

Если функция $g(x)$ дифференцируема для достаточно больших значений x и производная $g'(x)$ имеет предел при $x \rightarrow +\infty$, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x)/x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x) = g'(\infty),$$

и, таким образом, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = \pi/(2\sqrt{g'(\infty)})$.

Опять [12] обобщает теорему 3.1.7, учитывая границы изменения $g_1(x)/g_2(x)$. Тогда, применением такого же метода, как это было только что сделано, получаются оценки для границ изменения отношения функций $\tau_1(x)/\tau_2(x)$. Однако здесь мы не будем останавливаться на этом.

Теорема 3.1.8. Из того, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)/x^2 = k/2 \quad (0 \leq k < \infty),$$

следует

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) \geq \pi/(2\sqrt{k}). \quad (3.1.25)$$

Если же функция $G(x)/x^2$ монотонно возрастает, то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = \pi/(2\sqrt{k}). \quad (3.1.26)$$

В самом деле, пусть сначала $k = 0$. Тогда, задавая число $\varepsilon > 0$, определим $x_0(\varepsilon) > 0$ так, что для $x \geq x_0$

$$G(x) \leq \varepsilon x^2.$$

Тогда для этих значений x имеем

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G(x) - G(s)}} \geq \frac{x}{\sqrt{G(x)}} \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

так что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) \geq 1/\sqrt{2\varepsilon}$ и, следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) = +\infty$.

Пусть теперь $k > 0$ и $0 < \varepsilon < k$, причем для $x \geq x_0(\varepsilon) > 0$ выполнены неравенства

$$\frac{1}{2}(k - \varepsilon)x^2 \leq G(x) \leq \frac{1}{2}(k + \varepsilon)x^2.$$

Для этих значений x получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G(x) - G(s)}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{G(x) - G(s)}} \geq \\ &\geq \int_{x_0}^x \frac{ds}{\sqrt{(k + \varepsilon)x^2 - (k - \varepsilon)s^2}} = \frac{1}{\sqrt{k - \varepsilon}} \int_{u_0}^{u_0} \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}, \end{aligned}$$

где

$$u = \sqrt{\frac{k-\varepsilon}{k+\varepsilon}} \frac{x_0}{x}, \quad u_0 = \sqrt{\frac{k-\varepsilon}{k+\varepsilon}}.$$

Отсюда вытекает

$$\tau(x) \geq \frac{1}{\sqrt{k-\varepsilon}} \left\{ \arcsin \sqrt{\frac{k-\varepsilon}{k+\varepsilon}} - \arcsin \left(\sqrt{\frac{k-\varepsilon}{k+\varepsilon}} \frac{x_0}{x} \right) \right\},$$

и, следовательно, имеет место (3.1.25).

В случае, если $\gamma(x) = G(x)/x^2$ монотонно возрастает, получаем иную оценку:

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G(x) - G(s)}} = \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{\gamma(x)x^2 - \gamma(s)s^2}} \leq \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{\gamma(x)} \sqrt{x^2 - s^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\gamma(x)}},$$

и при этом $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau(x) \leq \pi/(2\sqrt{k})$, отсюда вытекает (3.1.26).

Теорема 3.1.9. Из того, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) = l, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) = L \\ (0 \leq l \leq L \leq +\infty),$$

следует

$$L^{-2} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (G_1(x)/G_2(x)) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (G_1(x)/G_2(x)) \leq l^{-2}. \quad (3.1.27)$$

Если $G_1(x) = G(x)$ и $G_2(x) = \pi^2 x^2/2$ и, в частности, $\tau_2(x) = 1$, то

$$(\pi/l)^2/2 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x)/x^2) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} (G(x)/x^2) \leq (\pi/l)^2/2.$$

При доказательстве, очевидно, можно ограничиться случаем $0 < l \leq L < \infty$. Кроме того, достаточно доказать лишь первую часть неравенства (3.1.27), так как его вторая часть следует из первой при замене функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и покажем, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (G_1(x)/G_2(x)) \geq (L + \varepsilon)^{-2}$$

или

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (G_1(x)/\bar{G}_2(x)) \geq 1,$$

где $\bar{G}_2(x) = G_2(x)/(L + \varepsilon)^2$. Пусть $\bar{\tau}_2(x) = (L + \varepsilon)\tau_2(x)$, и, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tau_1(x)/\bar{\tau}_2(x)) = L/(L + \varepsilon) < 1.$$

Поэтому достаточно доказать в первоначальной записи неравенство

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (G_1(x)/G_2(x)) \geq 1 \quad (3.1.28)$$

при условии

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) < 1. \quad (3.1.29)$$

Из (3.1.29) для интервала $x \geq x_0$ следует

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G_1(x) - G_1(s)}} < \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G_2(x) - G_2(s)}}. \quad (3.1.30)$$

Если $g_1(x) < g_2(x)$ в этом интервале, то, как при доказательстве теоремы 3.1.7, показываем, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tau_i(x, x_0/x)}{\tau_i(x)} = 1,$$

и так как $\tau_2(x, x_0/x) < \tau_1(x, x_0/x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [\tau_1(x, x_0/x)/\tau_2(x, x_0/x)] \geq 1.$$

Отсюда имеем также

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\tau_1(x)/\tau_2(x)) \geq 1.$$

Последнее неверно, поэтому существует значение $\xi \geq x_0$, для которого $g_1(\xi) \geq g_2(\xi)$.

Определим функцию

$$\bar{g}_1(x) = \begin{cases} \max(g_1(x), g_2(x)) & \text{для } 0 \leq x \leq \xi, \\ g_1(x) & \text{для } x \geq \xi. \end{cases}$$

Очевидно, функция $\bar{g}_1(x)$ непрерывна и удовлетворяет условиям

$$\bar{g}_1(x) \geq g_1(x) \text{ в } [0, +\infty), \quad \bar{g}_1(x) \geq g_2(x) \text{ в } [0, \xi].$$

Пусть $\bar{G}_1(x) = \int_0^x \bar{g}_1(s) ds$. Отсюда для $0 \leq x < +\infty$ имеем

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{\bar{G}_1(x) - \bar{G}_1(s)}} \leq \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G_1(x) - G_1(s)}}, \quad (3.1.31)$$

а для $0 \leq x \leq \xi$ и, на основании (3.1.30) и (3.1.31), также для $x > \xi (\geq x_0)$

$$\int_0^x \frac{ds}{\sqrt{\bar{G}_1(x) - \bar{G}_1(s)}} \leq \int_0^x \frac{ds}{\sqrt{G_2(x) - G_2(s)}}. \quad (3.1.32)$$

Из теоремы 3.1.1 для $x \geq 0$ получаем $G_2(x) \leq \bar{G}_1(x)$, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{G}_1(x)/G_2(x) \geq 1.$$

С другой стороны, для $x \geq \xi$ имеем

$$\begin{aligned} G_1(x) &= \bar{G}_1(x) - [\bar{G}_1(x) - G_1(x)] = \bar{G}_1(x) - \int_0^x [\bar{g}_1(s) - g_1(s)] ds = \\ &= \bar{G}_1(x) - \int_0^\xi [\dot{\bar{g}}_1(s) - \dot{g}_1(s)] ds, \end{aligned}$$

т. е. $\lim_{x \rightarrow \infty} G_1(x)/\bar{G}_1(x) = 1$, откуда следует (3.1.28).

Теоремы Опяля 3.1.1—3.1.9 подробно выясняют связь между возрастанием члена $g(x)$ уравнения колебаний $x'' + g(x) = 0$ и периодами возможных свободных колебаний. Эти результаты находят применение в технических вопросах. Более того, в п. 5.1 мы увидим, что на основании проведенных исследований может быть изучено поведение вынужденных колебаний, в частности, выяснен вопрос о периодических решениях уравнения

$$x'' + g(x) = e(t) \quad [e(t + \theta) \equiv e(t)].$$

3.2. Семейство периодических решений уравнения Льенара

Чтобы найти достаточно общие условия существования многообразия периодических решений уравнения (3.1.1), предположим, что $f(x) \not\equiv 0$ в окрестности точки $x = 0$. Кроме того, потребуем, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ были нечетными:

$$f(-x) = -f(x), \quad g(-x) = -g(x). \quad (3.2.1)$$

Благодаря этому фазовая картина на плоскости xy или на плоскости xv симметрична относительно вертикальной оси. Отметим, что это свойство симметрии нужно только в окрестности нулевой точки, т. е. именно там, где мы хотим обнаружить семейство циклов. Дифференциальное уравнение (3.1.1), удовлетворяющее условиям (3.1.4) и (3.2.1), следуя Опялю [4], назовем дифференциальным *уравнением типа S*.

Рассматриваемой проблеме посвящены работы Мак-Харга [1], Венделя [1], Филиппова [1] и Опяля [2]. Прежде всего выделим обширное исследование Опяля [2] и приведем содержащиеся там две теоремы, включая их доказательства.

Опаль изучал фазовую диаграмму, описываемую системой (3.1.2), ограничиваясь при этом рассмотрением лишь правой полупространства, что допустимо благодаря симметрии. Выше и

ниже горизонтальной оси $y = 0$ система (3.1.2) исключением t приводится к одному уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y}. \quad (3.2.2)$$

Это значит, что уравнения дуг интегральных кривых вне оси абсцисс можно записать в форме $y = y(x)$ (причем в концевых точках этих дуг касательная вертикальна). Дуги, которые выходят из точки $(\xi, 0)$ вверх и вниз, обозначим соответственно L_ξ^+ ($y > 0$) и L_ξ^- ($y < 0$), а их объединение (сумму) — через L_ξ . Движение, описываемое системой (3.1.2), пробегает сначала дугу L_ξ^+ до точки $(\xi, 0)$, а затем дугу L_ξ^- . При этом траектория движения расположена в ограниченной области между перпендикулярами $x = 0$ и $x = \xi$, так как производная $\frac{dy}{dx}$ ограничена всюду, кроме некоторой горизонтальной полосы, заключенной между прямыми $y = \pm\eta$, где η сколь угодно мало. Как

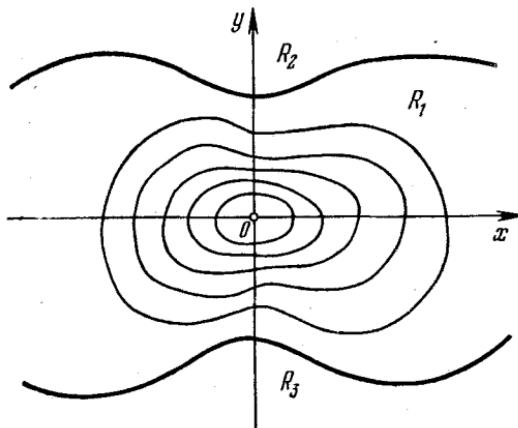


Рис. 3.2.1.

следует из (3.1.2), в этой области траектория движения имеет направление слева направо при $y > 0$ и справа налево при $y < 0$, причем на положительной полуоси x фазовая траектория направлена сверху вниз, пересекает ее в точке $(\xi, 0)$ и, возможно, входит в начало координат. Следовательно, дуги L_ξ^+ и L_ξ^- при их продолжении пересекают ось ординат. Здесь следует различать отдельные случаи.

А. Для каждого значения $\xi > 0$ дуги L_ξ^+ и L_ξ^- пересекают вертикальную ось не в начале координат (рис. 3.2.1).

В силу предположенной симметрии кривые L_ξ в этом случае замкнуты. При $0 \leq \xi < \infty$ они покрывают некоторую полосу R_1 .

содержащую ось x . Обозначим через R_2 и R_3 области, лежащие соответственно выше и ниже этой полосы. Области R_2 и R_3 заполнены интегральными кривыми $y(x)$, определенными для всех x . При известных условиях области R_2 и R_3 вообще не существуют, так что каждая фазовая кривая есть цикл. Если выбрать точку $(x_0, y_0) \in R_1$, то решение

$$\{x(t), y(t)\}, \quad x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0 \quad (t_0 \text{ — любое})$$

уравнения (3.1.1) окажется периодическим. Это заведомо имеет место, если модули обоих начальных значений x_0 и y_0 достаточно малы.

В. Для всех ξ кривые L_ξ^+ и L_ξ^- пересекают ось ординат в начале координат O (рис. 3.2.2). Тогда фазовая плоскость так же распадается на три области R_1 , R_2 , R_3 , но в этом случае никакая из них не является пустой. Средняя область содержит кривые L_ξ и их зеркальные отображения. В этом случае нет замкнутых фазовых траекторий.

С. Для любого $\xi > 0$ только одна из кривых L_ξ^+ , L_ξ^- пересекает ось y в нулевой точке O (рис. 3.2.3). Ситуация аналогична случаю В. Однако здесь одна из областей R_2 или R_3 может оказаться пустой. Замкнутые фазовые траектории отсутствуют.

Д. Для всех достаточно малых ξ , $0 < \xi < \xi_0$, одна из кривых L_ξ^+ , L_ξ^- граничит с началом коор-

Рис. 3.2.2.

три области R_1 , R_2 , R_3 , но в этом случае никакая из них не является пустой. Средняя область содержит кривые L_ξ и их зеркальные отображения. В этом случае нет замкнутых фазовых траекторий.

Рис. 3.2.3.

динат O , но для $\xi > \xi_0$ ни L_ξ^+ , ни L_ξ^- не проходит через начало (рис. 3.2.4).

Плоскость xy делится на четыре области: R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , из которых последние могут быть пустыми. Фазовые траектории

в области R_2 — замкнутые траектории. В случаях В, С и Д общим является то, что в них не существует периодических решений уравнения (3.1.1) при сколь угодно малых абсолютных величинах начальных значений x_0, y_0 . Лишь в случае А существует семейство периодических решений желаемого вида, причем никакая из интегральных кривых уравнения (3.2.2) не проходит через начало координат. На этом свойстве Опять основывает доказательство следующей теоремы.

Теорема 3.2.1. Если $F(x) = \int_0^x f(s) ds$ и

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \geq \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) |F(x)| \quad (3.2.3)$$

при $0 \leq x \leq x_1$ и любом $\varepsilon > 0$, то все решения дифференциального уравнения Лъенара типа S при достаточно малых абсолютных величинах начальных значений периодические.

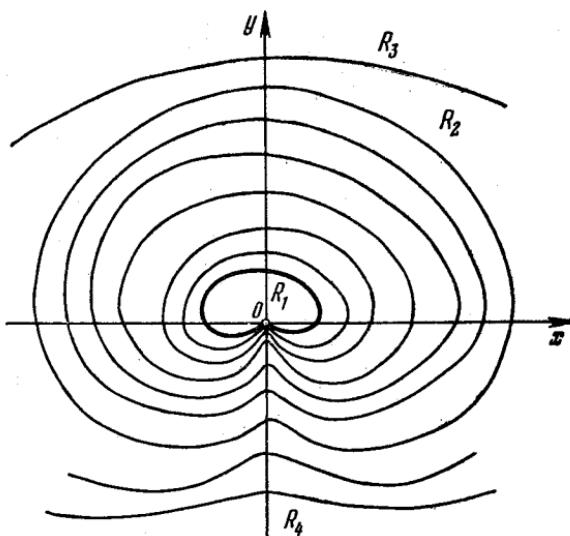


Рис. 3.2.4.

Действительно, положим, что уравнение (3.2.2) допускает решение, входящее в начало координат, и покажем, что это приводит к противоречию. Как известно, такое решение в некотором открытом интервале $(0, x_2)$ обладает определенным знаком, пусть $x_2 < x_1$. Для $0 < \delta < x < x_2$ справедливо равенство

$$y(x) - y(\delta) = -[F(x) - F(\delta)] - \int_{\delta}^x \frac{g(s)}{y(s)} ds;$$

отсюда при $\delta \rightarrow 0$, учитывая, что $\lim_{\delta \rightarrow 0} y(\delta) = 0$, имеем

$$y(x) = -F(x) - \int_0^x \frac{g(s)}{y(s)} ds. \quad (3.2.4)$$

Если $y(x) > 0$ в $(0, x_2)$, то и интеграл, стоящий в правой части (3.2.4), положителен. Отсюда следует, что $y(x) < -F(x)$, т. е. $F(x) < 0$ для $0 < x < x_2$.

