^- должна оставаться в $d/3$-окрестности цикла Γ. Соответствующая полухарактеристика γ_M или γ_M^- не может быть удалена от P больше чем на $d/3$ и, таким образом, удалена от Γ в любой точке не больше чем на $2d/3 < d$. Теорема доказана.

Два цикла, лежащие один внутри другого, называют *соседними*, если кольцевая область, заключенная между ними, не содержит замкнутых характеристик (т. е. не содержит особых точек или циклов).

Теорема 2.8.4. *Два соседних цикла являются предельными циклами для всех характеристик в ограниченной ими кольцевой области, причем один из них представляет собой* ω-*предельное множество, а другой* — α-*предельное множество этих характеристик.*

Действительно, пусть γ — одна из характеристик, принадлежащая кольцевой области R, заключенной между циклами Γ

и Γ'. Так как характеристика γ ограничена, то ее предельные множества $\Omega(\gamma)$ и $A(\gamma)$ непусты и в силу теоремы 2.7.1 замкнуты и связны. Поскольку область R не содержит особых точек, то множество $\Omega(\gamma)$ на основании теоремы 2.7.9 является предельным циклом и должно поэтому совпадать с Γ или Γ', пусть, например, с Γ. Аналогично, $A(\gamma)$ — тоже предельный цикл, совпадающий на основании теоремы 2.8.1 с Γ'. Для всякой другой характеристики $\gamma' \subset R$ по этой теореме имеем

$$\Omega(\gamma') = \Gamma, \quad A(\gamma') = \Gamma'.$$

Предельный цикл может быть ω (или α-)-предельным множеством только для внутренних (внешних) характеристик, но может являться также ω(или α-)-предельным множеством как для внутренних, так и для внешних характеристик. В первом случае он называется *односторонним*, во втором — *двусторонним*. Когда это уточнение излишне, говорят кратко: предельный цикл.

Цикл, очевидно, тогда и только тогда является одно(дву)-сторонним, когда он обладает одной (возможно, только внутренней или только внешней) окрестностью, которая не содержит точек других циклов (см. теорему 2.7.7). Если среди характеристик системы (2.8.1) имеется лишь конечное число циклов, то каждый из них — одно(дву)-сторонний предельный цикл. Некоторая более далеко идущая классификация предельных циклов проводится с помощью следующего определения (ср. с теоремами 2.8.1 и 2.8.2).

Определение. Предельный цикл называется *притягивающим* (*отталкивающим*), если он представляет собой множество $\Omega(\gamma)$ ($A(\gamma)$) как для внутренних, так и для внешних характеристик. В противном случае цикл называется *нейтральным*.

Свойство притягивающего предельного цикла быть предельным множеством для всех соседних траекторий при $t \to \infty$ в нелинейной механике называют *орбитальной* (*асимптотической*) *устойчивостью*. Отталкивающий предельный цикл можно соответственно называть *орбитально* (*асимптотически*) *неустойчивым* или *орбитально устойчивым* при $t \to -\infty$. Остальные двусторонние предельные циклы называются *орбитально полуустойчивыми*. Очевидно, два соседних цикла, имеющих одно и то же направление, не могут быть одновременно орбитально устойчивыми (или неустойчивыми).

Большое значение для изучения фазовой картины семейства характеристик имеет следующая теорема Бендиксона, выясняющая одно глобальное свойство циклов.

Теорема 2.8.5. *Область внутри цикла содержит по крайней мере одну особую точку.*

Приведем доказательство, принадлежащее Бендиксону.

Рассмотрим некоторый цикл Γ с внутренней областью G и положим, что G не содержит особых точек. Для любой точки

$P \in G$ характеристика $\gamma = \gamma_P(t)$ регулярна; если эта характеристика не является циклом, то она асимптотически приближается к двум множествам $A(\gamma)$, $\Omega(\gamma)$, образующим различные циклы. Во всяком случае область G содержит хотя бы еще один цикл.

Для точек P замкнутой области $\bar{G} = \Gamma \cup G$ определим функцию $V(P) > 0$, значениями которой будем считать площадь области, заключенной внутри γ_P, если γ_P есть цикл, и площадь V_0 области G, если γ_P — незамкнутая характеристика. Пусть нижняя грань функции $V(P)$ на $\bar{G}$ есть V_*, причем, очевидно, $V_* < V_0$. Пусть, далее, $P_* \in G$ есть точка такая, что $\inf V(P) = V_*$ на $C(P_*, \rho) \cap G$ при произвольно малом радиусе $\rho > 0$.

Если теперь $\gamma_* = \gamma_{P_*}(t)$ есть незамкнутая характеристика, то на основании теоремы 2.7.9 она ω-асимптотически приближается к циклу. Тогда по теореме 2.8.3 существует круг $C(P_*, \rho) \subset G$, из точек которого выходят лишь незамкнутые характеристики, и поэтому $V(P)$ на этом круге имеет постоянное значение V_0. Отсюда следует, что $V_* = V_0$, но это неверно.

Таким образом, характеристика γ_* есть цикл и, значит, она содержит внутри себя цикл Γ', причем $d(\gamma_*, \Gamma') = d > 0$. Тогда площадь V' внутри Γ' меньше, чем площадь $V(P_*)$ внутри γ_*. По теореме 2.7.7 числу $\varepsilon = d/2$ можно поставить в соответствие число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $d(P_*, P) \leqslant \delta$ замкнутая характеристика, выходящая из точки P, целиком принадлежит ε-окрестности характеристики γ_* и при этом охватывает цикл Γ'. Следовательно, из точек круга $C(P_*, \delta)$ исходят либо незамкнутые характеристики, для которых $V(P) = V_0 > V_*$, либо циклы, для которых $V(P) > V' > V_*$. Это противоречит выбору точки P_*.

Отсюда заключаем, что область G, вопреки предположению, содержит по меньшей мере одну особую точку.

Теперь рассмотрим некоторые критерии существования, а также отсутствия замкнутых характеристик, которым соответствуют так называемые стационарные решения и, в частности, циклы.

Пусть система (2.8.1) допускает решение $[x(t), y(t)]$, ограниченное при $t \geqslant 0$ ($t \leqslant 0$), т. е. в будущем (в прошлом), так называемое положительно (отрицательно) ограниченное решение. Тогда ω-предельное (α-предельное) множество этой характеристики тоже ограничено и поэтому или представляет собой цикл, или содержит особые точки (теорема 2.7.9). В обоих случаях система обладает стационарными (т. е. постоянными или периодическими) решениями. Обратно, если существует стационарное решение, то, естественно, вместе с ним существует положительно или отрицательно ограниченное решение.

Отсюда вытекает следующая теорема.

Теорема 2.8.6. *Для существования замкнутых характеристик (стационарных решений) необходимо и достаточно*

существование хотя бы одного положительно или отрицательно ограниченного решения.

Непосредственным следствием теоремы 2.8.5 является

Теорема 2.8.7. *Односвязная область D плоскости xy не содержит циклов, если в этой области нет особых точек.*

С другой стороны, если ограниченная, без особых точек область D плоскости xy содержит полухарактеристику, то в области D лежит по меньшей мере одна замкнутая траектория, которая, очевидно, является предельным циклом. Ясно, что область такого рода необходимо есть кольцевая, расположенная вокруг некоторого непустого множества особых точек. Отсюда следует известный критерий Пуанкаре — Бендиксона:

Теорема 2.8.8. *Пусть D — кольцевая область, ограниченная двумя вложенными друг в друга замкнутыми простыми кривыми C' и C'', причем множество $D \cup C' \cup C''$ не содержит ни одной особой точки. Тогда, если все полухарактеристики, выходящие как из C', так и из C'', входят в область D (или выходят из нее), то D содержит по меньшей мере один предельный цикл.*

Если вокруг особой точки фазовой картины можно построить $n+1$ вложенных друг в друга замкнутых кривых $C^{(i)}$ $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$ таких, что они попарно ограничивают кольцевые области Бендиксона, то существуют по меньшей мере n предельных циклов.

Войлоков [1] для фазовой картины системы

$$x' = y, \quad y' = -x + F(y) \qquad (F(0) = 0)$$

с помощью дуг окружностей построил такую последовательность замкнутых кривых $\{C^i\}$, ограничивающих кольцевые области Бендиксона, которая не может быть дополнена за счет других замкнутых кривых, и доказал существование точно n предельных циклов, являющихся поочередно устойчивыми и неустойчивыми. При этом на функцию $F(y)$ были наложены определенные условия принадлежности к известному классу функций.

Если правые части X, Y дифференциальных уравнений

$$x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y) \qquad (2.8.1)$$

обладают непрерывными частными производными первого порядка, то имеет место критерий Бендиксона:

Теорема 2.8.9. *Если в некоторой односвязной области D выражение*

$$X_x(x, y) + Y_y(x, y) \qquad (2.8.3)$$

нигде не меняет знак и не равняется тождественно нулю, то в области D нет предельных циклов.

Действительно, если в D существует цикл Γ с внутренней областью G, то на основании теоремы Стокса имеем

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{r} = \iint_{G} (\operatorname{rot} \boldsymbol{A})_n \cdot dG. \qquad (2.8.4)$$

Полагая

$$\boldsymbol{A}=(-Y,\ X),\quad d\boldsymbol{r}=(dx,\ dy)=(X\,dt,\ Y\,dt),$$

получим равенство

$$0=\int\int_G\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dx\,dy, \tag{2.8.5}$$

которое невозможно.

В частности, для уравнения

$$x''+f(x)\,x'+g(x)=0, \tag{2.8.6}$$

эквивалентного системе

$$x'=y,\quad y'=-f(x)\,y-g(x), \tag{2.8.7}$$

имеем

$$X_x+Y_y=-f(x). \tag{2.8.8}$$

Поэтому в полосе $a\leqslant x\leqslant b$, где функция $f(x)$ не равна тождественно нулю и не меняет знака, не может содержаться цикл.

Другим способом для получения критерия отсутствия цикла является *метод контактных кривых Пуанкаре* [1] (см. также Немыцкий, Степанов [1]).

Рассмотрим семейство гладких замкнутых кривых $V(x,y)=C$, просто покрывающее *) плоскость xy. Такое семейство называется *топографической системой.* Контактная кривая есть геометрическое место точек соприкосновений кривых топографической системы и интегральных кривых систем (2.8.1). Отсюда уравнение контактной кривой есть

$$\frac{\partial V}{\partial x}X+\frac{\partial V}{\partial y}Y=0. \tag{2.8.9}$$

Например, если топографическая система есть семейство концентрических окружностей $x^2+y^2=r^2$, то уравнение контактной кривой имеет вид $Xx+Yy=0$.

Каждый цикл, очевидно, имеет минимум две точки, общие с контактной кривой, так что справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.8.10. *Если выражение V_xX+V_yY в некоторой области D сохраняет постоянный знак, то в этой области нет циклов.*

Наконец, для некоторых дифференциальных уравнений для обнаружения их циклов можно применять *принцип симметрии.* Для этого достаточно, чтобы функция $Y(x,y)/X(x,y)$ была нечетной относительно x или y, т. е.

$$Y(-x,\ y)/X(-x,\ y)=-Y(x,\ y)/X(x,\ y),$$

или

$$Y(x,\ -y)/X(x,\ -y)=-Y(x,\ y)/X(x,\ y), \tag{2.8.10}$$

так что семейство интегральных кривых симметрично относительно оси y, соответственно относительно оси x.

*) Это значит, что через каждую точку плоскости xy проходит одна и только одна кривая семейства $V=C$. (*Прим. ред.*)

В первом случае находят дугу интегральной кривой, соединяющую две различные точки оси y, во втором случае — дугу, начинающуюся и оканчивающуюся на оси x. Тогда с помощью зеркального отображения относительно соответствующей оси получают цикл. Доказательство существования цикла сводится, таким образом, к доказательству существования дуги интегральной кривой описанного вида.

Заканчивая изучение автономной системы второго порядка, мы подробно рассмотрим изолированные особые точки и дадим классификацию их в зависимости от поведения интегральных кривых в окрестностях этих точек.

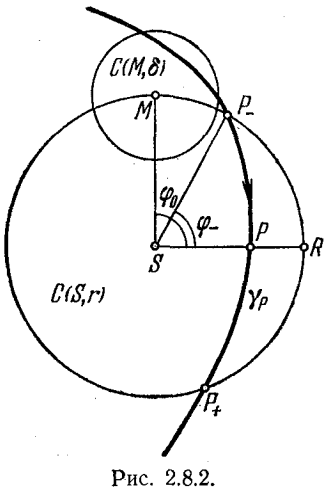

Рис. 2.8.2.

Прежде всего докажем следующее.

