начинающиеся на кривой C_0 в интервале $x_0 < x \leqslant x_1$, стремятся при убывании x к особой точке $(x_0, 0)$.

При рассмотрении дифференциального уравнения (5.3.30) с учетом обозначений (5.3.31) положим $\bar{x}_0 = -x_1$, $\bar{x}_1 = -x_0$ и напишем для $\bar{g}_0(x)$ такие же условия, как для $g_0(x)$. Эти условия совпадают с условиями c) и d) для $g_1(x)$ и обеспечивают для системы (5.3.28), эквивалентной системе

$$\bar{x}' = \bar{v} - \bar{F}_0(\bar{x}), \quad \bar{v}' = -\bar{g}_0(\bar{x}) \tag{5.3.32}$$

$$\left[\bar{v} = \int_{x_0}^{x_1} f(s)\,ds - v\right],$$

что ее траектории на плоскости $\bar{x}v$, начинающиеся на кривой $\bar{C}_0$: $\bar{v} = \bar{F}_0(\bar{x})$ в промежутке $\bar{x}_0 < \bar{x} \leqslant \bar{x}_1$, при убывающем $\bar{x}$ стремятся к особой точке $(\bar{x}_0, 0)$. Если описать такое поведение траекторий в координатах x, v, то окажется, что траектории системы (5.3.28), начинающиеся в промежутке $x_0 \leqslant x < x_1$ на кривой C_0, проходят при возрастающем x над кривой C_0 и приближаются к особой точке $\{x_1, F_0(x_1)\}$.

Таким образом, взяв траектории систем (5.3.27) и (5.3.28), соединяющие точки кривой C_0 с абсциссами x_0 и x_1, получим искомый контур W.

Если возмущающая функция $e(t)$ не является периодической, то выполнения условий a) и b) или c) и d) достаточно лишь для существования ограниченных решений, но не для ограниченности всех решений.

Приведем теперь одну теорему Бхатия [1] относительно ограниченности решений уравнения (5.3.20), основанную на построении некоторой функции Ляпунова. В обозначениях теоремы 5.3.7 имеем следующую теорему.

Теорема 5.3.11. *Система* (5.3.25) *принадлежит классу* D, *если*

a) $|E(t)| \leqslant M$;

b) $F(x)\operatorname{sgn} x \geqslant M + \varepsilon > M$ *для* $|x| \geqslant X$,

$|F(x)| \leqslant F$ *для* $|x| \leqslant X$;

c) $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant \varepsilon$ *для* $|x| \geqslant X$,

$|g(x)| \leqslant g$ *для* $|x| \leqslant X$.

Для доказательства, используя теорему 2.4.1′, Бхатия применяет функцию Ляпунова вида

$$U(x, z) = G(x) + \frac{1}{2}z^2 - \frac{\eta xz}{(1+|x|)(1+|z|)} + C$$

$$\left[G(x) = \int_0^x g(s)\,ds\right],$$

где η и C — положительные константы, причем C выбирается так, чтобы выполнялось неравенство $C > \sup\limits_{-\infty<x<\infty}(-G(x)) + \eta$. Так как

$$\frac{|xz|}{(1+|x|)(1+|z|)} < 1,$$

то функция U будет положительной. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = g(x) - \frac{\eta z}{(1+|x|)^2(1+|z|)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = z - \frac{\eta x}{(1+|x|)(1+|z|)^2}$$

и

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x}\{-F(x)+z+E(t)\} + \frac{\partial U}{\partial t}\{-g(x)\} =$$

$$= -\left\{ g(x)[F(x)-E(t)] + \frac{\eta z^2}{(1+|x|)^2(1+|z|)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta z[F(x)-E(t)]}{(1+|x|)^2(1+|z|)} - \frac{\eta x g(x)}{(1+|x|)(1+|z|)^2} \right\}$$

Отсюда для $|x| \geqslant X$ и всех z получим оценку

$$\frac{dU}{dt} = -\left\{ \frac{g(x)}{2}\left([F(x)-E(t)] - \frac{2\eta x}{(1+|x|)(1+|z|)^2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\eta z^2}{(1+|x|)^2(1+|z|)} + [F(x)-E(t)]\left(\frac{g(x)}{2} - \frac{\eta z}{(1+|x|)^2(1+|z|)}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant -\left\{ \frac{\varepsilon}{2}(\varepsilon - 2\eta) + \frac{\eta z^2}{(1+|x|)^2(1+|z|)} + \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{2} - \eta\right)\right\} \leqslant -\delta,$$

если выбрать $\eta < \varepsilon/2$.

Для $|x| \leqslant X$ при $|z| \geqslant Z$ находим

$$\frac{dU}{dt} \leqslant -\left\{ -g(F+M) - \eta g - \eta(F+M) + \frac{\eta z^2}{(1+X)^2(1+|z|)}\right\} \leqslant -\delta,$$

где, например, можно положить, что

$$Z = 1 + 2(X+1)^2\left[g + \frac{\delta}{\eta} + \left(1 + \frac{g}{\eta}\right)(F+M)\right].$$

Этим на основании теоремы 2.4.1 завершается доказательство.

Если применить более сложную функцию Ляпунова, то можно еще несколько обобщить условие теоремы 5.3.11, отказавшись от условия $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant \varepsilon$ для $|x| \geqslant X$ и потребовав вместо этого следующее:

c′) $g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant 0$, $G(x) > 0$ *для* $|x| \geqslant X$,

$$G(x) \to \infty \quad \textit{для} \quad |x| \to \infty.$$

Действительно, положим $\operatorname{sgn} x = \sigma$, $G(\sigma X)/X = \gamma_\sigma > 0$ и определим следующую функцию:

$$U(x,z) = \\ = G(x) + \frac{1}{2} Z^2 + C - \begin{cases} \dfrac{\eta\sigma G(x) z}{(1+G(x))(1+|z|)}, & |x| \geqslant X, \\ \dfrac{\eta\gamma_\sigma xz}{(1+\gamma_\sigma |x|)(1+|z|)}, & |x| \leqslant X,\ |z| \geqslant Z, \end{cases}$$

где η и C — константы, причем C выберем так же, как ранее, а константой $\eta > 0$ распорядимся позднее.

Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \begin{cases} g(x) - \dfrac{\eta |g(x)| z}{(1+G(x))^2 (1+|z|)}, & |x| \geqslant X, \\ g(x) + \dfrac{\eta\gamma_\sigma z}{(1+\gamma_\sigma |x|)^2 (1+|z|)}, & |x| \leqslant X,\ |z| \geqslant Z, \end{cases}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \begin{cases} z - \dfrac{\eta\sigma G(x)}{(1+G(x))(1+|z|)^2} & \text{при } |x| \geqslant X, \\ z + \dfrac{\eta\gamma_\sigma x}{(1+\gamma_\sigma |x|)(1+|z|)^2} & \text{при } |x| \leqslant X,\ |z| \geqslant Z. \end{cases}$$

Отсюда в силу (5.3.25) получим

$$\frac{dU}{dt} = -g(x)\left\{[F(x) - E(t)]\left[1 - \frac{\eta\sigma z}{(1+G(x))^2(1+|z|)}\right] + \right. \\ \left. + \frac{\eta\sigma z^2}{(1+G(x))^2(1+|z|)} - \frac{\eta\sigma G(x)}{(1+G(x))(1+|z|)^2}\right\}$$

при $|x| \geqslant X$ и

$$\frac{dU}{dt} = -g(x)[F(x) - E(t)] + \frac{\eta\gamma_\sigma [F(x) - E(t)] z}{(1+\gamma_\sigma |x|)^2 (1+|z|)} - \\ - \frac{\eta\gamma_\sigma z^2}{(1+\gamma_\sigma |x|)^2 (1+|z|)} + \frac{\eta\gamma_\sigma x g(x)}{(1+\gamma_\sigma |x|)(1+|z|)^2}$$

при $|x| \leqslant X$, $|z| \geqslant Z$.

Покажем, что функция $U(x, z)$ обладает свойствами, обеспечивающими, в силу теоремы 2.4.1′, D-поведение системы. В самом деле, если выбрать $\eta \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon(1+\varepsilon)^{-1}$, то для $|x| \geqslant X$ найдем

$$\frac{dU}{dt} \leqslant -|g(x)|\left\{[|F(x)| - M]\left[1 - \eta - \frac{\eta}{|F(x)| - M}\right]\right\} - \\ - \frac{\eta |g(x)| z^2}{(1+G(x))^2(1+|z|)} \leqslant -\frac{1}{2}\varepsilon |g(x)| < 0.$$

Далее, выбирая Z достаточно большим, например

$$Z = 1 + \frac{1}{\eta\gamma_u}[1 + g(F + M + \eta) + \eta\gamma_0 (F + M)](1 + \gamma_0 X)^2,$$

где $\gamma_u = \min(\gamma_-, \gamma_+)$, $\gamma_0 = \max(\gamma_-, \gamma_+)$, для $|x| \leqslant X$, $|z| \geqslant Z$, имеем

$$\frac{dU}{dt} \leqslant g(F+M) + \eta\gamma_0(F+M) - \frac{\eta\gamma_u z^2}{(1+\gamma_0 X)^2(1+|z|)} + \eta g \leqslant -1.$$

Таким образом, теорема доказана.

Доказательство теорем 5.3.3—5.3.10 об ограниченности решений уравнения (5.3.20) было основано на построении на фазовой плоскости простого замкнутого контура, который должен был пересекаться фазовыми траекториями только в направлении снаружи внутрь. В отличие от этого, согласно идеям Зейферта [1] (см. п. 2.9), ищутся условия, при выполнении которых некоторый замкнутый контур W и соответственно ограниченная им конечная область B при последовательном применении преобразования T стягиваются в точку (*неподвижная точка преобразования* T).

Зейферту [1] принадлежит

Теорема 5.3.12. *Пусть однородная система* (5.3.21) *определена в области B фазовой плоскости xv, причем свободный член ее $e(t)$ есть θ-периодическая функция. Пусть в области B производные $f'(x)$, $g''(x)$ непрерывны и, кроме того, выполняются условия:*

a) $f(x) > 0$;

b) $|g''(x)||v - F(x)| < 2f(x)g'(x)$.

Тогда система (5.3.21) *обладает в области B периодическим решением периода θ, к которому все остальные решения стремятся при $t \to +\infty$.*

Следуя Зейферту, докажем сначала одну лемму.

Лемма. *Пусть функции $f'(x)$, $g''(x)$ непрерывны в некотором конечном интервале $-\infty < a \leqslant x \leqslant b < +\infty$, причем $f(x) > 0$, $g'(x) > 0$, и пусть $C > 1$ — произвольная постоянная. Тогда существует положительная константа $k_C \leqslant 1/C < 1$ такая, что для $0 \leqslant k \leqslant k_C$ дифференциальное уравнение*

$$N'(x) = \frac{k^2 f'(x) - kN(x)g''(x)}{f(x)[kf(x) - N(x)g'(x)] + 2kg'(x)} \tag{5.3.33}$$

обладает в промежутке $[a, b]$ решением $N(x) \geqslant C$.

Чтобы в этом убедиться, выберем константу $K_C \geqslant C$ так, чтобы в промежутке $[a, b]$ при $K \geqslant K_C$ выполнялись неравенства

$$\frac{f^2(x) + 2g'(x)}{K} - Kf(x)g'(x) < 0 \tag{5.3.34}$$

и

$$\frac{f'(x)/K^2 + g''(x)}{\left|f(x)\left[\frac{f(x)}{K} - Kg'(x)\right] + 2\frac{g'(x)}{K}\right|} < \frac{K}{b-a}. \tag{5.3.35}$$

Положим теперь $k_C = 1/K_C$, $k = 1/K$ и исследуем решение $N(x)$ уравнения (5.3.33) с начальным значением $N(a) = 2K$.

Если не существует точки s, $a < s < b$, такой, что $N(s) = K$, то на основании условия (5.3.34) знаменатель правой части уравнения (5.3.33) в промежутке $[a, b]$ отрицателен и имеет в нем отрицательное наибольшее значение. При этом $N(x)$ определена в промежутке $[a, b]$ и $N(x) \geqslant K \geqslant C$.

Пусть теперь $N(s) = K$, $a < s < b$, причем $N(x) > K$ в промежутке $[a, s]$.

Тогда по теореме о среднем значении имеем

$$N(s) - N(a) = -K = N'(\xi)(s - a), \qquad a < \xi < s,$$

и, следовательно,

$$N'(\varepsilon) = -\frac{K}{s-a} < -\frac{K}{b-a},$$

т. е.

$$|N'(\xi)| > K/(b-a),$$

что противоречит неравенству (5.3.35). Таким образом, лемма доказана.

В дальнейшем промежутком $[a, b]$ служит проекция на ось x границы W области B. Константа C в этом случае выбирается столь большой, чтобы имело место неравенство

$$C \geqslant \frac{1 + \max\limits_{[a,b]} f(x)}{\min\limits_{[a,b]} g'(x)} + \frac{1}{\min\limits_{[a,b]} f(x)}.$$

С помощью функции $N(x) \geqslant K = 1/k$, о которой только что шла речь, определим функцию

$$L(x) = N(x)\, g'(x) - kf(x) \geqslant 1 + \frac{g'(x)}{f(x)} \tag{5.3.36}$$

и вычислим производную в силу системы (5.3.33)

$$kL'(x) = N'(x)\,[L(x)\, f(x) - kg'(x)]. \tag{5.3.37}$$

Функции $g_{ij}(x, v)$ из теоремы 2.9.6 определим следующим образом:

$$g_{11} = L(x), \quad g_{22} = N(x), \quad g_{12} = g_{21} = M(x) = -k;$$

в таком случае будет выполнено неравенство (2.9.14).

В качестве соответствующих функций $h_{ij}(x, v, t)$ получим

$$-h_{11} = P(x, v) = L(x)\, f(x) - kg'(x) - \frac{1}{2} L'(x)\,[v - F(x)] =$$
$$= \frac{L(x)\, f(x) - kg'(x)}{2k}\,[2k - N'(x)(v - F(x))],$$

$$h_{12} + h_{21} = Q(x) = L(x) + kf(x) - N(x)\, g'(x) = 0,$$

$$-h_{22} = R(x, v) = k - \frac{1}{2} N'(x)\,[v - F(x)].$$

Далее вычислим

$$P(x, v) R(x, v) = \frac{L(x) f(x) - kg'(x)}{4k} \{N'(x)[v - F(x)] - 2k\}^2$$

и

$$N'(x)[v - F(x)] - 2k =$$
$$= k \frac{(v - F(x))(kf'(x) - Ng''(x)) - 2f(x)[kf(x) - N(x) g'(x)] - 4kg'(x)}{f(x)[kf(x) - N(x) g'(x)] + 2kg'(x)}.$$

На основании условия b) при подходящем выборе числа $\varepsilon > 0$ в рассматриваемой области фазовой плоскости xv справедливо неравенство

$$| g''(x)[v - F(x)] | \leqslant 2f(x) g'(x) - \varepsilon,$$

причем уменьшением постоянной k можно добиться, чтобы было

$$k\{2f^2(x) + 4g'(x) + | f'(x)[v - F(x)] |\} \leqslant \varepsilon/2.$$

Тогда

$$[v - F(x)][kf'(x) - N(x) g''(x)] - 2f(x)[kf(x) - N(x) g'(x)] -$$
$$- 4kg'(x) \geqslant -2\{f(x)[kf(x) - N(x) g'(x)] + 2kg'(x)\} -$$
$$- | [v - F(x)][kf'(x) - N(x) g''(x)] | \geqslant$$
$$\geqslant 2f(x) g'(x) N(x) - 2k[f^2(x) + 2g'(x)] -$$
$$- k | f'(x)[v - F(x)] | - N(x) | g''(x) | | [v - F(x)] | \geqslant$$
$$\geqslant \varepsilon N(x) - \varepsilon/2 > \varepsilon/2.$$

Так как $L(x)f(x) - kg'(x) \geqslant f(x)$, то тем самым доказано неравенство $P(x, v)R(x, v) > 0$. Кроме того, на основании (5.3.34) получаем неравенство $P(x, v) > 0$. Таким образом, условие (2.9.14) выполнено.

Этим теорема 5.3.12 доказана.

В частном случае, когда $g(x) = x$, условие b) излишне. Действительно, здесь при выполнении неравенства $|F(\pm\infty)| > \max|e(t)|$ всю фазовую плоскость, кроме некоторой окрестности начала координат, можно покрыть семейством контуров W из теоремы 5.2.1. Отсюда следует существование вынужденного колебания с периодом θ, которое асимптотически устойчиво в целом.

5.4. Дифференциальное уравнение $x'' + kf(x)x' + g(x) = ke(t)$

Приведенные ниже результаты о дифференциальных уравнениях типа (5.3.20) относятся к тому случаю, когда функция $f(x)$ и $e(t)$ снабжены положительным множителем:

$$x'' + kf(x) x' + g(x) = ke(t). \tag{5.4.1}$$

Как и раньше, основной интерес представляет выяснение предельной ограниченности решений $x(t)$ вместе с их производными. Кроме того, здесь изучается также вопрос о влиянии па-

раметра k на границы соответствующих областей. Остановимся сначала на работах Картрайт—Литтлвуда и Ньюмена, относящихся к исследованию аналитического поведения решений $x(t)$ и их производных $x'(t)$. С помощью ряда лемм устанавливаются некоторые общие свойства функций, из которых следуют ограниченность решений при $t \to +\infty$ и оценки границ их изменения.