Поэтому можно вместо (3.2.4) написать

$$|y(x)| = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{|y(s)|} ds. \quad (3.2.5)$$

К такому же результату придем при $y(x) < 0$, где $F(x) > 0$. В обоих случаях имеем $|y(x)| \leq |F(x)|$ или

$$1/|y(x)| \geq 1/|F(x)|. \quad (3.2.6)$$

Отсюда получаем, что из интегрируемости функции $g(x)/|y(x)|$ на $[0, x_2]$ следует интегрируемость на $[0, x_2]$ также функции $g(x)/|F(x)|$.

Покажем, что если выполнено неравенство (3.2.3), то функция $g(x)/|F(x)|$ не интегрируема ни в каком промежутке $[0, x]$, где $x > 0$; тем самым доказательство теоремы будет завершено.

Действительно, предположим, что функция $g(x)/|F(x)|$ интегрируема на некотором промежутке $0 \leq x \leq x_3 \leq x_2$. Тогда из (3.2.3) для $0 \leq x \leq x_3$ будем иметь

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \geq \alpha |F(x)|,$$

где $\alpha > 0$. Отсюда на основании (3.2.5) и (3.2.6) получим

$$|y(x)| \leq |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \leq (1 - \alpha) |F(x)| = \alpha_1 |F(x)|,$$

Заменяя в формуле (3.2.5) под знаком интеграла $|y(x)|$ через $\alpha_1 |F(x)|$, будем иметь

$$|y(x)| \leq |F(x)| - \frac{1}{\alpha_1} \int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \leq \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha_1}\right) |F(x)| = \alpha_2 |F(x)|.$$

Неограниченное продолжение этого процесса приводит для $0 \leq x < x_3$ к неравенствам

$$|y(x)| \leq \alpha_n |F(x)|, \quad \alpha_n = 1 - \frac{\alpha}{\alpha_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \dots; \alpha_0 = 1). \quad (3.2.7)$$

При $\alpha > 1/4$ не все члены бесконечной последовательности $\{\alpha_n\}$ положительны. В противном случае эта последовательность была бы монотонно убывающей и стремилась бы к некоторому пределу $\beta \geq 0$, где $\beta^2 - \beta + \alpha = 0$. Однако корни этого квадратного уравнения в рассматриваемом случае — комплексные числа. Поэтому в конце концов какое-то из чисел α_n окажется отрицательным, и неравенство (3.2.7) приведет к противоречию.

Таким образом, предположение, что интегральная кривая $y(x)$ уравнения (3.2.2) входит в начало координат, несовместимо с условием (3.2.3).

Другая теорема Опяля, при отказе от этого предположения, дает достаточное условие отсутствия семейства периодических решений рассматриваемого типа.

Теорема 3.2.2. *При выполнении условия*

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \leq \frac{1}{4} |F(x)|, \quad 0 \leq x \leq x_1, \quad (3.2.8)$$

дифференциальное уравнение Льенара типа S обладает непериодическими решениями со сколь угодно малыми по абсолютной величине начальными значениями. Если можно положить $x_1 = \infty$, то уравнение не имеет периодических решений.

Для доказательства теоремы Опяль показывает, что при наличии неравенства (3.2.8) невозможен случай А, рассмотренный выше. С этой целью методом последовательных приближений конструируется интегральная кривая уравнения (3.2.2), входящая в начало координат плоскости xy . Эта кривая соответствует некоторому непрерывному решению интегрального уравнения (3.2.4).

Различие между двумя возможными случаями $F(x) > 0$ и $F(x) < 0$ несущественно. Уравнение (3.2.4) можно заменить уравнением (3.2.5) и, полагая $|y(x)| = u(x)$, написать

$$u(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{u(s)} ds. \quad (3.2.9)$$

Воспользуемся этим уравнением для построения искомого решения на отрезке $[0, x_1]$.

В качестве первого приближения возьмем

$$u_1(x) = |F(x)|.$$

Второе приближение определим так:

$$u_2(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{u_1(s)} ds = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds.$$

Полагая $\alpha_2 = 1 - 1/4 = 3/4$, получим

$$\alpha_2 |F(x)| \leq u_2(x) \leq u_1(x).$$

Обозначая, далее,

$$u_3(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{u_2(s)} ds$$

или, вообще,

$$u_{n+1}(x) = |F(x)| - \int_0^x \frac{g(s)}{u_n(s)} ds \quad (n = 1, 2, \dots),$$

будем иметь $\alpha_3 |F(x)| \leq u_3(x) \leq u_2(x)$, где $\alpha_3 = 1 - 1/4\alpha_2 = 4/6$, и соответственно $\alpha_n |F(x)| \leq u_n(x) \leq u_{n-1}(x)$, где $\alpha_n = 1 - 1/4\alpha_{n-1} = = (n+1)/2n$.

Числа α_n образуют монотонно убывающую положительную последовательность, сходящуюся к $1/2$. Убывающая функциональная последовательность $\{u_n(x)\}$ сходится при этом к предельной функции $u(x) \geq |F(x)|/2$.

На основании теоремы Лебега отсюда следует, что последовательность интегралов $\left\{ \int_0^x \frac{g(s)}{u_n(s)} ds \right\}$ сходится к интегралу

$\int_0^x \frac{g(s)}{u(s)} ds$, причем предельная функция $u(x)$ является непрерывным решением интегрального уравнения (3.2.9) и, следовательно, в достаточно малой окрестности точки O , в силу свойства единственности, периодические решения отсутствуют *).

Для $x_1 = \infty$ найденное решение $u(x)$ существует на положительной полуоси x , так что случай D невозможен и замкнутых траекторий нет. Этим теорема доказана полностью.

Опять доказал также теорему, аналогичную теореме 3.2.1, при несколько других условиях.

Работа Филиппова [1] посвящена доказательству существования предельного цикла на фазовой плоскости для дифференциального уравнения Льенара. Из его теоремы (которую мы рассмотрим позднее) следует теорема 3.2.1, при этом, однако, неравенство (3.2.3) заменяется для $0 \leq x \leq x_1$ условием

$$(8 - \varepsilon) G(x) \geq F^2(x). \quad (3.2.10)$$

*) Очевидно, $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |y(x)| = 0$, и, таким образом, случай A отпадает. (Прим. перев.)

Опять замечает, что условие (3.2.10) более ограничительно, чем (3.2.3), так как

$$\int_0^x \frac{g(s)}{|F(s)|} ds \geq \frac{1}{\sqrt{8-\epsilon}} \int_0^x \frac{g(s)}{\sqrt{G(s)}} ds = \frac{2\sqrt{G(x)}}{\sqrt{8-\epsilon}} \geq \frac{2}{8-\epsilon} |F(x)| \geq \left(\frac{1}{4} + \eta\right) |F(x)|,$$

где $\eta = \epsilon/32$.

Еще в более ранних исследованиях, приведенных в книге Немыцкого и Степанова [1], Филиппов пришел к теореме 3.2.1. Он при этом требует

$$xf(x) > 0 \quad \text{для } x \neq 0$$

и

$$g(x) \geq \left(\frac{1}{4} + \epsilon\right) f(x) F(x) \quad \text{для } 0 \leq x \leq x_1. \quad (3.2.11)$$

То, что условие (3.2.3) слабее условия (3.2.11), видно непосредственно. Условие (3.2.10) выполнено, если имеет место условие (3.2.11). Действительно, так как

$$\frac{d}{dx} G(x) \geq \left(\frac{1}{8} + \frac{\epsilon}{2}\right) \frac{d}{dx} F^2(x) = \frac{1}{8-\epsilon} \frac{d}{dx} F^2(x),$$

то путем почлененного интегрирования на сегменте $[0, x]$ получим оценку (3.2.10).

Мы кратко изложим доказательство Филиппова, имеющееся в книге Немыцкого и Степанова, так как метод доказательства представляет самостоятельный интерес.

Рассмотрим фазовую диаграмму на плоскости xy , которая вне оси абсцисс описывается уравнением (3.2.2), и построим на этой плоскости семейство кривых

$$W(x, y) \equiv 2G(x) + y^2 = C. \quad (3.1.7)$$

Семейство (3.1.7) является топографической системой в смысле Пуанкаре (см. п. 2.8).

Пусть P_0 — точка интервала $(0, y_0)$ такая, что $y_0 \leq \sqrt{2G(x_1)}$, и пусть L — интегральная кривая уравнения (3.2.2), проходящая через точку P_0 . Будем следовать по L в направлении возрастания значений t .

Из (3.1.2) видно, что x возрастает до тех пор, пока L остается в верхней полуплоскости, при этом $\frac{dy}{dx} \leq 0$, вследствие чего кривая L приближается к оси x .

Из соотношения

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} (2G(x) + y^2) = -2f(x)y^2 \leq 0 \quad (3.2.12)$$

заключаем, что топографическая система (3.1.7) пересекается интегральными кривыми в направлении уменьшения

параметра C . Поэтому кривая L целиком содержится в области, ограниченной линией $2G(x) + y^2 = y_0^2$, и входит в точку $P(\xi, 0)$ на оси x перпендикулярно этой оси. В точке $(\xi, 0)$ имеем

$$W(\xi, 0) = 2G(\xi) \leq W(0, y_0) = y_0^2 \leq 2G(x_1),$$

т. е. $0 < \xi \leq x_1$.

Интегральная кривая, выходящая из точки P , при возрастании t войдет в нижнюю полуплоскость. Там ее абсцисса монотонно убывает. Так как производная y' положительна или отрицательна, то эта кривая находится соответственно под или над кривой, определяемой уравнением

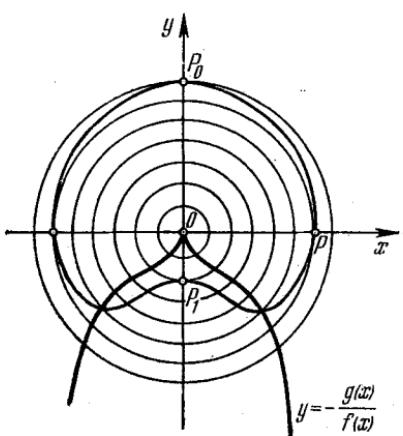


Рис. 3.2.5.

$$y = -\frac{g(x)}{f(x)} \leq -\left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right)F(x),$$

и поэтому интегральная кривая не может опять достичь оси x , кроме как в начале координат (рис. 3.2.5).

Однако мы покажем, что интегральная кривая не может войти в начало координат. В самом деле, предположим, что это

произошло. Тогда для $y < 0$ и $0 < x < x_1$ имеем

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{g(x)}{y} \geq -\frac{f(x)}{y} \left(y + \frac{1}{4}F(x) + \varepsilon F(x)\right).$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{y(x)}{F(x)} \right) &\geq -\frac{f(x)}{yF^2(x)} \left[yF(x) + \frac{1}{4}F^2(x) + \varepsilon F^2(x) + y^2 \right] = \\ &= -\frac{f(x)}{yF^2(x)} \left[\left(y + \frac{1}{2}F(x)\right)^2 + \varepsilon F^2(x) \right] > 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что при $x \rightarrow 0$ функция $y(x)/F(x)$ убывает. Следовательно, существует предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y(x)}{F(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y'(x)}{f(x)} = -\beta < 0,$$

где $-\beta \geq -1 + (1/4 + \varepsilon)/\beta$, т. е. $(\beta - 1/2)^2 + \varepsilon \leq 0$. Но это невозможно. Поэтому рассматриваемая интегральная кривая не может войти в начало координат.

Таким образом, траектория системы (3.1.2) пересекает ось ординат в некоторой точке $P_1(0, y_1)$, где $y_1 < 0$. Дуга $\widehat{P_0PP_1}$ вместе со своим зеркальным отображением относительно оси ординат образует цикл.

Заметим, что предположение $xf(x) > 0$ нужно лишь в интервале $0 < x \leqslant x_1$. Отметим еще ряд аналогичных результатов.

Требования Мак-Харга [1] в теореме 3.2.1 таковы:

$$xf(x) > 0, \quad x \neq 0; \quad f(x) < kg(x), \quad 0 < x < x_1, \quad (3.2.13)$$

а соответствующие предположения Венделя [1] выглядят так:

$$\left. \begin{aligned} 0 < f(x) < kg(x) &\text{ для } 0 < x < x_1; \\ F(x) \geqslant 0, \quad G(\infty) < \infty \quad \text{или} \quad F(x) \geqslant 0 &\text{ для } x \geqslant x_2; \\ G(\infty) = \infty. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.14)$$

Условия (3.2.14), очевидно, слабее условий (3.2.13); однако они являются более сильными, чем условия (3.2.11), так как

$$g(x) \geqslant \frac{1}{k} f(x) \geqslant \left(\frac{1}{4} + \varepsilon \right) f(x) F(x),$$

если

$$1/k \geqslant (1/4 + \varepsilon) \sup_{[0, x_1]} F(x).$$

Последнее неравенство всегда достигается за счет уменьшения x_1 . Наконец, Вендель [1] указал, что условия

$$F(x) \leqslant 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant x_1; \quad F(x) \geqslant 0, \quad x \geqslant x_2; \quad G(\infty) = \infty \quad (3.2.15)$$

достаточны для периодичности всех решений уравнения (3.1.1).

Доказательство основывается на рассмотрении фазовой картины на плоскости xv системы (3.1.3). Здесь фазовые траектории на правой полуплоскости имеют направление сверху вниз, а на оси ординат направлены горизонтально. Над кривой $v = F(x)$ они идут слева направо, под ней — в противоположном направлении (рис. 3.2.6).

Фазовую плоскость представим себе покрытой кривыми сравнения $W(x, v) = 2G(x) + v^2 = C$. Вдоль фазовой траектории выполняется равенство

$$\frac{dW}{dt} = -2g(x)F(x),$$

так что W в полосе $0 \leqslant x \leqslant x_1$ возрастает, а при $x \geqslant x_2$ убывает.

Будем перемещаться по траектории, начинающейся в любой точке $P_0(0, v_0)$, где $v_0 > 0$, в направлении возрастания

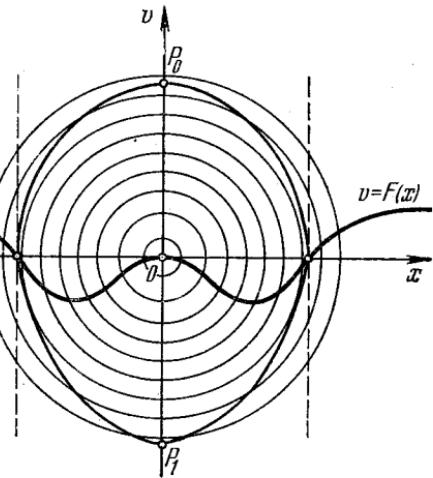


Рис. 3.2.6.

значений t . Прежде всего траектория удаляется от оси v , при этом v монотонно уменьшается. Если траектория войдет даже в область $x \geqslant x_2$, то она пересечет кривую сравнения снаружи внутрь и затем пересечет ось x , а также кривую $v = F(x) \geqslant 0$. Начиная отсюда, траектория опять будет приближаться к оси v , и так как $F(x) \leqslant 0$ при $0 \leqslant x \leqslant x_1$ и $\frac{dv}{dx} \leqslant M(\delta)$ при $v \leqslant F(x) - \delta$, то она пересечет ось v в некоторой точке $P_1(0, v_1)$, где $-\infty < v_1 \leqslant 0$.

Кривая не может войти в начало координат, так как на траектории имеется точка $Q(\xi, \eta)$, где $0 < \xi \leqslant x_1$, $\eta \leqslant 0$, и, таким образом,

$$W(0, v_1) = v_1^2 \geqslant 2G(\xi) + \eta^2 > 0.$$

Зеркальное отображение дуги $\widehat{P_0P_1}$ относительно оси ординат дополняет ее до цикла. На этом заканчивается доказательство.