Теорема 2.8.11. *Если S — изолированная особая точка системы* (2.8.1), *то для любого числа $r>0$ внутри круга $C(S,r)$ содержится по меньшей мере одна полухарактеристика γ^+ или γ^-, отличная от S.*

В самом деле, предположим противное, т. е. что существует круг $C=C(S,r)$ такой, что все характеристики, выходящие из точек $P\in C(S,r)$ и отличные от S, только в течение конечного времени остаются в $C(S,r)$. Рассмотрим какой-нибудь радиус SR круга C и выберем на нем некоторую точку P. Пусть P_- и P_+ — первые точки пересечения γ_P^- и γ_P^+ с окружностью круга C (рис. 2.8.2). Если теперь точка P будет непрерывно двигаться по радиусу по направлению к S, то точки P_- и P_+ (на основании теоремы единственности) образуют два упорядоченных множества, которые двигаются по окружности навстречу друг другу. Пусть φ_- — угол между SP_- и SR, который при $P\to S$ все время увеличивается, и пусть φ_0 — его верхняя грань. Обозначим через M точку окружности круга, для которой центральный угол $MSR=\varphi_0$. Очевидно, M является предельной точкой множества $\{P_-\}$. Так как $M\in C$, то полухарактеристика γ_M^+ остается в C только в течение конечного промежутка времени T. На основании теоремы о непрерывной зависимости характеристик от их начальных точек каждому $\varepsilon>0$ можно поставить в соответствие число $\delta>0$ такое, что все полухарактеристики γ_Q^+, где $Q\in C(M,\delta)$, будут оставаться в C только в течение отрезка времени между $T-\varepsilon$ и $T+\varepsilon$. С другой стороны, так как S — особая точка (т. е. точка, соответствующая постоянному решению), то можно выбрать произвольно $T'>T+\varepsilon$ и потом найти число $\eta\geq 0$ так, что кривые γ_P^+, $P\in C(S,\eta)$, в течение по край-

ней мере промежутка времени T' будут оставаться в C. Таким образом, в любой близости от M должна существовать точка P_-, для которой дуга $\overset{\frown}{P_-PP_+}$ характеристики γ_P имеет временную длину $T' > T + \varepsilon$. Однако это противоречит предыдущему заключению. Рассуждения для γ_P^- аналогичны.

Изолированные особые точки, по Л. Брауэру, разделяют на две категории. Та точка, которая не является предельной для других характеристик (кроме самой себя), относится к *первому роду*. Особая точка, являющаяся ω- или α-предельной хотя бы для одной такой характеристики, причисляется ко *второму роду*.

Мы исследуем структуру фазовой плоскости в окрестности особой точки S первого рода.

Пусть $C(S, r_0)$ есть круг, содержащий только эту особую точку. Тогда на основании теоремы 2.8.11 в каждом круге $C(S, r)$, $0 < r < r_0$, существует хотя бы одна полухарактеристика γ^+ (γ^-), отличная от S. Множество $\Omega(\gamma)$ ($A(\gamma)$) полностью принадлежит $C(S, r)$ и должно на основании теоремы 2.7.9 быть циклом. Таким образом, в $C(S, r)$ при сколь угодно малом r находится по меньшей мере один цикл. Но тогда кругу $C(S, r_0)$ принадлежит бесконечно много циклов и особая точка есть предельная точка множества, образуемого точками всех этих циклов. Каждый из циклов охватывает особую точку, так что циклы включены друг в друга.

Пусть теперь Γ — один такой цикл. Точки внутри цикла, отличные от S, разделим на две категории в зависимости от того, принадлежат ли они некоторому циклу или некоторой незамкнутой характеристике, асимптотически приближающейся к двум циклам. Если в любой окрестности точки S существуют обе эти категории, то точку S иногда называют *центро-фокусом*. Если же все точки некоторого круга $C(S, r)$ принадлежат к первой категории, то S называется *центром*.

Относительно особых точек второго рода справедлива

Теорема 2.8.12. *Пусть S — изолированная особая точка второго рода. Тогда существует круг $C(S, r)$ такой, что каждая точка его принадлежит характеристике, которая*

либо a) *при $t \to \infty$, или при $t \to -\infty$, или при $t \to \pm\infty$ стремится к S;*

либо b) *только в течение некоторого конечного интервала времени остается в $C(S, r)$.*

Доказательство. Если точка S окружена циклами со сколь угодно малыми диаметрами, то никакая характеристика не может стремиться к S. Действительно, если d — расстояние какой-нибудь точки P от особой точки S, то существует хотя бы один цикл с диаметром меньше d. Тогда характеристика $\gamma_P(t)$, выходящая из точки P вне цикла и неограниченно приближающаяся к точке S внутри цикла, очевидно, должна пересечь этот цикл. Но это невозможно в силу свойства единственности решений.

Итак, если имеются характеристики, стремящиеся к S, то существует круг $C(S, r_0)$, который не содержит циклов. Тогда характеристика $\gamma_P(t)$, где $P \in C(S, r_0)$, или остается внутри $C(S, r_0)$ только в течение конечного интервала времени, или γ_P^+ (γ_P^-) лежит целиком в круге $C(S, r_0)$. В последнем случае предельное множество $\Omega(\gamma_P)$ ($A(\gamma_P)$) принадлежит этому кругу и, так как оно не может быть циклом, по теореме 2.7.9. содержит особую точку. Если $\Omega(\gamma_P) = S$ или $A(\gamma_P) = S$ для вышеупомянутых точек, то доказательство завершено. В противном случае для некоторой точки P множества $\Omega(\gamma_P)$ и $A(\gamma_P)$ содержат по меньшей мере одну незамкнутую характеристику Г, целиком остающуюся в $C(S, r_0)$. В силу теорем 2.7.3 и 2.7.8 $\Omega(\Gamma) = A(\Gamma) = S$. Поэтому характеристика Г вместе с точкой S образует замкнутую кривую (рис. 2.8.3), диаметр которой обозначим через d. Пусть дугу окружности круга $C(S, d/2)$ эта замкнутая кривая пересекает в первый раз в точке R_1 и в последний раз в точке R_2.

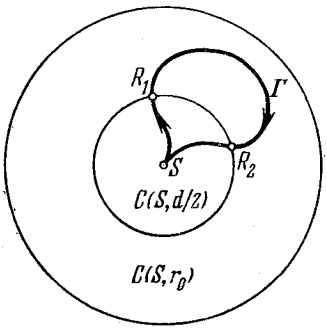

Рис. 2.8.3.

Если какая-нибудь полухарактеристика γ_P^+ (γ_P^-), где $P \in C(S, d/2)$, не выходит из круга $C(S, d/2)$, то, очевидно, она должна стремиться к S. Если множество $\Omega(\gamma_P)$ ($A(\gamma_P)$) $\subset C(S, d/2)$ не вырождается в особую точку S, то по теореме 2.7.9 в круге $C(S, d/2)$ находится по меньшей мере одна незамкнутая характеристика Г′. Отсюда в силу теоремы 2.7.8 имеем $\Omega(\Gamma') = A(\Gamma') = S$ и γ_P^+ (γ_P^-) должна спиралевидно навиваться на кривую Г′. Характеристика Г′ находится внутри кривой $\Gamma \cup S$, так как в противном случае ее полухарактеристики γ'^+ (γ'^-) должны были бы по меньшей мере пересечь одну из дуг $\widehat{SR}_1$ или $\widehat{SR}_2$ кривой Г, что невозможно в силу теоремы единственности. Тогда для γ_P^- (γ_P^+) существует выбор: либо она входит в точку S (т. е. $A(\gamma_P) = S$, соответственно $\Omega(\gamma_P) = S$), либо извне навивается на некоторую характеристику Г″, входящую обоими концами в S и охватываемую характеристикой Г′. Первая возможность противоречит предположению, вторая нарушает единственность. Этим заканчивается доказательство.

На основании теоремы 2.8.12 характеристики, выходящие из точек круга $C(S, r)$, где $r > 0$ достаточно мало и S — изолированная особая точка второго рода, можно классифицировать следующим образом.

Дуга характеристики называется *гиперболической*, если она остается в круге $C(S, r)$ лишь конечное время, *параболической*, если только одна из ее ветвей стремится к S, *эллиптической*,

если обе ветви ее входят в S. Если γ — эллиптическая характеристика, то она вместе с S образует замкнутую кривую, в которой, очевидно, находятся только вложенные друг в друга эллиптические характеристики.

Изолированную особую точку S второго рода называют *притягивающим* (или *устойчивым*) *фокусом*, если существует круг $C(S, r)$, через точки которого проходят только характеристики $\gamma_P(t)$, стремящиеся к S при $t \to \infty$ в следующем смысле: если $\rho(t)$ — расстояние характеристики от S в данный момент и $\varphi(t)$ — угол ее радиуса-вектора с осью x ($\rho(0) = \overline{SP}$, $\varphi(0) = \varphi_P$), то справедливы равенства $\rho(\infty) = 0$ и $\varphi(\infty) = \infty$ или $-\infty$.

Если эти неравенства справедливы для $t \to -\infty$, то фокус называется *отталкивающим* (или *неустойчивым*).

Система

$$x' = X(x, y), \quad y' = Y(x, y) \tag{2.8.1}$$

определяет на плоскости xy векторное поле $\mathfrak{B} = (X, Y)$.

Рассмотрим некоторую простую замкнутую кривую Жордана K, не проходящую через особые точки системы. Кривую K будем считать ориентированной, т. е. установим на ней определенное направление обхода, соответствующее положительному вращению плоскости, и одну из ее точек A выберем за начальную. Угол между вектором $\mathfrak{B}(A)$ и некоторым фиксированным направлением (например, направлением оси x) обозначим через φ_A, а угол между вектором $\mathfrak{B}(P)$ текущей точки P кривой и выбранным фиксированным направлением — через φ. Если точка P, начиная от положения A, в положительном направлении обходит кривую K и возвращается в A, то угол φ непрерывно изменяется от значения φ_A до значения $\varphi_A + 2\pi j_K$, где $j_K \gtrless 0$ есть некоторое целое число. Это число j_K, зависящее только от кривой K и векторного поля $\mathfrak{B}$, называют *индексом Кронекера* кривой K относительно данной системы дифференциальных уравнений. Индекс j_K обладает следующим свойством инвариантности.

Теорема 2.8.13. *Если кривую K непрерывно деформировать так, чтобы она при этом не проходила через особые точки, то ее индекс j_K не изменится.*

В самом деле, при непрерывной деформации кривой ее индекс j_K меняется непрерывно, оставаясь в то же время целым числом. Отсюда следует неизменность индекса.

Другое свойство индекса устанавливает

Теорема 2.8.14. *Если на кривой K заданы два различных вектора $\mathfrak{B}(P)$ и $\mathfrak{B}'(P)$, которые ни в какой точке не являются нуль-векторами и не противоположны друг другу, то индексы кривой K относительно векторных полей $\mathfrak{B}(P)$ и $\mathfrak{B}'(P)$ совпадают между собой.*

Доказательство. Определим векторное поле

$$\mathfrak{B}''(P) = (1 - \lambda)\mathfrak{B}(P) + \lambda\mathfrak{B}'(P), \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Оно непрерывно на K и не равно нулю. Индекс кривой K относительно $\mathfrak{B}''(P)$ есть непрерывная функция λ, постоянная для всех значений λ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. В частности, при $\lambda = 0$ он совпадает с индексом кривой K относительно $\mathfrak{B}(P)$, а при $\lambda = 1$ — с ее индексом относительно $\mathfrak{B}'(P)$; следовательно, эти индексы равны между собой.

Чтобы сформулировать третье свойство индекса замкнутой кривой K, введем вариацию угла φ вдоль некоторой дуги $\overset{\frown}{AB}$: φ_{AB}. Если $B = A$ и дуга замкнута, то ее индекс в зависимости от ориентации дуги будет $\pm \varphi_{AB}/2\pi$. Для $C \in \overset{\frown}{AB}$ справедливо равенство $\varphi_{AB} = \varphi_{AC} + \varphi_{CB}$. Кроме того, $\varphi_{AB} + \varphi_{BA} = 0$.

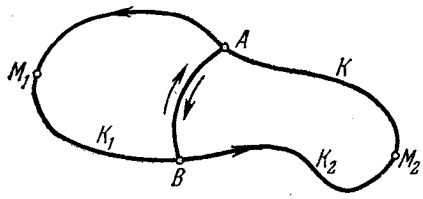

Рис. 2.8.4.

Теорема 2.8.15. *Пусть* (рис. 2.8.4) *дана замкнутая кривая K, не имеющая двойных точек, и две другие кривые того же вида $K_1 = (AM_1BA)$ и $K_2 = (BM_2AB)$, получающиеся из кривой K путем соединения двух ее точек A, B простой дугой AB, лежащей в области, ограниченной кривой K. Тогда $j_{K_1} + j_{K_2} = j_K$.*

Доказательство. Имеем

$$2\pi j_{K_1} = \varphi_{AM_1B} + \varphi_{BA}, \quad 2\pi j_{K_2} = \varphi_{BM_2A} + \varphi_{AB}$$

и

$$2\pi (j_{K_1} + j_{K_2}) = \varphi_{AM_1B} + \varphi_{BM_2A} = 2\pi j_K.$$

Теорема 2.8.16. *Если внутренняя область кривой K не содержит особых точек, то $j_K = 0$.*

Доказательство. Пусть P_0 — какая-нибудь точка внутри K, и пусть $C(P_0, r)$ — круг регулярности точки P_0, лежащий внутри этой кривой. Тогда можно кривую K непрерывной деформацией перевести в окружность C без прохождения через особые точки. Поэтому справедливо равенство $j_K = j_C$ (теорема 2.8.13). В каждой точке $P \in C(P_0, r)$ мы заменим векторное поле $\mathfrak{B}(P)$ постоянным полем $\mathfrak{B}'(P) = \mathfrak{B}(P_0)$, которое при достаточно малом радиусе круга с первоначальным полем образует угол, не превышающий $\pi/4$. Поэтому индекс для окружности C относительно $\mathfrak{B}(P)$ равен индексу ее относительно $\mathfrak{B}'(P)$ (теорема 2.8.14), а последний, очевидно, равен нулю.