Хотя исследования и являются элементарными, однако они требуют длинных рассуждений, так что превосходство аналитико-топологических методов становится очевидным.

Теорема 5.4.1. *Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $e(t)$ непрерывны всюду и удовлетворяют следующим условиям:*

a) $e(t+\theta) \equiv e(t)$, $|e(t)| \leqslant m$, $\left|\int_0^t e(\tau)\,d\tau\right| \leqslant m$;

b) $f(x) \geqslant r$ *при* $|x| \geqslant a \geqslant 1$, $0 < r \leqslant 1$, $\max(-f(x)) = F$;

c) $\frac{g(x)}{x} \geqslant 1$ *для всех* x;

d) $k \geqslant 1$.

Тогда решения $x(t)$ уравнения (5.1.1) *вместе с их первыми производными $x'(t)$ ограничены при $t \to +\infty$ и справедливы оценки вида*

$$|x(t)| \leqslant C, \quad |x'(t)| \leqslant kC' \quad \text{при} \quad t \geqslant T > 0, \tag{5.4.2}$$

где C, C' — не зависящие от параметра k константы системы и T — постоянная, зависящая от решения, т. е. от его начальных условий.

Для доказательства используется ряд лемм, выясняющих поведение интегральных кривых уравнения (5.4.1) на плоскости tx.

Обозначим через M локальные максимумы функции $|x(t)|$, а через N — локальные минимумы ее; очевидно, все они расположены в полосе $|x| \leqslant km$.

Если рассматривается дуга кривой между двумя соседними нулями (R, S) функции $x(t)$, то абсолютные максимумы функции $|x(t)|$ на дуге $\widehat{RS}$ назовем $\bar{M}$. Часть дуги $\widehat{RS}$ интегральной кривой, на которой $|x| \geqslant x_0$, будем называть *проходной частью* $\widehat{UV}$ контура. При этом предполагается, что начальная точка x_0 может принимать различные значения. Эти значения могут зависеть от постоянных m, r, F, a и от свойств функций $f(x)$, $g(x)$, но не должны зависеть от параметра k. Моменты времени обозначим через t с соответствующими индексами; аналогично поступим со значениями решений и их производных.

Интегральную кривую K достаточно изучить в полуплоскости $x \geqslant 0$, так как изучение нижних дуг $(x \leqslant 0)$, благодаря симметрии условий относительно переменной x, приводит к аналогичным результатам.

Действительно, полагая $\xi = -x$, получим дифференциальное уравнение

$$\xi'' + k\varphi(\xi)\xi' + \gamma(\xi) = k\varepsilon(t),$$

где функции φ, γ, ε удовлетворяют тем же требованиям, что и функции f, g, e. Очевидно, на плоскости tx верхние дуги интегральной кривой $\xi(t)$ зеркально совпадают с нижними дугами кривой $x(t)$, и наоборот.

Лемма 1. *Если $e(t)$ не есть тождественный нуль, то всякое решение $x(t)$ является колебательным.*

Для доказательства проинтегрируем дифференциальное уравнение (5.4.1):

$$x'(t) = x'(t_0) + k\int_{t_0}^{t} e(\tau)\,d\tau - k\int_{x(t_0)}^{x(t)} f(x)\,dx - \int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,d\tau. \quad (5.4.3)$$

Предположим, например, что при $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство $x(t) \geqslant 0$.

Если $\int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,d\tau$ неограниченно возрастает при $t \to \infty$, то $x'(t)$ стремится к $-\infty$; однако это несовместимо с неравенством $x(t) \geqslant 0$.

Таким образом, интеграл $\int_{t_0}^{t} g(x(\tau))\,d\tau \geqslant \int_{t_0}^{t} x(\tau)\,d\tau$ ограничен и $x'(t) \leqslant \text{const}$. Так как $-k\int_{a}^{x(t)} f(x)\,dx \leqslant 0$ при достаточно больших значениях $x(t) > a$, то $x(t)$, а также $x'(t)$ должны быть ограниченными. Отсюда можно сделать вывод, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Из дифференциального уравнения теперь получим, что $x''(t)$ ограничена, так что $\lim\limits_{t\to\infty} x'(t) = 0$. Это в силу периодичности функции $e(t)$ приводит к противоречию:

$$\lim_{t\to\infty} [x''(t) - ke(t)] = 0.$$

Лемма доказана.

Заметим, что здесь используется следующее утверждение: если дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(t)$ обладает конечным пределом при $t \to \infty$ и $u''(t)$ ограничена, то $\lim\limits_{t\to\infty} u'(t) = 0$.

Лемма 2. *Пусть P — точка интегральной кривой K внутри полосы Σ: $|x| \leqslant B$. До тех пор, пока K остается в этой полосе, выполняется неравенство*

$$|x'(t)| < |x'_P| + B'k; \qquad t \geqslant t_P, \quad B' = B'(B).$$

Для доказательства рассмотрим на кривой K точку $Q \in \Sigma$, для которой $t_Q > t_P$, и пусть $|x'_Q| = |x'_P| + u'$, где $u' > 0$.

Если существует множество таких точек, то точку P выберем так, чтобы выполнялось неравенство

$$|x'(t)| < |x'_P| + u' \quad \text{при} \quad t \in [t_P, t_Q).$$

Пусть для некоторой точки Z кривой K, лежащей между P и Q, имеет место равенство $|x'_Z| = |x'_P| + u'/2$, причем

$$|x'_P| + \frac{u'}{2} < |x'(t)| < |x'_P| + u' \quad \text{при} \quad t \in (t_Z, t_Q).$$

Тогда, учитывая, что на этом промежутке $x'(t) \neq 0$ и, следовательно, $\operatorname{sgn} x'(t)$ сохраняет постоянный знак, оценим производную

$$|x'(t)|' = x''(t) \operatorname{sgn} x'(t) \leqslant km - kf[x(t)] \cdot |x'(t)| + |g(x)| \leqslant$$
$$\leqslant km + kF[|x'_P| + u'] + G_B = u'',$$

где $G_B = \max\limits_{|x| \leqslant B} |g(x)|$.

Следовательно,

$$u'/2 = |x'_Q| - |x'_Z| = (t_Q - t_Z)\, x''(\tau) \operatorname{sgn} x'(\tau) \leqslant u''(t_Q - t_Z),$$

где $\tau \in (t_Z, t_Q)$. Отсюда $t_Q - t_Z \geqslant u'/2u''$ и, далее,

$$2B \geqslant |x_Q - x_Z| \geqslant \left[|x'_P| + \frac{u'}{2}\right](t_Q - t_Z) \geqslant$$
$$\geqslant \left[|x'_P| + \frac{u'}{2}\right]\frac{u'}{2u''} \geqslant \frac{[|x'_P| + u']u'}{4u''} > \frac{[|x'_P| + u']u'}{4k[m + F + G_B][|x'_P| + u' + 1]}.$$

Так как

$$\frac{|x'_P| + u'}{|x'_P| + u' + 1} \geqslant \frac{u'}{u' + 1},$$

то

$$2B \geqslant \frac{u'^2}{4k[m + F + G_B][u' + 1]}.$$

Отсюда $\quad u' - 1 < \dfrac{u'^2}{u' + 1} \leqslant 8Bk(m + F + G_B)$, $\quad$ и, считая B достаточно большим, имеем

$$u' < kB', \quad \text{где} \quad B' = 9B(m + F + G_B).$$

Лемма 3. *Пусть $\widehat{RS}$ $(x_R = x_S = 0)$ — дуга кривой на полуплоскости $x \geqslant 0$, и пусть P — некоторая точка этой дуги, в которой имеет место максимум M функции $x(t)$.*

Тогда

$$x_M \leqslant x_P + \frac{2x'_P}{kr} + B_1,$$

где

$$B_1 = \max\left\{\frac{4m}{r},\ 2a\left(1+\frac{F}{r}\right)\right\}.$$

Для доказательства положим $F(x) = \int\limits_0^x f(s)\,ds$. Тогда для $x \geqslant 2a\left(1+\frac{F}{r}\right)$ и $x > x_0 \geqslant 0$ имеем

$$F(x) - F(x_0) > \frac{r}{2}(x - x_0).$$

В случаях $x_M \leqslant 2a\left(1+\frac{F}{r}\right) \leqslant B_1$ или $x_M \leqslant x_P$, очевидно, лемма доказана. Следовательно, мы можем принять, что $x_M > 2a\left(1+\frac{F}{r}\right)$ и $x_M > x_P$.

На основании (5.4.3) имеем

$$x'_M - x'_P = k\int\limits_{t_P}^{t_M} e(\tau)\,d\tau - k\,[F(x_M) - F(x_P)] - \int\limits_{t_P}^{t_M} g\,[x(\tau)]\,d\tau;$$

отсюда, так как $x'_M = 0$ и $\left|\int\limits_0^t |e(\tau)|\,d\tau\right| \leqslant m$, то

$$-x'_P < 2km - \frac{kr}{2}(x_M - x_P),$$

и, следовательно,

$$x_M < x_P + \frac{2}{kr}x'_P + \frac{4m}{r} \leqslant x_P + \frac{2}{kr}x'_P + B_1,$$

что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим дугу $\widehat{UV}$, для которой $x_0 = a$, и докажем следующее утверждение.

Лемма 4. *Если $x'_U \geqslant kb' > 4b$, то для произвольного числа $b \geqslant 1$ существуют постоянные $B_2(b) > 4b$, $B_3(b)$ и $b' \geqslant B_2(b)$ со следующими свойствами:*

либо a) $|x'_P| \leqslant 1$ *для некоторой точки P дуги $\widehat{UV}$, где $x_P \leqslant b + a$,*

либо b) x' *остается между границами $\frac{1}{4}x'_U$ и $x'_U + kB_3(b)$ до тех пор, пока дуга $\widehat{UV}$ не пересечет в первый раз прямую $x = X$, где $X = b + a$ или $X < b + a$, но $k[F(X) - F(a)] = x'_U/2$.*

Действительно, если принять, что a) не выполняется, то $|x'| > 1$ для всех точек дуги $\widehat{UV}$, для которых $a \leqslant x \leqslant b + a$.

Рассмотрим дугу $\widehat{UV}$ до точки Q, где либо $x'_Q = \frac{1}{4}x'_U$, либо $k[F(x_Q) - F(a)] = \frac{1}{2}x'_U$, либо $x_Q = b + a$ в зависимости от того, какое равенство будет выполнено первым.

Тогда на дуге $\widehat{UV}$ соответственно будет справедливо одно из неравенств:

или $x \leqslant b + a$, или $x' \geqslant \frac{1}{4} x'_U > 1$, или $k[F(x) - F(a)] \leqslant \frac{1}{2} x'_U$.

Отсюда $b > x_Q - x_U > t_Q - t_U$, т. е. $t_Q - t_U < b$, или

$$x'_Q = x'_U + k \int_{t_U}^{t_Q} e(\tau)\, d\tau - k[F(x_Q) - F(a)] -$$

$$- \int_{t_U}^{t_Q} g[x(\tau)]\, d\tau > x'_U - kbm - \frac{1}{2} x'_U - bG_{b+a} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} x'_U - kb[G_{b+a} + m] \geqslant \frac{1}{4} x'_U,$$

если только $x'_U \geqslant kb'$, где

$$b' \geqslant B_2(b) = 4b[G_{a+b} + m] \geqslant 4b[b + a + m] > 4b.$$

Таким образом, случай $x'_Q = \frac{1}{4} x'_U$ отпадает и возможен только один из двух оставшихся случаев.

Если выполнено a), то лемма справедлива. Если a) не выполнено, то утверждение b) леммы обеспечено, если положить $x_Q = X$. Величина $B_3 = B_3(b)$ может быть определена на основании леммы 2:

$$B_3 = B'(b + a) = 9(b + a)[m + F + G_{b+a}].$$

Лемма 5. *Если положить* $\int_{t_U}^{t_V} x'^2\, dt = w$, *то для случая* b) *леммы* 4 *справедливо неравенство*

$$k \int_{t_U}^{t_V} f(x)\, x'^2\, dt \geqslant krw_f,$$

где

$$w_f = w \quad \text{для} \quad X = b + a$$

и

$$w_f = \max\left(w,\ \frac{1}{8} b',\ x'_U\right) \quad \text{для} \quad X < b + a,$$

кроме того, $w_f > \frac{1}{4} bx'_U \geqslant \frac{1}{4} kbb'$.

В самом деле, неравенство

$$\int_{t_U}^{t_V} f(x)\, x'^2\, dt \geqslant rw$$

непосредственно следует из условия $f(x) \geqslant r$ для $x \geqslant a$.

В случае $X = b + a$, в силу неравенства $x' > \frac{1}{4} x'_U > 1$ при $a \leqslant x \leqslant b + a$, имеем

$$w = \int_{t_U}^{t_V} x'^2 \, dt > \int_a^{a+b} x' \, dx > \frac{b}{4} x'_U \geqslant \frac{1}{4} kbb',$$

так что

$$k \int_{t_U}^{t_V} f(x) x'^2 \, dt \geqslant rk \int_{t_U}^{t_V} x'^2 \, dt = rkw_f.$$

В случае $X < b + a$ получаем

$$k[F(X) - F(a)] = \frac{1}{4} x'_U$$

и

$$k \int_{t_U}^{t_V} f(x) x'^2 \, dt > k \int_a^X f(x) x' \, dx > \frac{k}{4} x'_U [F(X) - F(a)] =$$

$$= \frac{1}{8} x'^2_U \geqslant \frac{r}{8} kx'_U b'.$$

Кроме того,

$$k \int_{t_U}^{t_V} f(x) x'^2 \, dt \geqslant kr \int_{t_U}^{t_V} x'^2 \, dt = krw$$

и

$$w = \int_a^X x' \, dx > \frac{1}{4} x'_U b > \frac{k}{4} bb'.$$

Лемма 6. *Для случая* b) *леммы* 4 *имеет место оценка*

$$\frac{1}{2}[(x'_V)^2 - (x'_U)^2] \leqslant -krw_f + km \sqrt{w(t_V - t_U)}.$$

Для доказательства рассмотрим уравнение

$$x''x' = ke(t) x' - kf(x) x'^2 - g(x) x',$$

интегрируя которое на промежутке от t_U до t_V, будем иметь

$$\frac{1}{2}[(x'_V)^2 - (x'_U)^2] = k \int_{t_U}^{t_V} e(t) x'(t) \, dt - k \int_{t_U}^{t_V} f[x(t)][x'(t)]^2 \, dt \leqslant$$

$$\leqslant -krw_f + km \int_{t_U}^{t_V} |x'(t)| \, dt.$$

Принимая во внимание неравенство

$$w(t_V - t_U) = \int_{t_U}^{t_V} [x'(t)]^2 dt \int_{t_U}^{t_V} dt \geqslant \left[\int_{t_U}^{t_V} |x'(t)| dt \right]^2,$$

получаем утверждение леммы.

Лемма 7. *Существует функция $B_4(b_1)$ положительной переменной $b_1 \geqslant b_1^*$ такая, что для дуги $\widehat{UV}$ ($x_U = x_V = a$) из условия $x'_U \geqslant kB_4(b_4)$ следует неравенство*

$$|x'_V| < x'_U - kb_1.$$

Действительно, обратимся к лемме 4 и предположим сначала, что для рассматриваемой в дальнейшем пары значений (b, b') имеет место случай b) и поэтому на дуге $\widehat{UV}$ будет $|x'| > 1$ при $a \leqslant x \leqslant a + b$. Тогда, если справедливо неравенство

$$t_V - t_U \leqslant \left(\frac{r}{2m}\right)^2 w_f, \tag{I}$$

то на основании леммы 6 получаем

$$(x'_V)^2 - (x'_U)^2 \leqslant -2krw_f + 2km\sqrt{w_f(t_V - t_U)} \leqslant$$
$$\leqslant -krw_f \leqslant -\frac{1}{4}krbx'_U \leqslant -2kb_1x'_U,$$

если выбрать $b \geqslant \frac{8}{r} b_1$. Отсюда имеем

$$(x'_V)^2 < (x'_U - kb_1)^2$$

и

$$|x'_V| < |x'_U - kb_1| = x'_U - kb_1,$$

если последнее выражение не отрицательно.

Это верно, если положить $b_1 \leqslant b'$.