Основной гипотезой этой главы являлась симметричность фазовой картины для уравнения (3.2.1). Но такие предпосылки осуществляются в реальных физических системах лишь приближенно вследствие неизбежных помех и ошибок. Это снижает практическое значение доказанных теорем существования свободных колебаний.

4.1. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + x = 0$

Займемся изучением условий существования изолированных периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка типа (1.1)–(1.3), а также более общего вида. Таким решениям (мы, естественно, не причисляем к ним тривиальное решение $x = 0$) соответствуют на фазовой плоскости xy так называемые *пределные циклы*, в ε -окрестности каждого из которых не содержится других замкнутых траекторий. Если точка (x_0, y_0) лежит на некотором предельном цикле, то отвечающее ему периодическое решение $x(t)$ можно определить заданием начальных условий

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0,$$

где t_0 — любой момент времени. Таким образом, получается бесконечно много периодических решений, отличающихся друг от друга лишь сдвигом шкалы времени. Все эти решения будем рассматривать как одно решение, которое назовем *единственным*, если кроме этого решения никакого другого периодического решения (в указанном выше смысле) не существует. Фазовая картина правильно отображает наше представление: различным решениям в этом смысле соответствуют различные траектории.

Общим методом обнаружения предельных циклов является построение кольцевой области, удовлетворяющей условиям теоремы Пуанкаре — Бендиксона (теорема 2.8.8). Кроме этого используются также специальные аналитические способы. При изложении мы будем придерживаться рассуждений отдельных авторов, причем для полученных ими условий существования периодических решений укажем возможные обобщения.

Начнем с уравнения Льенара (3.1.1), эквивалентного системе (3.1.2) или (3.1.3) двух дифференциальных уравнений первого порядка. Функции $f(x)$ и $g(x)$ подчиним таким же условиям регулярности, что и в предыдущей главе.

Сначала рассмотрим частный случай, когда $g(x) = x$, т. е.

$$x'' + f(x)x' + x = 0, \quad (4.1.1)$$

и соответственно

$$x' = y, \quad y = -x - f(x)y \quad (4.1.2)$$

или

$$x' = -F(x) + v, \quad v' = -x. \quad (4.1.3)$$

Для изучения фазовой картины на плоскости xv построим семейство концентрических окружностей $x^2 + v^2 = \text{const}$. Вдоль фазовых траекторий имеем

$$(x^2 + v^2)' = -2xF(x).$$

Отсюда следует, что никакого цикла не существует, если для всех значений x имеем

$$xF(x) \geq 0 \text{ или } xF(x) \leq 0, \quad (4.1.4)$$

причем $f(x) \neq 0$ в окрестности точки $x = 0$.

Это условие особенно интересно, если $f(x)$ имеет определенный знак, так что член $f(x)x'$ уравнения (4.1.1) описывает положительное или отрицательное затухание. В первом случае тривиальное решение устойчиво в целом, во втором — неустойчиво в целом. Таким образом, существование предельного цикла возможно лишь тогда, когда функция $f(x)$ принимает значения разных знаков. Достаточное условие существования предельного цикла дает следующая теорема Сансоне [1].

Теорема 4.1.1. Уравнение (4.1.1) обладает по меньшей мере одним периодическим решением, если

a) $f(x) < 0$ на (δ_1, δ_2) , причем $\delta_1 < 0 < \delta_2$, $f(x) > 0$ на $(-\infty, \delta_1)$ и на $(\delta_2, +\infty)$;

b₁) $4N(x_0 + N) \leq [F(x_0) - F(\delta_2)]^2$ для некоторого $x_0 > \delta_2$, где

$$N = F(\delta_1) - F(\delta_2) = \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)| dx,$$

или

$$b_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

Для доказательства рассмотрим решение $x(t)$ с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0 > 0, \quad x'(t_0) = 0.$$

Так как $x''(t_0) = -x_0$, то интегральная кривая $x(t)$ в момент времени t_0 имеет максимум. Пусть x_2 — соседний максимум этой интегральной кривой, который, очевидно, является непрерывной функцией x_0 . Ниже будет показано, что для малых значений x_0 , т. е. при $0 < x_0 < \delta = \min[|\delta_1|, \delta_2]$, справедливо неравенство

$$x_2 > x_0. \quad (4.1.5)$$

С другой стороны, для большего значения x_0 , а именно такого, что (в случае b_1)

$$4N(x_0 + N) \leq [F(x_0) - F(\delta_2)]^2$$

и соответственно (в случае b_2)

$$\lambda(x_0 - 2N) \geq \delta_2, \quad \sqrt{1 - \lambda^2} [F[\lambda(x_0 - 2N)] - F(\delta_2)] \geq 2N,$$

где $0 < \lambda < 1$, имеет место неравенство противоположного смысла

$$x_2 < x_0. \quad (4.1.6)$$

Отсюда на основании непрерывности следует, что равенство $x_2 = x_0$ может быть реализовано. Это условие необходимо и достаточно для периодичности решения $x(t)$.

Пользуясь фазовой картиной на плоскости xy , аналитические исследования можно истолковать геометрически. Здесь максимумам интегральной кривой соответствуют точки пересечения ее траектории с положительной полуосью x и минимумам — точки пересечения с отрицательной полуосью. Все фазовые траектории спиралевидно закручиваются вокруг начала координат. При этом в силу равенства $w' = -2f(x)y^2$ они пересекают окружности $w = x^2 + y^2 = \text{const}$ в полосе $\delta_1 < x < \delta_2$ изнутри нару-

жу, а вне этой полосы — в противоположном направлении. Отсюда непосредственно следует справедливость неравенства (4.1.5). Что касается неравенства (4.1.6), заметим, что любое из условий b_1 , b_2 обеспечивает для больших значений $|x|$ значительное уменьшение w на фазовой траектории. Обе дуги траектории, обладающие свойством (4.1.5) и соответственно свойством (4.1.6), дополненные до замкнутых кривых отрезками оси абсцисс, ограничивают кольцевую область, удовлетворяющую условиям теоремы Бендиксона.

Для доказательства неравенства (4.1.6) рассмотрим на плоскости xy при достаточно большом x_0 дуги траектории $ABCDEF$ (рис. 4.1.1) и оценим изменение w на ее отдельных частях (см. Сансоне [1]). При этом будем обозначать значение величины w в точке A через w_A и т. д. На \widehat{CB} справедливо

$$\frac{dw}{dx} = -2f(x)y, \quad \frac{d\sqrt{w}}{dx} = f(x) \frac{|y|}{\sqrt{w}} \geq f(x)$$

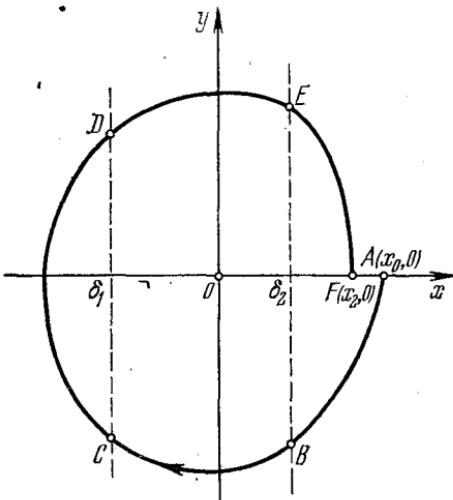


Рис. 4.1.1.

и, следовательно,

$$0 < V\overline{w_C} - V\overline{w_B} < \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)| dx = N.$$

Аналогично на \widehat{DE} находим

$$\frac{dV\overline{w}}{dx} \leq -f(x), \quad 0 < V\overline{w_E} - V\overline{w_D} < \int_{\delta_1}^{\delta_2} |f(x)| dx = N.$$

Очевидно, что $w_D \leq w_C$, и поэтому $V\overline{w_E} < V\overline{w_B} + 2N$.

На \widehat{BA} имеем

$$y - y_B = -F(x) + F(\delta_2) - \int_{\delta_2}^x \frac{\xi}{y(\xi)} d\xi.$$

В частности, в интервале $\delta_2 \leq x \leq V\overline{w_B} < x_0$ получаем

$$y - y_B \leq -F(x) + F(\delta_2) + \int_{\delta_2}^x \frac{\xi}{V\overline{w_B} - \xi^2} d\xi,$$

отсюда

$$|y| \geq F(x) - F(\delta_2) + V\overline{w_B - x^2}$$

и

$$[F(x) - F(\delta_2)]^2 + 2[F(x) - F(\delta_2)] V\overline{w_B - x^2} + w_B \leq x^2 + y^2 < x_0. \quad (4.1.7)$$

Наконец, на \widehat{EF} будем иметь

$$\frac{dw}{dx} = -2f(x)y = -2f(x)V\overline{w - x^2} \leq -2f(x)V\overline{w - x_2^2},$$

$$\frac{dV\overline{w - x_2^2}}{dx} < -f(x); \quad V\overline{w_E - x_2^2} > \int_{\delta_2}^{x_2} f(x) dx$$

и, таким образом,

$$w_E > x_2^2 + [F(x_2) - F(\delta_2)]^2.$$

Полагая $x_0 \leq x_2$, получим

$$x_0^2 + [F(x_0) - F(\delta_2)]^2 < w_E < [V\overline{w_B} + 2N]^2$$

и

$$\begin{aligned} x_0^2 + 4N(x_0 + N) &> w_B + 4N[V\overline{w_B} + N] > \\ &> x_0^2 + [F(x_0) - F(\delta_2)]^2. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Выбирая x_0 на основании условия b_1), получим противоречие с последним неравенством. Тем самым доказано неравенство (4.1.6).

Предположим теперь, что выполнено условие b_2). Из (4.1.7) и (4.1.8) для $x = \lambda \sqrt{w_B}$, где $0 < \lambda < 1$, получаем

$$4N^2 + 4N \sqrt{w_B} > [F(x_0) - F(\delta_2)]^2 + \{F[\lambda \sqrt{w_B}] - F(\delta_2)\}^2 + 2 \{F[\lambda \sqrt{w_B}] - F(\delta_2)\} \sqrt{1 - \lambda^2} \cdot \sqrt{w_B}.$$

Отсюда следует, что неравенство

$$\sqrt{1 - \lambda^2} \{F[\lambda \sqrt{w_B}] - F(\delta_2)\} \geq 2N$$

невозможно.

Возьмем $x_0 > 2N + \delta^2$, причем подберем число λ так, чтобы $\lambda(x_0 - 2N) \geq \delta_2$. Пусть $x_0 \leq x_2$. Тогда, учитывая ранее доказанное неравенство и свойства функции w , будем иметь

$$\sqrt{w_B} > \sqrt{w_E} - 2N > \sqrt{w_F} - 2N = x_2 - 2N \geq x_0 - 2N.$$

Таким образом, при любом сколь угодно большом значении x_0 получим

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \lambda^2} [F(\lambda \sqrt{w_B}) - F(\delta_2)] &\leq \\ &\leq \sqrt{1 - \lambda^2} \{F[\lambda(x_0 - 2N)] - F(\delta_2)\} < 2N. \end{aligned}$$

Последнее неравенство, однако, несовместимо с условием b_2), и, следовательно, неравенство (4.1.6) доказано.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что условие а) относительно поведения функции $f(x)$ при отрицательных значениях x можно ослабить, положив $f(x) \geq 0$ при $-\infty < x \leq \delta_1$ и $f(x) \leq 0$ при $\delta_1 \leq x \leq 0$, причем, как и ранее, $f(x) < 0$ при $0 < x < \delta_2$, $f(x) > 0$ при $\delta_2 < x < +\infty$. В частности, $f(x)$ на отрицательной полуоси x может быть тождественно равной нулю.

Если ввести вместо переменной x переменную $\xi = -x$, то на основании (4.1.1) получим для него дифференциальное уравнение

$$\xi'' + \varphi(\xi) \xi' + \xi = 0, \quad \varphi(\xi) = f(-\xi). \quad (4.1.9)$$

Фазовая картина на плоскости $\xi \eta$ ($\eta = \xi'$) представляет собой зеркальное отображение фазовой картины на плоскости xy относительно начала координат. Если сформулировать условия теоремы 4.1.1 для функции $\varphi(\xi)$ и потом выразить их снова через x и $f(x)$, то условие а) сохранится, а условия б) примут вид:

b_1) $4N(-x_0 + N) \leq [F(x_0) - F(\delta_1)]^2$ для некоторого $x_0 < \delta_1$;

b_2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$.

Теперь выясним вопрос, при каких условиях существующее периодическое решение единственno. Как показывает условие с) в следующей теореме Сансоне [1], для этого достаточно наличия некоторой симметрии функции $f(x)$.

Теорема 4.1.2. Дифференциальное уравнение (4.1.1) обладает единственным периодическим решением, если

- $f(x) < 0$ на (δ_1, δ_2) , где $\delta_1 < 0 < \delta_2$,
- $f(x) > 0$ на $(-\infty, \delta_1)$ и на $(\delta_2, +\infty)$;
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$;

c) $F(-\Delta) = F(\Delta) = 0$ хотя бы для одного значения $\Delta > 0$.

Для доказательства рассмотрим фазовые траектории системы (4.1.3) на плоскости xv . Эти траектории при возрастании времени t пересекают кривую $v = F(x)$ (рис. 4.1.2) слева направо, если они расположены выше этой кривой, и справа налево, если они лежат ниже кривой; на оси v они обладают горизонтальными касательными. В полосе $-\Delta \leq x \leq \Delta$ на траекториях возрастает расстояние изображающей точки от начала координат, а вне полосы это расстояние уменьшается. Поэтому цикл $\Gamma(ABCDA)$ пересекает пару прямых $x = \pm\Delta$ точно в четырех точках H_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Пусть этот цикл охватывается еще одним циклом $\Gamma'(A'B'C'D'A')$, на

который мы спроектируем горизонтально (H'_i) и вертикально (H''_i) точки H_i .

В точках траектории имеем

$$\frac{d}{dv}(x^2 + v^2) = 2F(x),$$

а следовательно, для циклов Γ и Γ' выполнено равенство

$$\oint_{\Gamma} F(x) dv = \oint_{\Gamma'} F(x) dv = 0.$$

Отсюда получаем для Γ

$$0 = \int_{H_1BH_2} F(x) dv + \int_{H_2CH_3} F(x) dv + \int_{H_3DH_4} F(x) dv + \int_{H_4AH_1} F(x) dv \quad (4.1.10)$$

и аналогично для Γ'

$$0 = \int_{H'_1B'H'_2} F(x) dv + \int_{H''_2C'H''_3} F(x) dv + \int_{H'_3D'H'_4} F(x) dv + \\ + \int_{H''_4A'H''_1} F(x) dv + R, \quad (4.1.10')$$

где

$$R = \int_{H_2''}^{F(x)} dv + \int_{H_3'' H_3'}^{F(x)} dv + \int_{H_4' H_4''}^{F(x)} dv + \int_{H_1'' H_1'}^{F(x)} dv.$$

Покажем, что равенства (4.1.10) и (4.1.10') несовместимы друг с другом. Как непосредственно видно, каждый из четырех интегралов в (4.1.10') меньше соответствующего интеграла в (4.1.10). При этом следует учесть, что для дуг, лежащих внутри вертикальной полосы, имеем

$$F(x) dv = \frac{xF(x)}{F(x) - v} dx.$$

Кроме того, очевидно, что каждый из четырех интегралов в R отрицателен. Этим заканчивается доказательство теоремы 4.1.2.

Несколько другое свойство симметричности функции $f(x)$ лежит в основе следующей теоремы Сансоне [1].

Теорема 4.1.3. *Дифференциальное уравнение (4.1.1) обладает единственным периодическим решением, если*

- a) $f(x) < 0$ для $|x| < \delta$, $f(x) > 0$ для $|x| > \delta$;
- b) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = +\infty$.

Для доказательства воспользуемся рассуждениями из теоремы Левинсона -- Смита, которую мы приведем позднее. Рассмотрим фазовые траектории системы (4.1.2) на плоскости xy , которые будем представлять составленными из дуг решений дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{x}{y} \quad (4.1.11)$$

при $y < 0$ и $y > 0$. Как известно (теорема 4.1.1), существует пара дуг, образующая замкнутую траекторию. Остается показать, что такая пара дуг единственна. С этой целью фазовые траектории, спиралевидно обходящие начало координат, разобьем на отдельные витки Γ (рис. 4.1.3), заключенные между двумя последовательными пересечениями A и H фазовой траектории с положительной полуосью y . Эти витки однозначно определяются их начальными точками $A(0, y_0)$ и уравнением (4.1.11).