Теорема 2.8.17. *Если K — замкнутая кусочно-гладкая кривая без двойных точек, то индекс ее положительно направленного касательного вектора равен* $+1$. (При этом обход, начинающийся в угловой точке кривой, следует считать законченным только после достижения касательной ее первоначального положения.)

Доказательство. Пусть $\mathfrak{V}(P)$ — касательный единичный вектор в точке $P \in K$. Без ограничения общности можно полагать, что кривая K лежит в верхней полуплоскости ($y \geqslant 0$) и точка A касания ее с осью x не является угловой (рис. 2.8.5), кроме того, можно считать длину кривой K равной единице. Если кривая K задана параметрически, $P(s) = [x(s), y(s)]$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, где $A = [x(0), y(0)]$, то справедливо равенство $\mathfrak{V}(P) = [x'(s), y'(s)]$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

В треугольнике $0 \leqslant s \leqslant 1$, $s \leqslant t \leqslant 1$ (T) плоскости st построим вспомогательный вектор $\mathfrak{u}(s, t)$, где $\mathfrak{u}(s, s) = \mathfrak{V}(s)$, $\mathfrak{u}(0, 1) = -\mathfrak{V}(0)$, причем для всех других точек $(s, t) \in T$ $\mathfrak{u}(s, t)$ — единичный вектор, параллельный $\overrightarrow{P(s)P(t)}$.

Пусть $\theta(s, t)$ — угол между осью s и вектором $\mathfrak{u}(s, t)$. Тогда $\theta(0, 0) = 0$, и когда t возрастает от 0 до 1, то $\theta(0, t)$ изменяется от 0 до π. Обратно, когда s изменяется от 0 до 1, то $\theta(s, t)$ изменяется от π до 2π. Из определения $\mathfrak{u}$ вытекает, что вектор $\mathfrak{u}$ непрерывен в T (на диагонали $s = t$, возможно, кусочно-непрерывен) и что $|\mathfrak{u}| = 1$. Применяя теорему 2.8.16 к границе R треугольника T, получим $j_R(\mathfrak{u}) = 0$. Отсюда следует, что вариация $\theta(s, s)$ равна 2π, когда s возрастает от 0 до 1. Так как эта вариация совпадает с вариацией угла между осью x и вектором $\mathfrak{V}$ вдоль кривой K, то $j_K(\mathfrak{V}) = 1$.

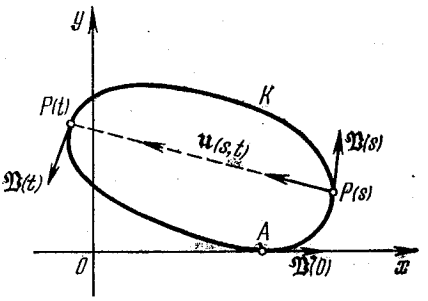

Рис. 2.8.5.

Непосредственным следствием является

Теорема 2.8.18. *Индекс цикла относительно векторного поля, определяемого дифференциальными уравнениями* (2.8.1) *и окружающего одну особую точку, равен* $+1$.

Сравнивая этот результат с теоремой 2.8.16, еще раз убеждаемся в справедливости теоремы 2.8.5, согласно которой внутри цикла должна быть хотя бы одна особая точка.

Теорема 2.8.19. *Если в каждой точке простой кусочно-замкнутой кривой K существует непрерывный вектор $\mathfrak{V}(P)$, везде направленный внутрь (наружу) кривой, то кривая K относительно векторного поля $\mathfrak{V}$ имеет индекс* $j_K = +1$.

Доказательство. Достаточно заметить, что индекс кривой K относительно внутренней (внешней) нормали равен ее индексу относительно касательной (теорема 2.8.14) и потому равен $+1$ (теорема 2.8.17) и, кроме того, индекс кривой K относительно нормали равен ее индексу относительно поля $\mathfrak{V}$ (теорема 2.8.14).

Если, например, кривая K гладкая и правые части дифференциальных уравнений (2.8.1) непрерывно дифференцируемы,

то индекс кривой K относительно векторного поля (X, Y) можно вычислить с помощью криволинейного интеграла:

$$j_K = \frac{1}{2\pi} \oint_K d \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = \frac{1}{2\pi} \oint_K \frac{X\,dY - Y\,dX}{X^2 + Y^2}. \qquad (2.8.11)$$

Таким образом, для данных дифференциальных уравнений (2.8.1) любой регулярной (т. е. не особой) точке и каждой изолированной особой точке можно поставить в соответствие определенное число — индекс точки.

А именно, пусть P — какая-нибудь точка плоскости xy. Построим простую замкнутую кривую K, окружающую точку P и не имеющую внутри себя особых точек (кроме, быть может, точки P). При этом кривая K не должна проходить ни через одну особую точку. Под *индексом точки* P будем понимать индекс кривой K. Согласно теореме 2.8.13 индекс точки не зависит в известных пределах от формы кривой.

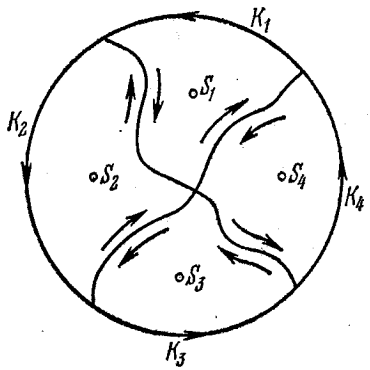

Рис. 2.8.6.

Из теоремы 2.8.16 немедленно следует

Теорема 2.8.20. *Индекс регулярной точки есть нуль.*

Из теоремы 2.8.15 следует

Теорема 2.8.21. *Если простая замкнутая кривая K окружает конечное число особых точек, то индекс кривой равен алгебраической сумме индексов этих особых точек.*

Для доказательства достаточно внутреннюю область кривой K с помощью подходящих дуг кривой разбить на такие области, чтобы каждая из них содержала единственную особую точку S_i (рис. 2.8.6).

Отсюда получаем уточнение теоремы Бендиксона 2.8.5. Если обозначить через K_i границы этих областей, то на основании теоремы 2.8.15 имеем $j_K = \sum_i j_{K_i}$, где j_{K_i} — индекс точки P_i.

Теорема 2.8.22. *Если все особые точки во внутренности некоторого цикла изолированы и число их конечно, то алгебраическая сумма их индексов равна $+1$.*

Отсюда следует, что число особых точек внутри цикла нечетно и, следовательно, множество их непусто.

Приведем еще одну важную теорему.

Теорема 2.8.23. *Если начало координат O является изолированной особой точкой системы* (2.8.1) *и системы*

$$x' = X'(x, y), \quad y' = Y'(x, y) \qquad (2.8.1')$$

и если

$$\lim_{r\to 0}\frac{|\mathfrak{W}'-\mathfrak{W}|}{|\mathfrak{W}|}=0, \quad \mathfrak{W}'=(X', Y'), \quad \mathfrak{W}=(X, Y), \quad r=\sqrt{x^2+y^2}, \tag{2.8.12}$$

то индексы начала координат в обеих системах равны.

Для доказательства теоремы построим достаточно малый круг $C(0, r)$, в котором выполнено неравенство $|\mathfrak{W}'-\mathfrak{W}| \leqslant \varepsilon|\mathfrak{W}|$, где $0<\varepsilon<1$ сколь угодно мало, так что направления $\mathfrak{W}$ и $\mathfrak{W}'$ нигде не являются противоположными. Следовательно, окружность круга будет иметь равные индексы относительно обеих систем дифференциальных уравнений (теорема 2.8.14).

В заключение вычислим индекс j_0 для единственной особой точки O линейной системы

$$x'=\alpha x+\beta y, \quad y'=\gamma x+\delta y \quad (D=\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0). \tag{2.8.13}$$

Кривая $(\alpha x+\beta y)^2+(\gamma x+\delta y)^2=1$ представляет собой эллипс с центром в точке O. Мы возьмем этот эллипс в качестве кривой K и определим ее индекс, который равен искомому индексу j_0 особой точки O. На основании формулы Пуанкаре имеем

$$j_0=\frac{1}{2\pi}\oint_K\{(\alpha x+\beta y)(\gamma\,dx+\delta\,dy)-(\gamma x+\delta y)(\alpha\,dx+\beta\,dy)\}.$$

Сделаем замену переменных $\xi=\alpha x+\beta y$, $\eta=\gamma x+\delta y$. На плоскости $\xi\eta$ эллипсу соответствует единичная окружность C. Она ориентирована положительно или отрицательно в зависимости от положительности или отрицательности детерминанта преобразования $\partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)=D$.

Таким образом,

$$j_0=\frac{\operatorname{sgn} D}{2\pi}\oint_C\{\xi\,d\eta-\eta\,d\xi\}=\operatorname{sgn} D,$$

т. е.

$$j_0=+1, \text{ если } D>0, \text{ и } j_0=-1, \text{ если } D<0.$$

Теорема 2.8.24. *Индекс j_0 точки O относительно дифференциальных уравнений* (2.8.13) *равен* -1, *если O есть седло, и* $+1$, *если O — узел, фокус или центр.*

Из теорем 2.8.23 и 2.8.24 вытекает такое заключение.

Теорема 2.8.25. *Пусть дана система*

$$x'=\alpha x+\beta y+\bar{X}(x, y), \quad y'=\gamma x+\delta y+\bar{Y}(x, y) \quad (D\neq 0), \tag{2.8.14}$$

и пусть $\lim\limits_{r\to 0}(\bar{X}(x, y)/r)=\lim\limits_{r\to 0}(\bar{Y}(x, y)/r)=0$. *Тогда* $j_0=\operatorname{sgn} D$. *где j_0 — индекс особой точки O относительно системы* (2.8.14).

2.9. Теория преобразований и теоремы о неподвижной точке

Перейдем теперь к неавтономным динамическим системам порядка n, описывающим вынужденные колебания физических систем под действием внешней периодической силы периода θ. Изучение асимптотического поведения такой системы сводится, главным образом, к определению характера вынужденных колебаний и их устойчивости. Для этой цели на основе топологических понятий и методов построена так называемая теория преобразований. Мы кратко изложим эту теорию и ее главнейшие результаты, а также приведем некоторые теоремы о неподвижной точке, необходимые для доказательства существования гармонических колебаний. Применение же теории преобразований к вопросам устойчивости в смысле Ляпунова будет рассмотрено в п. 2.10.

Если, как обычно, n фазовых координат $x_1, x_2, \ldots, x_n$ данной динамической системы рассматривать как вектор $\boldsymbol{x}$ фазового пространства, то, таким образом, система может быть записана в виде дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.9.1}$$

При этом мы предположим, что вектор-функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ непрерывна или хотя бы кусочно-непрерывна в некоторой области и обеспечивает для $t \geqslant t_0$ существование и единственность решения $\boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$, определяемого начальными данными $(\boldsymbol{x}_0, t_0)$, а также непрерывную зависимость его от этих начальных данных.

Правую часть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ системы (2.9.1), которую физически можно трактовать как внешнюю силу, будем полагать периодической по t с периодом θ, т. е.

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t + \theta) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t). \tag{2.9.2}$$

Процессы, описываемые системой (так называемые движения), т. е. решения дифференциального уравнения (2.9.1), рассматриваются либо как интегральные кривые в $(n+1)$-мерном пространстве $R_{n+1}(\boldsymbol{x}, t)$, либо как фазовые траектории в n-мерном фазовом пространстве $R_n(\boldsymbol{x})$, содержащем множество всех состояний системы.

Многообразие траекторий в пространстве движений R_{n+1} в силу θ-периодичности внесенного возбуждения инвариантно относительно сдвигов параллельно оси t на величину, кратную периоду θ, т. е.

$$\boldsymbol{x}(t + i\theta, \boldsymbol{x}_0, t_0) \equiv \boldsymbol{x}(t, \boldsymbol{x}(t_0 + i\theta, \boldsymbol{x}_0, t_0), t_0) \tag{2.9.3}$$

для целочисленного i.

Отсюда, если два состояния процесса совпадают для моментов времени, отличающихся на $i\theta$, то рассматриваемое явление периодично.

Пусть t_0 — фиксированный начальный момент времени. Определим точечное преобразование T фазового пространства R_n:

$$P_1(x_1) = T\{P_0(x_0)\}, \quad x_1 = x(t_0 + \theta, x_0, t_0). \tag{2.9.4}$$

Это преобразование можно рассматривать также как отображение гиперплоскости $t = t_0$ пространства движений (или частичной области этой гиперплоскости) на гиперплоскость $t = t_0 + \theta$. Оно создается интегральными кривыми, которые пересекают обе гиперплоскости, а именно, точки пересечений, принадлежащие одной и той же интегральной кривой, ставятся в соответствие друг другу.