Вводя дополнительные ограничения на границы b и b', можно доказать примененную нами оценку (I) для продолжительности времени $t_V - t_U$. Пусть

$$t_V - t_U > \left(\frac{r}{2m}\right)^2 w_f. \tag{II}$$

Пусть P — первая точка после U, и пусть Q — последняя точка перед V, в которых происходит пересечение дуги $\widehat{UV}$ с горизонталью $x = X$ ($a < X \leqslant a + b$). Тогда на частичных дугах $\widehat{UP}$ и $\widehat{QV}$ выполняется неравенство $|x'| > 1$, из которого следует, что $t_P - t_U < b$, $t_V - t_Q < b$. Таким образом, имеем

$$t_Q - t_P = (t_V - t_U) - (t_V - t_Q) - (t_P - t_U) >$$
$$> (t_V - t_U) - 2b > \left(\frac{r}{2m}\right)^2 w_f - 2b > \frac{r^2}{16m^2} bx'_U - 2b \geqslant \frac{r^2}{32m^2} bx'_U,$$

если только $x'_U \geqslant (8m/r)^2$. Для этого достаточно положить $b' \geqslant (8m/r)^2$.

Так как на дуге $\widehat{UV}$ при $x \leqslant X$ выполнено условие $|x'| > 1$, то под горизонтальным отрезком $\overline{PQ}$ не может лежать минимум $x(t)$. Поэтому частичная дуга $\widehat{PQ}$ доходит до этого отрезка только в своих конечных точках. Отсюда в промежутке $\frac{1}{2}(t_P + t_Q) \leqslant t \leqslant t_Q$ имеем

$$x' = x'_U + k\int_{t_U}^{t} e(\tau)\,d\tau - k[F(x) - F(a)] - \int_{t_U}^{t} g(x(\tau))\,d\tau <$$

$$< x'_U + 2km - X(t - t_P) \leqslant x'_U + 2km - \frac{1}{2}X(t_Q - t_P) <$$

$$< x'_U + 2km - (r/8m)^2 bx'_U \leqslant -2x'_U + 2km$$

при условии, что $b \geqslant 192(m/r)^2$.

Далее получаем $-2x'_U + 2km \leqslant -x'_U$ для $b' \geqslant 2m$. Следовательно, на дуге $\widehat{PQ}$ для некоторого интервала времени $T = (t_1, t_2)$, большего, чем $(r/8m)^2 bx'_U$, выполнено неравенство $x' < -x'_U$, причем за это время x убывает более чем на $(rx'_U/8m)^2 b$.

С другой стороны, из леммы 3 для наибольшего максимума M на дуге $\widehat{PQ}$ получаем

$$x_M \leqslant a + \frac{2x'_U}{kr} + B_1 \leqslant \frac{3}{r}x'_U,$$

если только $a + B_1 \leqslant b_1/r$, и $b' \geqslant ra + \max\{4m,\ 2a(r + F)\}$.

Если выбрать $b \geqslant 48m^2/r^3$, то

$$\left(\frac{rx'_U}{8m}\right)^2 b \geqslant \left(\frac{r}{8m}\right)^2 x'_U(kb')b > \left(\frac{r}{4m}\right)^2 x'_U b \geqslant \frac{3}{r}x'_U$$

и

$$x(t_2) < x(t_1) - (rx'_U/8m)^2 b < x_M - \frac{3}{r}x'_U \leqslant 0,$$

что невозможно. Итак, неравенство (II) приводит к противоречию и поэтому справедливо неравенство (I).

Выбирая

$$b_1 \geqslant b_1^* = \max\left\{\frac{24m^2}{r^2},\ \frac{1}{32}(4m + a),\ \frac{a}{32}(2F + 3)\right\}$$

при $b \geqslant 8b_1/r$, $b' \geqslant B_2(b)$, будем иметь случай b) леммы 4, для которого лемма 7, таким образом, доказана.

Пусть теперь для пары значений (b, b') имеет место случай a) леммы 4. Тогда соответствующей дуге $\widehat{UV}$ $(x_U = x_V = a,\ x'_U \geqslant kb')$ принадлежит некоторая точка P, в которой $x_P \leqslant a + b$ и $|x'_P| \leqslant 1$.

Пусть M — последний максимум дуги $\widehat{UV}$ перед V. Если точка P лежит перед M, то на основании леммы 3 будем иметь

$$x_M \leqslant x_P + \frac{2}{kr} + B_1 \leqslant B_5(b) = a + b + \frac{2}{kr} + B_1.$$

В противном случае частичная дуга $\widehat{PV}$ лежит в полосе

$$a \leqslant x \leqslant a + b < B_5(b).$$

Из леммы 2 получаем

$$|x'_V| < |x'_P| + B'_5 k \leqslant k(1 + B'_5),$$

где

$$B'_5 = B'_5(b) = 9B_5\{m + F + G_{B_5}\}.$$

Выбирая $b' \geqslant b_1 + B'_5(b) + 1$, отсюда находим

$$|x'_V| \leqslant k(b' - b_1) \leqslant x'_U - kb_1.$$

Если положить теперь

$$b = 1 + \frac{8}{r} b_1 \quad \text{и} \quad B_4(b_1) = 1 + b_1 + B_2(b) + B'_5(b),$$

то лемма 7 оказывается полностью доказанной.

Лемма 8. *Существует константа $Y(a, m, F, r)$ такая, что*

$$|x'_S| < x'_R - 1 \quad \textit{при} \quad x'_R \geqslant kY.$$

Действительно, если дуга $\widehat{RS}$ не пересекает горизонталь $x = a$, то для абсолютного максимума $\overline{M}$ справедливо неравенство

$$x_{\overline{M}} \leqslant a.$$

Из леммы 2 при $B = A$ следует

$$|x'_S| < |x'_{\overline{M}}| + B'k \leqslant x'_R - 1,$$

если $x'_R \geqslant k(B' + 1)$. Следовательно, можно положить

$$Y \geqslant B'(a) + 1 = 9a(m + F + G_a) + 1.$$

Пусть теперь дуга $\widehat{RS}$ пересекает прямую $x = a$, U — точка первого пересечения, V — точка пересечения, следующая за U. Тогда по лемме 2 имеем

$$x'_U < x'_R + kB'(a). \tag{5.4.4}$$

Дуга $\widehat{VS}$ либо имеет минимум N в полосе $0 \leqslant x \leqslant a$, либо нет.

В первом случае, если $S = N$, то $x'_S = 0$, и лемма тривиальна. Предположим теперь, что $S \neq N$, и пусть M — последний максимум на $\widehat{VS}$. Из леммы 3 получаем

$$x_M \leqslant x_N + B_1 \leqslant B_1 + a = B_6.$$

Таким образом, на основании леммы 2 имеем

$$|x'_S| < kB'_6 \leqslant x'_R - 1 \quad \text{при} \quad x'_R \geqslant kY,$$

где $Y \geqslant B'_6 + 1 > B'(a) + 1$.

Во втором случае дуга $\widehat{VS}$ принадлежит полосе $0 \leqslant x \leqslant a$, так что в силу леммы 2 находим

$$|x'_S| < |x'_V| + kB'(a).$$

Отсюда, учитывая (5.4.4), будем иметь

$$|x'_S| - x'_R < [|x'_V| - x'_V] + 2kB'(a).$$

Рассмотрим два возможных случая:

$$\text{a) } x'_U \leqslant kB_4(b_1); \quad \text{b) } x'_U > kB_4(b_1) \quad [b_1 = b_1^*].$$

a) В первом случае для абсолютного максимума $\overline{M}$ на дуге $\widehat{UV}$ согласно лемме 3 получим

$$x_{\overline{M}} \leqslant a + \frac{2x'_U}{kr} + B_1 \leqslant a + B_1 + \frac{2}{r} B_4(b_1) = B_7(b_1),$$

так что на основании леммы 2 будем иметь

$$|x'_S| < kB'_7(b_1) \leqslant x'_R - 1 \quad \text{при} \quad x'_R \geqslant kY,$$

где $Y \geqslant B'_7(b_1) + 1 > B'_6 + 1$.

b) Во втором случае в силу леммы 7 найдем

$$|x'_V| - x'_U < -b_1 k$$

и вместе с этим

$$|x'_S| - x'_R < 2kB'(a) - b_1 k \leqslant -1,$$

если $b_1 \geqslant 2B'(a) + 1$.

Таким образом, лемма 8 полностью доказана, так как можно положить

$$b_1 = \max\{b_1^*, 2B'(a) + 1\} \quad \text{и} \quad Y = B'_7(b_1) + 1.$$

На основе лемм 1—8 непосредственно получим доказательство теоремы 5.4.1.

Рассмотрим на интегральной кривой K последовательные значения абсолютных величин производных $|x'_R|$ в точках пересечения R кривой с осью x. Если эти величины больше, чем kY, то они монотонно убывают до тех пор, пока не появится значение $|x'_R| < kY$. Это произойдет через конечное число шагов.

Для дуги $\widehat{RS}$, на которой $|x'_R| \leqslant kY$, на основании леммы 3 имеем

$$|x_{\overline{M}}| < \frac{2Y}{r} + B_1 = B,$$

а отсюда в силу леммы 2 при $t \geqslant T$ получаем

$$|x'| < (Y + B')k = k\bar{Y}.$$

Последнее неравенство, начиная с момента T, справедливо для всех значений $|x'_k|$, так что для всех последующих (абсолютных) максимумов выполняется неравенство

$$|x_{\bar{M}}| < \frac{2\bar{Y}}{r} + B_1 = \bar{B};$$

отсюда для всех точек кривой K имеем

$$|x'| < (\bar{Y} + \bar{B}')k.$$

Теорема доказана.

Более общие условия для непрерывных функций $f(x)$, $g(x)$ и $e(t)$ были даны Ньюменом [1].

Теорема 5.4.2. *Если*

a) $|e(t)| \leqslant m$, $\left|\int_0^t e(\tau)\,d\tau\right| \leqslant m$ *для* $t \geqslant 0$;

b) $|f(x)| \geqslant 2\rho > 0$ *для* $|x| \geqslant a \geqslant 1$;

c) $g(x)\operatorname{sgn} x > 0$ *для* $|x| > a$,

$g(x)\operatorname{sgn} x \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$;

d) $k \geqslant 1$,

то решения $x(t)$ *уравнения* (5.4.1) *вместе с их первыми производными* $x'(t)$ *ограничены при* $t \to \infty$ *и допускают следующие оценки*:

$$|x(t)| \leqslant C, \quad |x'(t)| \leqslant kC', \quad t \geqslant T > 0,$$

C, C' — *константы системы, не зависящие от* k, T *зависит от решения.*

Для доказательства, по Ньюмену, используется соответствующая система

$$x' = y, \quad y' = ke(t) - kf(x)y - g(x). \tag{5.4.5}$$

Изучим поведение ее фазовых траекторий $\{x(t), y(t)\}$, причем ограничимся правой полуплоскостью. Это позволяет сделать симметрия условий теоремы по отношению к переменной x. Так как $x(t)$ в верхней и нижней полуплоскости изменяется монотонно, то уравнения дуг фазовых траекторий можно представить в виде $y = y(x)$. Для такой дуги имеет место дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ke(t)}{y} - kf(x) - \frac{g(x)}{y}, \tag{5.4.6}$$

где $t = t(x)$.

Для дифференциального уравнения (5.4.6) справедлива лемма сравнения.

Лемма 1. *Пусть* Γ_1 *и* Γ_2 *(в одной и той же полуплоскости* $y \geqslant 0$ *или* $y \leqslant 0$*) являются соответственно дугами траекторий уравнений*

$$\frac{dy_1}{dx} + kf_1(x) + \frac{g(x)}{y_1} = \frac{ke_1(t_1)}{y_1}$$

и

$$\frac{dy_2}{dx} + kf_2(x) + \frac{g(x)}{y_2} = \frac{ke_2(t_2)}{y_2},$$

причем на этих дугах $|e_i(t_i)| \leqslant m_i$ $(i = 1, 2)$. *Тогда, если* $y_0 \neq 0$ *и*

$$f_1(x_0) > f_2(x_0) + \frac{m_1 + m_2}{|y_0|},$$

то Γ_1 *не может изнутри пересечь* Γ_2 *в точке* (x_0, y_0).

Выражение «Γ_1 пересекает Γ_2 изнутри» означает, что $y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$ и $|y_1(x)| < |y_2(x)|$ в некотором интервале $(x_0 \mp h, x_0)$ $(h > 0)$ перед достижением по времени общей точки (x_0, y_0). Внутренней стороной дуги при этом считается сторона, обращенная к оси x.

Действительно, пусть обе дуги встречаются в точке (x_0, y_0) вне оси x. Вычислим в окрестности точки $x = x_0$ разность

$$y_2'(x) - y_1'(x) \geqslant k[f_1(x) - f_2(x)] + \frac{g(x)}{y_1 y_2}(y_2 - y_1) - \frac{km_1}{|y_1|} - \frac{km_2}{|y_2|}.$$

При $x = x_0$ правая часть этого неравенства непрерывна и принимает по условиям леммы положительное значение. Поэтому в некоторой окрестности точки x_0 имеем

$$(x - x_0)[y_2(x) - y_1(x)] = (x - x_0)\{[y_2(x) - y_1(x)] - [y_2(x_0) - y_1(x_0)]\} = (x - x_0)^2[y_2'(\xi) - y_1'(\xi)] > 0,$$

т. е.

$$(x - x_0)[y_2(x) - y_1(x)] > 0 \quad \text{для} \quad 0 < |x - x_0| < h.$$

В этом и состоит утверждение леммы.

Другая лемма сравнения относится к автономному случаю.

Лемма 2. *Если* $e_1(t) \equiv e_2(t) \equiv 0$ *и* $f_1(x_0) > f_2(x_0)$, *то* Γ_1 *не может изнутри пересечь* Γ_2 *в точке* $(x_0, 0)$, *где* $x_0 \neq 0$.

Соответственно принятому выше соглашению Γ_1 изнутри пересекает Γ_2 в точке $(x_0, 0)$, если $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ и $|y_1(x)| < |y_2(x)|$ в некотором интервале оси x, который по времени предшествует пересечению обеих дуг. Следовательно, функция

$$\frac{1}{2}\{y_2^2(x) - y_1^2(x)\} \operatorname{sgn} y$$

в этом интервале монотонно убывает. Тогда, если в рассматриваемом интервале производная

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{2}[y_2^2(x) - y_1^2(x)] \operatorname{sgn} y\right\} = kf_1(x)|y_1| - kf_2(x)|y_2|$$

определена и непрерывна, то нужно потребовать, чтобы

$$f_1(x)|y_1| \leqslant f_2(x)|y_2|,$$

т. е.

$$[f_1(x) - f_2(x)] \leqslant f_2(x)\left\{\left|\frac{y_2}{y_1}\right| - 1\right\}.$$

Отсюда, переходя к пределу при $x \to x_0$, имеем $f_1(x_0) - f_2(x_0) \leqslant 0$, что противоречит условию леммы.

Теперь рассмотрим фазовые траектории дифференциального уравнения сравнения

$$x'' + \rho x' + g(x) = 0, \quad \rho > 0,$$

или эквивалентной ему системы

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - \rho y. \tag{5.4.7}$$

Имеет место следующая

Лемма 3. *Каждая траектория системы* (5.4.7) *для* $t \geqslant t_0$ *ограничена.*

Действительно, пусть $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ и выберем $Y_0 > |y_0|$ так, что

$$\frac{1}{2}Y_0^2 + G(x_0) > \max_{|x| \leqslant a} G(x),$$

где $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$.

Траектория C_0 системы

$$x' = y, \quad y' = -g(x), \tag{5.4.8}$$

проходящая через точку (x_0, Y_0), дается уравнением

$$\frac{1}{2}y^2 + G(x) = \frac{1}{2}Y_0^2 + G(x_0)$$

и существует только в некотором конечном интервале оси x, так как $G(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$. Траектория C_0 пересекает ось x в некоторых точках левее точки $x = -a$ и правее точки $x = +a$ и, благодаря симметрии, является замкнутой. Точка (x_0, y_0), очевидно, лежит во внутренней области, ограниченной этой траекторией. В силу лемм сравнения 1 и 2 траектория $\{x(t), y(t)\}$ системы (5.4.7), выходящая из точки (x_0, y_0) в момент времени t_0, не может пересечь изнутри замкнутую кривую C_0. Таким образом $x(t)$ и $y(t)$ ограничены при $t \geqslant t_0$.

Лемма 4. *Каждая траектория систем* (5.4.7) *при сколь угодно больших значениях* t *попадает в область плоскости* xy:

$$|x| \leqslant a + \delta, \quad |y| \leqslant \delta \quad (\delta > 0 \text{ задано}).$$

В самом деле, вдоль траектории выполняется следующее соотношение:

$$\frac{1}{2}y^2(t)+\rho\int_{t_0}^{t}y^2(\tau)\,d\tau=\frac{1}{2}y_0^2+G(x_0)-G[x(t)].$$

Так как $x(t)$ ограничена, то отсюда следует сходимость интеграла

$$\int_{t_0}^{\infty}y^2(\tau)\,d\tau. \tag{5.4.9}$$

Из ограниченности при $t\geqslant t_0$ функций $x(t)$ и $y(t)$ на основании системы (5.4.7) следует также ограниченность производной $y'(t)$. Из сходимости интеграла (5.4.9) вытекает*), что $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=0$. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\{y'(t)+g[x(t)]\}=0.$$

Пусть t_1 произвольно велико, причем $|y(t)|\leqslant\delta$ при $t\geqslant t_1\geqslant t_0$. Функция $|g(x)|=g(x)\operatorname{sgn}x$ имеет при $|x|\geqslant a+\delta$ положительную нижнюю грань g. Если на рассматриваемой траектории для всех $t\geqslant t_1$ справедливо неравенство $|x(t)|\geqslant a+\delta$, то $|g[x(t)]|\geqslant g$.