Так как

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = -2f(x)y,$$

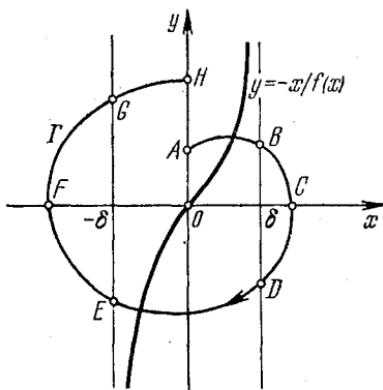


Рис. 4.1.3.

то

$$\Delta(y_0) = \frac{1}{2} (\overline{OH}^2 - \overline{OA}^2) = - \int_{\Gamma} f(x) y \, dx.$$

Нас интересует поведение непрерывной функции $\Delta(y_0)$ в окрестности значения y_0 , которое является начальным для замкнутой траектории; поэтому изучим производную $\frac{d}{dy_0} \Delta(y_0)$.

Рассматривая y как функцию аргументов x и y_0 , найдем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) = \frac{\partial}{\partial y_0} \left\{ -f(x) - \frac{x}{y} \right\} = \frac{x}{y^2} \frac{\partial y}{\partial y_0};$$

отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln \left| \frac{\partial y}{\partial y_0} \right| = -\frac{f(x)}{y} - \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}.$$

В начальной точке A дуги Γ выполнены условия

$$\frac{\partial y}{\partial y_0} \Big|_A = 1, \quad \ln \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_A = 0.$$

Интегрируя вдоль дуги Γ , будем иметь

$$\ln \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_H = - \int_{\Gamma} f(x) dt - \ln \left(\frac{y}{y_0} \right) \Big|_H$$

(где $dt = dx/y$), причем второй член правой части последнего равенства равен нулю, так как траектория Γ замкнута.

Чтобы изучить первый член полученной формулы, заметим, что на замкнутой траектории Γ (очевидно, включающей в себя окружность $x^2 + y^2 = \delta^2$) имеем

$$-\frac{d}{dt} [\ln \sqrt{x^2 + y^2 - \delta^2}] = \frac{y^2 f(x)}{x^2 + y^2 - \delta^2} < f(x)$$

при $0 < |x| < \delta$ и $f(x) < 0$, а также при $|x| > \delta$ и $f(x) > 0$.

Таким образом, для траектории Γ получаем

$$\int_{\Gamma} f(x) dt > 0, \quad \ln \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_H < 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_H < 1,$$

откуда, учитывая, что $y|_H = y_0$, находим

$$\frac{d\Delta(y_0)}{dy_0} = \frac{d}{dy_0} \{ y^2 |_H - y^2 |_A \} = y_0 \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_H - y_0 \left(\frac{\partial y}{\partial y_0} \right) \Big|_A < 0.$$

Отсюда можно заключить, что траектории, близкие к замкнутой кривой, спиралевидно навиваются на нее, т. е. Γ есть устойчивый предельный цикл. Но в кольцевой области между двумя устойчивыми предельными циклами лежит по меньшей мере один неустойчивый предельный цикл. Так как таковой не существует, то единственность периодического решения уравнения (4.1.1) доказана.

Приведем еще одну теорему единственности Сансоне [3], которая не использует свойства симметричности функции $f(x)$, но накладывает на поведение этой функции некоторые дополнительные условия.

Теорема 4.1.4. Уравнение (4.1.1) обладает единственным периодическим решением, если

a) $f(x) < 0$ на (δ_1, δ_2) , где $\delta_1 < 0 < \delta_2$,

$f(x) > 0$ на $(-\infty, \delta_1), (\delta_2, +\infty)$;

b) $f(x)$ на отрицательной полусоси x убывает, а на положительной возрастает;

c) $|f(x)| < 2$.

Действительно, из условия b) следует

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty.$$

Таким образом, применима теорема 4.1.1, а следовательно, существует по меньшей мере одно периодическое решение.

Для доказательства его единственности рассмотрим фазовые траектории уравнения (4.1.1) на плоскости xy . Они спиралевидно навиваются вокруг начала координат. Пусть Γ — одна из существующих замкнутых траекторий, пересекающая положительную полусось x в некоторой точке $P_0(\rho_0, 0)$, и пусть γ является дугой другой фазовой траектории, выходящей из точки $Q_0(\rho_0, 0)$ и приходящей после обхода вокруг точки O в точку $Q_2(\rho_2, 0)$, где $\rho_0 > 0, \rho_2 > 0$ (рис. 4.1.4).

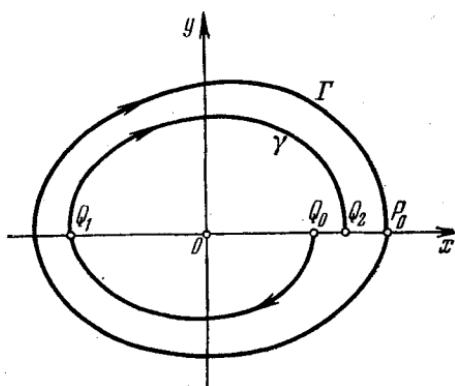


Рис. 4.1.4.

Напишем в полярных координатах (ρ, θ) уравнение кривой γ :

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta.$$

Из (4.1.1) получаем

$$\frac{d \ln \rho}{d \theta} = \frac{2f(\rho \cos \theta) \sin^2 \theta}{2 + f(\rho \cos \theta) \sin(2\theta)}.$$

Знаменатель по условию с) положителен, причем так как $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2}[2 + f(\rho \cos \theta) \sin(2\theta)]$, то $\theta(t)$ монотонно убывает при увеличении t .

Имеем

$$\ln \frac{\rho_2}{\rho_0} = \int_0^{-2\pi} \frac{2f(\rho \cos \theta) \sin^2 \theta}{2 + f(\rho \cos \theta) \sin(2\theta)} d\theta, \quad (4.1.12)$$

причем если $r(\theta)$ принадлежит замкнутой траектории Γ , то

$$0 = \int_0^{-2\pi} \frac{2f(r \cos \theta) \sin^2 \theta}{2 + f(r \cos \theta) \sin(2\theta)} d\theta. \quad (4.1.13)$$

В интервале $0 \geq \theta \geq -2\pi$ имеем $0 < \rho(\theta) < r(\theta)$ либо $0 < r(\theta) < \rho(\theta)$, и отсюда по условию б) для $\theta \neq -\pi/2, -3\pi/2$ соответственно получаем

$$f(\rho \cos \theta) < f(r \cos \theta),$$

$$f(r \cos \theta) < f(\rho \cos \theta).$$

Вычитая (4.1.13) из (4.1.12), будем иметь

$$\ln \frac{\rho_2}{\rho_0} = \int_0^{-2\pi} \frac{4 \sin^2 \theta \{f(\rho \cos \theta) - f(r \cos \theta)\} d\theta}{\{2 + f(\rho \cos \theta) \sin(2\theta)\} \{2 + f(r \cos \theta) \sin(2\theta)\}} > 0$$

или соответственно < 0 , т. е. $\rho_2 > \rho_0$ и соответственно $\rho_2 < \rho_0$.

Итак, γ не замкнута и, таким образом, Γ — единственный устойчивый предельный цикл.

Видоизменя эти рассуждения, Массера [4] обобщил теорему 4.1.4, отказавшись при этом от несколько стеснительного условия с).

Массера рассмотрел поле направлений уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -f(x) - \frac{x}{y}.$$

Если двигаться по направлению к точке O по полуправой, не совпадающей с координатной осью, то отношение x/y остается постоянным, в то время как $-f(x)$ монотонно уменьшается и поле направлений вращается по ходу часовой стрелки.

Пусть Γ — замкнутая траектория и Γ_k — замкнутая кривая, полученная в результате k -кратного рас-

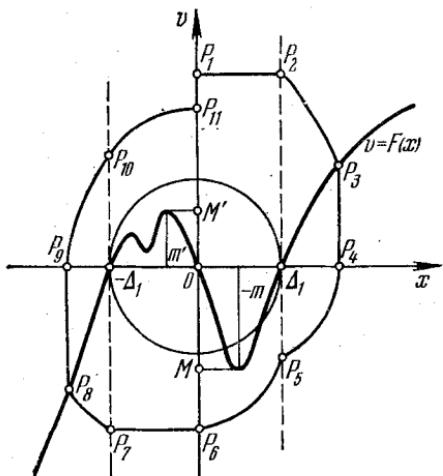


Рис. 4.1.5.

тяжения кривой Γ относительно центра O . На основании приведенного выше замечания относительно поля направления в области $xy \neq 0$ заключаем, что при $k > 1$ оно направлено снаружи внутрь Γ_k , а при $k < 1$ изнутри наружу Γ_k . Легко убедиться в том, что Γ_k на координатных осях также повсюду пересекается фазовыми траекториями, направленными на Γ . Отсюда следует, что Γ — предельный цикл и существование второго предельного цикла исключено.

В заключение приведем одну теорему Барбалата [2] о существовании и единственности периодического решения. Для ее доказательства используется система дифференциальных уравнений (4.1.3). В соответствии с этим условия накладываются на рассматриваемую там функцию $F(x)$.

Теорема 4.1.5. На фазовой картине в плоскости xv существует устойчивый предельный цикл, к которому стремятся все фазовые траектории (начало координат исключается), если

a) $xF(x) \leq 0$ для $0 \leq |x| \leq \Delta$, но $F(x) \neq 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$; $F(\Delta_1) = F(-\Delta_1) = 0$;

b) отношение $F(x)/x$ при возрастании $|x|$ возрастает и становится положительным для $|x| > \Delta$, при этом

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x)/x \leq 2. \quad (4.1.14)$$

Для доказательства существования предельного цикла, окружающего начало координат, на плоскости xv (рис. 4.1.5) строится кольцевая область, из которой не выходит ни одна траектория.

В качестве внутренней границы этой кольцевой области может быть взята любая окружность

$$x^2 + v^2 = \rho^2, \quad 0 < \rho \leq \Delta_1,$$

так как

$$xx' + vv' = -xF(x) \geq 0 \quad \text{при } |x| \leq \Delta_1 \text{ (условие a)).}$$

Внешнюю границу кольцевой области Барбалат образует из 11 кусков дуг следующим образом:

От $P_1(0, v_1)$ ($v_1 > \rho$ достаточно большое) до $P_2(\Delta_1, v_2)$ — по прямой $v = v_1$, т. е. $v_2 = v_1$, причем $v' = -x \leq 0$.

От P_2 до $P_3(x_3, F(x_3))$ — по окружности $x^2 + v^2 = \Delta_1^2 + v_1^2$, отсюда

$$x_3^2 + F^2(x_3) = \Delta_1^2 + v_1^2, \quad xx' + vv' = -x^2[F(x)/x] \leq 0 \quad (\text{условие b)}).$$

Заметим, что $v_1 \rightarrow \infty$ при $x_3 \rightarrow \infty$.

От P_3 до $P_4(x_4, 0)$ — по прямой $x = x_3$, т. е. $x_4 = x_3$ и $x' = v = F(x) \leq 0$.

От P_4 до $P_5(\Delta_1, v_5)$ — по окружности $x^2 + v^2 = x_4^2$, где $v_5 = -\sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}$ и $xx' + vv' = -x^2[F(x)/x] \leq 0$.

От P_5 до $P_6(0, v_6)$ — по окружности $x^2 + (v+m)^2 = m^2 + x_3^2 - 2m\sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}$, где $m = -\inf_{[0, \Delta_1]} F(x) > 0$, $v_6 = -m - \sqrt{m^2 + x_3^2 - 2m\sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}}$ и $xx' + (v+m)v' = -x[m+F(x)] \leq 0$.

Если только v_1 достаточно велико, то $v_6 > -v_1$. Это неравенство вытекает из неравенства

$$v_1^2 - x_3^2 > 2m(v_1 - \sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}),$$

так как

$$\frac{v_1^2 - x_3^2}{v_1 - \sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}} = \frac{v_1 + \sqrt{x_3^2 - \Delta_1^2}}{1 + \frac{\Delta_1^2}{v_1^2 - x_3^2}} \rightarrow \infty \quad \text{при } v_1 \rightarrow \infty.$$

В левой полуплоскости построение аналогично, причем в результате получается $v_{11} < -v_6 < v_1$.

Границная кривая замыкается вертикальным отрезком $\overline{P_{11}P_1}$, где $x' = v > 0$. Так как для внешней границы $w \equiv w(x, 0) = C$ имеем $\frac{dw}{dt} \leq 0$, то тем самым доказано существование предельного цикла.

Доказательство единственности предельного цикла проводится аналогично доказательству в теореме 4.1.4 и основывается на условии (4.1.14). Предположим, что существуют два предельных цикла Γ_1 и Γ_2 (Γ_1 вне цикла Γ_2), и пусть они описываются уравнениями либо в прямоугольных координатах (x_1, v_1) и (x_2, v_2) , либо в полярных координатах (ρ_1, ϑ_1) и (ρ_2, ϑ_2) . Тогда

$$\frac{d\rho}{dt} = -F(x) \cos \vartheta, \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{1}{2} \left[2 - \frac{F(x)}{x} \sin(2\vartheta) \right] < 0.$$

Так как

$$\frac{d \ln \rho}{d\vartheta} = \frac{x F(x)}{\rho^2 - v F(x)},$$

то

$$\frac{d \ln(\rho_1/\rho_2)}{d\vartheta} = \frac{x_1^2 \rho_2^2 [F(x_1)/x_1 - F(x_2)/x_2]}{[\rho_1^2 - v_1 F(x_1)][\rho_2^2 - v_2 F(x_2)]} \geq 0 \quad (\text{условие б}),$$

где знак равенства имеет место лишь для $\vartheta = \pi/2, 3\pi/2$.

Интегрируя последнее неравенство на отрезке $[0, 2\pi]$, приходим к противоречию, чем и заканчивается доказательство. Утверждение об устойчивости предельного цикла непосредственно очевидно.

Заметим, что если в доказательстве единственности применить рассуждение Массера [4], то от условия (4.1.14) можно отказаться.

Для системы (4.1.3), которая вне некоторой окрестности точки $x = 0$ линейна, Манареси [1] доказывает теорему существования, где основное внимание обращено на построение возможно более узкой кольцевой области на фазовой плоскости xv (и тем самым получается более точная оценка периодического решения).

Теорема 4.1.6. Для существования кольцевой области Бэндиксона для системы (4.1.3) достаточно, чтобы непрерывная функция $F(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

a) $F(-x) = -F(x)$;

b) $F(x)x < 0$ для $0 < x \leq \theta h$ ($h > 0$, $0 < \theta < 1$);

c) $F(x) = a(x - h)$ для $x \geq \theta h$ ($a > \sqrt{2}$).

В самом деле, в силу соотношения $(x^2 + v^2)' = -2xF(x) \geq 0$ для $|x| \leq h$ в качестве внутренней границы кольцевой области можно взять окружность $x^2 + v^2 = h^2$.

Для построения внешней границы построим три семейства кривых:

$$\begin{aligned} x^2 + v^2 &= \Gamma^2 + d^2, \quad x \leq -d, \\ [a(x+d) - v]^2 &= \Gamma^2, \quad |x| \leq d, \\ x^2 + (v - 2ad)^2 &= \Gamma^2 + d^2, \quad x \geq d. \end{aligned}$$

Здесь a, d, Γ — положительные константы, которые должны быть определены подходящим образом.