Преобразование T всюду непрерывно, но обратное ему преобразование не является необходимо однозначным. При однозначной обратимости преобразования (вместе с его итерациями) оно является взаимно непрерывным и дает гомеоморфное отображение фазового пространства самого в себя (топологическое отображение).

Обозначим i-кратную итерацию через T^i:

$$P_i(x_i) = T^i\{P_0(x_0)\}, \quad x_i = x(t_0 + i\theta, x_0, t_0). \tag{2.9.5}$$

Она ставит в соответствие точке P_0 на гиперплоскости $t = t_0$ точку пересечения P_i интегральной кривой, выходящей из P_0, с гиперплоскостью $t = t_0 + i\theta$.

В случае существования обратного преобразования T^{-1} преобразование T, его итерации T^i $(i = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и тождественное преобразование T^0 образуют, очевидно, коммутативную группу, т. е.

$$T^i\{T^j\} = T^j\{T^i\} = T^{i+j}. \tag{2.9.6}$$

Вместо исследования непрерывного движения $P(t) = P(x(t, x_0, t_0))$ (которое должно быть определено для всех $t \geqslant t_0$) можно ограничиться изучением последовательности равноотстоящих по времени состояний $\{P_i\} = (P_0, P_1, P_2, \ldots)$. При этом асимптотическое поведение движения определяется на основе соответствующих свойств этой последовательности, например, вынужденным периодическим колебаниям ставятся в соответствие циклические последовательности и т. п.

Если в точке $P_0 \in R_n$ для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $d(P_i, Q_i) \leqslant \varepsilon$, как только $d(P_0, Q_0) \leqslant \delta_0$, где

$$P_i = T^i\{P_0\}, \quad Q_i = T^i\{Q_0\}, \tag{2.9.7}$$

то будем говорить, что последовательность преобразований $\{T^i\}$ *равностепенно непрерывна* в P_0.

Последовательность преобразований равностепенно непрерывна для всей последовательности $\{P_i\}$, когда T взаимно однозначно (является гомеоморфизмом) и

$$d(P_{j+i}Q_i) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad d(P_j, Q_0) \leqslant \delta_j.$$

Если равностепенная непрерывность гомеоморфизмов $\{T^i\}$ равномерна для последовательности образов — точек, т. е. можно обеспечить выполнение неравенства $\delta_j \geqslant \delta > 0$, то эта непрерывность сохраняется в каждой предельной точке H_0 последовательности $\{P_j\}$. Действительно, для каждого достаточно большого индекса j_* выполняется неравенство $d(H_0, P_{j_*}) \leqslant \delta/2$; отсюда при $d(H_0, Q_0) \leqslant \delta/2$, учитывая, что

$$d(P_{j_*}, Q_0) \leqslant d(P_{j_*}, H_0) + d(H_0, Q_0) \leqslant \delta,$$

будем иметь

$$d(H_i, Q_i) \leqslant d(P_{j_*+i}, H_i) + d(P_{j_*+i}, Q_i) \leqslant 2\varepsilon.$$

Приведенные понятия непрерывности существенны при исследовании связи между топологической устойчивостью последовательности образов (последовательности состояний) $\{P_i\}$ и устойчивостью (в смысле Ляпунова) непрерывного движения $P(t)$.

Особое значение для асимптотического поведения рассматриваемых динамических систем имеют инвариантные относительно преобразования T или итерации T^k точечные множества фазового пространства. Сюда прежде всего относятся неподвижные точки. Движения, выходящие из точек такого множества Г, образуют многообразие стационарного характера.

Возможно, что множество Г заключается в некотором объемлющем множестве G, которое под действием последовательных степеней T или T^k сжимается до Г. В этом случае стационарное множество решений, выходящих из множества Г, обладает известной устойчивостью относительно области G.

Каждая неподвижная точка P_0 преобразования T^k ($P_k = T^k\{P_0\} = P_0$), которая не является неподвижной точкой более низкой степени T ($P_\varkappa \neq P_0$ для $0 < \varkappa < k$), порождает циклическую последовательность точек $\{P_i\} = (P_0, P_1, \ldots, P_{k-1})$ и соответствует некоторому колебанию периода $k\theta$, так называемому *субгармоническому* вынужденному колебанию порядка k. В случае $k = 1$ имеем гармоническое вынужденное колебание, период которого совпадает с периодом внешней силы. Неподвижные точки для T^k при $k > 1$ никогда не появляются в одиночку, а всегда образуют систему из k точек, так как тогда, кроме P_0, точки $P_1, P_2, \ldots, P_{k-1}$ также являются неподвижными:

$$T^k\{P_\varkappa\} = T^k\{T^\varkappa\{P_0\}\} = T^\varkappa\{T^k\{P_0\}\} = T^\varkappa\{P_0\} = P_\varkappa$$
$$(\varkappa = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Никакая из этих k неподвижных точек относительно преобразования T^k не может быть неподвижной при более ранней

итерации T^i, где $0 < i < k$. Действительно, из $T^i\{P_\varkappa\} = P_\varkappa$, $0 \leqslant \varkappa < k$, имеем

$$T^\varkappa\{T^i\{P_0\}\} = T^\varkappa\{P_0\},$$

$$T^{k-\varkappa}\{T^\varkappa\{T^i\{P_0\}\}\} = T^i\{P_0\} = T^{k-\varkappa}\{T^\varkappa\{P_0\}\} = P_0,$$

что противоречит предположению.

Не останавливаясь более на структуре неподвижных образов, рассмотрим теперь условия их существования. Для этого предположим, что имеет место теорема единственности. Непосредственно понятно, что наличие ограниченных неподвижных точечных множеств и особенно неподвижных точек требует определенной устойчивости динамической системы, связанной с существованием ограниченных процессов. При некоторых условиях такие ограниченные процессы обеспечивают существование неподвижных точек преобразования T. Это следует, например, из двух теорем, принадлежащих Массера [3].

Теорема 2.9.1. *Если система порядка $n = 1$ обладает ограниченным решением, то существует неподвижная точка преобразования T, а следовательно, система допускает колебания периода θ.*

Доказательство. В этом случае плоскость tx представляет собой пространство движений, целиком заполненное интегральными кривыми. Пусть $x(t) = x(t, x_0, t_0)$ есть ограниченное при $t \geqslant t_0$ решение, тогда функции

$$x(t + i\theta, x_0, t_0) = x(t, x_0, t_0), \quad x_i = x(t_0 + i\theta, x_0, t_0)$$

будут также решениями и вся последовательность решений $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ при $t \geqslant t_0$ — равномерно ограничена. Не нарушая общности рассуждений, можно положить, что $x_1 \geqslant x_0$; тогда необходимо будут справедливы также неравенства $x_{i+1} \geqslant x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Так как монотонная последовательность $\{x_i\}$ ограничена, то она сходится к некоторому пределу ξ_0: $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \xi_0$.

На основании непрерывной зависимости решений от их начальных значений отсюда следует

$$\xi_1 = x(t_0 + \theta, \xi_0, t_0) = x(t_0 + \theta, \lim_{i\to\infty} x_i, t_0) =$$

$$= \lim_{i\to\infty} x(t_0 + \theta, x_i, t_0) = \lim_{i\to\infty} x_{i+1} = \xi_0.$$

Таким образом, решение $x(t, \xi_0, t_0)$ — периодическое с периодом θ.

Теорема 2.9.2. *Если порядок системы $n = 2$, то существование всех решений при $t \geqslant 0$, а также одного ограниченного решения, достаточно для существования неподвижной точки преобразования T.*

Доказательство проводится просто, если привлечь теорему Л. Брауэра [2] в несколько измененной форме (ср.

Массера [3]). А именно: пусть G — односвязная открытая область плоскости и T — топологическое отображение G в себя, т. е. $TG \subset G$. Если T сохраняет ориентацию и если для некоторой точки $P_0 \in G$ найдется подпоследовательность последовательных образов точек $\{P_i\}$, которая сходится к одной из точек, принадлежащих G, то в множестве G существует неподвижная точка преобразования T.

За топологическое отображение T можно принять преобразование фазовой плоскости с помощью траекторий, когда параметр t переходит от значения t_0 к значению $t_0 + \theta$. Тогда, если P_0 — начальная точка ограниченного решения, то последовательность точек $\{P_i\}$, где $P_i = T_i P_0$, обладает по крайней мере одной предельной точкой и содержит поэтому сходящуюся подпоследовательность. Отсюда в силу приведенного выше замечания преобразование T имеет неподвижную точку.

Для системы второго порядка ($n = 2$) общим достаточным условием существования неподвижной точки преобразования T является следующее (ср. Виллари [1]):

Последовательность $\{P_k = P(t_0 + k\theta, P_0, t_0)\}$ *точек, принадлежащих ограниченному решению* $P(t) = P(t, P_0, t_0)$ *системы* (2.9.1), *содержит по крайней мере одну пару точек* (P_k, P_{k+1}), *которые могут быть соединены простой непрерывной кривой* $Q(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1,\ Q(0) = P_k,\ Q(1) = P_{k+1})$ *так, что выходящее из точек кривой в момент времени* t_0 *семейство решений* $P(t, Q(s), t_0)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, *определено для всех* $t \geqslant t_0$.

Это условие заведомо выполнено, если все решения для $t \geqslant 0$ определены. Из работ Опяля [3] и Олеха [1] следует, что данное условие имеет место, если у системы

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, t), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, t) \tag{2.9.8}$$

существует ограниченное решение и функция f_1 не убывает при фиксированных значениях x_1, t и возрастающем x_2, в то время как f_2 не убывает при фиксированных x_2, t и возрастающем x_1.

Приведенные теоремы о периодичности вынужденных колебаний системы остаются справедливыми, если требование положительной ограниченности решения (при $t \geqslant 0$) заменить требованием отрицательной ограниченности его (при $t \leqslant 0$). Достаточно только заменить t на $-t$, и будем иметь рассмотренный выше случай. Это преобразование времени не повлияет на периодичность. В критерии Опяля — Олеха нужно тогда потребовать невозрастания правых частей f_1, f_2 (вместо неубывания их).

Важный и достаточно общий критерий существования неподвижной точки преобразования T (или T^k) известен под названием *теоремы Брауэра о неподвижной точке* (см. Л. Брауэр [1]).

Теорема 2.9.3. *Пусть функции* $\varphi_i\ (x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *определены и непрерывны в* n*-мерном интервале* $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, *и пусть в этом интервале выполняются неравенства*

$$a_i \leqslant \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \leqslant b_i, \qquad (2.9.9)$$

так что в силу этого интервал отображается сам на себя: $x_i \to \varphi_i$. *Тогда система уравнений*

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (2.9.10)$$

имеет по меньшей мере одно решение, которое, очевидно, является неподвижной точкой данного отображения.

Непосредственно видно, что утверждение о существовании неподвижной точки остается в силе для всякой области R_n, гомеоморфной n-мерному интервалу (например, для сферы), которая в результате преобразования T переходит сама в себя.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь случай $n = 2$. Пусть на фазовой плоскости xy построена простая замкнутая кривая W такая, что все фазовые кривые, пересекающие ее в любой момент времени, имеют направление внутрь конечной области G, ограниченной кривой W.

Тогда замкнутая область $\bar{G} = G \cup W$ гомеоморфна замкнутому кругу и в результате соответствующего преобразования T переходит внутрь себя, т. е. $T(\bar{G}) \subset \bar{G}$. Из теоремы Брауэра о неподвижной точке следует, что внутри G имеется хотя бы одна неподвижная точка. Эта точка в момент времени t_0 служит начальной для некоторого периодического решения, соответствующего гармоническому колебанию системы. На основании этого построение кривых W такого рода является результативным средством для доказательства существования периодических колебаний. Примеры этого мы увидим дальше.

Теперь изложим *теорему Картрайт — Литтлвуда*, которая выясняет структуру инвариантных множеств. Будем следовать доказательству, данному Картрайт [2].

Теорема 2.9.4. *Пусть* T *— непрерывно дифференцируемое преобразование плоскости в себя и* G_0 *— частичная область области* G, *ограниченная жордановой кривой* W *такой, что для всякой точки* $P \in \bar{G} = G \cup W$ *имеем*

$$T^k\{P\} \in G_0, \quad \text{если только} \quad k \geqslant k_0(P) \geqslant 0. \qquad (2.9.11)$$

Тогда существует область $\Gamma \supset G$, *ограниченная жордановой кривой, которая преобразованием* T *переводится в себя, т. е.* $T(\bar{\Gamma}) \subset \bar{\Gamma}$. *По теореме Брауэра эта область содержит по меньшей мере одну неподвижную точку.*

Докажем сначала, что наименьшие положительные целые числа $k(P) \leqslant k_0(P)$ такие, что $T^k\{P\} \in G_0$, обладают верхней гранью K, т. е. $k(P) \leqslant K$.

Действительно, в силу условия теоремы некоторое непрерывное преобразование T^k переводит точку $P \in \bar{G}$ в точку $T^k(P) \in G_0$.

где область G_0 открыта. Следовательно, точку P можно окружить открытым кругом $C(P, \rho(P))$, образ которого в результате преобразования T^k лежит в G_0. Множество кругов для всех точек $P \in \bar{G}$ представляет собой некоторое покрытие замкнутой области $\bar{G}$. По теореме Бореля из этого покрытия можно выбрать конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^{m} C(P_i, \rho(P_i))$.