Пусть $|y(t)|\leqslant g/2\rho$ при $t\geqslant t_2\geqslant t_1$, тогда

$$y'(t)\operatorname{sgn}x(t)\leqslant-|g[x(t)]|+\rho|y(t)|\leqslant-g+g/2=-g/2.$$

Отсюда при $t\to\infty$ следует, что $y(t)\operatorname{sgn}x(t)\to-\infty$, что невозможно. Следовательно, предположение, что $|x(t)|\geqslant a+\delta$ для всех $t\geqslant t_1$, неверно, и, таким образом, для всякого $t_1\geqslant t_0$ существует $t_2\geqslant t_1$ такое, что $|x(t_2)|\leqslant a+\delta$.

Совершенно аналогично доказывается

Лемма 5. *Никакая фазовая траектория* $\{x(t),y(t)\}$ *системы* (5.4.5) *не может, начиная с некоторого момента, постоянно оставаться в области* $|x|\geqslant a+\delta$, *где* $\delta>0$ — *любое число.*

---

*) Действительно, если $\sup|y'(t)|<\infty$, то на основании сходимости интеграла (5.4.9), очевидно, сходится интеграл

$$\int_{t_0}^{\infty}y^2(\tau)\,y'(\tau)\,d\tau=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{3}[y^3(t)-y^3(t_0)];$$

следовательно, существует $\lim\limits_{t\to\infty}y^3(t)=C$, и, значит, $\lim\limits_{t\to\infty}y(t)=\sqrt[3]{C}$. Из сходимости интеграла (5.4.9) следует, что $C=0$. (*Прим. перев.*)

Действительно, пусть, например, $x(t) \geqslant a + \delta$ при $t \geqslant t_0$. Тогда справедливо неравенство

$$\frac{1}{2} y^2(t) + 2\rho k \int_{t_0}^{t} y^2(\tau)\, d\tau + G[x(t)] \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ 2km + \frac{1}{2} y_0^2 + G(x_0) \right\}, \quad (5.4.10)$$

из которого вытекает сходимость интеграла $\int_{t_0}^{\infty} y^2(\tau)\, d\tau$, а также ограниченность при $t \geqslant t_0$ функций $x(t)$ и $y(t)$. На основании (5.4.5) $y'(t)$ также ограничена, так что получим $\lim\limits_{t \to \infty} y(t) = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{t \to \infty} \{y'(t) - ke(t) + g[x(t)]\} = 0.$$

Используя те же рассуждения, что и ранее, найдем

$$y'(t) - ke(t) \leqslant -g/2 \quad \text{для} \quad t \geqslant t_1$$

и, следовательно,

$$y(t) - k \int_0^t e(\tau)\, d\tau \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Но это невозможно, чем и доказывается утверждение леммы.

Введем теперь следующие обозначения. Пусть для каждого значения $u \geqslant 0$ функция $Q(u)$ есть наименьшее число $Q \geqslant 0$, обладающее свойством: $|g(x)| \geqslant u$ при $|x| \geqslant Q$. Благодаря тому, что $|g(x)| \to \infty$ при $|x| \to \infty$, функция $Q(u)$ определена для всех значений u.

Лемма 6. *Если* $\eta > 0$, *то дуга* Γ *траектории системы* (5.4.7), *расположенная в квадранте* $xy < 0$, *пересекает горизонталь* $y \operatorname{sgn} x = -\eta$ *в области* $x \operatorname{sgn} x \geqslant Q(\rho\eta)$ *не более одного раза.*

Доказательство проведем для четвертого квадранта ($x > 0$, $y < 0$). Если рассматриваемая дуга Γ при $x \geqslant Q(\rho\eta)$ обладает двумя точками пересечения с прямой $y = -\eta$, то между ними лежит точка траектории, в которой $\frac{dy}{dx} = 0$. Эта точка принадлежит кривой

$$y = -\frac{g(x)}{\rho}.$$

Имеем $\frac{dy}{dx} > 0$ в области B_+, лежащей между этой кривой и осью x, и $\frac{dy}{dx} < 0$ в дополнительной области B_-. Для $x \geqslant Q(\rho\eta)$ выполняется неравенство $g(x) \geqslant \rho\eta$, т. е. $-g(x)/\rho \leqslant -\eta$, так что в этом x-промежутке горизонталь $y = -\eta$ не проходит ни через какую область B_-. Следовательно, эта горизонталь не

может пересекаться траекториями при возрастающем t снизу вверх, и, таким образом, двух точек пересечения быть не может.

Лемма 7. *Пусть* $\eta > 0$, $|x_0| \geqslant \max\{a, Q(\rho\eta)\}$, $|y_0| \geqslant \eta$. *Тогда каждая (ориентированная) траектория системы* (5.4.7), *выходящая из точки* (x_0, y_0) *квадранта* $xy > 0$, *пересекает сначала ось* x, *а потом прямую* $x = x_0$ *в точке* (x_2, y_2), *где* $x_2 = x_0$, $|y_2| \geqslant \eta/2$.

При доказательстве ограничимся рассмотрением траекторий, выходящих из точек первого квадранта. Кроме того, предположим, что $y_0 = \eta$; из этого в силу теоремы единственности, очевидно, будет следовать справедливость леммы и при $y_0 > \eta$.

Для $x \geqslant x_0$, $y > 0$ на рассматриваемой траектории имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\rho - \frac{g(x)}{y} < 0,$$

следовательно, $y \leqslant \eta$ и, так как $g(x) \geqslant \rho\eta$, то

$$\frac{dy}{dx} \leqslant -2\rho.$$

Поэтому $y(x_1) = 0$, где $x_0 < x_1 < x_0 + \eta/2\rho$. В промежутке $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$ оценим производную

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y^2) = -\rho y - g(x) \geqslant -\rho\eta - g(x);$$

тогда будем иметь

$$-\frac{1}{2}\eta^2 = \frac{1}{2}[y^2(x_1) - y^2(x_0)] = (x_1 - x_0)\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[y^2(x)]\Big|_{x=\xi} \geqslant$$
$$\geqslant -(x_1 - x_0)[\rho\eta + g(\xi)], \qquad (5.4.10')$$

где $x_0 < \xi < x_1$.

После пересечения оси x траектория попадает в четвертый квадрант. Если траектория достигает горизонтали $y = -\eta$, то по лемме 6 она остается ниже этой горизонтали до тех пор, пока не достигнет вертикали $x = x_0 = x_2$. Таким образом, $y_2 \leqslant -\eta$ и $|y_2| \geqslant \eta > \frac{1}{2}\eta$.

Если же $y > -\eta$ в промежутке $[x_0, x_1]$, то

$$\frac{dy}{dx} = -\rho + \frac{g(x)}{|y|} > -\rho + \frac{g(x)}{\eta} \geqslant 0$$

и, следовательно, $y_2 \leqslant y(x) \leqslant 0$ при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$.

Пусть $y_2 > -\frac{1}{2}\eta$; вычислим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(y^2) = -\rho y - g(x) \leqslant -\rho y_2 - g(x).$$

Тогда получаем

$$-\frac{1}{2}y_2^2 \leqslant (x_1 - x_0)[-\rho y_2 - g(\xi)] < 0, \qquad (5.4.10'')$$

где $\xi \in (x_0, x_1)$ — то же самое, что и выше.

Сравнивая (5.4.10′) и (5.4.10″), получим

$$y_2^2[\rho\eta + g(\xi)] \geqslant \eta^2[\rho y_2 + g(\xi)]$$

и

$$y_2^2 \geqslant \eta^2\left\{1 - \frac{\rho(\eta - y_2)}{\rho\eta + g(\xi)}\right\} > \eta^2\left\{1 - \frac{3\rho\frac{\eta}{2}}{2\rho\eta}\right\} = \frac{\eta^2}{4},$$

т. е. $|y_2| > \eta/2$ или, так как $-y_2 < \eta/2$ при $x \geqslant x_0$, то $y_2 < -\eta/2$, что противоречит предположению. Поэтому $y_2 \leqslant -\eta/2$, т. е. $|y_2| \geqslant \eta/2$, и тем самым лемма доказана.

Теперь сравним между собой траектории систем (5.4.5) и (5.4.7). Для этого обозначим их $T\{x(t), y(t)\}$ и $\bar{T}\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}$, а их частичные дуги (в конечных промежутках $[t_0, t_1]$) — через Γ и $\bar{\Gamma}$.

Из леммы 1 непосредственно вытекает

Лемма 8. *В точке (x_0, y_0), где $|x_0| \geqslant a$, $y_0 > m/\rho$, никакая дуга Γ не может изнутри пересечь дугу $\bar{\Gamma}$.*

Лемма 9. *Пусть дуга Γ в момент времени t_0 выходит из точки (x_0, y_0), где $x_0 \geqslant a$ и $y_0 \geqslant 0$. Далее, пусть дуга $\bar{\Gamma}$ начинается на вертикали $x = a$ над осью x, пересекает вертикаль $x = x_0$ выше точки (x_0, y_0) и заканчивается в точке (ξ, η) такой, что*

$$\xi \geqslant x_0 + \frac{2(m+\eta)}{\rho}, \quad \eta \geqslant \frac{m}{\rho}.$$

Тогда, как бы долго ни оставалась дуга Γ при $t > t_0$ в первом квадранте, она не достигает ни дуги $\bar{\Gamma}$, ни вертикали $x = \xi$.

Соответствующее утверждение справедливо также для исходной точки (x_0, y_0) в левой полуплоскости.

В самом деле, предположим, что Γ в промежуток времени $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ проходит полосу $x_0 \leqslant x \leqslant \xi$, оставаясь при этом в верхней полуплоскости, причем $x(t_1) = \xi$.

Тогда функция $u(t) = \bar{y}[x(t)] - y(t)$ определена на $[t_0, t_1]$ и имеет начальное значение

$$u(t_0) = \bar{y}(x_0) - y_0 > 0.$$

Так как $\bar{y}(x)$ — убывающая функция и $\bar{y}(\xi) = \eta \geqslant m/\rho$, то по лемме 8 $u(t)$ не может стать отрицательной, т. е. дуги Γ и $\bar{\Gamma}$ не имеют общих точек. Справедливо неравенство

$$\frac{du}{dt} = y[-\rho - g(x)/\bar{y}] - [ke(t) - kf(x)y - g(x)] =$$
$$= y[kf(x) - \rho] + g(x)u/\bar{y} - ke(t) > y[kf(x) - \rho] - ke(t).$$

Так как $\bar{y}[x(t_1)] = \bar{y}(\xi) = \eta$, то получаем

$$\eta \geqslant \eta - y(t_1) = u(t_1) > u(t_1) - u(t_0) >$$
$$> k\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} [f(x) - \rho]\,dx - k\int_{t_0}^{t_1} e(t)\,dt \geqslant k\rho[x(t_1) - x_0] - 2km,$$

т. е.

$$x(t_1) \leqslant x_0 + \frac{2m+\eta}{\rho} < \xi,$$

что противоречит условию леммы. Таким образом, дуга Γ не доходит до вертикали $x = \xi$, а пересекает ось x влево от нее.

Лемма 10. *Пусть $a' > a$, $b' > 0$; тогда траектория T при $t \geqslant t_0$ пересекает ось y или доходит до прямоугольника $|x| \leqslant a'$, $|y| \leqslant b'$.*

Действительно, пусть траектория T, не доходящая до указанного в условии леммы прямоугольника, в момент времени t_0 выходит из точки (x_0, y_0), где в силу леммы 5 можно принять $0 < x_0 < a'$. Тогда имеем $|y(t)| > b'$, пока выполняется неравенство $|x(t)| \leqslant a'$. Очевидно, траектория T в конечный момент времени t_1 достигает одной из вертикалей $|x| = a'$.

В случае $x = -a'$ траектория T пересекает y, и доказательство закончено.

В случае $x = a'$ траектория входит при $t > t_1$ в область $x > a'$, но на основании леммы 5 не может там навсегда оставаться, поэтому она пересекает, и притом справа налево, вертикаль $x = a'$, оставаясь ниже (или выше) прямоугольника, т. е. $y(a') < -b'$ или $y(a') > b'$. Это неравенство справедливо также для всего промежутка времени t, когда $|x(t)| \leqslant a'$. Вследствие этого траектория T пересечет ось y.

Лемма полностью доказана.

Лемма 11. *Пусть дуга траектории $\bar{\Gamma}$ выходит из точки $(x_0, \bar{y}_0)$, где $x_0 \geqslant a$, $\bar{y}_0 > 0$, проходит через точку (ξ, η),*

$$\xi \geqslant x_0 + \frac{2(m+\eta)}{\rho}, \quad \eta \geqslant \frac{2m}{\rho},$$

и заканчивается на вертикали $x = a$ в нижней полуплоскости. Пусть, далее, дуга Γ выходит из точки (x_0, y_0), $0 < y_0 < \bar{y}_0$, и остается в области $x \geqslant a$.

Тогда, если дуга Γ лежит вне прямоугольника $|x| \leqslant Q(2m)$, $|y| \leqslant m/\rho$, то, она не пересекает дугу $\bar{\Gamma}$.

В самом деле, положим, что рассматриваемая дуга Γ лежит вне указанного прямоугольника. Пока она будет оставаться в верхней полуплоскости (Γ_+), по лемме 9 она не сможет пересечь дугу $\bar{\Gamma}(\bar{\Gamma}_+)$. Будем двигаться по ней в нижней полуплоскости (Γ_-) от точки ее пересечения $(x_1, 0)$ с осью x. Ординаты в точке x верхней и нижней частичных дуг $\bar{\Gamma}$ $(\bar{\Gamma}_+$ и соответственно $\bar{\Gamma}_-)$ обозначим $\bar{y}_+(x) > 0$ (и соответственно $\bar{y}_-(x) < 0)$. Так как $\xi > x_1 > Q(2m)$ и $\bar{y}_+(x_1) > \eta \geqslant 2m/\rho$, то по лемме 7 имеем $\bar{y}_-(x_1) \leqslant -m/\rho$.

Далее, из леммы 6 при $Q(m) \leqslant x < x_1$ получаем $\bar{y}_-(x) < -m/\rho$. Для $|x| \leqslant Q(2m)$ имеем $y < -m/\rho$, на Γ_-, и поэтому возможно только одно пересечение дуг Γ_- и $\bar{\Gamma}_-$ в области $a \leqslant$

$\leqslant x < x_1$, $y < -m/\rho$. Однако это исключено на основании леммы 8. Таким образом, лемма доказана.

Пусть теперь

$$|f(x)| \leqslant M, \quad |g(x)| \leqslant M \quad \text{для} \quad |x| \leqslant a,$$

$$a_0 = \frac{a}{\rho}(12M + 4m + 5\rho),$$

$$|g(x)| \leqslant M_0 \quad \text{для} \quad |x| \leqslant a_0,$$

$$b_0 = \max\left(1,\ 2m/\rho,\ \sqrt{a_0 M_0}\right),$$

$$b_1 = b_0 + (\rho + M_0/b_0)\, a_0,$$

$$a_1 = \max\{Q(2m),\ a_0 + 2(m + b_0)\rho\}.$$

Рассмотрим прямоугольник R_1: $|x| \leqslant a_1$, $|y| \leqslant b_1$.

Лемма 12. *Дуга $\bar{\Gamma}$, начинающаяся в точке $(0, \bar{y}_0)$, $\bar{y}_0 > b_1$, не может попасть на горизонталь $y = b_0$ в полосе $0 \leqslant x \leqslant a_0$.*

Действительно, пока $0 \leqslant x \leqslant a_0$ и $\bar{y} \geqslant b_0$, выполняется неравенство

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = -\rho - \frac{g(x)}{\bar{y}} \geqslant -\rho - \frac{M_0}{b_0}.$$

Если первое пересечение дуги $\bar{\Gamma}$ с прямой $y = b_0$ произойдет в точке ξ, где $0 \leqslant \xi \leqslant a_0$, то получим

$$b_0 - \bar{y}_0 \geqslant -\left(\rho + \frac{M_0}{b_0}\right) a_0,$$

т. е.

$$\bar{y}_0 \leqslant b_1,$$

вопреки условию леммы.