Очевидно, что эти кривые при подходящем выборе постоянных образуют замкнутый контур W . Для исследования положения фазовых траекторий относительно отдельных частей этого контура в силу системы (4.1.3) составим полные производные по времени левых частей уравнений кривых. Достаточно потребовать, чтобы эти производные были неположительными:

$$-xF(x) \leq 0, \quad x \leq -d, \quad (4.1.15)$$

$$[a(x+d) - v][a(v - F(x)) + x] \leq 0, \quad |x| \leq d, \quad (4.1.16)$$

и

$$-x[F(x) - 2ad] \leq 0, \quad x \geq d. \quad (4.1.17)$$

Если выбрать $d \geq h$, то будет выполнено неравенство (4.1.15). Пусть $F = \max_{|x| \leq d} |F(x)|$; тогда, если положить

$$\Gamma \geq 2ad + F + d/a, \quad (4.1.18)$$

то получим (4.1.16). Наконец, (4.1.17) следует из неравенства

$$d(a - 2a) \geq ah. \quad (4.1.19)$$

Для оптимального выбора констант вычислим минимум правой части (4.1.18):

$$(2ad + F + d/a) \Big|_{a=1/\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}d + F.$$

Можно положить

$$d = \frac{ah}{a - \sqrt{2}}, \quad \Gamma = F + \frac{2\sqrt{2}ah}{a - \sqrt{2}}.$$

Для оценки замкнутой траектории (охватываемой W) заметим, что она, как и фазовая картина, должна быть симметричной относительно начала координат. Поэтому на ней

$$\max x(t) = x_m > h, \quad \min x(t) = -x_m$$

и

$$v(-x_m) = F(-x_m) = a(-x_m + h).$$

Так как контур W лежит выше горизонтали $v = -\Gamma$, то из этого следует

$$a(-x_m + h) \geq -\Gamma, \quad x_m \leq h + \frac{\Gamma}{a} = \frac{a + \sqrt{2}}{a - \sqrt{2}} h + \frac{F}{a}.$$

Доказательство теоремы существования Фигуэйредо [1] для системы (4.1.3) основано на сравнении ее с некоторой кусочно-линейной системой.

Теорема 4.1.7. *На фазовой картине системы (4.1.3) существует устойчивый предельный цикл, если кусочно-непрерывная функция $f(x)$ подчинена следующим условиям:*

- a) $f(0) < 0$;
- b) $\inf f(x) \geq -2D_1$ для $x \leq -\delta < 0$;
- c) $\inf f(x) \geq 2D_2$ для $x \geq \delta$, где $0 \leq 2D_1 < 2D_2 \leq 2$.

Действительно, по условию а) имеем $xF(x) \leq 0$ в достаточно малой окрестности точки $x = 0$. Поэтому можно построить окружность $x^2 + v^2 = r^2$ с достаточно малым радиусом r таким, что

$$(x^2 + v^2)' = -2xF(x) \geq 0.$$

Эту окружность примем в качестве внутренней границы R_i кольцевой области Бендиксона.

Для построения внешней границы R_a положим

$$M = 2\delta D_2 + \sup_{|x| \leq \delta} |F(x)|$$

и

$$\rho_i = \exp [D_i \pi (1 - D_i^2)^{-1/2}], \quad i = 1, 2 \quad (\rho_2 > \rho_1).$$

Далее сравним фазовые траектории уравнения (4.1.3) с траекториями кусочно-линейной системы дифференциальных уравнений

$$x' = v - \begin{cases} F_1(x), & x \leq 0, \\ F_2(x), & x \geq 0, \end{cases} \quad v' = -x, \quad (4.1.20)$$

где

$$F_1(x) = -2D_1 x + M, \quad F_2(x) = 2D_2 x - M.$$

Из неравенств

$$F(x) \leq F_1(x) \quad \text{для } x \leq 0,$$

$$F(x) \geq F_2(x) \quad \text{для } x \geq 0$$

заключаем, что траектории уравнения (4.1.3) могут пересекать траектории системы (4.1.20) только внутри, если под внутренней стороной траектории понимать сторону, обращенную к оси v .

Траектории системы $x' = v - F_1(x)$, $v' = -x$ представляют собой раскручивающиеся спирали с общей предельной точкой $(0, M)$ на положительной полуоси v . Дуга траектории, выходящая из точки $v = M - b_1$ ($b_1 > 0$) оси v , оставаясь в левой полуплоскости, вновь пересекает ось v в точке $v = M + b_1'$, где $b_1' = \rho_1 b_1$.

Траектории системы $x' = v - F_2(x)$, $v' = -x$ являются сходящимися спиралами с предельной точкой $(0, -M)$ на отрицательной полуоси v . Дуга траектории, начинающаяся в точке $v = -M + b_2$ ($b_2 > 0$) оси v , после прохождения по правой полуплоскости возвращается на ось v в точке $v = -M - b'_2$, где $b'_2 = b_2/\rho_2$.

Если выполняются равенства

$$M + b'_1 = -M + b_2 \quad \text{и} \quad M - b_1 = -M - b'_2,$$

то обе дуги соединяются в замкнутый контур, который и является искомой внешней границей R_a .

Эти условия однозначно определяют $b_1 = 2M \frac{1 + \rho_2}{\rho_2 - \rho_1}$ и $b_2 = -2M + \rho_1 b_1$.

Единственность предельного цикла доказывается так же, как в теореме 4.1.4, с помощью введенного там дополнительного условия.

Мы не будем останавливаться на многочисленных работах, охватывающих особые случаи, где функция $F(x)$ представлена явно как полином некоторого произвольного порядка (Барбала [3]) или (еще более специального вида) в форме $\varepsilon(x^2 - 1)$, $\varepsilon > 0$. В последнем случае уравнение (4.1.1) является известным уравнением Ван дер Поля, для которого, очевидно, выполнены условия теорем 4.1.1—4.1.5.

4.2. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x)x' + g(x) = 0$

Вернемся снова к уравнению Лъенара в общей форме (3.1.1) и примем условия регулярности, сформулированные в п. 3.1, включая условие

$$xg(x) > 0 \quad \text{для } x \neq 0, \quad (3.1.4)$$

если не оговорено противное.

Сначала займемся вопросом существования изолированного периодического решения, а затем исследуем асимптотические свойства многообразия решений.

Изолированному периодическому решению на фазовой картине соответствует предельный цикл, который изображается либо на плоскости xy на основании (3.1.2), либо на плоскости xv на основании (3.1.3). Для доказательства существования предельного цикла строят, как обычно, кольцевую область вокруг единственной особой точки фазовой картины — начала координат, соответствующую теореме Бендиクсона. В зависимости от способа построения возникают различные дополнительные условия для нелинейных функций $f(x)$ и $g(x)$, входящих в уравнение Лъенара (3.1.1). Эти условия мы обсудим в дальнейшем.

Прежде всего отметим, что (так же как для уравнения (4.1.1)) никакой цикл не может существовать, если для всех значений x

$$xF(x) \geqslant 0 \quad \text{или} \quad xF(x) \leqslant 0, \quad (4.1.4)$$

причем $f(x) \not\equiv 0$ в некоторой окрестности точки $x = 0$.

Начнем с одного исследования Лефшеца [2].

Теорема 4.2.1. Уравнение Льенара обладает единственным периодическим решением, которому на фазовой картине соответствует устойчивый предельный цикл, если

$$\begin{aligned} & a) \quad f(x) = f(-x), \\ & f(0) < 0; \end{aligned}$$

b) $F(x)(x-a) > 0$ для $0 < x < a$ и для $x > a$, причем $F(x)$ монотонна для $x > a$ и $F(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$;

$$c) \quad g(x) = -g(-x).$$

Согласно Лефшецу, доказательство теоремы основывается на том, что фазовая картина симметрична относительно нача-

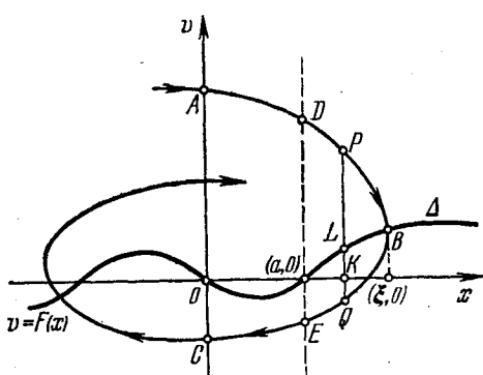


Рис. 4.2.1.

ла координат. Рассмотрим на плоскости xv некоторую дугу фазовой траектории, выходящую из точки A положительной полуоси v (рис. 4.2.1). Эта дуга над кривой Δ , где $v = F(x)$, очевидно, идет слева направо, а под кривой Δ — справа налево. Легко убедиться в том, что рассматриваемая дуга пересекает кривую Δ (в точке B) и доходит до отрицательной полуоси v (в точке C).

Дуга \widehat{ABC} однозначно определяется абсциссой ξ точки B ; обозначим эту дугу через Γ_ξ . Из симметрии фазовой картины и теоремы единственности вытекает, что Γ_ξ тогда и только тогда является частью предельного цикла, когда $\overline{OA} = \overline{OC}$. При $\overline{OA} > \overline{OC}$ дуга Γ_ξ принадлежит закручивающейся спирали, а при $\overline{OA} < \overline{OC}$ — раскручивающейся спирали. Если ввести положительно определенную функцию

$$w(x, v) = G(x) + v^2/2, \quad (4.2.1)$$

то эти три случая можно обозначить так:

$$w_A = w_C, \quad w_A > w_C, \quad w_A < w_C.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi(\xi) = w_C - w_A = \int_{\widehat{ABC}} F(x) dv. \quad (4.2.2)$$

Для $\xi \leq a$ во внутренних точках дуги Γ_ξ справедливо неравенство $F(x) < 0$, и так как $dv < 0$, то

$$\varphi(\xi) > 0, \quad w_C > w_A.$$

Пусть $\xi > a$, так что Γ_ξ пересекает вертикаль в двух точках D и E .

Положим $\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) + \varphi_2(\xi)$, где

$$\varphi_1(\xi) = \int_{\widehat{AD}} dw + \int_{\widehat{EC}} dw, \quad \varphi_2(\xi) = \int_{\widehat{DBE}} dw \quad (4.2.3)$$

Вдоль \widehat{AD} или \widehat{EC} находим

$$dw = \frac{-F(x)g(x)}{v - F(x)} dx > 0.$$

Поэтому $\varphi_1(\xi)$ положительна и монотонно убывает.

Вдоль \widehat{DBE} имеем $dw = F(x)dv < 0$; таким образом, $\varphi_2(\xi)$ отрицательна и (как легко видеть) также монотонно убывает.

Следовательно, $\varphi(\xi)$ для $\xi \geq a$ есть монотонно убывающая функция.

Покажем, еще, что $\varphi_2(\xi) \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow \infty$. Так как на дуге \widehat{DBE} всюду $dw < 0$, то достаточно показать, что на некоторой части этой дуги $\int dw \rightarrow -\infty$ при $\xi \rightarrow +\infty$. Для этого выберем на оси x вправо от вертикали $x = a$ точку K и обозначим через L соответствующую ей точку дуги Δ (рис. 4.2.1).

Пусть P и Q — точки дуги Γ_ξ , лежащие на вертикалли, проходящей через точку K . При $\xi > \overline{OK}$ получаем

$$\varphi_2(\xi) < \int_{\widehat{PBQ}} dw = \int_{\widehat{PBQ}} F(x) dv < F(K)(v_Q - v_P) = -\overline{KL} \cdot \overline{QP}.$$

При $\xi \rightarrow \infty$, очевидно, $\overline{KP} \rightarrow \infty$ и, так как \overline{KL} остается неизменным при переходе к пределу, $\varphi_2(\xi) \rightarrow -\infty$.

Этим доказано, что функция $\varphi(\xi)$ в интервале $a \leq \xi < +\infty$ от положительного значения $\varphi(a)$ переходит к $-\infty$. В силу непрерывности она имеет один и только один нуль $a_0 > a$:

$$\varphi(a_0) = 0, \quad w_A = w_{C_0}, \quad \overline{OA}_0 = \overline{OC}_0.$$

Дуга Γ_{a_0} , выходящая из точки A_0 , принадлежит предельному циклу, в то время как все другие дуги, на основании прежних рассуждений, принадлежат спиралям, сходящимся к предельному циклу при $t \rightarrow \infty$.

Другие условия существования единственного устойчивого предельного цикла на фазовой картине уравнения Льенара (3.1.1) даются в теореме Левинсона — Смита (доказательство будет изложено в п. 4.4).

Теорема 4.2.2. Уравнение Лъенара имеет одно и только одно периодическое решение, которому соответствует устойчивый предельный цикл, если

- a) $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции;
- b) $f(x) < 0$ на $(-x_1, x_2)$, где x_1 и x_2 положительны, но $f(x) \geq 0$ для всех остальных значений x , причем $F(\infty) = \infty$;
- c) $G(\pm\infty) = \infty$;
- d) $G(-x_1) = G(x_2)$.

Как видно, здесь исключены стеснительные условия симметричности $f(x) = f(-x)$, $g(x) = -g(-x)$, а вместо них введено условие d), которое, однако, вряд ли может быть реализовано физически.

Условия d) можно избежать, отказавшись от утверждения единственности. Следующая теорема также основана на исследованиях Левинсона — Смита [1].

Теорема 4.2.3. На фазовой картине уравнения Лъенара имеется по меньшей мере один устойчивый предельный цикл, если

- a) $f(0) < 0$, $f(x) \geq -F$ для $|x| \leq x_0$, $f(x) \geq 0$ для $|x| \geq x_0$;
- b) $F(x_1) - F(x_0) \geq 10Fx_0$ для некоторого значения $x_1 > x_0$;
- c) $G(\pm\infty) = \infty$.

Доказательство теоремы будет приведено ниже. Сейчас же мы обратимся к исследованиям Драгилева, имеющимся у Немыцкого и Степанова [1].

Теорема 4.2.4. Пусть

- a) $F(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условию Липшица;
- b) $G(\pm\infty) = \infty$;
- c) $xF(x) < 0$, если $|x| > 0$ достаточно мало,

$$F(x) \geq k \text{ для } x \geq a,$$

$$F(x) \leq k' < k \text{ для } x \leq -a \quad (k, k', a \text{ положительны}).$$

Тогда система уравнений (3.1.3) обладает по меньшей мере одним предельным циклом.

Легко убедиться в том, что эти условия более слабые, чем в предыдущих теоремах.

Доказательство теоремы, приведенное в книге Немыцкого и Степанова [1], мы несколько упростим. Для построения на плоскости xv кольцевой области рассмотрим сначала семейство замкнутых, симметричных относительно оси x кривых $w(x, v) = \text{const}$, где $w(x, v) = G(x) + v^2/2$. Полная производная функции $w(x, v)$ в силу (3.1.3) есть

$$w' \equiv g(x)x' + vv' = -g(x)F(x). \quad (4.2.4)$$

Так как это выражение для малых модулей x положительно, то все траектории, выходящие из точек, близких к началу координат, направлены от начала координат. Поэтому в качестве внутренней границы кольцевой области годится кривая $w = \text{const}$ при достаточно малой константе.

Теперь на фазовой картине (рис. 4.2.2) рассмотрим кривую Δ : $v = F(x)$.

Далее положим

$$\max_{|x| \leq a} |F(x)| = M \quad (4.2.5)$$

и построим горизонтальные отрезки $v = \pm M$ между вертикалями $x = \pm a$; они ограничивают сверху и снизу кривую Δ при $-a \leq x \leq a$. Для $x \geq a$ горизонталь $v = k$ лежит под кривой Δ , ограничивая ее снизу, а для $x \leq -a$ горизонталь $v = k'$, расположенная ниже, проходит над кривой Δ .

На прямой $x = a$ возьмем точку C такую, что $v_C > M$, и проследим фазовую траекторию, определяемую этой точкой, сначала при убывающем t . Так как $x' = v - F(x) > v_C - M$ для $0 < x < a$ (ввиду того, что $v' = -g(x) < 0$), траектория идет от C налево вверх и пересекает ось v в некоторой точке B .

Если t возрастает, то траектория идет от точки C направо вниз и пересекает кривую Δ в некоторой точке D . Тогда

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{g(x)}{v - F(x)} \leq -\frac{g(x)}{v_C - k}, \quad v - v_C \leq \frac{G(x) - G(a)}{v_C - k}.$$

После пересечения с кривой Δ рассматриваемая траектория остается под этой кривой, приближаясь вновь к оси v , и пересекает прямую $x = a$ в некоторой точке E .