Отсюда получаем искомую верхнюю грань

$$K = \sup_{P \in \bar{G}} k(P) = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} k(P_i),$$

так как каждая точка $P \in \bar{G}$ лежит в некотором круге C_i таком, что $T^{k(P_i)}\{P\} \in G_0$ и, следовательно, $k_0(P) \leqslant k(P_i)$.

Заметим, что по предположению $T^i\{P\} \in G_0$ для любой точки $P \in \bar{G}$, если $k \geqslant k_0(P)$. Тем более справедливо соотношение $T^{k+i}\{P\} = T^i\{T^k\{P\}\} \in G_0$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Кроме того, имеем $G \supset G_0$ и, следовательно, $T^i\{G\} \supset T^i\{G_0\}$, так что пересечение $G \cap T\{G\} \cap \ldots \cap T^i\{G\} \supset G_0 \cap \ldots \cap T\{G_0\} \cap \ldots \ldots \cap T^i\{G_0\}$ непусто.

В самом деле, так как для любой точки $P \in \bar{G}$ для определенного целого числа k, где $1 \leqslant k \leqslant K$, выполнено условие $T^k\{P\} \in G_0 \subset G$, то верно соотношение

$$T^K\{P\} = T^{K-k}\{T^k\{P\}\} \in T^{K-k}\{G_0\} \subset T^{K-k}\{G\} \subset \bigcup_{i=0}^{K-1} T^i\{G\} = G_{K-1}.$$

Отсюда заключаем, что $T^K\{\bar{G}\} \subset G_{K-1}$.

Далее следует

$$\bar{G}_{K-1} \subset \bar{G}_K = \bar{G}_{K-1} \cup T^K\{\bar{G}\} = \bar{G} \cup T\{\bar{G}_{K-1}\} \subset G_{K-1},$$

так что

$$\bar{G}_K = \bar{G}_{K-1}, \quad T\{\bar{G}_{K-1}\} \subset \bar{G}_{K-1}.$$

Таким образом, для всякого положительного целого числа i имеем

$$T^i\{\bar{G}_{K-1}\} \subset \bar{G}_{K-1}, \quad \bar{G}_{K+i} = \bar{G}_{K-1} \cup \bigcup_{j=0}^{i} T^{K+j}\{\bar{G}\} = \bigcup_{j=0}^{i+1} T^j\{\bar{G}_{K-1}\} \subset G_{K-1}.$$

Следовательно, $G \cap T\{G\} \cap \ldots \cap T^{K-1}\{G\} \neq \varnothing$.

Можно доказать (ср. Картрайт [2]), что неограниченная компонента дополнительного множества к G_{K-1} ограничена некоторой замкнутой жордановой кривой. Эта кривая представ-

ляет собой границу некоторой области, и, следовательно, Γ, $\Gamma \supset G_{K-1} \supset G \supset G_0$, является областью, упомянутой в теореме.

Теорема 2.9.5 (ср. Картрайт [2]). *В условиях теоремы* 2.9.4 *множество*

$$S = \bar{\Gamma} \cap T\{\bar{\Gamma}\} \cap \ldots \cap T^i\{\bar{\Gamma}\} \cap \ldots \qquad (2.9.12)$$

замкнуто, связно и является инвариантным при преобразовании, т. е. $T(S) = S$.

Действительно, так как $\bar{\Gamma} \supset T\{\bar{\Gamma}\} \supset \ldots \supset T^i\{\bar{\Gamma}\} \supset \ldots$, то $\bar{\Gamma}$ сжимается при последовательных итерациях преобразования T, причем каждый образ $T^i\{\bar{\Gamma}\}$ замкнут и обладает связностью. Таким образом, предельное множество S, представляющее собой пересечение замкнутых связных множеств, также обладает этими свойствами.

Кроме того, имеем

$$T(S) = T(\bar{\Gamma}) \cap T^2(\bar{\Gamma}) \cap \ldots = \bar{\Gamma} \cap T(\bar{\Gamma}) \ldots = S.$$

Очевидно, все неподвижные точки из G относительно преобразования T принадлежат множеству S.

Заметим, далее, что если рассматриваемая динамическая система диссипативна в большом, т. е. является системой класса D, то в каждой точке P фазовой плоскости для $k \geqslant k_0(P)$ имеем $T^k\{P\} \in G_0$, где G_0 — например, круг с центром в начале координат фазовой плоскости с достаточно большим радиусом.

Таким образом, теорема 2.9.4 справедлива для всякой области G_0, охватывающей область G.

Любое ограниченное точечное множество $S' \subset G$, которое в процессе преобразования T (или его итерации T^k) является инвариантным, содержится в множестве S, полученном из G указанным выше способом. Действительно, как и в доказательстве теоремы 2.9.4, для определенного положительного целого числа K' имеем

$$T^{K'}\{S'\} = S' \subset G_{K'-1} \subset G_{K-1} \subset \Gamma, \quad T^i\{S'\} = S' \subset T^i\{\Gamma\}$$

(соответственно $T^{ik}\{S'\} = S \subset T^{ik}\{\Gamma\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, при фиксированном k) и, таким образом, $S' \subset S$.

В частности, S содержит все неподвижные точки преобразования T или его итераций, и поэтому оценка для S дает границы для амплитуд всех гармонических или субгармонических вынужденных колебаний. Назовем S *максимальным инвариантным точечным множеством.* Если оно вырождается в одну-единственную точку, то ей соответствует вынужденное колебание с периодом возбуждения θ, к которому все остальные движения стремятся с течением времени. Такое положение вещей имеет место, если существует движение, асимптотически устойчивое в целом.

Для более детального ознакомления с неподвижными точками и с отображением их окрестностей с помощью

преобразования T, позволяющего исследовать поведение системы в соседстве с колебаниями, нужно изучить непрерывное поле направлений $P \to T\{P\}$, особые точки которого суть неподвижные точки. Для классификации особых точек неавтономной системы можно привлечь рассуждения из теории автономных систем, в частности, можно эффективно использовать вычисление индекса замкнутой кривой или отдельной точки.

Индекс простой замкнутой кривой W, которую фазовые траектории все время пересекают внутрь, по теореме 2.8.19 равен $+1$, при этом по теореме 2.8.16 кривая содержит внутри себя по меньшей мере одну особую (неподвижную) точку. Тот же результат дает и применение теоремы Брауэра о неподвижной точке.

В заключение изложим принадлежащий Г. Зейферту [1] весьма наглядный способ доказательства существования устойчивой неподвижной точки, которой соответствует асимптотически устойчивое колебание.

Речь идет о системе двух дифференциальных уравнений

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, t), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, t) \tag{2.9.13}$$

$$[f_i(x_1, x_2, t + \theta) \equiv f_i(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2]$$

или в векторной форме

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t).$$

Предполагается, что функции $f_i(x_1, x_2, t)$ $(i = 1, 2)$ для всех значений независимых переменных обладают непрерывными частными производными первого порядка по x_1 и по x_2.

Пусть на фазовой плоскости x_1x_2 существует замкнутая область B, граница которой есть кривая W с указанными выше свойствами. Эту область назовем *относительной границей системы* (2.9.13).

Выберем теперь фиксированный начальный момент времени t_0 и рассмотрим последовательные образы B под действием преобразования T и его итераций:

$$B^n = T^n\{B\} = \{\boldsymbol{x}(t_0 + n\theta, \boldsymbol{x}_0, t_0\},$$

где $\boldsymbol{x}_0 \in B$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$

Так как $T\{B\} \subset B$, то области B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ вложены друг в друга. Если они стягиваются при $n \to \infty$ к одной точке, то эта точка и есть устойчивая неподвижная точка преобразования T.

Чтобы получить критерий сжимаемости итераций $T^n\{B\}$, представим граничную кривую в W в параметрической форме:

$$\boldsymbol{x}(s) = \{x_1(s), x_2(s)\}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Пусть при этом функции $x_i(s)$ будут кусочно-непрерывно дифференцируемыми. Рассмотрим семейство решений системы

(2.9.13), выходящих из точек кривой W в момент t_0,

$$x[t,\ x(s),\ t_0] = x(t,\ s) \quad (x(t_0,\ s) = x(s)).$$

Эти интегральные кривые в пространстве x_1x_2t (пространство движений) образуют поверхность трубки, уравнение которой имеет вид $t = t(x_1, x_2)$. Сечение поверхности трубки при каждом $t \geqslant t_0$ представляет собой кривую $W(t)$, уравнение которой есть $x = x(t, s)$, где t фиксировано. Будем искать условие, при выполнении которого длина дуги кривой $W(t)$, равная

$$l(t) = \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial s} x[t,\ x(s),\ t_0] \right| ds,$$

стремится к нулю при $t \to \infty$. Для получения общего условия предположим, что поверхность $t = t(x_1, x_2)$ задана параметрически в пространстве $W_1W_2W_3$, где $W_k = W_k(x)$ $(k = 1, 2, 3)$. При этом потребуем, чтобы отображающие функции W_k были дважды непрерывно дифференцируемы в области B.

Имеем

$$(dW)^2 = \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial W_k}{\partial x_j} dx_j \right)^2 = \sum_{i,\ j=1}^{2} g_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

где

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial W_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial W_k}{\partial x_j}.$$

Для получения однозначного соотношения между образом и оригиналом потребуем, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, т. е.

$$g_{11} > 0, \quad g_{12}g_{22} > \tfrac{1}{4}(g_{12} + g_{21})^2 \text{ в } B. \tag{2.9.14}$$

Кривая $W(t)$ отображается в кривую $w(x(t, s))$, длина дуги которой

$$L(t) = \int_0^1 \left| \frac{\partial}{\partial s} w(x(t,\ s)) \right| ds = \int_0^1 \sqrt{\sum_{i,\ j} g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s}}\, ds.$$

Из условия $\lim\limits_{t \to \infty} L(t) = 0$ следует, что $\lim\limits_{t \to \infty} l(t) = 0$, и наоборот.

Чтобы исследовать зависимость функции $L(t)$ от t, вычислим производную

$$L'(t) = \int_0^1 \lambda(t,\ s) \Big/ \sqrt{\sum_{i,\ j} g_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial s}}\, ds,$$

где

$$2\lambda(t,\ s) = \sum_{i,\ j} g_{ij}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial t}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial s} + \frac{\partial x_i}{\partial s}\cdot\frac{\partial^2 x_j}{\partial s\,\partial t}\right) +$$

$$+ \sum_{i,\ j}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_2}\right)\frac{\partial x_i}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial s}.$$

Приняв во внимание, что

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = f_i(\boldsymbol{x}(t,\ s),\ t)$$

и

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial s\,\partial t} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial t\,\partial s} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial x_2}{\partial s},$$

получим

$$\lambda(t,\ s) = \sum_{i,\ j} h_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial s},$$

где

$$2h_{ij} = \sum_{k=1}^{2}\left(g_{ik}\frac{\partial f_k}{\partial x_j} + g_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}f_k\right) \quad (i,\ j = 1,\ 2).$$

Потребуем, чтобы $\lambda(t, s)$ была отрицательно определенной квадратичной формой относительно $\partial x_i/\partial s$, т. е. при $0 \leqslant t \leqslant \theta$

$$h_{11} < 0, \quad h_{11}h_{22} > \frac{1}{4}(h_{12} + h_{21})^2 \text{ в } B. \tag{2.9.15}$$

Это заведомо будет иметь место, если для некоторого числа $\delta > 0$ выполнены неравенства

$$h_{ii} \leqslant -\delta, \quad 4h_{11}h_{22} - (h_{12} + h_{21})^2 \geqslant \delta.$$

Тогда можно выбрать число $\varepsilon > 0$ так, чтобы для величин $h^*_{ij} = h_{ij} + \varepsilon g_{ij}$ были справедливы неравенства

$$h^*_{11} \leqslant 0, \quad 4h^*_{11}h^*_{22} - (h^*_{12} + h^*_{21})^2 \geqslant 0.$$

На основании этого имеем

$$L'(t) = \int_0^1 \left(\sum_{i,\ j} h^*_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial s}\right)\left(\sum_{i,\ j} g_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial s}\right)^{-1/2} ds - \varepsilon L(t) \leqslant -\varepsilon L(t).$$

Отсюда

$$L(t) \leqslant L(t_0)\exp[-\varepsilon(t - t_0)].$$

Заметим, что в этом рассуждении, очевидно, можно отказаться от отображения $w(x)$ и с самого начала работать с функциями $g_{ij}(x)$.

Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.9.6 (ср. Зейферт [1]). *Пусть B — относительная граница системы* (2.9.13). *Если существуют непрерывно диф-*

ференцируемые функции $g_{ij}(x)$ $(i, j = 1, 2)$, *удовлетворяющие условиям* (2.9.14) *и такие, что соответствующие функции* $h_{ij}(x, t)$ $(i, j = 1, 2)$ *обладают свойствами* (2.9.15), *то система* (2.9.13) *имеет асимптотически устойчивое периодическое решение с периодом* θ, *причем все решения, начинающиеся в* B, *стремятся к указанному периодическому решению.*

Пример существования асимптотически устойчивого вынужденного колебания приведен в п. 5.3.