Лемма 13. *Если дуги Γ и $\bar{\Gamma}$ лежат в области $|y| > b_0$ и проходят от $x = 0$ до $x = a$, то для $u(x) = \bar{y}(x) - y(x)$ выполняется неравенство*

$$|u(a) - u(0)| \leqslant \frac{1}{4} k\rho (a_0 - a).$$

В самом деле, имеем

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant \frac{km}{b_0} + kM + \frac{M}{b_0} \leqslant k(2M + m)$$

и

$$|y(a) - y(0)| \leqslant ka(2M + m).$$

Аналогично

$$\left|\frac{d\bar{y}}{dx}\right| \leqslant \rho + \frac{M}{b_0} \leqslant \rho + M$$

и

$$|\bar{y}(a) - \bar{y}(0)| \leqslant ka(\rho + M).$$

Отсюда следует

$$|u(a) - u(0)| \leqslant ka(3M + m + \rho) = \frac{1}{4} k\rho (a_0 - a).$$

Лемма 14. *Пусть обе дуги Γ и $\bar{\Gamma}$ лежат либо в полуплоскости $y > b_0$, либо в полуплоскости $y < -b_0$ и идут от $x = x_0$*

к $x = x_1$, *где* $a \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant a_0$, *причем* $u(x) = \bar{y}(x) - y(x) \leqslant 0$ *в промежутке* $[x_0, x_1]$. *Тогда имеет место неравенство*

$$u(x_0) < -\frac{1}{4} k\rho (x_1 - x_0).$$

Действительно, предполагая, например, что $y > b_0$, имеем

$$\frac{du}{dx} = \{kf(x) - \rho\} + \frac{u(x)\, g(x)}{y\bar{y}} - \frac{ke(t)}{y} \geqslant$$

$$\geqslant (2k - 1)\rho + \frac{M_0 u(x)}{y\bar{y}} - \frac{km}{b_0} \geqslant \frac{1}{2} k\rho + lu(x),$$

где

$$l = \frac{M_0}{b_0^2} \leqslant \frac{1}{a_0}.$$

Отсюда следует

$$\frac{d}{dx}\{ue^{-lx}\} \geqslant \frac{1}{2} k\rho e^{-lx} = -\frac{d}{dx}\left\{\frac{k\rho}{2l} e^{-lx}\right\}$$

и

$$u(x_1) e^{-lx_1} - u(x_0) e^{-lx_0} \geqslant -\frac{k\rho}{2l}\{e^{-ix_1} - e^{-lx_0}\}.$$

Следовательно,

$$u(x_0) \leqslant u(x_1) e^{-l(x_1 - x_0)} - \frac{k\rho}{2l}\{1 - e^{-l(x_1 - x_0)}\}.$$

Так как при $0 < s \leqslant 1$ верно неравенство

$$1 - e^{-s} = \frac{s}{2}\{2 - se^{-\vartheta s}\} > \frac{s}{2},$$

где $0 < \vartheta < 1$, то, учитывая, что $u(x_1) \leqslant 0$, получаем

$$u(x_0) < -\frac{1}{4} k\rho (x_1 - x_0),$$

что и утверждается леммой.

Лемма 15. *Для* $\bar{y}_0 > y_0 \geqslant 0$ *траектория* T, *выходящая из точки* $(0, y_0)$, *ограничена траекторией* $\bar{T}$, *выходящей из точки* $(0, \bar{y}_0)$, *до тех пор, пока* T, *возможно, войдет в прямоугольник* R_1.

Только в области $0 < |x| < a_0$, $y \operatorname{sgn} x > 0$ *траектория* T *может лежать вне траектории* $\bar{T}$.

Положим, что T лежит вне R_1, так что $y_0 > b_1$. Тогда на основании леммы 12 траектория $\bar{T}$ от начальной точки $x = a_0$ не доходит до горизонтали $y = b_0$. Пусть $u(x) = \bar{y}(x) - y(x)$. Так как $u(0) \geqslant 0$, то из леммы 13 получаем

$$u(a) > -\frac{1}{4} k\rho (a_0 - a).$$

Если бы было $u(x) \leqslant 0$ на отрезке $[a, a_0]$, то по лемме 14 оказалось бы

$$u(a) < -\frac{1}{4} k\rho (a_0 - a),$$

что противоречит указанному выше неравенству. Следовательно, существуют значения $x \in [a, a_0]$, для которых $u(x) > 0$.

Если $u(x)$ не всюду положительно на отрезке $[a, a_0]$, то существует точка ξ, $a \leqslant \xi \leqslant a_0$, в которой $u(\xi) = 0$. Тогда будем иметь

$$u'(\xi) \geqslant (2k-1)\rho - \frac{km}{b_0} \geqslant \frac{1}{2} k\rho > 0.$$

Отсюда вытекает, что такой нуль функции может существовать только в одной точке и эта точка должна лежать левее точки a_0. Поэтому $u(x) > 0$ в промежутке $(\xi, a_0]$. В частности, $u(a_0) > 0$.

По лемме 8 траектории T, $\bar{T}$ при $x \geqslant a_0$, $y > b_1$ не могут пересекаться, так что $\bar{y}(x) > b_1$ при $a_0 \leqslant x \leqslant a_1$. На основании леммы 11, где положено $x_0 = a_0$ и $\eta = b_0$, заключаем, что траектория T до следующего пересечения с вертикалью $x = a$ (в полуплоскости $y < 0$) окажется ограниченной траекторией $\bar{T}$. Это значит, что функция $u_-(x) = \bar{y}_-(x) - y_-(x) < 0$ на $[a, x_2]$, где $y(x_2) = 0$, $x_2 > a_1$.

Так как $y_-(x) < -b_1$ при $|x| \leqslant a_1$, то из леммы 14 получим $u_-(a) < -\frac{1}{4} k\rho(a_0 - a)$, а из леммы 13 будем иметь $u_-(0) < 0$, т. е.

$$\bar{y}_-(0) < y_-(0).$$

Рассмотрение в левой полуплоскости проводится совершенно аналогично.

Из доказанного вытекает, что каждая траектория в конце концов войдет в R_1. В противном случае на основании леммы 10 можно принять, что T начинается на оси y и при этом $y_0 > b_1$. А тогда траектория $\bar{T}$, выходящая из точки $(0, Y_0)$, где $Y_0 > y_0$, не может никогда дойти до прямоугольника $\{|x| \leqslant a_0, |y| \leqslant b_0\}$, что противоречит лемме 4.

В заключение сформулируем основное утверждение.

Теорема. *Каждая траектория системы* (5.4.5) *в конце концов навсегда остается в области* $|x| \leqslant C$, $|y| \leqslant kC'$.

Действительно, на основании только что сказанного для каждой траектории T в качестве начальной точки в момент времени t_0 можно взять точку входа $(x_0, y_0) \in R_1$, где, например, можно положить $x_0 = a_1$ или $y_0 = b_1$.

В случае $y_0 = b_1$ ограничимся промежутком $-a_1 \leqslant x_0 \leqslant a$, так как при $x_0 \geqslant a$ имеем

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \leqslant k\left(\frac{m}{b_1} - 2\rho\right) < 0,$$

и, таким образом, траектория T входит внутрь прямоугольника R_1.

Для $-a_1 \leqslant x \leqslant a$, $|y| \geqslant b$ получим оценку

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant \frac{km}{b_1} + kM_1 + \frac{M_1}{b_1} \leqslant k(2M_1 + m) \leqslant kC_1,$$

где $|f(x)|, |g(x)| \leqslant M_1$ при $|x| \leqslant a_1$; отсюда

$$y(0) < b_1 + kC_1 a_1, \quad y(a) < b_1 + kC_1(a + a_1).$$

Для $x \geqslant a$ и $y \geqslant b_1$ имеем

$$\frac{dy}{dx} \leqslant \frac{km}{b_1} - 2k\rho < -k\rho.$$

Следовательно, траектория T в точке

$$x < a + \frac{C_1}{\rho}(a + a_1)$$

дойдет до горизонтали $y = b_1$ и войдет далее в область $x \geqslant a$, $y \leqslant b_1$.

Отсюда делаем вывод: независимо от того, начинается ли траектория на прямой $x = a_1$ или на прямой $y = b_1$, она доходит до вертикали $x = a + \frac{C_1}{\rho}(a + a_1)$, причем ордината точки пересечения, вообще говоря, принадлежит промежутку $0 \leqslant \leqslant y \leqslant b_1$.

Выберем теперь одну определенную траекторию $\bar{T}$, выходящую из точки $(0, \bar{y}_0)$, где $\bar{y}_0 > 0$, которая в первый раз пересекает прямую $y = b_1$ в точке $x = a + C_1(a + a_1)/\rho + 2(m + b_1)/\rho$ (или правее) и в нижней полуплоскости возвращается к оси y.

В силу леммы 11 рассматриваемая траектория T, если она покидает прямоугольник R_1, входя в область $x \geqslant a_1$, охватывается траекторией $\bar{T}$ от момента выхода t_0 до момента первого пересечения с прямой $x = a$ $(y < 0)$. Если траектория T, наоборот, выйдет из прямоугольника R_1 через верхнюю границу $y = b_1$, то высказывание останется верным, пока траектория не войдет в область $x \geqslant a$, $y \leqslant b_1$.

Если траектория T, находясь в нижней полуплоскости, вновь достигает прямоугольника R_1 и не остается в нем, то повторим наше рассуждение. В противном случае, как при доказательстве леммы 15, делаем вывод, что $\bar{y}_-(0) < y_-(0)$.

Из леммы 15 тогда также следует, что траектория $\bar{T}$ в левой полуплоскости окружает и далее траекторию T (вне промежутка $-a_0 \leqslant x \leqslant 0$), пока последняя вновь не достигнет прямоугольника R_1.

Таким образом, в результате получаем, что в произвольно узкой полосе $|x| \leqslant C_2$, $|y| \leqslant \delta$, содержащей траекторию $\bar{T}$, находятся также части траектории T, лежащие вне прямоугольника R_1.

Соответствующая полоса существует также для траектории T, выходящей из точки границы прямоугольника R_1, лежащей на прямой $x = -a_1$ или на прямой $y = -b_1$.

Этим доказано, что $|x(t)| \leqslant C$ при $t > t^*$.

Пусть, далее, кривая сравнения $\overline{T}$ лежит в полосе $|y| \leqslant C_2'$ ($C_2' \geqslant C_1 a_1$), так что на T можно принять

$$|y(0)| < \max\{C_2',\ b_1 + kC_1 a_1\} < C_2'(1+k).$$

Для $|x| \leqslant C_2$, $|y| \geqslant C_2'(1+k)$ имеем

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| \leqslant kC_2''.$$

Траектории системы (5.4.5), начинающиеся на $|y| = C_2'$, достигают, таким образом, при $|x| \leqslant C_2$ самое большее горизонталей $|y| = C_2' + kC_2C_2''$. Тем самым оценка $|y(t)| \leqslant kC'$ доказана.

Последующие, частью более общие теоремы доказываются с помощью аналитико-топологических методов, которые дают возможность достигнуть цели значительно более краткими и более наглядными рассмотрениями.

Для изучения асимптотического поведения решений $x(t)$ уравнения

$$x'' + kf(x)x' + g(x) = ke(t) \qquad (k > 0) \tag{5.4.1}$$

можно использовать также эквивалентную систему

$$x' = z + kE(t) - kF(x), \quad z' = -g(x), \tag{5.4.11}$$

где

$$E(t) = \int_0^t e(\tau)\,d\tau, \quad F(x) = \int_0^x f(s)\,ds, \quad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds,$$

так как из ограниченности решения системы $\{x(t), z(t)\}$ следует также ограниченность пары функций $\{x(t), x'(t)\}$ и наоборот. Рейтеру [2] принадлежит следующая

Теорема 5.4.3. *Решения уравнения* (5.4.1) *и их первые производные ограничены при* $t \to +\infty$ *и допускают оценки вида*

$$|x(t)| \leqslant B, \quad |x'(t)| \leqslant B'(1+k), \quad t \geqslant T \geqslant 0 \tag{5.4.12}$$

(B, B' — *константы системы*, T *зависит от данного решения*), *если*

a) $|E(t)| \leqslant M$ *при* $t \geqslant 0$;

b) $F(x)\operatorname{sgn} x \to +\infty$ *при* $|x| \to \infty$;

c) $xg(x) > 0$ *для* $|x| > \delta_0$, $G(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$.

Для доказательства, следуя Рейтеру, построим внутри прямоугольника $|x| \leqslant B$, $|z| \leqslant B(1+k)$ плоскости xz область Ω, которую никакая траектория системы (5.4.11), имеющая общие точки с этой областью, не может покинуть, а всякая траектория, начинающаяся вне этой области, ее достигает.

Тогда немедленно получаем

$$|x'(t)| \leqslant |z(t)| + k|E(t)| + k|F[x(t)]| \leqslant$$
$$\leqslant B(1+k) + kM + k \max_{|x| \leqslant B} |F(x)| \leqslant B'(1+k).$$

Для построения области Ω используем функцию

$$w(x, z) = G(x) + \frac{1}{2} z^2 \geqslant \min_{[-\delta_0, \delta_0]} G(x) + \frac{1}{2} z^2,$$

для которой вычислим полную производную по времени в силу системы (5.4.11)

$$\frac{dw}{dt} = zz' + g(x)x' = -kg(x)[F(x) - E(t)].$$

Эта производная отрицательна при достаточно большом $|x|$. Выберем число $\delta_1 > \delta_0$ такое, что

$$F(x) \operatorname{sgn} x > M \quad \text{при} \quad |x| > \delta_1,$$

и обозначим для $[-\delta_1, +\delta_1]$

$$\max|F(x)| = F_1, \quad \max|g(x)| = g_1,$$
$$M_1 = (1 + g_1)(M + F_1).$$

Из условия теоремы следует, что существует такое число $\delta_2 \geqslant \delta_1$, что $F(x) \operatorname{sgn} x > M + M_1$ для $|x| > \delta_2$ и $G(\pm\delta_2) \geqslant \delta_1$.

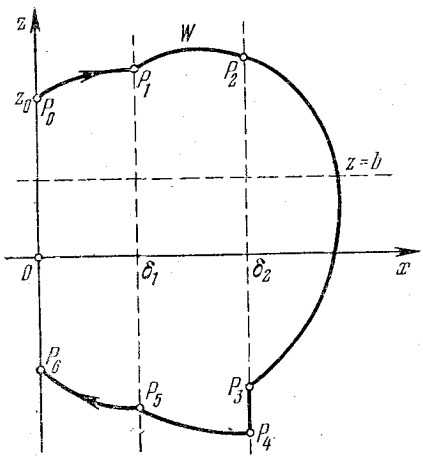

Рис. 5.4.1.

Введем еще следующие обозначения:

$$M_2 = 2(1 + g_1)\delta_1 + 2\max[G(\delta_2), G(-\delta_2)] + \left(\frac{M_1}{\delta_1}\right)^2,$$

$$a = \min(1, k), \quad b = kM_1,$$

$$Z^2 = [M_1 \max(1, k)]^2 + M_2 \geqslant b_2 + M_2.$$

Теперь построим простой замкнутый контур W, являющийся границей области Ω (рис. 5.4.1). Построение начнем с полуплоскости $x \geqslant 0$, где в качестве начальной точки возьмем точку $P_0(0, z_0)$, $z_0 \geqslant Z$, и проведем дугу кривой

$$w(x, z) - ax = \frac{1}{2} z_0^2$$

от точки P_0 до пересечения этой кривой с вертикалью $x = \delta_1$ в точке $P_1(\delta_1, z_1)$.

Тогда при $0 \leqslant x \leqslant \delta_1$ будем иметь

$$z^2 = z_0^2 + 2ax - 2G(x) \geqslant z_0^2 - 2g_1\delta_1 > z_0^2 - M_2 \geqslant \left(\frac{b}{a}\right)^2 \geqslant b^2$$

и

$$\frac{d}{dt}[w(x, z) - ax] = k[g(x) - a][E(t) - F(x)] - az <$$
$$< k(1 + g_1)(M + F_1) - kM_1 = 0.$$

Таким образом, траектории системы (5.4.11) пересекают дугу $\widehat{P_0P_1}$ сверху вниз.

От точки P_1 проведем дугу кривой

$$w(x, z) = w(\delta_1, z_1) = \frac{1}{2}z_0^2 + a\delta_1$$

до пересечения ее с вертикалью $x = \delta_2$ в точке $P_2(\delta_2, z_2)$. Имеем

$$z^2 \geqslant z_2^2 = z_0^2 + 2a\delta_1 - 2G(\delta_2) > z_0^2 - M_2 \geqslant b^2$$

и

$$\frac{d}{dt}w(x, z) = kg(x)[E(t) - F(x)] < 0,$$

так что дуга $\widehat{P_1P_2}$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к контуру W. От точки P_2 строится дуга кривой

$$w(x, z) - bz = w(\delta_2, z_2) - bz_2$$
$$\left[G(x) + \frac{1}{2}(z - b)^2 = G(\delta_2) + \frac{1}{2}(z_2 - b)^2\right],$$

которая идет сначала направо, пока не пересечет горизонталь $z = b$, потом идет налево и в точке $P_3(\delta_2, z_3)$, где $z_3 = 2b - z_2$, вновь попадает на вертикаль $x = \delta_2$. На дуге $\widehat{P_2P_3}$ справедливо неравенство

$$\frac{d}{dt}[w(x, z) - bz] = g(x)[b + kE(t) - kF(x)] < g(x)[b - kM_1] = 0,$$

и, таким образом, траектории пересекают дугу справа налево.