Пусть A — точка на прямой $x = -a$, в которой $v_A > M$. Проведем через эту точку положительную полутраекторию, идущую направо вверх до пересечения с осью v , где она направлена горизонтально. Без ограничения общности можно предполагать, что эта точка пересечения совпадает с точкой B .

Далее проводится аналогичное построение дуг траекторий с начальными точками, лежащими под прямой $v = -M$ на вертикалях $x = \pm a$. Таким образом конструируется дуга $A'B'C'D'E'$. Подходящим выбором точки A или A' обеспечивается совпадение точек A' и E .

Точка E' может оказаться под или над точкой A . В первом случае цель достигнута: можно принять, что внешняя граница состоит из дуги $A'E'$ и вертикального отрезка $\overline{E'A}$.

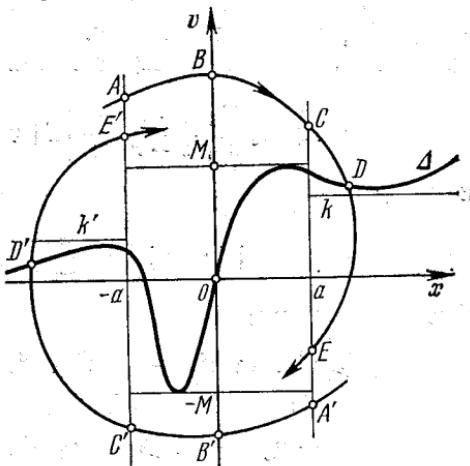


Рис. 4.2.2.

Во втором случае (рис. 4.2.3) продолжим дугу $\widehat{AE'}$ за точку E' до пересечения ее в точке F' с осью v и рассмотрим часть траектории между B и F' . Покажем, что если v_B достаточно велико, то $v_{F'} < v_B$ (тогда дуга $\widehat{BF'}$ вместе с отрезком $\overline{BF'}$ может быть взята в качестве внешней границы кольцевой области). Для этого выберем дугу траектории, удовлетворяющую условию: $|v| \geq (1 + a)M$ при $|x| \leq a$. Оценим приращения $\Delta\omega$ и Δv на куске дуги, ограниченном осью v и одной из вертикалей $|x| = a$:

$$|\Delta\omega| \leq \int_0^a \left| \frac{g(x) F(x)}{v - F(x)} \right| d|x| \leq G = \max_{|x| \leq a} |g(x)|$$

и

$$|\Delta v| \leq \int_0^a \left| \frac{g(x)}{v - F(x)} \right| d|x| \leq \frac{G}{M}.$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} w_B - w_{F'} &\geq \int_{\widehat{BC}} F(x) dv + \int_{\widehat{E'C'}} F(x) dv - 4G \geq k(v_C - v_E) - \\ &- k'(v_{E'} - v_C) - 4G \geq k'(v_B - v_{F'}) + (k - k')(v_B + |v_{B'}|) - \\ &- 2kG/M - 4G. \end{aligned}$$

Если для достаточно большой начальной ординаты v_B справедливо неравенство $v_{F'} \geq v_B$, то, учитывая, что $w_B - w_{F'} \leq M(v_B - v_{F'})$, выводим:

$$\begin{aligned} (M - k')(v_B - v_{F'}) &\geq \\ &\geq (k - k')(v_B + |v_{B'}|) - \\ &- 4G(1 + k/2M) > 0, \end{aligned}$$

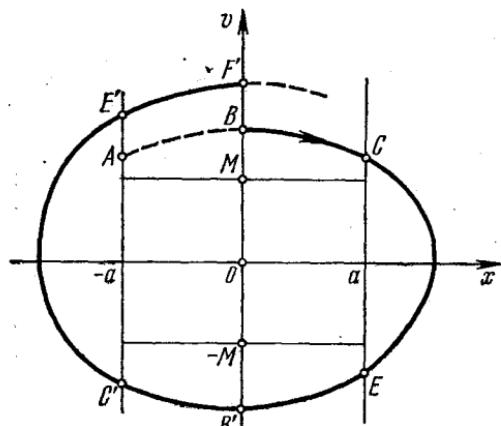


Рис. 4.2.3.

$$\begin{aligned} \text{если только } v_B &\geq \frac{4G}{k - k'} \times \\ &\times \left(1 + \frac{k}{2M}\right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $v_B > v_{F'}$, что противоречит нашему предположению. Этим заканчивается доказательство.

Дальнейшее обобщение условий существования для предельного цикла было получено Филипповым [1] на основе преобразования фазовой плоскости xv . А именно, положим

$$\begin{aligned} z_1 &= G(x) \quad \text{для } x \geq 0, \\ z_2 &= G(x) \quad \text{для } x \leq 0 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

и отобразим фазовую плоскость на обе полуплоскости $z_i v$ ($z_i \geq 0$), которые будем представлять как двулистную полуплоскость zv с общим краем $z = 0$. Вместо преобразования (4.2.6) мы используем преобразование, предложенное Конти [1]:

$$z = \sqrt{2G(x)} \operatorname{sgn} x, \quad (4.2.7)$$

которое взаимно однозначно отображает плоскость xv на полосу

$$-\sqrt{2G(-\infty)} < z < \sqrt{2G(+\infty)}$$

плоскости zv . Теоремы Филиппова и Барбалата — Халаная формулируются соответственно этому.

Теорема 4.2.5. Уравнение Льенара (3.1.1) обладает одним устойчивым предельным циклом, если, кроме приведенных выше условий (стр. 94), выполняется равенство $G(\pm\infty) = \infty$ и после преобразования переменных (4.2.7) функция $\Phi(z) = F\{x(z)\}$ удовлетворяет требованиям:

a) $\Phi(z)/z < k$ ($0 < k < 2$) при $0 < |z| < a$,

$\Phi(z) \leq \Phi(-z)$, но $\Phi(z) \neq \Phi(-z)$ при $0 < z < a$;

b) $\Phi(z)/z > -k$ ($0 < k < 2$) при $|z| > b$,

$$\Phi(z) \geq \Phi(-z) \text{ при } z > b,$$

причем

$$\int_0^b \{\Phi(z) - \Phi(-z)\} z dz > 0.$$

Приводимое доказательство теоремы близко к рассуждениям Филиппова [1]. Исключим в системе уравнений (3.1.3) переменную t и заменим x на основании (4.2.7) через z , где $z dz = g(x) dx$, учитывая, что

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\Phi(z) - v}{z}. \quad (4.2.8)$$

Через каждую точку плоскости zv , отличную от начала координат, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (4.2.8). Она отличается от соответствующей траектории (3.1.3) только растяжением в направлении горизонтальной оси.

На основании условий теоремы 4.2.5 решение дифференциального уравнения (4.2.8) можно сравнить с решениями дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dv} = \frac{-v \pm kz}{z}. \quad (4.2.9)$$

Здесь начало координат плоскости zv в рассматриваемом случае $0 < k < z$ является особой точкой типа фокуса. К ней спиралевидно приближаются все интегральные кривые, причем направление обхода определяется знаком при множителе k в уравнении (4.2.9).

В области, где $\Phi(z)/z < k$ или $\Phi(z)/z > -k$, траектории уравнения (4.2.8), проходящие в направлении возрастающих или убывающих значений v , пересекают соответствующие кривые сравнения (4.2.9) по направлению к меньшим значениям z .

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Если через точку $B\{z_B, \Phi(z_B)\}$ с абсциссой $z_B \neq 0$ проходит кривая решения Г уравнения (4.2.8), то она пересекает

ось v в двух точках A и C , где $v_A \geq 0$, $v_C < 0$ для $z_B > 0$ и $v_A > 0$, $v_C \leq 0$ для $z_B > 0$.

Доказательство непосредственно получается из рассмотрения поля направлений (рис. 4.2.4):

$$\frac{d(z^2)}{dv} \geq m > 0 \quad \text{для } v \leq \Phi(z) - \frac{m}{2},$$

$$\frac{d(z^2)}{dv} \leq -m < 0 \quad \text{для } v \geq \Phi(z) + \frac{m}{2}.$$

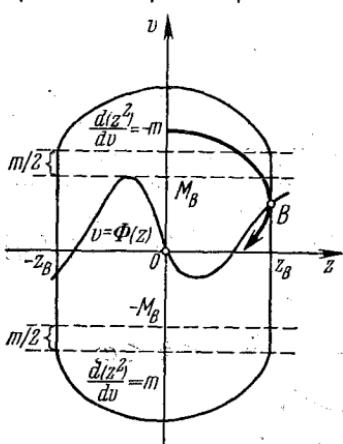


Рис. 4.2.4.

Если интегральная кривая Γ проходит в направлении возрастающих значений v , то она входит в точку B при возрастающем модуле z и выходит из нее при убывающем модуле z .

Для получения границ изменения интегральной кривой положим

$$\max_{|z| \leq |z_B|} |\Phi(z)| = M_B$$

и построим дуги парабол

$$z^2 - z_B^2 = m \{(M_B + m/2) \mp v\}, \quad |z| \leq |z_B|,$$

при фиксированном значении $m > 0$ и $z_B \neq 0$. Если дополнить их до замкнутой кривой отрезками $|z| = |z_B|$, $|v| \leq M_B + m/2$, то эта замкнутая кривая будет охватывать рассматриваемую интегральную кривую Γ .

Сравнивая в полосе $-a \leq z \leq a$ интегральную кривую Γ с соответствующей траекторией уравнения (4.2.9), получим исключенные оценки для ординат v_A и v_C .

Лемма 2. Интегральные кривые уравнения (4.2.8), начинаящиеся на верхней полуоси v ($v > 0$), пересекают нижнюю полуось $v < 0$, и обратно.

Доказательство следует из сравнения интегральных кривых с решениями уравнения (4.2.9) в областях $|z| \leq a$ и $|z| \geq b$.

Теперь докажем существование окрестности начала координат на плоскости xv , в которую не входит никакая траектория системы (3.1.3), так что граница этой окрестности может быть

взята в качестве внутренней границы искомой кольцевой области.

С этой целью на плоскости zv выберем значение z_B , $0 < z_B < a$, и проведем через точки $B\{z_B, \Phi(z_B)\}$ и $B'\{-z_B, \Phi(-z_B)\}$ интегральные кривые γ и γ' уравнения (4.2.8), пересекающие ось v в точках A и C , соответственно A' и C' (рис. 4.2.5).

При этом $v_A \geq 0$, $v_C < 0$ и $v_{A'} > 0$, $v_{C'} \leq 0$. Так как $\Phi(z) \leq \Phi(-z)$, то выполняется неравенство $v_B \leq v_{B'}$ и дуги \widehat{AB} и \widehat{BC} лежат ниже, чем, соответственно, дуги $\widehat{A'B'}$ и $\widehat{B'C'}$. Замкнутый контур, состоящий из интегральных кривых дуг \widehat{AC} и $\widehat{A'C'}$, а также из отрезков $\overline{A'A}$ и $\overline{C'C}$ оси v , в результате его обратного преобразования в силу (4.2.7) образует требуемую граничную кривую на плоскости xv .

Если для $0 \leq z \leq a$ имеет место тождество $\Phi(z) = \Phi(-z)$, то оба решения \widehat{AC} и $\widehat{A'C'}$ дополняют друг друга, образуя цикл. В этом случае все фазовые траектории системы (3.1.3) в достаточно малой окрестности начала координат замкнуты и соответствуют семейству периодических решений уравнений (3.1.1) (см. п. 3.2).

По лемме 2 интегральная кривая уравнения (4.2.8), выходящая из точки $C(0, v_C)$, где $v_C < 0$, пересекает ось v в некоторой точке A такой, что $v_A > 0$. Если v_C убывает, то v_A , очевидно, возрастает:

$$\lim_{v_C \rightarrow -\infty} v_A = v_G.$$

Различают два случая: $0 < v_G < +\infty$ и $v_G = +\infty$.

В первом случае интегральная кривая, выходящая из точки G , пересекает ось v в некоторой точке H , где $v_H < 0$. Далее, проходя через точку H , она вновь пересекает ось v в некоторой точке I такой, что $v_I > 0$, при этом $v_I < v_G$. Если на плоскости xv построить замкнутый контур, составленный из дуги \widehat{GHI} и отрезка оси \overline{IG} , то получим внешнюю границу кольцевой области.

Во втором случае необходимы еще вспомогательные построения. Для этого представим интегральные кривые уравнения

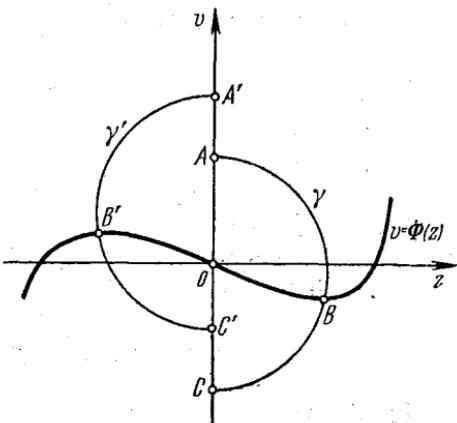


Рис. 4.2.5.

(4.2.8), выходящие из точек оси v (точка выхода $(0, v_0)$) и пересекающие кривую $v = \Phi(z)$, в форме $v = v(z)$.

Лемма 3. Если $|v_0|$ достаточно велико, то решение $v(z)$ определено для $|z| \leq b$ и отличается сколь угодно мало от $v_0 = v(0)$.

Пусть

$$M = \max_{|z| \leq b} |\Phi(z)|, \\ |v_0| \geq M + \epsilon + b^2/\epsilon \quad (4.2.10)$$

и z' — значение z с наименьшим модулем, для которого

$$|v(z') - v_0| = \epsilon.$$

Тогда имеем

$$\epsilon = |v(z') - v_0| = |z'| \left| \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=\theta z'} \right|, \quad 0 < \theta < 1. \quad (4.2.11)$$

Если бы выполнялось неравенство $|z'| \leq b$, то имели бы

$$\left| \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z=\theta z'} \right| = \frac{|\theta z'|}{|\Phi(\theta z') - v(\theta z')|} < \frac{b}{|v_0| - \epsilon - M} \leq \frac{\epsilon}{b}$$

и из (4.2.11) следовало бы, что $\epsilon < |z'| \epsilon / b$, что противоречит предположению. Следовательно, $|v(z) - v_0| \leq \epsilon$ при $0 \leq |z| \leq b$.

Лемма 4. При $|v_0| \rightarrow \infty$ на $[0, b]$ имеем

$$\frac{v_0^2}{[\Phi(z) - v(z)][\Phi(-z) - v(-z)]} \rightarrow 1.$$

Действительно, на основании леммы 3 получаем

$$\frac{v(z)}{v_0} \rightarrow 1 \quad \text{при } |v_0| \rightarrow \infty \quad \text{на } [-b, b].$$

Далее, на $[-b, b]$

$$\left| \frac{\Phi(z)}{v_0} \right| \leq \frac{M}{|v_0|},$$

и поэтому отношение $\Phi(z)/v_0$ сколь угодно мало по модулю, если только $|v_0|$ выбрано достаточно большим. Отсюда непосредственно следует утверждение леммы.

Лемма 5. Рассмотрим тождество

$$v_0^2 [v(-b) - v(b)] = \\ = \int_0^b \frac{v_0^2 [v(-z) - v(z)] z}{[\Phi(z) - v(z)][\Phi(-z) - v(-z)]} dz + \int_0^b [\Phi(z) - \Phi(-z)] z dz + \\ + \int_0^b [\Phi(z) - \Phi(-z)] \left\{ \frac{v_0^2}{[\Phi(z) - v(z)][\Phi(-z) - v(-z)]} - 1 \right\} z dz = \\ = I_1 + I_2 + I_3. \quad (4.2.12)$$

Тогда при $|v_0| \rightarrow \infty$ получаем: 1) $I_1 \rightarrow 0$ и $I_3 \rightarrow 0$ (на основании лемм 3 и 4); 2) $I_2 > 0$ (в силу предположения б) теоремы). Более того: 3) выражение (4.2.12) при $|v_0| \rightarrow \infty$ стремится к положительному пределу I_2 , и для достаточно больших значений $|v_0|$, т. е. $|v_0| \geq V$, имеем $v(-b) > v(b)$.