2.10. Топологическая теория устойчивости

Как было указано ранее, решения дифференциального уравнения, в общем, имеют только тогда практическое значение, когда они реализуемы, т. е. могут быть моделированы физическими процессами. Эти процессы должны мало изменяться при малых возмущениях и быть невосприимчивыми при незначительных ошибках начальных условий. Соответственно этому решения дифференциального уравнения должны быть устойчивыми в различных смыслах; причем очевидно, что условия существования того или иного типа решений не являются достаточными для ответа на вопрос об устойчивости: нужно дополнительное исследование проблем устойчивости. После того как в п. 2.9 на основе теории преобразований были установлены критерии существования вынужденных колебаний с помощью топологических методов, займемся изучением устойчивости решений простейшего вида, а именно при начальных возмущениях. При этом будем придерживаться статей Треффца [1] и Рейссига [4], а также примыкающей к ним работы Ла-Салля [2]. Последовательность дальнейшего изложения следующая: сначала рассмотрим понятие устойчивости по Ла-Саллю, после этого выясним важные частные случаи его и в заключение установим связь полученных результатов с теорией устойчивости Ляпунова, остановившись, в частности, на вопросе о поведении решений при постоянно действующих возмущениях.

Приведенное ниже изложение относится к динамической системе n-го порядка, процессы которой для простоты будем называть движениями. Эти движения описываются решениями векторного дифференциального уравнения

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t + \theta) \equiv \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t), \tag{2.10.1}$$

причем предполагается, что правая часть уравнения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ задана в пространстве $\boldsymbol{x}t$ движений P_{n+1} и обеспечивает там всюду существование и единственность решений и непрерывную зависимость их от начальных значений.

Пусть P' — любая фиксированная точка фазового пространства R_n. Обозначим решение (движение), выходящее из этой точки в момент времени t', следующим образом:

$$P(t) = P(t, P', t'). \tag{2.10.2}$$

Для $t'=0$ будем писать

$$P'=P_0 \quad \text{и} \quad P(t)=P(t,\ P_0,\ 0).$$

Непрерывно дифференцируемое топологическое преобразование T определим как

$$T\{P_0\}=P(\theta,\ P_0,\ 0)=P_1 \tag{2.10.3}$$

и заменим непрерывное движение $P(t)$ последовательными отображениями его начальной точки

$$P_0,\ P_1=T\{P_0\},\ P_2=T^2\{P_0\},\ \ldots,\ P_i=T^i\{P_0\}=P\{i\theta,\ P_0,\ 0\},\ \ldots \tag{2.10.4}$$

Эту последовательность точек (последовательность фаз движения) Ла-Салль [2] называет *движением* $M(P_0)=\{P_i\}$ и развивает для нее (вместо непрерывного движения $P(t)$) теорию устойчивости (относительно некоторого начального возмущения). Такой подход имеет то преимущество, что дает возможность применять понятия и методы топологии. Теория устойчивости движения для дискретных моментов времени не позволяет в общем случае подробно изучить устойчивость непрерывного движения; однако на практике иногда можно установить устойчивость данного процесса на основе стробоскопических наблюдений. Ниже мы дадим краткий обзор результатов Ла-Салля.

Сначала разобьем фазовое пространство R_n на так называемые контрактивные множества, объединяя близкие в известном смысле движения. Два движения $M(P_0)$ и $M(Q_0)$ называются *асимптотическими* друг другу, если

$$\lim_{i\to\infty} d(P_i,\ Q_i)=0, \tag{2.10.5}$$

а их исходные точки P_0 и Q_0 в этом случае называются *асимптотически эквивалентными*:

$$P_0\sim Q_0. \tag{2.10.6}$$

Если предельные точки взаимно асимптотических последовательностей $M(P_0)=\{P_i\}$ и $M(Q_0)=\{Q_i\}$ образуют множества $M'(P_0)$ и $M'(Q_0)$, то эти множества на основании (2.10.5) совпадают, т. е.

$$M'(P_0)=M'(Q_0). \tag{2.10.7}$$

Непустое открытое множество $U\subset R_n$ называется *контрактивным*, если его точки попарно асимптотически эквивалентны. Образ $T\{U\}$, в свою очередь, контрактивен, так как из $P_0\sim Q_0$ следует $P_1\sim Q_1$. Наибольшее контрактивное множество U^*, охватывающее U, называется *максимальным расширением* U. Очевидно, что его образ $T\{U^*\}\supset T(U)$ является, в свою очередь, максимальным контрактивным точечным множеством. Вследствие этого объединение всех множеств U^* инвариантно при преобразовании T, и каждые два из них либо не пересекаются, либо совпадают.

Назовем *цепью* последовательность максимальных контрактивных множеств $\{U_i\}$, содержащих некоторое движение, причем

$$T\{U_i\} = U_{i+1}. \tag{2.10.8}$$

Всякое движение, начинающееся в цепи, остается всегда в ней и соединяет ее члены, следующие друг за другом.

Если последовательное применение преобразований T, T^2, T^3, ... для множества U_0 дает вначале попарно различные множества U_0, U_1, ..., U_{k-1}, причем множество U_k совпадает с некоторым множеством U_l, где $0 \leqslant l < k$, то U_k идентично с U_0, т. е.

$$U_k = U_0.$$

Поэтому цепь образует *цикл* с периодом k:

$$(U_0, \ldots, U_{k-1}). \tag{2.10.9}$$

Все движения, которые пробегают общую цепь, имеют одинаковые предельные точки, так как для каждой пары движений $M(P_0)$ и $M(Q_0)$ существует соотношение эквивалентности

$$P_i \sim Q_0, \tag{2.10.10}$$

и, следовательно, для производных множеств $M'(P_0)$ и $M'(Q_0)$ имеем

$$M'(P_0) = M'(P_i) = M'(Q_0). \tag{2.10.11}$$

В частности, если цепь *циклическая* (периода k), то ей либо не принадлежит ни одной предельной точки, либо принадлежит k различных предельных точек, которые являются *неподвижными точками* для преобразования T^k.

Пусть $M(P_0)$ — движение, порождающее цепь, и H_0 — предельная точка, принадлежащая цепи, где без ограничения общности можно положить, что $H_0 \in U_0$. Тогда найдем в $M(P_0) = \{P_i\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{P_{i_r}\} \to H_0$.

Справедлива оценка

$$d(H_0, H_k) \leqslant d(H_0, P_{i_r}) + d(P_{i_r}, P_{i_r+k}) + d(P_{i_r+k}, H_k).$$

Принимая во внимание, что $i_r \equiv \varkappa(r) \pmod k$, $0 \leqslant \varkappa(r) < k$, и что k нуль-последовательностей

$$\{d(P_{jk}, P_{(j+1)k})\}, \ldots, \{d(P_{(k-1)+jk}, P_{(k-1)+(j+1)k})\}$$

сходятся равномерно, получим $d(P_{i_r}, P_{i_r+k}) \to 0$ для $r \to \infty$.

Учитывая, далее, что имеет место соотношение $d(H_0, P_{i_r}) \to 0$, в силу непрерывной зависимости решений от их значений в начальный момент времени $t = 0$ находим $d(H_k, P_{i_r+k}) \to 0$. Таким образом,

$$H_0 = H_k = T^k\{H_0\}. \tag{2.10.12}$$

Отсюда следует, что подпоследовательность $\{P_{jk}\} \subset M(P_0)$ стремится к H_0, так как

$$\lim_{j\to\infty} d(P_{jk}, H_{jk}) = \lim_{j\to\infty} d(P_{jk}, H_0) = 0. \qquad (2.10.13)$$

Также верно, что

$$\lim_{j\to\infty} d(P_{\varkappa+jk}, H_{\varkappa+jk}) = \lim_{j\to\infty} d(P_{\varkappa+jk}, H_\varkappa) = 0, \qquad (2.10.14)$$

т. е. $\{P_{\varkappa+jk}\} \to H_\varkappa$, где $0 \leqslant \varkappa < k$.

Предельные точки $H_0, \ldots, H_{k-1}$, число которых равно k, должны отличаться друг от друга, так как множества $U_0, \ldots, U_{k-1}$, которым они принадлежат, не имеют общих точек. Эти точки определяют субгармонические колебания k-го порядка, причем им соответствуют k-членные точечные циклы, получающиеся один из другого путем циклической замены членов. Каждое движение, начинающееся в цепи $(U_0, \ldots, U_{k-1})$, стремится с течением времени к одному из субгармонических колебаний, например, движение $P(t, P_0, 0)$ — к колебанию $P(t, H_0, 0)$.

С другой стороны, если предельная точка H какой-нибудь последовательности движения $M(P_0)$ находится в некотором контрактивном множестве U, то $M(P_0)$ покрывается цепью. В этом случае $M(P_0)$ бесконечно много раз попадает во все более узкое соседство с H и, таким образом, неограниченно часто возвращается в множество U.

Движение $M(P_0)$ Ла-Салль называет *асимптотически устойчивым* или *A-устойчивым*, если его исходная точка P_0 принадлежит некоторому контрактивному множеству U (с максимальным расширением U_0), т. е. если $M(P_0)$ допускает контрактивное покрытие. Тогда P_0 лежит в центре некоторой сферы с радиусом ε_0, $S_0 = S(P_0, \varepsilon_0)$, на которой возникают только движения $M(Q_0)$, асимптотические к движению $M(P_0)$:

$$\lim_{i\to\infty} d(P_i, Q_i) = 0 \quad \text{для} \quad d(P_0, Q_0) < \varepsilon_0. \qquad (2.10.15)$$

Множество U_0 можно рассматривать как *область устойчивости* движений $M(P_0)$.

Так как множество U_0 принадлежит цепи $\{U_i\}$, то движение $M(P_i)$ также асимптотически устойчиво и обладает некоторой областью устойчивости U_i. В частности, точку P_i можно окружить некоторой сферой $S_i = S(P_i, \varepsilon_i)$ радиуса ε_i, из которой выходят лишь движения, стремящиеся к $M(P_i)$,

$$\lim_{j\to\infty} d(P_{i+j}, Q_j) = 0 \quad \text{для} \quad d(P_i, Q_0) < \varepsilon. \qquad (2.10.16)$$

Если цепь представляет собой k-членный цикл, т. е. $\{U_i\} = (U_0, U_1, \ldots, U_{k-1})$, то

$$\lim_{i\to\infty} d(P_i, P_{i+k}) = 0 \qquad (2.10.17)$$

и движение $M(P_0)$ называется *B-устойчивым*.

Если движение $M(P_0)$ асимптотически устойчиво и для радиусов ε_i всех «сфер влияния» можно найти положительную нижнюю грань, т. е.

$$\inf_i \{\varepsilon_i;\ S(P_i, \varepsilon_i) \subset U_i\} = \varepsilon > 0, \qquad (2.10.18)$$

то движение $M(P_0)$ называется *абсолютно устойчивым или C-устойчивым.*

Если, наконец, движение $M(P_0)$ имеет предельную точку H_0, порождающую асимптотически устойчивое движение, то данное движение Ла-Салль называет *D-устойчивым.* Если это движение, сверх того, принадлежит k-мерному циклу, то оно является также *B*-устойчивым. Кроме того, почти все точки этого движения имеют сколь угодно малое расстояние от предельной точки H_0 и от $k-1$ ее образов $H_1, H_2, \ldots, H_{k-1}$, которые все являются неподвижными для преобразования T^k. Отсюда можно заключить, что в этом случае налицо также и *C*-устойчивость движения (абсолютная устойчивость).

Обратно, *C*-устойчивое движение, имеющее предельную точку, является *D*-устойчивым.

Очевидно, *D*-устойчивые движения наиболее интересны для приложений. Ими занимался Треффц [1]. Он исходил из абсолютной устойчивости и полагал в дополнение к этому ограниченность, откуда вытекало существование предельной точки. Треффц доказал, что соответствующее движение $M(P_0)$ асимптотично к некоторому k-членному циклическому движению

$$M(H_0) = (H_0, H_1, \ldots, H_{k-1}).$$

Важным частным случаем этой теоремы (см. Рейссиг [4]) является существование движения $M(P_0)$, имеющего в качестве области устойчивости U_0 все фазовое пространство. Движение это, очевидно, конвергентно, т. е. $M(P_0) \to H$. Все остальные движения сходятся к одному пределу, так что процессы, описываемые рассматриваемой динамической системой, стремятся к одному и тому же гармоническому вынужденному колебанию.

После краткого изложения исследований Ла-Салля установим связь их с теорией Ляпунова для непрерывного движения $P(t)$. При этом будем заниматься только ограниченными движениями. Тогда, в силу непрерывной зависимости движений от начальных условий, для заданного $\varepsilon > 0$ можно найти общую границу $\eta > 0$ такую, что из $d(P_i, Q_i) \leqslant \eta$ $(i = 1, 2)$ следует оценка

$$d[P(t, P_i, 0), P(t, Q_i, 0)] \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant \theta,$$

которая равносильна оценке

$$d[P(t), Q(t)] = d[P(t, P_0, 0), P(t, Q_0, 0)] \leqslant \varepsilon,$$
$$i\theta \leqslant t \leqslant (i+1)\theta.$$

Если $M(P_0)$ является A-устойчивым, то

$$\lim_{t\to\infty} d[P(t), Q(t)] = 0, \quad d(P_0, Q_0) \leqslant \delta_0. \tag{2.10.19}$$

Выберем (в условиях последних ограничений) целое число N настолько большим, чтобы для $i \geqslant N$

$$d(P_i, Q_i) \leqslant \eta,$$

тогда одновременно $d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad t \geqslant N\theta$.