Далее, от точки $P_4(\delta_2, z_4)$, где $z_4 = -\sqrt{z_0^2 - 2a\delta_1 - 2G(\delta_2)}$, до точки $P_5(\delta_1, z_5)$, лежащей на вертикали $x = \delta_1$, проведем дугу $\widehat{P_4P_5}$ кривой

$$w(x, z) = w(\delta_2, z_4) = \frac{1}{2}z_0^2 - a\delta_1.$$

Здесь

$$\frac{d}{dt}w(x, z) < 0.$$

Наконец, присоединим дугу $\widehat{P_5P_6}$ кривой

$$w(x, z) + ax = \frac{1}{2}z_0^2,$$

конец которой $P_6(0, -z_0)$ лежит на оси z. На дуге $\widehat{P_5P_6}$ имеем

$$z^2 \geqslant z_0^2 - 2a\delta_1 - 2g_1\delta_1 > \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

и

$$\frac{d}{dt}[w(x, z) + ax] = k[g(x) + a][E(t) - F(x)] + \\ + az < k(1 + g_1)(M + F_1) - b = 0.$$

Осталось лишь показать, что выполнено неравенство $z_4 \leqslant \leqslant z_3 = 2b - z_2$, так как в этом случае в качестве куска контура W можно использовать отрезок $\overline{P_3P_4}$, где

$$\frac{dx}{dt} \leqslant z + k[M - F(\delta_2)] \leqslant 2b - z_2 - kM_1 = b - z_2 < 0.$$

Действительно, так как

$$\left(b + \frac{a\delta_1}{b}\right)^2 < z_0^2 + 2a\delta_1 - 2G(\delta_2)$$

и

$$b^2 + 2G(\delta_2) + (\delta_1/M_1)^2 < z_0^2,$$

то имеет место неравенство

$$|2b - z_2| = \left|2b - \sqrt{z_0^2 + 2a\delta_1 - 2G(\delta_2)}\right| < |z_4|,$$

т. е. $z_4 \leqslant z_3$.

Так как условия теоремы симметричны относительно переменной x, то построенный контур аналогично можно продолжить на полуплоскость $x \leqslant 0$.

Искомую область Ω можно отождествить с внутренностью контура W, для которого выбрано $z_0 = Z$. Чтобы в этом убедиться, нужно показать, что все траектории системы (5.4.11) в конце концов пересекут контур $W(Z)$.

Рассмотрим какую-нибудь траекторию, пока она проходит вне $W(Z)$, и заметим, что между двумя последовательными пересечениями ее с вертикалью $x = \delta_2$ в нижней полуплоскости имеется разность моментов времени $\Delta t \leqslant \theta$ (где θ — константа, зависящая от траектории).

В полосе $|x| \leqslant \delta_1$ имеем

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| > b - k(M + F_1) = kg_1(M + F_1) > 0,$$

а для $|x| \geqslant \delta_1$ получаем

$$\left|\frac{dz}{dt}\right| \operatorname{sgn} x = -|g(x)| \leqslant -\inf_{|x| \geqslant \delta_1} |g(x)| < 0.$$

Траектория пересекает семейство контуров $W(z_0)$ $(z_0 \geqslant Z)$ таким образом, что параметр z_0 строго монотонно убывает. На

вертикали $|x| = \delta_2$ убывание происходит скачкообразно:

$$\left|2b - \sqrt{z_0^2 + 2a\delta_1 - 2G(\pm\delta_2)}\right| = \sqrt{(z_0 + \Delta z_0)^2 - 2a\delta_1 - 2G(\pm\delta_2)}$$

и

$$[z_0^2 - (z_0 + \Delta z_0)^2] \geqslant 4b\left\{\sqrt{Z^2 + 2a\delta_1 - 2G(\pm\delta_2)} - (b + a\delta_1/b)\right\} = q > 0;$$

отсюда

$$-\Delta z_0 \geqslant \frac{q}{z_0 + (z_0 + \Delta z_0)} \geqslant \varkappa > 0,$$

где $\varkappa$ для данной траектории постоянно. Следовательно, параметр $z_0 \geqslant Z > 0$ на рассматриваемой траектории в каждом промежутке времени продолжительностью θ уменьшается по меньшей мере на $2\varkappa$, поэтому траектория через конечное время достигнет контура $W(Z)$ и навсегда останется внутри Ω.

Вычислим еще прямоугольник, охватывающий контур $W(Z)$. Очевидно, $\max|z|$ достигается на куске контура $\widehat{P_0P_1}$ (или на соответствующей дуге в левой полуплоскости). Имеем

$$z^2 = Z^2 + 2ax + 2G(x) \leqslant Z^2 + 2(1 + g_1)\delta_1 < \\ < [M_1(1 + k)]^2 + [M_2 + 2(1 + g_1)\delta_1],$$

так что $|z| \leqslant B(1 + k)$.

Далее, $\max|x|$ достигается на куске $\widehat{P_2P_3}$ контура W в точке $z = b$ (или в соответствующей точке левой полуплоскости). Там имеют место соотношения

$$G(x) = G(\delta_2) + \frac{1}{2}(z_2 - b)^2 \leqslant G(\delta_2) + \frac{1}{2}(z_0 - b)^2 \leqslant \\ \leqslant G(\delta_2) + \frac{1}{2}\{M_1[\max(1, k) - k] + \sqrt{M_2}\}^2 \leqslant \\ \leqslant G(\delta_2) + \frac{1}{2}(M_1 + \sqrt{M_2})^2,$$

и, таким образом, $\max|x| \leqslant B$. Теорема доказана полностью.

Замечание. Доказательство (конечно, при отказе от оценок (5.4.12)) сильно сокращается, если сослаться на теорему 2.5.6. Для этого используем подходящую функцию Ляпунова, которую, согласно Иошизаве [11], на дополнении $\overline{\Omega}$ области $|x| < a$ $(a > \delta_1)$, $|z| < c$ можно определить следующим образом:

$$U(x, z) = v(x, z) + w(x, z),$$

где

$$v(x, z) = \begin{cases} -2x \operatorname{sgn} z, & |x| \leqslant a, \quad |z| \geqslant c, \\ -3a\dfrac{z}{c}\left(1 - \dfrac{1}{3}\dfrac{z^2}{c^2}\right)\operatorname{sgn} x, & |x| \geqslant a, \quad |z| \leqslant c, \\ -2a \operatorname{sgn}(xz), & |x| \geqslant a, \quad |z| \geqslant c. \end{cases}$$

Функция $v(x, z)$ непрерывна и ограничена, обладает непрерывной частной производной по z и кусочно-непрерывной частной производной по x. Для $|x| \leqslant a$ имеем $\frac{\partial v}{\partial x} = -2\operatorname{sgn} z$, а для $|x| \geqslant a$ получаем $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$.

Находим

$$\frac{dU}{dt} = -kg(x)\{F(x) - E(t)\} + \frac{dv}{dt},$$

где

$$\frac{dv}{dt} = \begin{cases} 2k\{F(x) - E(t)\}\operatorname{sgn} z - 2|z|, & |x| \leqslant a, \quad |z| \geqslant c, \\ \frac{3a}{c}\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)|g(x)|, & |x| \geqslant a, \quad |z| \leqslant c, \\ 0, & |x| \geqslant a, \quad |z| \geqslant c. \end{cases}$$

Функция $U(x, z)$ будет положительной, если выбрать $a > \delta_1$ столь большим, чтобы $G(x) \geqslant 1/2$ при $|x| \geqslant a$ и $c^2 > \max[4a + 2g_1\delta_1, 9a^2]$. Тогда

$$\frac{c^2}{2} - 2a + \inf_{|x| \leqslant a} G(x) > 0$$

и

$$\frac{z^2}{2} + 3a\frac{z}{c} + \frac{1}{2} > 0 \quad \text{для всех } z.$$

Так как $v(x, z)$ ограничена, то, очевидно, $U(x, z) \to \infty$ при $\sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$.

Если для $r \geqslant r_a = \sqrt{a^2 + c^2}$ положить $U_1(r) = \max U(x, z)$, где при $(x, z) \in \bar{\Omega}$, $\sqrt{x^2 + z^2} \leqslant r$, и для $r \leqslant r_a$ принять $U_1(r) = U_1(r_a)$, то будет справедливо неравенство

$$U(x, z) \leqslant U_1(r) \quad \text{для} \quad \sqrt{x^2 + z^2} \leqslant r,$$

причем $U_1(r)$ — непрерывная положительная функция.

В заключение нужно еще показать, что $\frac{dU}{dt} \leqslant -U_2(r)$, где $U_2(r)$ — непрерывная положительная функция.

Для этого выберем числа a и c столь большими, чтобы имело место неравенство

$$|F(x)| \geqslant M + 1/k \quad \text{для} \quad |x| \geqslant a,$$

откуда следует

$$-k|g(x)|\left\{|F(x)| - M - \frac{3a}{kc}\right\} < 0$$

и

$$c > k[\max_{|x| \leqslant a} |F(x)| + M] + \frac{1}{2}kg_1(F_1 + M).$$

Тогда для всех значений t имеем

$$\frac{dU}{dt} \leqslant -\bar{U}(x, z) < 0,$$

где $\bar{U}$ — непрерывная (по областям) положительная функция от x и z, для которой можно построить непрерывную положительную функцию $U_2(r)$ аналогично тому, как была построена функция $U_1(r)$ для $U(x, z)$.

Таким образом, функция $U(x, z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.5.6 и решения системы (5.4.11) предельно равномерно ограничены при $t \to +\infty$.

5.5. Дифференциальное уравнение $x'' + F(x') + g(x) = e(t)$

Здесь мы изложим теоремы существования решения $x(t)$, ограниченного вместе с его первой производной $x'(t)$, дифференциального уравнения

$$x'' + F(x') + g(x) = e(t), \tag{5.5.1}$$

в котором можно, не ограничивая общности, положить $F(0) = 0$. Вместо уравнения (5.5.1) можно рассматривать также эквивалентную ему систему

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - F(y) + e(t), \tag{5.5.2}$$

решениями которой являются интересующие нас функции. Теоремы об ограниченности на основании теоремы 2.9.2 обеспечивают в случае периодичности возмущающей функции $e(t)$, где $e(t) \equiv e(t + \theta)$, одновременно существование периодического решения с периодом θ.

Сначала ограничимся частным случаем

$$g(x) = x, \tag{5.5.3}$$

для которого относительно простыми средствами доказывается асимптотическая устойчивость системы (5.5.2) в целом. Для этого введем так называемую *функцию расстояния* двух решений $\{x_1(t), y_1(t)\}$ и $\{x_2(t), y_2(t)\}$ системы (5.5.2):

$$D(t) = \frac{1}{2}\{[x_1(t) - x_2(t)]^2 + [y_1(t) - y_2(t)]^2\}. \tag{5.5.4}$$

Ее производная в силу системы (5.5.2) имеет вид

$$D'(f) = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (y_1 - y_2)\{-(x_1 - x_2) - [F(y_1) - F(y_2)]\} = \\ = -(y_1 - y_2)[F(y_1) - F(y_2)].$$

Если предположить, что функция $F(y)$ строго монотонно возрастает и что 1) либо одно из двух решений ограничено,

2) либо $F(y+h)-F(y) \geqslant f(h) > 0$ при $h > 0$ [$f(h)$ непрерывна, $f(0)=0$], то будем иметь $\lim\limits_{t\to\infty} D(t)=0$, т. е.

$$\lim_{t\to\infty}[x_1(t)-x_2(t)]=\lim_{t\to\infty}[y_1(t)-y_2(t)]=0,$$

Если система (5.5.2) принадлежит к классу D, так что $|y(t)| \leqslant b$ для достаточно больших значений t, то строго монотонное возрастание функции $F(y)$ нужно требовать только для $|y| \leqslant b$.

Заметим еще, что из существования ограниченного решения системы (5.5.2), к которому все остальные решения при $t\to\infty$ асимптотически приближаются, следует предельная ограниченность при $t\to+\infty$ всех решений (D-поведение).

Чисто аналитический метод исследования, основанный прежде всего на сравнении с линейным случаем $F(y)=2Dy$, применили Каччиопполи и Гизетти [1] для доказательства следующей теоремы.

Теорема 5.5.1. *Если в уравнении* (5.5.1), *где* $g(x)=x$, *функция* $F(y)$ *монотонно возрастает и непрерывно дифференцируема, при этом*

$$\varliminf_{|y|\to\infty}\frac{F(y)}{y}>0, \tag{5.5.5}$$

и если функция $e(t)$ *ограничена при* $t \geqslant 0$,

$$|e(t)| \leqslant m,$$

то существует ограниченное решение системы (5.5.2), *к которому все остальные решения стремятся при* $t\to\infty$.

В частности, если $e(t)$ *периодична, то существует периодическое решение, асимптотически устойчивое в целом.*

Для доказательства теоремы, на основании предыдущих замечаний, достаточно показать ограниченность решений уравнения (5.5.1).

Рассмотрим сначала вспомогательное уравнение

$$X''+2DX'+X=E_0 \quad (0<2D<1,\ E_0>0). \tag{5.5.6}$$

Решение его с начальными условиями в момент времени t_0

$$X(t_0)=X_0>0, \quad X'(t_0)=0$$

имеет вид

$$X(t)=E_0+\frac{X_0-E_0}{n}e^{-D(t-t_0)}\cos[n(t-t_0)-\varphi],$$

$$X'(t)=-\frac{X_0-E_0}{n}e^{-D(t-t_0)}\{D\cos[n(t-t_0)-\varphi]+$$
$$+n\sin[n(t-t_0)-\varphi]\}=-\frac{X_0-E_0}{n}e^{-D(t-t_0)}\sin[n(t-t_0)],$$

где использованы сокращенные обозначения

$$\sin\varphi=D, \quad \cos\varphi=n=\sqrt{1-D^2}.$$

В промежутке $t_0 - \pi/n \leqslant t \leqslant t_0$ функция $X(t)$ монотонно возрастает от значения

$$\bar{X}_0 = E_0 - (X_0 - E_0)\, e^{D\pi/n} < -X_0$$

(в случае, когда $X_0 > E_0/(1-\vartheta')$, $\vartheta' = 2/(e^{D\pi/n}+1)$) до X_0 и приобретает в точке τ значение 0, при этом

$$t_0 - \frac{\pi/2+\varphi}{n} < \tau < t_0 - \frac{\pi/2-\varphi}{n},$$

если $X_0 > E_0/(1-\vartheta'')$, $\vartheta'' = 1/(1+2\,De^{D(\pi/2+\varphi)/n})$.

На основании этого справедливы оценки

$$\sin[n(\tau - t_0)] < -n, \quad X'(\tau) > (X_0 - E_0).$$

Если положить

$$X_0 > E_0/(1-\vartheta), \quad \max(\vartheta', \vartheta'') \leqslant \vartheta < 1,$$

то получим

$$X'(\tau) > \vartheta X_0.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$A(t) = |X(t)| + |X'(t)|, \quad -\pi/n \leqslant t - t_0 \leqslant 0.$$

Имеем для $t_0 - \pi/n \leqslant t \leqslant \tau$

$$A'(t) = \frac{X_0 - E_0}{n} e^{-D(t-t_0)} \{(1+D)\sin[n(t-t_0)] - n\cos[n(t-t_0)]\}$$

и для $\tau \leqslant t \leqslant t_0$

$$A'(t) = \frac{X_0 - E_0}{n} e^{-D(t-t_0)} \{-(1-D)\sin[n(t-t_0)] - n\cos[n(t-t_0)]\}.$$

Функция $A'(t)$ имеет по одному нулю τ' и τ'' в каждом из двух указанных промежутков, причем справедливы равенства

$$(1+D)\sin[n(\tau'-t_0)] = n\cos[n(\tau'-t_0)]$$

и

$$(1-D)\sin[n(\tau''-t_0)] = -n\cos[n(\tau''-t_0)].$$

Отсюда следует

$$A''(\tau') = \frac{X_0 - E_0}{n} e^{-D(\tau'-t_0)} \cdot 2(1+D)\sin[n(\tau'-t_0)] < 0$$

и

$$A''(\tau'') = \frac{X_0 - E_0}{n} e^{-D(\tau''-t_0)} \cdot 2(1-D)\sin[n(\tau''-t_0)] < 0.$$

Таким образом, функция $A(t)$ обладает двумя максимумами τ' и τ''. Свое наименьшее значение она может принимать только при $t = t_0 - \pi/n$, $t = \tau$ или $t = t_0$. Как легко видеть,

$$\min A(t) > \vartheta X_0. \tag{5.5.7}$$

Соответствующие формулы могут быть получены также и в случае $X_0 < 0$.

Теперь обратимся к системе (5.5.2), для которой на основании условия (5.5.5) при $|y| > \eta$ выполнено неравенство

$$F(y)/y > 2D \qquad (0 < 2D < 1).$$

Для изучения решений системы (5.5.2) будем рассматривать ее траектории на плоскости xy. Заметим, что эти траектории при $x \geqslant -m$ могут пересекать ось x только сверху вниз, а при $x \leqslant m$ — только снизу вверх. Траектории спиралевидно накручиваются около начала координат и обладают либо конечным, либо бесконечным числом взаимно чередующихся полудуг, т. е. дуг в верхней и соответственно нижней полуплоскости.