Итак, рассматриваем случай, когда $v_G = +\infty$. Возьмем такую интегральную кривую уравнения (4.2.8), для которой $v_C < -V$, $v_A > V$. При продолжении ее (в положительном и отрицательном направлениях) через точки A и C эта кривая пересечет прямую $z = b$ в точках B и D (рис. 4.2.6), которые лежат ниже, чем соответствующие точки пересечения B' и D' ее дуги \widehat{AC} с прямой $z = -b$ (лемма 5). Так как $\Phi(z) \geq \Phi(-z)$ при $z \geq b$, то продолжение дуги \widehat{AB} пересекает еще раз прямую $z = b$ в точке E , расположенной выше D' , а тем более выше D . Если замкнуть дугу \widehat{DE} вертикальным отрезком \overline{DE} , то получим контур, отображение которого на плоскость xv даст искомую внешнюю границу.

В случае, если указанный контур окажется в полосе $|z| \leq \sqrt{2M}$, условие $G(\pm\infty) = +\infty$ перейдет в условие $G(\pm\infty) > M$.

Теорема 4.2.5 является более общей, чем теорема 4.2.3, что было показано Конти [1]. Условия теоремы 4.2.3 включают в себя условия теоремы 4.2.5, но не наоборот.

Действительно, допустим, что условия теоремы 4.2.3 выполнены. Тогда, так как $f(0) < 0$, то в силу непрерывности функции $f(x)$ она остается отрицательной в некоторой окрестности точки $x = 0$. Таким образом, существует интервал $0 < |z| < a$, в котором

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{f[x(z)]}{g[x(z)]} z < 0,$$

и, следовательно, $\Phi(z)/z < 0$. Отсюда получаем как неравенство $\Phi(z)/z < k$ для любого положительного k , так и неравенство $\Phi(|z|) - \Phi(-|z|) < 0$. Таким образом, условие а) теоремы 4.2.5 будет выполнено.

Предположим теперь, что при любом $x_0 > 0$

$$z'_0 = z(-x_0) < 0, \quad z_0 = z(x_0) > 0;$$

тогда получим

$$\Phi(z'_0) = F(-x_0) \leq Fx_0, \quad \Phi(z_0) = F(x_0) \geq -Fx_0.$$

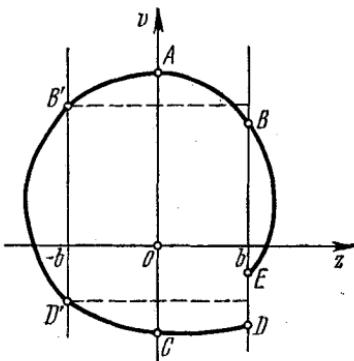


Рис. 4.2.6.

Если выбрать x_0 так, что $f(x) \geq 0$ для $|x| \geq x_0$, то найдем

$$\frac{d\Phi}{dz} \geq 0 \quad \text{для } z \leq z'_0 \text{ и } z \geq z_0,$$

и, следовательно, $\Phi(z) \leq Fx_0$ для $z \leq z'_0$ и $\Phi(z) \geq -Fx_0$ для $z \geq z_0$.

Пусть $x_1 > x_0$ — значение переменной x_1 , упомянутое в условии б) теоремы 4.2.3, и $z_1 = z(x_1)$. Тогда

$$\Phi(z_1) \geq \Phi(z_0) + 10Fx_0 > 9Fx_0 > 0,$$

$$\Phi(z) \geq \Phi(z_1) > 9Fx_0 \quad \text{для } z \geq z_1$$

и

$$\Phi(z) - \Phi(-z) > 8Fx_0 > 0 \quad \text{для } z \geq \max(z_1, -z'_0).$$

Отсюда непосредственно следует, что для достаточно большого значения b имеем

$$\int_0^b [\Phi(z) - \Phi(-z)] z \, dz > 0.$$

Кроме того, получаем

$$\frac{\Phi(z)}{z} \geq -\frac{Fx_0}{|z|} \quad \text{для } z \leq z'_0,$$

$$\frac{\Phi(z)}{z} \geq -\frac{Fx_0}{z} \quad \text{для } z \geq z_0.$$

Если выбрать значение b , для которого $Fx_0/b < 2$, то будет выполнено условие б) теоремы 4.2.5.

Чтобы показать, что из условий теоремы 4.2.5 не вытекают условия теоремы 4.2.3, Конти рассматривает уравнение Льенара в простой форме $x'' + f(x)x' + x = 0$ и полагает $f(-x) = f(x)$.

Тогда $z = x$ и условия теоремы 4.2.5 формулируются очень просто:

а) $F(x) \leq 0$ (но $F(x) \neq 0$) для $0 \leq x \leq a$, $a > 0$;

б) $F(x) \geq 0$ для $x \geq b$, причем $\int_0^b F(x) x \, dx > 0$.

Легко построить функции $f(x)$, которые удовлетворяют указанным условиям и, несмотря на это, для $x \rightarrow 0$ или для $x \rightarrow \infty$ бесконечно много раз меняют знак, и поэтому условие а) теоремы 4.2.3 не выполняется.

Из теоремы 4.2.5 Филиппов выводит еще две теоремы относительно обобщенного уравнения Льенара

$$x'' + f(x, x')x' + g(x) = 0, \quad (4.2.13)$$

соответствующего системе

$$x' = y, \quad y' = -f(x, y)y - g(x). \quad (4.2.14)$$

При этом, как и раньше, принимается, что

$$xg(x) > 0 \quad \text{для } x \neq 0, \quad G(\pm\infty) = \infty.$$

Хотя уравнению (4.2.13) будет посвящен п. 4.4, однако имеет смысл рассмотреть эти теоремы уже сейчас.

Теорема 4.2.6. Уравнение (4.2.13) допускает существование устойчивого предельного цикла, если уравнение

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0, \quad f(x) = \sup_{|y| \leq n} f(x, y), \quad (4.2.15)$$

удовлетворяет условию а) теоремы 4.2.5, а для уравнения

$$x'' + \bar{f}(x)x' + g(x) = 0, \quad \bar{f}(x) = \inf_y f(x, y), \quad (4.2.16)$$

выполнено ее условие б).

Условие а) используется при доказательстве теоремы 4.2.5 для того, чтобы начало координат фазовой плоскости xy можно было бы заключить внутрь замкнутых контуров, из которых каждый является внутренней границей искомой кольцевой области. Если для уравнения (4.2.15) в прямоугольнике $|x| \leq a, |y| \leq n$ построить один такой контур, то он будет годиться в том же смысле и для уравнения (4.2.13). Это следует из неравенства

$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) - \frac{g(x)}{y} \geq -f(x) - \frac{g(x)}{y}, \quad |y| \leq n.$$

При доказательстве теоремы 4.2.5 на основании условия б) конструируется внешняя граница кольцевой области. То, что она одновременно служит внешней границей кольцевой области для уравнения (4.2.13), вытекает из неравенства

$$\frac{dy}{dx} = -f(x, y) - \frac{g(x)}{y} \leq -\bar{f}(x) - \frac{g(x)}{y}$$

Теорема 4.2.7. Система (4.2.14) в некоторой окрестности начала координат обладает замкнутыми интегральными кривыми, если в области $|x| \leq \xi, |y| \leq n$ выполняются следующие условия:

а) для $x'_0 < 0, x_0 > 0$ из равенства $G(x'_0) = G(x_0)$ следует равенство

$$\frac{f(x'_0, y)}{g(x'_0)} = \frac{f(x_0, y)}{g(x_0)}; \quad (4.2.17)$$

б) для $F(x) = \int_0^x f(\xi) d\xi$, где $f(x) = \sup_{|y| \leq n} f(x, y)$, выполнено

неравенство

$$F(x) < a \sqrt{G(x)} \quad (a < \sqrt{8}). \quad (4.2.18)$$

Если вновь применить преобразование $z = z(x)$ к уравнению (4.2.7), то неравенство (4.2.18) примет вид

$$\left| \frac{\Phi(z)}{z} \right| < k \quad (k < 2),$$

знакомый из теоремы 4.2.5. Как известно, каждая траектория $\{x(t), y(t)\}$ уравнения (4.2.15), начинающаяся в точке A на полуоси $x = 0, y > 0$, достаточно близкой к началу координат O , заканчивается на противоположной полуоси $x = 0, y < 0$

в точке C , и наоборот. Интегральные кривые уравнения (4.2.14), пересекающие дугу ABC (рис. 4.2.7), выходят из области $ABC\bar{OA}$. Вследствие этого интегральная кривая уравнения (4.2.14), проходящая через точку C , зарождается в некоторой точке M отрезка \bar{OA} .

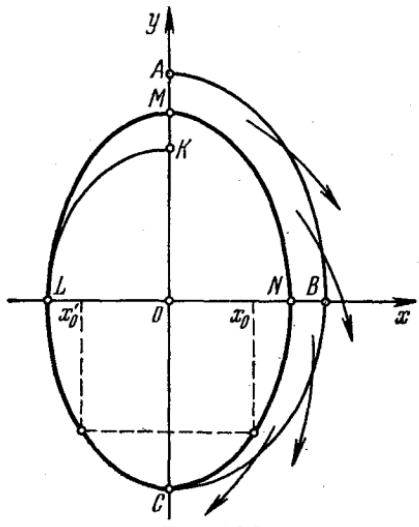


Рис. 4.2.7.

Покажем, что дуга MNC является частью замкнутой траектории. Для этого каждой точке (x_0, y) , $x_0 > 0$, поставим в соответствие точку (x'_0, y) , $x'_0 < 0$, $G(x'_0) = G(x_0)$. Тогда дуга MNC перейдет в дугу MLC . Дуга MLC также является интегральной кривой уравнения (4.2.14), следовательно, из уравнения (4.2.14) с учетом соотношения (4.2.17) и равенства $g(x'_0)dx'_0 = g(x_0)dx_0$ вытекает равенство

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx'_0} &= \frac{g(x'_0)}{g(x_0)} \frac{dy}{dx_0} = \frac{g(x'_0)}{g(x_0)} [-f(x_0, y) - g(x_0)/y] = \\ &= -f(x'_0, y) - g(x'_0)/y. \end{aligned}$$

То, что точка M расположена выше начала координат O , следует из того, что траектория, выходящая из точки L , направлена вверх. Она пересекает полуось $x = 0, y > 0$ в некоторой точке K , и дуга LM не может войти внутрь сектора LKO .

Варьируя положение точки C , получим континuum замкнутых траекторий системы (4.2.14), внутри которых располагается начало координат.

Барбалат и Халанай [1] модифицировали теорему 4.2.5, заменив условия

$$\begin{aligned} \Phi(z)/z &\leq k \quad (0 < k < 2) \quad \text{для } |z| \leq a, \\ \Phi(z)/z &\geq -k \quad \text{для } |z| \geq b \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

другими. Как было показано выше, условия (4.2.19) позволяют сравнить траектории уравнения (4.2.8) с известными интегральными кривыми уравнения (4.2.9). Эти условия обеспечивают то, чтобы каждая траектория, выходящая из точки оси v , отличной от начала координат, вновь пересекала бы ту же ось (лемма 2). Отсюда видно, как могут быть изменены условия Филиппова.

Из многих возможностей, указанных Барбалатом и Халанаем, для отказа от условия (4.2.19) мы используем только одну.

Теорема 4.2.8. На фазовой картине уравнения Лъенара существует устойчивый предельный цикл, если в результате преобразования (4.2.7) имеем:

- a) $\Phi(z) \leqslant \Phi(-z)$, но $\Phi(z) \neq \Phi(-z)$ для $0 < z < a$;
- b) $\Phi(z) \geqslant \Phi(-z)$ для $z > b$, $\int_0^b [\Phi(z) - \Phi(-z)] z dz > 0$;
- c) $\Phi(a') = 0$ при $0 < a' \leqslant a$;
- d) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = -\infty$,

t. e.

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{2g_1}} \Phi(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow -\sqrt{2g_2}} \Phi(z) = -\infty,$$

где

$$g_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} G(x), \quad g_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} G(x).$$

Условие c) используется для того, чтобы построить внутреннюю границу кольцевой области. Возьмем интегральную кривую уравнения (4.2.8), проходящую через точку $B\{a', \Phi(a')\}$. Очевидно, она пересекает ось v в двух точках A и C , над осью z и под ней. В силу условия a) дуга \widehat{AB} может быть продолжена через точку A до точки C' . Если теперь замкнуть дугу $\widehat{CC'}$ отрезком $\overline{CC'}$, то получим образ внутренней граничной кривой.

Условие d) обеспечивает то, что всякая интегральная кривая уравнения (4.2.8), выходящая из точки оси v , исключая начало координат, пересекает кривую $v = \Phi(z)$ и, следовательно, опять пересекает ось v . Легко убедиться в том, что лемма 2 относится также к интегральным кривым, начальные точки которых лежат на оси v выше A или ниже C . На основании теоремы 4.2.5 этого достаточно для завершения доказательства нашей теоремы. Ясно, что условие c) может быть заменено требованием $\Phi(-a') = 0$.

Для нечетных функций $F(x)$ и $g(x)$, накладывая некоторые дополнительные ограничения, Кушков [2] доказал ряд теорем о существовании предельных циклов и дал условия появления двух предельных циклов.

Дальнейшие теоремы о существовании предельных циклов относятся к случаям обобщения, когда $f(x)$ в уравнении (3.1.1) заменяется функцией $f(x, x')$ (см. п. 4.4).

Единственность предельного цикла можно доказать методом, разработанным Сансоне [3] (ср. Конти [1]).

Теорема 4.2.9. Если имеют место условия теорем 4.2.4, или 4.2.5, или 4.2.8 и если, кроме того,

- $\Phi(z)/z$ на $(-\infty, 0]$ убывает, а на $[0, \infty)$ возрастает;
- $|\Phi(z)/z| < 2$,

то на фазовой картине уравнения Льенара (3.1.1) существует один и только один предельный цикл.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 4.1.5 и может быть также упрощено на основании результатов Массера [4] даже при отказе от условия б).

Теперь изложим некоторые общие теоремы Гаглиардо об асимптотическом поведении многообразия интегральных кривых уравнения (3.1.1). При этом будем полагать, что $g(x)$ возрастает, принимает нулевое значение только в точке $x = 0$ и обладает там производной, отличной от нуля: $g'(0) > 0$. Пусть, далее, $f(x) > 0$ для $|x| > a > 0$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 4.2.10. Все решения уравнения (3.1.1) либо колеблющиеся (т. е. имеют бесконечно много нулей), либо они не обладают этим свойством и стремятся к нулю.

Теорема 4.2.11. В случае, когда $f(0) < 2\sqrt{g'(0)}$, все решения уравнения (3.1.1) колеблющиеся.

Теорема 4.2.12. Если $f(0) > 0$ и для всех значений x функция $f(x) \geq 0$, то, как известно, все решения уравнения (3.1.1) стремятся к trivialному. Если же, кроме того, $f(0) > 2\sqrt{g'(0)}$, то решения неколеблющиеся.

Доказательства мы заимствуем из работы Гаглиардо [1].

Доказательство теоремы 4.2.10. Пусть рассматриваемое решение уравнения (3.1.1) не является монотонным с любого момента времени. Тогда оно обладает бесконечным множеством максимумов и минимумов, для которых имеем $x'(t) = 0$, $x''(t) = -g(x) < 0$ и соответственно $x''(t) > 0$. Так как максимумы положительны, а минимумы отрицательны, то решение является колеблющимся.

Положим теперь, что решение, начиная с некоторого момента (для $t \geq T$), монотонно возрастает или убывает. Тогда возможны три случая:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$;
- $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a$, $|a| < \infty$.