Если все близкие движения $Q(t)$ также стремятся к рассматриваемому движению $P(t)$, то это, однако, не означает, что движение является асимптотически устойчивым (в смысле Ляпунова). Требуется еще, кроме того, наличие *слабой устойчивости*, т. е. для $t \geqslant 0$

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad d[P_0, Q_0] \leqslant \delta(\varepsilon). \tag{2.10.20}$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы последовательность гомеоморфизмов $\{T^i\}$ в P_0 была равностепенно непрерывна. Первая часть утверждения тривиальна. Вторая часть доказывается рассуждениями, аналогичными приведенным выше.

На основании этого получаем следующий результат:

A-устойчивость движения при условии равностепенной непрерывности $\{T^i\}$ в P_0 эквивалентна асимптотической устойчивости соответствующего движения $P(t)$.

Движение $P(t) = P(t, P', t')$, $t' \geqslant 0$, называют, как известно, *равномерно устойчивым*, если для $t \geqslant t'$

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad d(P', Q') \leqslant \delta, \tag{2.10.21}$$

где δ зависит только от ε. Движение $P(t)$ называется, сверх того, *равномерно асимптотически устойчивым*, если существует фиксированная граница δ_0 и для каждого $\varepsilon > 0$ имеется конечный момент времени $\tau = \tau(\varepsilon) \geqslant 0$ такой, что для $t \geqslant t' + \tau$

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad d(P', Q') \leqslant \delta_0. \tag{2.10.22}$$

Массера [5] доказал, что устойчивость или асимптотическая устойчивость периодического движения $P(t)$ равномерна. Пусть $M(P_0)$ — любое C-устойчивое ограниченное (а также D-устойчивое) движение и (равностепенная) непрерывность последовательности гомеоморфизмов $\{T^i\}$ над $\{P^i\}$ равномерна. Тогда с помощью результатов Массера можно доказать, что $P(t)$ равномерно асимптотически устойчиво.

Справедливо также утверждение:

D-устойчивость движения $M(P_0)$ при условии равномерной равностепенной непрерывности $\{T^i\}$ над $\{P_j\}$ эквивалентна равномерной асимптотической устойчивости движения $P(t)$.

Действительно, пусть сначала выполнено условие первой части теоремы. Рассматриваемая последовательность $\{P_j\}$ должна сходиться к некоторому циклу $(H_0, \ldots, H_{k-1})$. Соответ-

ственно этому, на основании предыдущего, движение $P(t)$ асимптотически устойчиво и сходится к асимптотически устойчивому субгармоническому колебанию k-го порядка $H(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} d[P(t), H(t)] = 0, \quad H(t + k\theta) = H(t). \qquad (2.10.23)$$

Отсюда, на основании результатов Массера, $H(t)$ равномерно устойчиво, т. е. для $t \geqslant t'$

$$d[H(t), Q(t)] = d[P(t, H', t'), P(t, Q', t')] \leqslant \varepsilon', \qquad (2.10.24)$$

если только $d(H', Q') \leqslant 2\delta'$, $\delta' \leqslant \varepsilon'$.

Пусть, далее, для $t \geqslant t'' \geqslant 0$ имеем

$$d[P(t), H(t)] = d[P(t, P', t'), P(t, H', t')] \leqslant \delta', \qquad (2.10.25)$$

причем в отрезке времени $0 \leqslant t \leqslant t''$ выполнено неравенство

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \delta', \qquad (2.10.26)$$

если только $0 \leqslant t' \leqslant t''$ и $d(P', Q') \leqslant \delta \leqslant \delta'$. (Это следует из непрерывной зависимости движения $P(t)$ от начальных условий (P', t').)

Тогда, так как

$$d[H(t''), Q(t'')] \leqslant d[P(t''), Q(t'')] + d[P(t''), H(t'')] \leqslant 2\delta',$$

то для $t \geqslant t''$ $(\geqslant t')$ будем иметь

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant d[P(t), H(t)] + d[H(t), Q(t)] \leqslant \delta' + \varepsilon' \leqslant 2\varepsilon' = \varepsilon. \qquad (2.10.27)$$

Для $t \geqslant t' \geqslant t''$, в силу (2.10.27) и предыдущей оценки, где t'' заменено t', получим

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad d(P', Q') \leqslant \delta. \qquad (2.10.28)$$

Этим доказана равномерная устойчивость движения.

Сверх того, как показал Массера, движение $H(t)$ равномерно асимптотически устойчиво, т. е. для $t \geqslant t + \tau'$

$$d[H(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon', \quad \text{если} \quad d(H', Q') \leqslant 2\delta', \quad \delta' \leqslant \varepsilon'. \qquad (2.10.29)$$

Из предыдущего можно заключить также, что для $t \geqslant t' + \tau$, где $\tau = t'' + \tau'$,

$$d[P(t), Q(t)] \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad d(P', Q') \leqslant \delta. \qquad (2.10.30)$$

Следовательно, $P(t)$, в свою очередь, равномерно асимптотически устойчиво.

Для доказательства второй части теоремы примем это свойство движения $P(t)$ как данное, так что при фиксированной границе δ для $j = 0, 1, 2, \ldots$ будем иметь

$$\lim_{i\to\infty} d(P_{i+j}, Q_i) = 0, \quad \text{если} \quad d(P_j, Q_0) \leqslant \delta. \qquad (2.10.31)$$

Последнее означает C-устойчивость движения $M(P_0)$ и в силу условия ограниченности одновременно его D-устойчивость.

Далее, $P(t)$ равномерно устойчиво, так что для любого целочисленного $j \geqslant 0$ справедлива оценка

$$d(P_{i+j}, Q_i) \leqslant \varepsilon' \quad \text{для} \quad d(P_j, Q_0) \leqslant \delta' = \delta(\varepsilon'), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.10.32}$$

Таким образом, последовательность преобразований $\{T^i\}$ в P_j равностепенно непрерывна, и это свойство равномерно для последовательности точек $\{P_j\}$.

В заключение приведем еще понятие *устойчивости при постоянном возмущении*, также рассмотренное Ла-Саллем.

С этой целью обозначим через $P(t) = P[x(t)]$ интересующее нас движение; как обычно оно рассматривается в качестве невозмущенного движения, определяемого векторным дифференциальным уравнением

$$x' = f(x, t), \quad f(x, t + \theta) \equiv f(x, t). \tag{2.10.1}$$

Сравним его с некоторым близким движением $\bar{x}(t)$, которое относится не только к другому начальному возмущению (в момент $t = 0$), но также соответственно при $t > 0$ — к постоянному возмущению, т. е. удовлетворяют другому дифференциальному уравнению

$$\bar{x}' = \bar{f}(\bar{x}, t), \tag{2.10.33}$$

которое, вообще говоря, не периодично по t. Возмущенное движение запишем в форме $\bar{x}(t) = x(t) + u(t)$ и построим дифференциальное уравнение для $u(t)$ (дифференциальное уравнение возмущения):

$$u' = \bar{f}[x(t) + u, t] - f[x(t), t] = \{f[x(t) + u, t] - f[x(t), t]\} +$$
$$+ \{\bar{f}[x(t) + u, t] - f[x(t) + u, t]\} \equiv \varphi(u, t) + \psi(u, t), \tag{2.10.34}$$

где $\varphi(0, t) = 0$.

Невозмущенное движение $u(t) = 0$ называется *устойчивым при постоянно действующем возмущении* (или *тотально устойчивым*), если для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти положительные δ, η такие, что $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant 0$, если только $|u(0)| \leqslant \delta$ и $|\psi(u, t)| \leqslant \eta$ для $|u| \leqslant \varepsilon$.

Кроме того, предполагается, что дифференциальное уравнение (2.10.34) возмущенного движения $u(t)$ удовлетворяет тем же условиям регулярности, что и (2.10.1).

Допуская, что вектор-функция $\varphi(u, t)$ в некоторой области $|u| \leqslant h$, $t \geqslant 0$, обладает непрерывными и ограниченными частными производными по компонентам вектора u, можно применить теорему Малкина [3]:

Если движение $P(t)$ $(u(t) = 0)$ равномерно асимптотически устойчиво, то существует положительно определенная, равномер-

но малая скалярная функция $V(\boldsymbol{u}, t)$, *полная производная которой по времени в силу уравнения* $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}, t)$:

$$V' = \frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}, t) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

отрицательно определенная.

Для доказательства Малкин конструирует функцию V, у которой $\left|\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{u}}\right|$ в области $|\boldsymbol{u}| \leqslant h$, $t \geqslant 0$ ограничена. Существование этой функции Ляпунова $V(\boldsymbol{u}, t)$ на основании теоремы Малкина [2] является достаточным критерием для тотальной устойчивости рассматриваемого движения $P(t)$.

Резюмируя, можно сказать, что из D-устойчивости $M\{P_0\}$ в соединении с равномерной (равностепенной) непрерывностью $\{T^i\}$ над $M(P_0)$ следует тотальная устойчивость движения $P(t)$.

ГЛАВА 3

3.1. Периодические решения уравнения $x'' + g(x) = 0$. Оценка периода

Теперь перейдем к специальным исследованиям методами, изложенными в главе 2. Начнем с автономной системы, допускающей наличие семейства периодических решений. Мы ограничимся рассмотрением дифференциального уравнения Льенара [1]

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \tag{3.1.1}$$

которое эквивалентно системе

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - f(x)y \tag{3.1.2}$$

или

$$x' = -F(x) + v, \quad v' = -G(x), \tag{3.1.3}$$

где

$$F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при всех значениях x и обеспечивают для заданных начальных значений единственное решение, непрерывно зависящее от начальных условий. Кроме того, предположим, что

$$xg(x) > 0 \quad \text{для} \quad x \neq 0. \tag{3.1.4}$$

В механических приложениях это означает, что сила, возвращающая в положение равновесия $x = 0$ материальную точку, направлена к положению равновесия. В этом случае фазовая картина на xy- или xv-плоскости имеет единственную особую точку — начало координат $O(0, 0)$.

Обратимся к условиям

$$x(0, a) = a, \quad y(0, a) = 0, \quad 0 \leqslant a \leqslant a_0,$$

при которых существует однопараметрическое семейство периодических решений

$$x = x(t, a), \quad y = y(t, a). \tag{3.1.5}$$

Этому семейству на плоскости xy, а в силу $v = F(x) + y$ также и на плоскости xv, соответствует семейство замкнутых кривых, содержащих внутри себя начало координат.

В механике эти движения называются *свободными колебаниями* системы, они представляются континуумом циклов, в то время как колебания, изображаемые изолированными циклами, называются *собственными колебаниями.*

Простейшим частным случаем является

$$f(x) \equiv 0. \tag{3.1.6}$$

Тогда дифференциальное уравнение (3.1.1) обладает первым интегралом

$$2G(x) + y^2 = C. \tag{3.1.7}$$

Кривые, соответствующие фиксированным значениям C, замкнуты в достаточно малой окрестности начала координат. В случае же, когда

$$\lim_{|x| \to \infty} G(x) = \infty, \tag{3.1.8}$$

замкнуты все кривые этого вида.

Если же $f(x) \equiv 0$ при $-x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ $(0 < x_1, x_2 < \infty)$, то фазовая картина, соответствующая вертикальной полосе, выглядит так, как в рассмотренном частном случае. Мы в первую очередь изучим этот последний случай.

Важной задачей, возникающей в этой связи, представляется вопрос о частоте свободных колебаний, в общем случае зависящей от амплитуды, т. е. являющейся функцией параметра a, входящего в формулы (3.1.5). Для разрешения этой проблемы создан новый весьма действенный метод. Таким методом является сравнение исследуемого линейного дифференциального уравнения с некоторым другим, свойства которого известны или рассматриваются как известные. В частности, для сравнения часто используются линейные уравнения, для которых результаты формулируются в так называемых *теоремах сравнения.*

Следуя рассуждениям Опяля [12], представим себе, что ось y рассекает кривые (3.1.7) на дуги, симметричные относительно оси x. Эти дуги являются решениями системы

$$x' = y, \quad y' = -g(x) \quad (f(x) \equiv 0), \tag{3.1.9}$$

многообразие их можно представить в форме (3.1.5), где теперь

$$-\infty < a < +\infty, \quad -\tau(a) \leqslant t \leqslant \tau(a).$$

Используя уравнения (3.1.9), имеем

$$\tau(a)=\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{2}}\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{G(a)-G(x)}}. \tag{3.1.10}$$

Значение $2\tau(a)$ назовем *полупериодом.*

Введем в рассмотрение $\tau(a,\vartheta)$ — *временную длину дуги*, начало которой имеет абсциссу ϑa $(0\leqslant\vartheta<1)$, а конец есть вершина $(a,0)$ $(a\neq 0)$:

$$\tau(a,\vartheta)=\frac{\operatorname{sgn} a}{\sqrt{2}}\int_{\vartheta a}^a\frac{dx}{\sqrt{G(a)-G(x)}},\quad \tau(a,0)=\tau(a), \tag{3.1.11}$$

причем положим $\tau(a,1)=0$.