В первом случае можно принять $y \geqslant 0$ для $t \geqslant t_0$ и, таким образом, функция $x(t)$ монотонно возрастает. Если она остается ограниченной, то и функция $y(t)$ также ограничена, так как $y'(t) < 0$ при $y > \max(\eta, (a+m)/2D)$.

Следствием этого является ограниченность $y'(t)$, так что

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0.$$

Если $x(t)$ возрастает неограниченно, то $x(t) \to \infty$ при $t \to \infty$ и, следовательно, $y'(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$, так как $e(t) - F(y(t))$ ограничено сверху. Отсюда получаем: $y(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$, что невозможно, так как $y(t) \geqslant 0$.

Во втором случае, когда имеется бесконечно много положительных и отрицательных полудуг, рассмотрим при $t \geqslant 0$ последовательность абсцисс их концов

$$x_1 = x(t_1) > 0, \quad x_2 = x(t_2) < 0, \quad x_3 = x(t_3) > 0, \ldots,$$
$$0 \leqslant t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$$

Пусть

$$m - \operatorname{sgn} y\,[F(y) - 2Dy] < E_0. \tag{5.5.8}$$

Тогда, если для всех n выполнено неравенство

$$(1 - \vartheta)\,|x_n| \leqslant E_0,$$

то это соответствует утверждению об ограниченности $|x(t)|$. Если же для некоторого, например, нечетного n, имеем

$$(1 - \vartheta)\,x_n > E_0,$$

то рассматриваем дугу траектории $t_{n-1} \leqslant t \leqslant t_n$. Сравним ее с дугой интегральной кривой $\{X(t),\ X'(t) = Y(t)\}$ уравнения (5.5.6), для которой положим $t_0 = t_n$ и $X_0 = x_n$.

Дугу траектории можно представить в форме $y = y(x)$, и тогда для нее справедливо дифференциальное уравнение

$$y\frac{dy}{dx} = -x - F(y) + e(t).$$

Отсюда имеем неравенство

$$y\frac{dy}{dx} < -x - 2Dy + E_0.$$

Полагая $y^2 = p$, получим

$$\frac{dp}{dx} < -4D\sqrt{p} - 2x + 2E_0. \tag{5.5.9}$$

С другой стороны, для дуг сравнения имеем

$$Y\frac{dY}{dx} = -2DY - x + E_0,$$

откуда при $Y^2 = P$ находим

$$\frac{dP}{dx} = -4D\sqrt{P} - 2x + 2E_0. \tag{5.5.10}$$

Из (5.5.9) и (5.5.10) получаем

$$\frac{d(p-P)}{dx} < -4D(\sqrt{p} - \sqrt{P}).$$

Так как $p = P = 0$ при $x = x_0$ и

$$\frac{d}{dx}(p - P) < 0,$$

то $p > P$ для обеих дуг $y(x)$ и $Y(x)$ в их общем промежутке определения $[X_{n-1}, x_n]$.

На основании (5.5.7) в этом промежутке справедливо неравенство

$$|x| + y(x) \geqslant |x| + Y(x) > \vartheta x_n.$$

Кроме того, на отрезке $[x_{n-1}, X_{n-1}]$ имеем

$$|x| + y(x) > |X_{n-1}| > x_n.$$

Поэтому на отрезке $[x_{n-1}, x_n]$ справедливо неравенство

$$|x| + y(x) > \vartheta x_n.$$

Очевидно, при $\nu = 2, \ldots, n-1$ на $[x_{\nu-1}, x_\nu]$ для $t_1 \leqslant t \leqslant t_n$ совершенно аналогично получим

$$|x(t)| + |y(t)| > \vartheta |x_\nu|.$$

Благодаря тому, что $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$, для $t_1 \leqslant t \leqslant t_n$ будем иметь

$$|x(t)| + |y(t)| > \vartheta x_n,$$

в частности,

$$x_n < \frac{1}{\vartheta}[|x(t_1)| + |y(t_1)|].$$

Поэтому $|x(t)|$ ограничена при $t \geqslant 0$.

Теперь для $y(t)$ имеем дифференциальное уравнение

$$y' = -F(y) + e_1(t),$$

где функция $e_1(t) = e(t) - x(t)$ ограничена, а функция $F(y)$ удовлетворяет условию (5.5.5). Отсюда немедленно следует ограниченность $y(t)$.

С помощью аналитико-топологических методов Аскари [1] доказывает подобную теорему в более общих условиях:

Теорема 5.5.2. *Если $g(x) = x$ и функция $F(y)$ монотонно возрастает, при этом*

$$\lim_{|y| \to \infty} F(y) \operatorname{sgn} y > m = \max |e(t)|, \tag{5.5.11}$$

то система (5.5.2) *обладает единственным периодическим решением, к которому при $t \to +\infty$ сходятся все остальные решения.*

Заметим, что асимптотическая устойчивость периодического решения следует из предыдущих замечаний, так что достаточно показать лишь ограниченность решений. Для этого элементарно строится семейство замкнутых контуров $W(\lambda)$, покрывающее фазовую плоскость xy вне некоторой окрестности начала координат, причем фазовые траектории пересекают все контуры этого семейства в направлении снаружи внутрь. В качестве кусков контуров используются дуги окружностей и отрезки прямых.

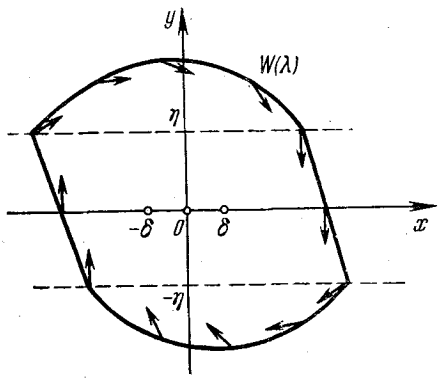

Рис. 5.5.1.

На основании условия (5.5.11) существуют два положительных числа η и δ такие, что

$$F(y) \operatorname{sgn} y \geqslant m + \delta \quad \text{для} \quad |y| \geqslant \eta.$$

Рассмотрим теперь дугу окружности

$$k(x, y, \lambda) \equiv (x + \delta \operatorname{sgn} y)^2 + y^2 = \lambda^2$$

для $|y| \geqslant \eta$ и любого радиуса $\lambda \geqslant \sqrt{\eta^2 + \delta^2}$. Вычислим производную в силу системы (5.5.2):

$$\frac{d}{dt}\{(x + \delta \operatorname{sgn} y)^2 + y^2\} = 2(x + \delta \operatorname{sgn} y)\, y + 2yy' =$$
$$= 2|y|[e(t) \operatorname{sgn} y + \delta - |F(y)|] \leqslant 0.$$

Таким образом, две дуги окружности такого вида можно применить для построения контура $W(\lambda)$. Их соединяем парой параллельных отрезков (рис. 5.5.1)

$$s_1(x, y, \lambda) \equiv y - \eta\left\{1 - \frac{1}{\delta}\left(x + \delta + \sqrt{\lambda^2 - \eta^2}\right)\right\} = 0$$

и

$$s_2(x, y, \lambda) \equiv y - \eta\left\{1 - \frac{1}{\delta}\left(x + \delta - \sqrt{\lambda^2 - \eta^2}\right)\right\} = 0.$$

Для нашей цели достаточно потребовать выполнения неравенств

$$\frac{d}{dt} s_1(x, y, \lambda) \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt} s_2(x, y, \lambda) \leqslant 0$$

в силу системы (5.5.2).

Очевидно, имеют место соотношения

$$\frac{d}{dt} s_1(x, y, \lambda) = y' + \frac{\eta}{\delta} y = \left[e(t) - F(y) + \frac{\eta}{\delta} y\right] - x \leqslant (c - x)$$

и соответственно

$$\frac{d}{dt} s_2(x, y, \lambda) \geqslant -(c + x),$$

где

$$c = \max_{|y| \leqslant \eta} |F(y)| + m + \frac{\eta^2}{\delta}.$$

Отсюда заключаем, что для доказательства теоремы достаточно обеспечить выполнение неравенства

$$\max x = \delta - \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} \leqslant -c \text{ на } s_1$$

и

$$\min x = -\delta + \sqrt{\lambda^2 - \eta^2} \geqslant c \text{ на } s_2.$$

Это достигается выбором $\lambda \geqslant \sqrt{(c + \delta)^2 + \eta^2}$. Теорема доказана.

Условия, налагаемые на функцию $F(y)$, можно еще несколько ослабить (ср. Рейссиг [5]).

Теорема 5.5.3. *Пусть $g(x) = x$ и $F(y)$, $F(0) = 0$, есть монотонно возрастающая функция такая, что*

$$\lim_{y \to \infty} [F(y) - F(-y)] > M - m, \tag{5.5.12}$$

где

$$M = \sup_{t \geqslant 0} e(t), \quad m = \inf_{t \geqslant 0} e(t).$$

Тогда решения системы (5.5.2) *ограничены при $t \to \infty$ и асимптотически устойчивы в целом.*

Для доказательства построим семейство контуров $W(\lambda)$ из дуг окружностей. С этой целью определим положительное число η_0, для которого

$$F(\eta_0) = \vartheta(M - m), \quad F(-\eta_0) = (\vartheta - 1)(M - m) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

и, таким образом, $F(\eta_0) - F(-\eta_0) = M - m$. Затем выберем достаточно малое число $\delta > 0$ и $\eta > \max(\eta_0, 4\delta)$ так, что

$$F(\eta) \geqslant F(\eta_0) + \delta, \quad F(-\eta) \leqslant F(-\eta_0) - \delta.$$

Наконец, положим $\alpha = (\vartheta - 1) M - \vartheta m$ и $\bar{x} = x + \alpha$, $\bar{e}(t) = e(t) + \alpha$, что не изменит вида системы дифференциальных уравнений. Тогда $F(y) \geqslant \bar{M} + \delta$ для $y \geqslant \eta$, где $\bar{M} = \sup\limits_{t \geqslant 0} \bar{e}(t) = M + \alpha > 0$, и $F(y) \leqslant \bar{m} - \delta$ для $y \leqslant -\eta$, где $\bar{m} = \inf\limits_{t \geqslant 0} \bar{e}(t) = m + \alpha < 0$.

Для дуг

$$w_1(\bar{x}, y) \equiv (\bar{x} - \bar{M})^2 + y^2 = \text{const} \qquad (0 < y \leqslant \eta),$$
$$w_2(\bar{x}, y) \equiv (\bar{x} + \delta)^2 + y^2 = \text{const} \qquad (y \geqslant \eta),$$
$$w_3(\bar{x}, y) \equiv (\bar{x} - \bar{m})^2 + y^2 = \text{const} \qquad (-\eta \leqslant y \leqslant 0),$$
$$w_4(\bar{x}, y) \equiv (\bar{x} - \delta)^2 + y^2 = \text{const} \qquad (y \leqslant -\eta)$$

в силу системы (5.5.2) будем иметь

$$\frac{d}{dt} w_i(\bar{x}, y) \leqslant 0,$$

так что эти дуги можно использовать в качестве частей контура $W(\lambda)$.

Верхние половины контуров проведем между точками $A'(-\lambda, 0)$ и $A(\lambda, 0)$.

Возьмем

$$\lambda \geqslant \max(\bar{M}, -\bar{m}) + \frac{\eta^2}{4\delta} + \delta$$

и от начальной точки проведем дугу окружности

$$(C_A)\colon\ w_1(\bar{x}, y) = (\lambda - \bar{M})^2,$$

где $\bar{x} = \bar{M} + \sqrt{(\lambda - \bar{M})^2 - \eta^2}$, до точки B горизонтали $y = \eta$. Далее проведем от точки A' дугу окружности

$$(C_{A'})\colon\ w_1(\bar{x}, y) = (\lambda + \bar{M})^2$$

и от точки B дугу окружности

$$(C_B)\colon\ w_2(\bar{x}, y) = \left[\bar{M} + \delta + \sqrt{(\lambda - \bar{M})^2 - \eta^2}\right]^2 + \eta^2$$

до точки их пересечения C. Точка пересечения существует, так как на дуге C_B при $\bar{x} = -\lambda$ верна оценка $y \geqslant \eta$. Нижняя половина контура благодаря симметрии условий строится вполне аналогично, и, таким образом, доказательство теоремы закончено.

Заметим, что в случае

$$\lim_{y \to \infty} [F(y) - F(-y)] \leqslant \sup e(t) - \inf e(t)$$

не существует контура W с желаемыми свойствами, так что условия, налагаемые на $F(y)$, не поддаются дальнейшему обобщению.

Теперь перейдем к случаю нелинейной функции $g(x)$ и начнем со следующей теоремы.

Теорема 5.5.4. *Решения системы* (5.5.2) *ограничены* (*так что при периодическом возмущении существует периодическое решение*), *если*

a) $|e(t)| \leqslant m$ *при* $t > 0$;

b) $g(x)\operatorname{sgn} x \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$;

c) $F(y)\operatorname{sgn} y \to \infty$ *при* $|y| \to \infty$.

Подчеркнем, что для функций $g(x)$ и $F(y)$ не требуется монотонное их изменение, в то время как условие $F(0) = 0$ должно быть выполнено.

Доказательство Мизохаты, Ямагути [1] состоит в том, что изучается изменение функции

$$w(x, y) = G(x) + \frac{1}{2}y^2 \quad G(x) = \int_0^x g(s)\,ds, \tag{5.5.13}$$

вдоль фазовой траектории или, другими словами, исследуется расположение фазовых траекторий относительно системы замкнутых кривых сравнения $w(x, y) = \text{const}$.

Заметим, что фазовые траектории, идущие в верхней полуплоскости слева направо, а в нижней справа налево, являются спиралями. Правые части поворота (вершины) лежат на оси x, где $g(x) \geqslant -m$, а левые — в промежутке $g(x) \leqslant m$. Часть траектории между двумя последовательными вершинами мы опять назовем полудугой. Если существует лишь конечное множество полудуг, то, как в теореме 5.5.1, покажем, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$, при этом, очевидно, должно быть $|g(a)| \leqslant m$. Таким образом, в этом частном случае доказательство теоремы завершено.

Обратимся к случаю существования бесконечного множества полудуг. Выберем константы $\varepsilon > 0$ и $Y > 0$ так, что

$$F(y)\operatorname{sgn} y \geqslant m + \varepsilon \quad \text{при} \quad |y| \geqslant Y.$$

Далее положим $\max\limits_{|y|\leqslant Y} |F(y)| = F$ и определим еще одну постоянную $X > 1$ так, что

$$g(x)\operatorname{sgn} x \geqslant \left(1 + \frac{Y^2}{\varepsilon}\right)(F + m) \quad \text{для} \quad |x| \geqslant X.$$

Теперь построим наименьшую кривую $w(x, y) = c$, включающую в себя прямоугольник $R\{|x| \leqslant X,\ |y| = Y\}$, и рассмотрим семейство простых замкнутых контуров $w(x, y) = C \geqslant c$, в котором большим значениям параметра кривой соответствуют более удаленные кривые.

Проследим одну дугу траектории от начальной точки $(x_1, 0)$ такой, что $x_1 > X$, $G(x_1) \geqslant c$, по нижней или верхней полуплоскости до конечной точки $(x_2, 0)$, где $g(x_2) \geqslant -m$.

В области $|y| \geqslant Y$ имеем

$$\frac{d}{dt} w(x, y) = -|y|[|F(y)| - e(t) \operatorname{sgn} y] \leqslant -\varepsilon |y|;$$

следовательно, на отрезке $-X \leqslant x \leqslant X$ справедлива оценка

$$\Delta w \leqslant -2\varepsilon X < -2\varepsilon.$$

В области $|x| \geqslant X$, $|y| \leqslant Y$ выполняется неравенство

$$(\operatorname{sgn} x) \frac{dy}{dt} = -|g(x)| + \operatorname{sgn} x [e(t) - F(y)] \leqslant$$
$$\leqslant m + F - |g(x)| \leqslant -\frac{Y^2}{\varepsilon}(F + m),$$

и

$$\left| \frac{d}{dt} w(x, y) \right| \leqslant (F + m) Y,$$

откуда следует, что

$$\left| \frac{d}{dy} w(x, y) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{Y}.$$

На основании этого для отрезка $0 \leqslant |y| \leqslant Y$ получаем $\Delta w \leqslant \varepsilon$. Теперь ясно, что $G(x_2) < G(x_1)$, т. е. $x_2 < x_1$, пока дуга траектории не вошла в прямоугольник R. Обратно, если это произошло, то дуга траектории войдет также во внутреннюю область кривой $w(x, y) = c$, которую эта дуга может пересечь лишь в полосе $|y| \leqslant Y$ и только изнутри в наружную сторону. На основании предыдущих оценок можно сделать вывод, что рассматриваемая дуга траектории и ее продолжение должны постоянно оставаться в области $w(x, y) \leqslant c + 2\varepsilon$. Этим теорема уже доказана.