В случае а) для $t \geq T' \geq T$ получим $f(x) > 0$, $g(x) \geq g > 0$ и, так как $x'(t) \geq 0$, то $x''(t) \leq -g$, $x'(t) - x'(T') \leq -g(t - T') \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow +\infty$, что противоречит возрастанию решения $x(t)$.

К соответствующему результату приедем и в случае б). Поэтому оба случая исключаются.

В случае с), так как

$$x'(t) = x'(T) - \int_{x(T)}^x f(x) dx - \int_T^t g[x(t)] dt,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = x'(T) - \int_{x(T)}^a f(x) dx - \int_T^\infty g[x(t)] dt = \pm \infty,$$

если $a \leq 0$. Но это невозможно, поэтому $a = 0$.

Доказательство теоремы 4.2.11. Достаточно показать, что, начиная с некоторого момента, никакое нетривиальное решение не может монотонно стремиться к нулю. Предположим противное: пусть, например, $x(t) > 0$ при $t \geq T$ и не возрастает. Обозначая через c положительную константу такую, что $f(0) < c < 2\sqrt{g'(0)}$, получим $c^2 < 4g'(0) - 8\varepsilon$ при подходящем выборе $\varepsilon > 0$.

Если $T' \geq T$ достаточно велико, то $x(t)$ для $t \geq T'$ сколь угодно мало и

$$g(x) > [g'(0) - \varepsilon]x > (c^2/4 + \varepsilon)x, \quad f(x) < c. \quad (4.2.20)$$

Однородное линейное дифференциальное уравнение

$$\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + (c^2/4 + \varepsilon)\bar{x}(t) = 0 \quad (4.2.21)$$

заведомо имеет колебательное решение, а именно затухающие синусоидальные колебания с периодом $2\pi/\sqrt{\varepsilon}$.

Если в качестве начальных значений при $t = 0$ взять

$$\bar{x}(0) = x(T')/2, \quad \dot{\bar{x}}(0) = 0,$$

то решение $\bar{x}(t)$ в некотором интервале (t_1, t_2) , где $t_1 < 0 < t_2$, окажется положительным и равным нулю в каждой из двух концевых точек; при $t \leq 0$ оно возрастает, а при $t \geq 0$ убывает.

Теперь рассмотрим решение $x(t)$ при $t \geq T'$ и указанную выше дугу $\bar{x}(t)$, которая должна пересекать кривую $x(t)$. Кривую $x(t)$ можно выбрать так, чтобы она имела лишь одну точку пересечения с дугой $\bar{x}(t)$, причем можно предполагать, что дуга достаточно далеко отодвинута влево.

Итак, существует такое положение, при котором дуга сравнения касается рассматриваемой интегральной кривой $x(t)$, после чего остается под ней. Пусть точка касания есть $t = t_0$ ($t_0 > T'$). Тогда имеем

$$x(t_0) = \bar{x}(t_0) > 0, \quad x'(t_0) = \dot{\bar{x}}(t_0) \leq 0;$$

$$x(t) > \bar{x}(t) \quad \text{для } t_0 < t < t_2;$$

$$x(t_2) < \bar{x}(t_2) = 0.$$

Поэтому существует значение τ , $t_0 < \tau < t_2$, для которого

$$\frac{x(t_2) - \bar{x}(t_2)}{t_2 - t_0} = [x'(\tau) - \bar{x}'(\tau)] > 0.$$

Так как на отрезке $[t_0, t]$ для функций $x(t)$, $\bar{x}(t)$ выполняются неравенства (4.2.20), то

$$g[x(t)] > (c^2/4 + \varepsilon) \bar{x}(t), \quad \int_{\bar{x}(\tau)}^{x(t_0)} c dx > \int_{x(\tau)}^{x(t_0)} f(x) dx.$$

Из интегрирования уравнений (3.1.1) и (4.2.21) для любого $\tau > t_0$ следует

$$[x'(\tau) - x(t_0)] - \int_{x(\tau)}^{x(t_0)} f(x) dx + \int_{t_0}^{\tau} g[x(t)] dt = 0,$$

$$[\bar{x}'(\tau) - \bar{x}'(t_0)] - \int_{\bar{x}(\tau)}^{\bar{x}(t_0)} c dx + \int_{t_0}^{\tau} (c^2/4 + \varepsilon) \bar{x}(t) dt = 0.$$

Отсюда

$$x'(\tau) - \bar{x}'(\tau) = \int_{x(\tau)}^{x(t_0)} f(x) dx - \int_{\bar{x}(\tau)}^{\bar{x}(t_0)} c dx -$$

$$- \int_{t_0}^{\tau} \{g[x(t)] - (c^2/4 + \varepsilon) \bar{x}(t)\} dt < 0,$$

и мы приходим к противоречию.

Предположение, что $x(t) < 0$ при $t \geq T$ и не убывает, также приводит к противоречию. Таким образом, все нетривиальные решения уравнения (3.1.1) — колеблющиеся.

Доказательство теоремы 4.2.12. Пусть теперь

$$f(0) > c > 2 \sqrt{g'(0)}$$

и $\varepsilon > 0$ так мало, что $c^2 > 4g'(0) + 8\varepsilon$. Для $0 < x \leq h$ имеем

$$g(x) < [g'(0) + \varepsilon]x < (c^2/4 - \varepsilon)x, \quad f(x) > c. \quad (4.2.22)$$

Положим теперь, что решение $x(t)$ уравнения (3.1.1) стремится к нулю, колеблясь (т. е. имея неограниченное число переходов через нуль). Сравним его с подходящим выбранным решением однородного линейного уравнения

$$\bar{x}''(t) + c\bar{x}'(t) + (c^2/4 - \varepsilon)\bar{x}(t) = 0, \quad (4.2.23)$$

нетривиальные решения которого стремятся к нулю, не колебляясь. Пусть $|x(t)| \leq h$ для $t \geq T$, и пусть $\bar{x}(t)$ — положительное монотонно убывающее решение уравнения (4.2.23) с начальным значением $\bar{x}(0) = h$. Передвинем кривую вдоль оси t настолько, чтобы она коснулась положительной дуги интегральной кривой

$x(t)$ ($|x| < h$) с внешней стороны. Пусть это произойдет в точке $t = t_0$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} x(t_0) &= \bar{x}(t_0), & x'(t_0) &= \bar{x}'(t_0); \\ 0 < x(t) &\leq \bar{x}(t) \leq h \quad \text{для } t_0 \leq t < t_2; \\ 0 &= x(t_2) < \bar{x}(t_2). \end{aligned}$$

Следовательно, существует значение τ , $t_0 < \tau < t_2$, такое, что

$$\frac{\bar{x}(t_2) - x(t_2)}{t_2 - t_0} = [\bar{x}'(\tau) - x'(\tau)] > 0.$$

Если же проинтегрировать оба дифференциальных уравнения (3.1.1) и (4.2.23) в промежутке от t_0 до τ , то получим противоположный результат. Теорема доказана.

Дальнейшие результаты относительно расположения интегральных кривых уравнения (3.1.1) содержатся в одном из сообщений Утца [2]. Там функция $g(x)$ имеет вид $g(x) = k(x)x$, $k(x) > 0$. Однако рассуждения Утца применимы также к общему случаю, если только $xg(x) > 0$ для $x \neq 0$.

Теорема 4.2.13. *Если $f(x) \leq 0$, то решение $x(t)$ уравнения (3.1.1) является колеблющимся или, для достаточно больших значений t ; монотонным. Причем в последнем случае, если решение возрастает, то $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty$, если оно убывает, то*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty.$$

Для доказательства предположим, что $x(t)$ не колеблется, но для больших значений t имеет определенный, например положительный, знак (в случае отрицательного знака применимы аналогичные рассуждения).

Если $x'(t_0) = 0$, то

$$x''(t_0) = -g[x(t_0)] < 0,$$

и, значит, решение достигает максимума при $t = t_0$. Отсюда вытекает, что при $t > t_0$ производная $x'(t)$ не может обращаться в нуль и, следовательно, сохраняет постоянный знак. Возможны два случая.

1. $x(t) > 0$, $x'(t) < 0$ для $t > T$, и поэтому $x''(t) = -f[x(t)] \times x'(t) - g[x(t)] < 0$.

Отсюда следует, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = -\infty$, но это исключено.

2. $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$ для $t > T$, так что $x(t)$ монотонно возрастает.

Если $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a < +\infty$, то легко видеть, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0$ (так как $x''(t) \geq -g$, $g = \sup g(x)$ для $0 \leq x \leq a$), поэтому $\lim_{t \rightarrow +\infty} x''(t) = -g(a) < 0$. Однако и это невозможно.

Остается только одно:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = +\infty.$$

Теорема верна и тогда, когда член $f(x)x'$ в дифференциальном уравнении (3.1.1) заменяется слагаемым общего вида $f(x, x')x'$, где $f(x; x') \leq 0$ (см. ниже, п. 4.4), или функцией $F(x')$ такой, что $F(x')x' \leq 0$ (см. ниже, п. 4.3).

К доказанной теореме примыкает

Теорема 4.2.14. *Если $f(x) \geq 0$ и все решения $x(t)$ уравнения (3.1.1) для $t \geq 0$ ограничены, то каждое решение уравнения либо является колеблющимся, либо монотонно стремится к нулю.*

Доказательство проводится аналогично тому, как это делалось ранее. При положительном монотонном решении оно сводится к двум случаям.

1. Пусть $x(t) > 0$, $x'(t) > 0$ для $t \geq T$ и следовательно,

$$x''(t) = -f[x(t)]x'(t) - g[x(t)] \leq -g[x(t)].$$

Так как $0 < x(t) \leq x(t) \leq \alpha$, то $g[x(t)] \geq \gamma > 0$, $x''(t) \leq -\gamma$, что противоречит предположению: $x'(t) > 0$ для $t \geq T$.

2. Пусть $x(t) > 0$, $x'(t) < 0$ для $t \geq T$ и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = a \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x'(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x''(t) = -g(a) \leq 0.$$

Случай $a > 0$, очевидно, исключается, и, таким образом, $a = 0$.

Соответствующее обоснование аналогично проводится при монотонном отрицательном решении.

Результат сохраняется, если член $f(x)x'$ заменить через $f(x, x')x'$, где $f(x, x') \geq 0$, или через $F(x')$, где $x'F(x') \geq 0$.

Подробное исследование асимптотического поведения решений $\{x(t), v(t)\}$ уравнения (3.1.3) проводит Кушков [1] при условиях

$$xF(x) > 0, \quad xg(x) > 0$$

для $x \neq 0$, $-\infty < x < \delta_1$, $\delta_2 < x < \infty$ ($0 < \delta_1 < \delta_2$). При этом он изучает вид приближения фазовых траекторий к особым точкам и дает условия спиралевидной сходимости, т. е. условия затухания колебаний около положения равновесия.

4.3. Дифференциальное уравнение $x'' + F(x') + g(x) = 0$

Для уравнения Льенара в форме (4.1.1) рассмотрим его решение $x(t)$ с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$. Функция

$$w(t) = w_0 + \int_0^t x(\tau) d\tau, \quad w_0 = - \int_0^{x_0} f(x) dx - y_0, \quad (4.3.1)$$

удовлетворяет уравнению Рэлея

$$w'' + F(w') + w = 0, \quad F(w') = \int_0^w f(x) dx. \quad (4.3.2)$$

Если решение $x(t)$ уравнения (4.1.1) является θ -периодическим, т. е. $x(t+\theta) \equiv x(t)$, то таким же окажется соответствующее решение $w(t)$ уравнения (4.3.2), так как

$$\int_0^\theta x(\tau) d\tau = w(t) \Big|_0^\theta = -[x'(t) + F\{x(t)\}] \Big|_0^\theta = 0.$$

Обратное утверждение также справедливо, так что периодические решения уравнений (4.1.1) и (4.3.2) однозначно соответствуют друг другу.

На фазовых картинах, которые можно себе представить на плоскостях xx' и ww' , наблюдаются одинаковые состояния устойчивости. А именно, рассмотрим два (ограниченных) решения $x(t)$ и $\bar{x}(t)$ и выберем подходящим образом шкалу времени $\tilde{t} = \tilde{t}(t)$, $\tilde{t}(0) = 0$. Пусть

$$r(t) = [x(t) - \bar{x}(\tilde{t})]^2 + [y(t) - \bar{y}(\tilde{t})]^2, \quad r(0) = r_0,$$

причем

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} r(t) = 0 \text{ равномерно по } t \text{ при } t \geq 0. \quad (4.3.3)$$

Тогда для

$$\begin{aligned} q(t) &= [w(t) - \bar{w}(\tilde{t})]^2 + [x(t) - \bar{x}(\tilde{t})]^2 = \\ &= (x - \bar{x})^2 + \{[F(x) - F(\bar{x})] + (y - \bar{y})\}^2, \quad q(0) = q_0, \end{aligned}$$

будем иметь

$$\lim_{r_0 \rightarrow 0} q(t) = 0 \text{ равномерно по } t \text{ при } t \geq 0. \quad (4.3.4)$$

Таким образом, условие $r_0 \rightarrow 0$ равносильно условию $q_0 \rightarrow 0$. Справедливо также обратное утверждение.

Итак, исследование асимптотического поведения многообразия решений рассматриваемых уравнений Льенара и Рэлея приводит к совпадающим результатам. Поэтому нам не нужно дальше заниматься уравнением (4.3.2), а достаточно обратиться к уравнениям из п. 4.1.

Это недопустимо только в том случае, когда функция $F(x)$ не может быть представлена в виде интеграла.

Теперь перейдем к общей форме уравнения и вновь будем писать x вместо w :

$$x'' + F(x') + g(x) = 0 \quad (4.3.5)$$

или

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - F(y), \quad (4.3.6)$$

где $F(0) = 0$. Предполагается, что $xg(0) > 0$ для $x \neq 0$, и поэтому фазовая картина на плоскости xy обладает единственной особой точкой $x = y = 0$.

Займемся достаточными условиями существования предельного цикла и докажем следующую теорему (ср. Рейссиг [8]).

Теорема 4.3.1. Пусть функции $g(x)$ и $F(y)$ для всех значений их аргументов непрерывны и обеспечивают существование единственного решения уравнения (4.3.5), удовлетворяющего заданным начальным условиям и непрерывно зависящего от этих условий. Пусть, далее,

a) $F(y)y \leq 0$ для $|y| \leq \eta_1$ ($\eta_1 > 0$),

$$F(y) \operatorname{sgn} y \geq \varepsilon > 0 \quad \text{для } |y| \geq \eta_2 > \eta_1,$$

$$\max_{|y| \leq \eta_1} |F(y)| = M > 0;$$

b) $g(x) \operatorname{sgn} x \geq M + \varepsilon$ для $|x| \geq \delta$.

Тогда на фазовой картине системы (4.3.6) существует по меньшей мере один устойчивый предельный цикл.

Для доказательства построим на плоскости xy , как обычно, кольцевую область, удовлетворяющую условиям теоремы Бендиクсона.

Рассмотрим функцию

$$w(x, y) = G(x) + \frac{1}{2} y^2, \quad G(x) = \int_0^x g(s) ds, \quad (4.3.7)$$

и вычислим ее полную производную в силу уравнения (4.3.6):

$$\frac{d}{dt} w(x, y) = -yF(y) \quad \text{для } |y| \leq \eta_1. \quad (4.3.8)$$

Пусть для $-\delta \leq -\delta' < c < \delta'' \leq \delta$ имеем

$$G(-\delta') = G(\delta'') = \gamma \leq \frac{1}{2} \eta_1^2.$$

Тогда кривая $w(x, y) = \gamma$, где $-\delta' \leq x \leq \delta$, лежит в горизонтальной полосе $|y| \leq \eta_1$ и может быть взята в качестве внутренней границы искомой кольцевой области.

Для нахождения внешней границы используем неравенства

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) + (\operatorname{sgn} y) \varepsilon x\} = -|y|[F(y) \operatorname{sgn} y - \varepsilon] \leq 0$$

при $|y| \geq \eta_2$

и

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) - (\operatorname{sgn} y) Mx\} = -|y|[F(y) \operatorname{sgn} y + M] \leq 0$$

при $|y| > 0$.