Обозначим через $x=b(a)$ решение уравнения $G(x)=G(a)$, однозначно определяемое условием $\operatorname{sgn} b(a)=-\operatorname{sgn} a$. Рассмотрим замкнутую кривую (3.1.7) с абсциссой вершины, равной a, причем $C=2G(a)$. Время обхода этой кривой $2\theta(a)$. Отсюда будем иметь $\theta(a)=\tau(a)+\tau(b(a))$.

Изучение периодов всех возможных колебаний равносильно исследованию функции $\tau(a)$ в интервале $-\infty<a<\infty$. В частном случае $g(-x)=-g(x)$ $(G(-x)=G(x))$ имеем

$$b(a)=-a,\quad \tau(-a)=\tau(a),\quad \theta(a)=2\tau(a).$$

В дальнейшем в большинстве случаев аргумент функции τ мы будем обозначать через x.

Интересная задача состоит в выяснении условий, при выполнении которых $\tau(x)$ при $x\to+\infty$ монотонно возрастает (ограниченно или неограниченно) или монотонно убывает (и, может быть, стремится к нулю). Условия асимптотического поведения $\tau(x)$ для $x\to-\infty$ вполне аналогичны.

Следуя Опялю [12], рассмотрим два уравнения названного типа:

$$x''+g_1(x)=0,\quad x''+g_2(x)=0,$$

которым соответствуют функции $\tau_1(x)$ и $\tau_2(x)$.

Теорема 3.1.1. *Из неравенства*

$$\tau_1(x)\leqslant\tau_2(x),\quad x\neq 0, \tag{3.1.12}$$

следует неравенство

$$G_2(x)\leqslant G_1(x). \tag{3.1.13}$$

Из строгого неравенства (3.1.12) *при* $x\neq 0$ *вытекает строгое неравенство* (3.1.13).

Для доказательства теоремы предположим, что (3.1.13) не выполняется. Тогда существует значение $\xi\neq 0$ такое, что

$$G_2(\xi)-G_1(\xi)=\gamma>0,$$

причем можно ограничиться случаем $\xi > 0$. Пусть, кроме того, для $0 \leqslant x < \xi$ имеем

$$G_2(x) - G_1(x) < \gamma.$$

Из соотношения (3.1.12) при $x = \xi$, учитывая (3.1.10), получим

$$\int_0^{\xi} \frac{\sqrt{G_1(\xi) - G_1(x)} - \sqrt{G_2(\xi) - G_2(x)}}{\sqrt{G_1(\xi) - G_1(x)} \cdot \sqrt{G_2(\xi) - G_2(x)}}\, dx \geqslant 0. \qquad (3.1.14)$$

Поэтому должно существовать значение $x^* \in (0, \xi)$, для которого

$$\sqrt{G_1(\xi) - G_1(x^*)} \geqslant \sqrt{G_2(\xi) - G_2(x^*)};$$

отсюда

$$[G_2(x^*) - G_1(x^*)] \geqslant [G_2(\xi) - G_1(\xi)] = \gamma,$$

что противоречит сказанному выше.

Замечание. Из соотношения $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ для всех $x \neq 0$ следует тождество $G_1(x) \equiv G_2(x)$, т. е. $g_1(x) \equiv g_2(x)$.

В линейном частном случае $x'' + \omega^2 x = 0$ имеем $\theta_0 = 4\tau_0$, $\tau_0 = \pi/2\omega$, так что

$$g(x) = (\pi/2\tau_0)^2 x, \quad G(x) = (\pi^2/8\tau_0^2)\, x^2.$$

Из этого вытекает

Теорема 3.1.2. *Если для* $x \neq 0$

$$\tau(x) = \tau_0 \quad (\tau_0 — \textit{константа}),$$

то справедливо тождество $g(x) \equiv (\pi/2\tau_0)^2 x$.

Только свободные колебания с постоянным полупериодом являются гармоническими, т. е. теми, которые дает линейный вибратор.

Некоторым обращением теоремы 3.1.1 является

Теорема 3.1.3. *При выполнении условия*

$$|g_1(x)| \geqslant |g_2(x)| \quad \textit{для любого } x \qquad (3.1.15)$$

справедливо неравенство

$$\tau_1(x) \leqslant \tau_2(x). \qquad (3.1.16)$$

Действительно, вычислим для $0 \leqslant \xi \leqslant x$ разность

$$G_1(x) - G_1(\xi) = \int_{\xi}^{x} g_1(s)\, ds \geqslant \int_{\xi}^{x} g_2(s)\, ds = [G_2(x) - G_2(\xi)].$$

Аналогично, для $x \leqslant \xi \leqslant 0$ имеем

$$[G_1(x) - G_1(\xi)] = \int_{x}^{\xi} [-g_1(s)]\, ds \leqslant \int_{x}^{\xi} [-g_2(s)]\, ds = [G_2(x) - G_2(\xi)].$$

Отсюда и выводится (3.1.16).

На основании этого получаем

Замечание. Если для всех x справедливо неравенство

$$|g(x)| \geqslant \omega^2 |x| \quad (|g(x)| \leqslant \omega^2 |x|),$$

то для всех $x \neq 0$ имеем

$$\tau(x) \leqslant \pi/2\omega \quad (\tau(x) \geqslant \pi/2\omega).$$

Теорема 3.1.4. *Условие* (3.1.15) *необходимо и достаточно для того, чтобы*

$$\tau_1(x, \vartheta) \leqslant \tau_2(x, \vartheta) \quad \textit{для} \quad x \neq 0, \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1. \tag{3.1.17}$$

Вторая часть утверждения следует непосредственно из доказательства теоремы 3.1.3.

Для доказательства первой части заметим, что (3.1.17) выполнено только тогда, когда

$$\sqrt{G_2(x) - G_2(s)} \leqslant \sqrt{G_1(x) - G_1(s)} \tag{3.1.18}$$

для всякого значения $x \neq 0$, $0 \leqslant s/x \leqslant 1$. В противном случае при некотором $\gamma > 0$ мы имели бы

$$[G_2(\vartheta x) - G_1(\vartheta x)] = [G_2(x) - G_1(x)] - \gamma <$$
$$< [G_2(s) - G_1(s)] < [G_2(x) - G_1(x)] \quad (0 \leqslant \vartheta < 1, \ \vartheta < s/x < 1).$$

Кроме того, выполнено неравенство (3.1.18) хотя бы для одного значения s (чтобы (3.1.17) могло быть верным). Получаем противоречие.

Последующие теоремы Опяля [12] относятся к асимптотическому поведению функции $\tau(x)$.

Теорема 3.1.5. *Если* $\tau(x)$ *при возрастании* $|x|$ *в интервале* $0 < |x| < \infty$ *монотонно возрастает или убывает, то функция* $G(x)/x^2$ *изменяется в обратном смысле. То же справедливо для строгой монотонности.*

Для доказательства рассмотрим одну из четырех возможностей, предположив при этом для определенности возрастание $\tau(x)$ в интервале $(0, \infty)$ (в остальных случаях рассуждения аналогичны). Тогда, например, для $x > 0$, $p > 1$ справедливо неравенство

$$\tau(x) \leqslant \tau(px). \tag{3.1.19}$$

Далее, имеем

$$\tau(px) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{px} \frac{ds}{\sqrt{G(px) - G(s)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x} \frac{du}{\sqrt{G(px)/p^2 - G(pu)/p^2}}.$$

Поэтому неравенство (3.1.19) равносильно тому, что

$$\tau_1(x) \leqslant \tau_2(x), \quad g_1(x) = g(x), \quad g_2(x) = g(px)/p.$$

Отсюда на основании теоремы 3.1.1 получаем

$$G_2(x) = G(px)/p^2 \leqslant G_1(x) = G(x),$$

и, следовательно,

$$G(px)/(px)^2 \leqslant G(x)/x^2.$$

Обращением этой теоремы является

Теорема 3.1.6. *Если функция $g(x)/x$ при возрастании $|x|$ в интервале $0 < |x| < \infty$ монотонно возрастает или убывает, то функция $\tau(x)$ имеет обратное поведение.*

При доказательстве теоремы ограничимся одним из четырех случаев. Пусть $g(x)/x$ в $(0, \infty)$ убывает. Тогда для $x > 0$, $p > 1$ имеем

$$g(px)/(px) \leqslant g(x)/x, \quad g_2(x) = g(px)/p \leqslant g_1(x) = g(x)$$

и из теоремы 3.1.3 получим $\tau_1(x) \leqslant \tau_2(x)$, т. е. $\tau(x) \leqslant \tau(px)$.

В заключение изучим поведение функции $\tau(x)$ для $x \to +0$ и для $x \to \infty$. Исследование в интервале $x < 0$ может быть проведено аналогично.

Теорема 3.1.7. *Из соотношений*

$$\lim_{x\to\infty} (g_1(x)/g_2(x)) = k \tag{3.1.20}$$

или

$$\lim_{x\to+0} (g_1(x)/g_2(x)) = k \quad (0 \leqslant k \leqslant \infty) \tag{3.1.20'}$$

следует, что

$$\lim_{x\to\infty} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) = 1/k \tag{3.1.21}$$

и соответственно

$$\lim_{x\to+0} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) = 1/\sqrt{k}. \tag{3.1.21'}$$

1) Для доказательства в случае $x \to \infty$ и $0 < k < \infty$ выберем число ε $(0 < \varepsilon < k)$ и на основании (3.1.20) будем иметь при $x \geqslant x_0(\varepsilon) > 0$

$$(k - \varepsilon)\, g_2(x) \leqslant g_1(x) \leqslant (k + \varepsilon)\, g_2(x). \tag{3.1.22}$$

Полагая

$$\tau_i(x) = \tau_i\left(x, \frac{x_0}{x}\right) + \left\{\tau_i(x) - \tau_i\left(x, \frac{x_0}{x}\right)\right\} \quad (i = 1, 2),$$

где

$$\left\{\tau_i(x) - \tau_i\left(x, \frac{x_0}{x}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x_0} \frac{ds}{\sqrt{G_i(x) - G_i(s)}} < \frac{x_0/\sqrt{2}}{\sqrt{G_i(x) - G_i(x_0)}},$$

находим

$$\tau_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{x} \frac{ds}{\sqrt{G_i(x) - G_i(s)}} > \frac{(x - x_0)/\sqrt{2}}{\sqrt{G_i(x) - G_i(x_0)}}.$$

Отсюда

$$0 < \left\{\tau_i(x) - \tau_i\left(x, \frac{x_0}{x}\right)\right\} \Big/ \tau_i(x) < \frac{x_0}{x - x_0},$$

и, таким образом,

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\left[\tau_i(x)-\tau_i\left(x,\ \frac{x_0}{x}\right)\right]\Big/\tau_i(x)\right\}=0,$$

т. е.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tau_i(x,\ x_0/x)}{\tau_i(x)}=1, \tag{3.1.23}$$

для $x_0\leqslant s\leqslant x$ имеем

$$(k-\varepsilon)[G_2(x)-G_2(s)]\leqslant[G_1(x)-G(s)]\leqslant$$
$$\leqslant(k+\varepsilon)[G_2(x)-G_2(s)], \tag{3.1.24}$$

следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}}\,\tau_2\left(x,\ \frac{x_0}{x}\right)\leqslant\tau_1\left(x,\ \frac{x_0}{x}\right)\leqslant\frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}}\,\tau_2\left(x,\ \frac{x_0}{x}\right).$$

Отсюда получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\tau_1(x,\ x_0/x)}{\tau_2(x,\ x_0/x)}=\frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Из (3.1.23) вытекает соотношение (3.1.21).

Аналогично проводится доказательство для случая $k=0$ или $k=+\infty$, где вместо (3.1.22) используется односторонняя оценка и $1/\sqrt{k}$ заменяется соответственно $+\infty$ или нулем.

2) Если речь идет о равенствах (3.1.20′—3.1.21′), применим оценку (3.1.22) в интервале $(0, \delta)$ и получим (3.1.24) для $0\leqslant s\leqslant x\leqslant\delta$, так что

$$\frac{1}{\sqrt{k+\varepsilon}}\,\tau_2(x)\leqslant\tau_1(x)\leqslant\frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}}\,\tau_2(x).$$

Отсюда непосредственно следует доказываемое утверждение.

В частном случае линейной функции сравнения, т. е. для $g_1(x)=g(x)$, $g_2(x)=x$, доказанная теорема имеет такой вид:

Из того, что

$$\lim_{x\to\infty}(g(x)/x)=k \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to+0}(g(x)/x)=k,$$

следует (*так как* $\tau_2(x)=\pi/2$)

$$\lim_{x\to\infty}\tau(x)=\pi/(2\sqrt{k})$$

и соответственно

$$\lim_{x\to+0}\tau(x)=\pi/(2\sqrt{k}).$$

Если функция $g(x)$ в точке $x=0$ дифференцируема справа т. е.

$$\lim_{x\to+0}\frac{g(x)}{x}=g'_+(0),$$

то $\lim\limits_{x\to+0}\tau(x)=\pi/(2\sqrt{g'_+(0)})$.