Другое доказательство, близкое к доказательству Иошизавы [1], основано на построении функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы 2.5.4, обеспечивающим ограниченность решений системы. Эту функцию достаточно определить вне прямоугольника $R\{|x| \leqslant \bar{X}, |y| \leqslant \bar{Y}\}$, где она должна обладать кусочно-непрерывными частными производными. Для построения такой функции Ляпунова используем функцию $w(x, y)$, введенную в (5.5.13).

Для определения границ $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ зададим достаточно малое $\varepsilon > 0$ и положим, что $\min\{G(x) - \varepsilon|x|\} = g_\varepsilon \leqslant 0$. Тогда выберем $\bar{Y} > \sqrt{-2g\varepsilon}$ таким большим, чтобы оказалось

$$(\operatorname{sgn} y) F(y) \geqslant m + 2\varepsilon \quad \text{при} \quad |y| \geqslant \bar{Y}.$$

Обозначим, далее, $\max\limits_{|y| \leqslant Y} |F(y)| = \bar{F}$ и возьмем $\bar{X} \geqslant 2\bar{Y}/\varepsilon$ такое, чтобы

$$(\operatorname{sgn} x) g(x) \geqslant (1 + \bar{Y})(m + \bar{F}) + \varepsilon$$

и

$$G(x) > 2\bar{Y} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \bar{X}.$$

Теперь определим $U(x, y) = W(x, y) + v(x, y)$, где

$$v(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{для всех } x \text{ и } y \geqslant \overline{Y} \text{ (область a));} \\ (y - \overline{Y}) \operatorname{sgn} x & \text{для } |x| \geqslant \overline{X},\ |y| \leqslant \overline{Y} \text{ (область b));} \\ -2\overline{Y} \operatorname{sgn} x & \text{для } |x| \geqslant \overline{X},\ y \leqslant -\overline{Y} \text{ (область c));} \\ -\dfrac{2\overline{Y}}{\overline{X}} x & \text{для } |x| \leqslant \overline{X},\ y \leqslant -\overline{Y} \text{ (область d));} \end{cases}$$

Функция $U(x, y)$ непрерывна в указанных областях и на их границах, кроме того, она стремится к бесконечности при $\sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$. То, что эта функция повсюду положительна в областях a) и d), следует из неравенства

$$\left\{ G(x) - 2\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} x \right\} + \frac{1}{2}\overline{Y}^2 > 0,$$

а в остальных областях вытекает из неравенства

$$G(x) - 2\overline{Y} > 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \overline{X}.$$

Вычислим в отдельных областях полную производную по времени функции $U(x, y)$ в силу системы (5.5.2): в областях a) и c) имеем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} = ye(t) - yF(y) = -|y|[|F(y)| - e(t) \operatorname{sgn} y] \leqslant$$
$$\leqslant -2\varepsilon|y| \leqslant -2\varepsilon\overline{Y};$$

в области b) получаем

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dy}{dt} \operatorname{sgn} x = (\operatorname{sgn} x + y)[e(t) - F(y)] - |g(x)| \leqslant -\varepsilon;$$

наконец, в области d) находим

$$\frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} - 2(\overline{Y}/\overline{X})y =$$
$$= -|y|\{|F(y)| - \operatorname{sgn} y[e(t) - 2\overline{Y}/\overline{X}]\} \leqslant -\varepsilon|y| \leqslant -\varepsilon\overline{Y}.$$

Очевидно, что условие

$$\frac{dU}{dt} \leqslant -U_2(r) < 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant r$$

выполнено.

Таким образом, функция $U(x, y)$ имеет все требуемые свойства, и доказательство теоремы окончено.

Условия теоремы 5.5.4 могут быть ослаблены. Можно отказаться от условий

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) \operatorname{sgn} x = +\infty, \quad \lim_{|y| \to \infty} F(y) \operatorname{sgn} y = +\infty$$

и вместо них потребовать, чтобы эти функции превосходили определенные границы (ср. Рейссиг [7]).

Теорема 5.5.5. *Решения системы* (5.5.2) *ограничены, если*

a) $m'' \leqslant e(t) \leqslant m'$ *при* $t \geqslant 0$, $m'' \leqslant 0 \leqslant m'$;

b) $F(y) \geqslant m' + \delta$ (δ *сколь угодно мало*) *при* $y \geqslant Y$,

$F(y) \leqslant m''$ *при* $y \leqslant -Y$;

c) $g(x) \geqslant m' - F'' + \delta$ *при* $x \geqslant X$,

$g(x) \leqslant m'' - F' - \delta$ *при* $x \leqslant -X$,

где $F' = \max\limits_{|y| \leqslant Y} F(y) > 0$, $F'' = \min\limits_{|y| \leqslant Y} F(y) < 0$.

Для доказательства с помощью уже известной функции $w(x, y)$ построим вне некоторой окрестности начала координат семейства простых замкнутых контуров $W(\lambda)$ таких, что большему значению параметра λ в семействе соответствует более

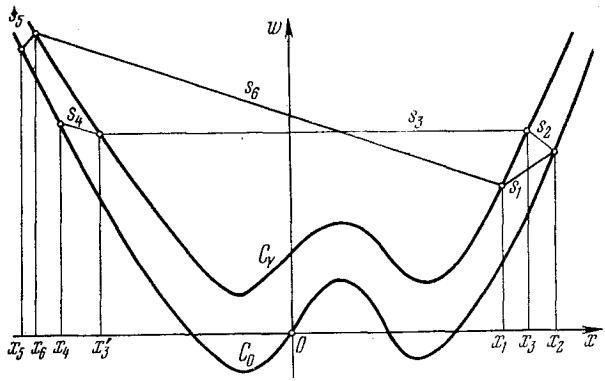

Рис. 5.5.2.

удаленный контур, лежащий вне контура с меньшим значением параметра. На каждой фазовой траектории параметр λ является монотонно убывающей функцией аргумента t. Для простоты построения отобразим плоскость xy на плоскость xw.

Воспользуемся следующими неравенствами:

$$\frac{d}{dt} w(x, y) = -yF(y) + ye(t) \leqslant -yF'' + ym',$$

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) - (m' - F'')x\} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant 0;$$

$$\frac{d}{dt} w(x, y) \leqslant -\delta y,$$

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) + \delta x\} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad y \geqslant Y;$$

$$\frac{d}{dt} w(x, y) \leqslant -yF' + ym'',$$

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) + (F' - m'')x\} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad y \leqslant 0;$$

$$\frac{d}{dt} w(x, y) \leqslant 0 \quad \text{при} \quad y \leqslant -Y.$$

Из приведенных неравенств вытекает, что искомый контур на плоскости xw можно составить с помощью четырех семейств прямых в различных y-областях.

Для построения искомых отрезков (рис. 5.5.2) используем обе кривые (C_0): $w \equiv w(x, 0) = G(x)$ и (C_Y): $w \equiv w(x, Y) = G(x) + \frac{1}{2} Y^2$. Начальную абсциссу $x_1 = \lambda$ подчиним следующему условию:

$$\lambda \geqslant \lambda_0 = \max\left\{\left(1 + \frac{2G}{m' - F''}\right) X, \frac{(m' - m'') + (F' - F'')}{\delta^2} Y^2\right\}. \quad (5.5.14)$$

Благодаря этому, прежде всего, обеспечено, что горизонталь $w = w_1 \equiv w(x_1, Y)$ пересечет кривую C_Y в двух и только в двух точках: (x_1', w_1) и (x_1, w_1), где $x_1' < -X < X < x_1$.

Для доказательства на отрезке $[-X, X]$ оценим снизу разность

$$w_1 - w(x, Y) = \int_x^{x_1} g(s)\, ds = G(x_1) - G(x).$$

Полагая $G = \max\limits_{|x| \leqslant X} |g(x)|$, имеем

$$G(x_1) = \int_X^{x_1} g(s)\, ds + G(X) \geqslant (x_1 - X)(m' - F'' + \delta) - XG >$$

$$> \frac{2G}{m' - F''}(m' - F'' + \delta) X - XG,$$

$$G(x) \leqslant |x| G \leqslant XG,$$

и, следовательно,

$$G(x_1) - G(x) > \frac{2\delta G X}{m' - F''} > 0.$$

Отсюда следует, что кривая C_Y пересекает горизонталь $w = w_1$ только в областях монотонности $x \leqslant -X$ и $x \geqslant X$ функции $w(x, 0) = G(x)$, что равносильно нашему утверждению.

Для верхней половины контура $(y \geqslant 0)$ мы используем отрезки s_5, s_6, s_1, а для нижней $(y \leqslant 0)$ — отрезки s_2, s_3, s_4, которые определим следующим образом:

$$(s_1)\colon\ w = w_1 + (m' - F'')(x - x_1), \quad x_1 \leqslant x \leqslant x_2,$$

причем s_1 соединяет точку (x_1, w_1) кривой C_Y с точкой (x_2, w_2) кривой C_0;

$$(s_2)\colon\ w = w_2 + (m'' - F')(x - x_2), \quad x_3 \leqslant x \leqslant x_2,$$

где отрезок s_2 продолжается от точки (x_2, w_2) до первого его пересечения в точке (x_3, w_3) с кривой C_Y, где $x_1 < x_3 < x_2$;

$$(s_3)\colon\ w = w_3, \quad x_3' \leqslant x \leqslant x_3 \quad (x_3' < -X),$$

является горизонтальной хордой кривой C_Y;

$$(s_4):\ w = w_3 + (m'' - F')(x - x_3'),\quad x_4 \leqslant x \leqslant x_3',$$

идет от точки (x_3', w_3) до точки (x_4, w_4) кривой C_0;

$$(s_6):\ w = w_1 - \delta(x - x_1),\quad x_6 \leqslant x \leqslant x_1,$$

является хордой кривой C_Y, соединяющей точки (x_6, w_6) и (x_1, w_1);

$$(s_5):\ w = w_6 + (m' - F'')(x - x_6),\quad x_5 \leqslant x \leqslant x_6,$$

соединяет точку (x_6, w_6) кривой C_Y с точкой (x_5, w_5) кривой C_0.

Контур замкнем дугой кривой C_0 между точками (x_5, w_5) и (x_4, w_4); так как здесь выполняется неравенство $\frac{dw}{dx} > 0$, то нужно убедиться, что

$$x_5 < x_4. \tag{5.5.15}$$

Для подтверждения этого неравенства произведем следующие оценки:

$$w_4 = w_3 + (m'' - F')(x_4 - x_3'),$$

$$(x_4 - x_3')(m'' - F' - \delta) \leqslant G(x_4) - G(x_3') = \frac{1}{2}Y^2 + (m'' - F')(x_4 - x_3');$$

отсюда

$$x_3' - x_4 \leqslant Y^2/2\delta.$$

Последнее неравенство, очевидно, верно также для разности $x_6 - x_5$; совершенно аналогично оно может быть получено и для $x_2 - x_1$. Имеем, далее,

$$w_4 = w_1 + (m' - F'')(x_2 - x_1) + (m'' - F')(x_3 - x_2) + \\ + (m'' - F')(x_4 - x_3') \leqslant w_1 + [(m' - F'') + 2(F' - m'')]Y^2/2\delta,$$

$$w_5 = w_1 + \delta(x_1 - x_6) + (m' - F'')(x_5 - x_6) \geqslant \\ \geqslant w_1 + \delta x_1 + \delta X - (m' - F'')Y^2/2\delta$$

и, наконец,

$$G(x_5) \geqslant G(x_4) + \delta X + \delta x_1 - (Y^2/\delta)\{(m' - F'') + (F' - m'')\},$$

т. е.

$$G(x_5) - G(x_6) \geqslant \delta X.$$

Отсюда следует (5.5.15).

Теперь покажем, что всякая фазовая траектория на плоскости xy пересекает при убывающем параметре λ семейство контуров $W(\lambda)$ до тех пор, пока она не достигнет внутренней области некоторого контура $W(\lambda_0)$. Здесь можно использовать рассуждения, примененные для доказательства теоремы 5.4.3. В самом деле, перемещаясь по фазовой траектории, лежащей вне контура $W(\lambda_0)$, легко убедиться, что она спиралевидно окружает начало координат. При этом для каждого обхода тре-

буется определенное максимальное время (благодаря наличию отрезка контура $[x_5, x_4]$, совпадающего с осью x). Тем самым обеспечивается ненулевое минимальное по модулю отрицательное приращение параметра λ.

Этим установлено D-поведение системы (5.5.2) (предельная ограниченность решений при $t \to +\infty$), и тем самым теорема доказана.

Подобно тому как это было сделано в теореме 5.5.3, можно показать, что если выполнено неравенство

$$\sup F(y) - \inf F(y) < \sup e(t) - \inf e(t),$$

то не существует простого замкнутого контура, который пересекается фазовыми траекториями в направлении снаружи внутрь.

В заключение займемся еще системой (5.5.2), когда при функциях $F(y)$ и $e(t)$ стоит положительный множитель k. Речь опять идет о том, чтобы показать предельную ограниченность при $t \to +\infty$ многообразия решений. Здесь интересны также оценки границ. В этом направлении Рейтеру [3] принадлежит весьма общая теорема, условия которой, однако, могут быть ослаблены по типу теоремы 5.5.5, так что в упомянутом там смысле дальнейшие обобщения уже невозможны (ср. Рейссиг [9]).

Теорема 5.5.6. *Всякое решение системы*

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - kF(y) + ke(t), \quad 0 < k \leqslant 1, \tag{5.5.16}$$

допускает для достаточно больших значений t не зависящую от k оценку:

$$|x(t)| \leqslant A, \quad |y(t)| \leqslant B, \tag{5.5.17}$$

если

a) $|e(t)| \leqslant m$ *при* $t \geqslant 0$;

b) $F(y) \operatorname{sgn} y \geqslant 2m$ *при* $|y| \geqslant Y > 0$

$$[\max_{|y| \leqslant Y} |F(y)| = F];$$

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > 2(m + F + 1)$ *при* $|x| \geqslant X \geqslant \dfrac{1 + Y^2}{m}$

$$[G(x) < G(X \operatorname{sgn} x) \text{ при } 0 \leqslant |x| < X; \ \max_{|x| \leqslant X} |g(x)| = G].$$

Для доказательства определим некоторое значение $y_0 = \lambda > 0$ такое, что

$$\lambda^2 \geqslant \lambda_0^2 = Y^2 + 2X(m + G) + 1.$$

Далее обычным путем построим семейство вложенных друг в друга простых контуров $W(\lambda)$ с начальными точками $P_0(0, y_0)$. Эти контуры пересекаются фазовыми траекториями снаружи внутрь так, что параметр λ на траекториях является монотонно убывающей функцией от t. Все траектории в конце концов

проникают во внутреннюю область минимального контура $W(\lambda_0)$, содержащегося внутри некоторого прямоугольника с центром в точке O, стороны которого параллельны координатным осям. Это и дает искомые границы A и B.

На основании симметрии условий теоремы относительно x и y можно ограничиться построением половин контуров, например правых $x \geqslant 0$. Каждая из этих половин составляется из четырех дуг. Пусть $w(x, y) \equiv G(x) + y^2/2$; тогда

$$\widehat{P_0P_1}:\ w(x,\ y) = w(0,\ y_0) - kmx$$

для $x \geqslant 0$ от точки $P_0(0, y_0)$ до точки пересечения $P_1(x_1, Y)$ с горизонталью $y = Y$. При $0 \leqslant x \leqslant X$ на дуге $\widehat{P_0P_1}$ выполняется неравенство

$$y^2 \geqslant y_0^2 - 2GX - 2kmX \geqslant Y^2 + 1,$$

отсюда $x_1 > X$. Далее,

$$\widehat{P_1P_2}:\ w(x,\ y) = w(x_1,\ Y) + k(m + F + 1)(x - x_1)$$

для $x \geqslant x_1$ от точки $P_1(x_1, Y)$ до точки $P_2(x_2, 0)$ пересечения кривой с осью x. Так как для $x \geqslant X$ справедливо неравенство

$$\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\{w(x_1,\ Y) + k(m + F + 1)(x - x_1) - G(x)\} =$$
$$= k(m + F + 1) - g(x) \leqslant (m + F + 1) -$$
$$- 2(m + F + 1) \leqslant -(m + F + 1),$$

то имеем

$$\frac{1}{2}y^2\Big|_Y^0 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}[w(x,\ y) - G(x)]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant -(m + F + 1)(x_2 - x_1)$$

и, следовательно, $x_2 - x_1 \leqslant Y^2/2(m + F + 1)$.

Выбираем

$$\widehat{P_2P_3}:\ w(x,\ y) = w(x_2,\ 0) - k(m + F + 1)(x - x_2)$$

для $x_3 \leqslant x \leqslant x_2$ до точки пересечения $P_3(x, y_3)$ с горизонталью $y = -Y$.

Так как при равных x имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right)_{\widehat{P_2P}} - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}y^2\right)_{\widehat{P_1P}} = -2k(m + F + 1) < 0,$$

то, очевидно, справедливо неравенство $x_1 < x_3 < x_2$.

Наконец, полагаем

$$\widehat{P_3P_4}:\ w(x,\ y) = w(x_3,\ -Y) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Так как

$$G(x_3) > G(x) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < x_3,$$