то эта дуга при $x < x_3$ остается под прямой $y = -Y$ и пересекает ось y в некоторой точке $P_4(0, y_4)$, где $y_4 < -Y$. Покажем, что $0 < -y_4 < y_0$, т. е. $w(0, y_4) < w(0, y_0)$. Для этого используем неравенства

$$w(x_1, Y) - w(0, y_0) = -kmx_1 < -kmX,$$

$$w(x_2, 0) - w(x_1, Y) = k(m + F + 1)(x_2 - x_1) \leqslant \frac{k}{2} Y^2,$$

$$w(x_3, -Y) - w(x_2, 0) = -k(m + F + 1)(x_3 - x_2) < \frac{k}{2} Y^2$$

и

$$w(0, y_4) - w(x_3, -Y) = 0.$$

Складывая, получаем

$$w(0, y_4) - w(0, y_0) < k(Y^2 - mX) \leqslant -k < 0$$

и, таким образом, $w(0, y_4) < w(0, y_0)$. Построение правой половины контура $W(\lambda)$ завершаем присоединением вертикального отрезка

$$\overline{P_4P_0'}\colon\ x = 0, \quad -y_0 \leqslant y \leqslant y_4, \quad \text{где} \quad x' = y < 0.$$

Левая половина контура $W(\lambda)$ начинается с точки $P_0'(-y_0, 0)$ и строится совершенно аналогично с помощью точек $P_1', \ldots, P_4'$ до точки P_0.

То, что фазовые траектории пересекают построенные четыре дуги в направлении снаружи внутрь, видно из следующих неравенств:

1) для $\widehat{P_0P_1}$ имеем $\frac{d}{dt}\{w(x, y) + kmx\} =$
$$= -ky\{F(y) - [m + e(t)]\} \leqslant 0;$$

2) для $\widehat{P_1P_2}$ имеем $\frac{d}{dt}\{w(x, y) - k(m + F + 1)x\} =$
$$= -ky\{[F + F(y)] + [m - e(t)] + 1\} \leqslant 0;$$

3) для $\widehat{P_2P_3}$ имеем $\frac{d}{dt}\{w(x, y) + k(m + F + 1)x\} =$
$$= -k|y|\{[F - F(y)] + [m + e(t)] + 1\} \leqslant 0;$$

4) для $\widehat{P_3P_4}$ имеем $\frac{d}{dt}\{w(x, y)\} = -k|y|[|F(y)| + e(t)] < 0.$

Наконец, чтобы внутренний контур с начальной точкой $P_0(0, \lambda_0)$ (он на основании известных рассуждений достигается всеми траекториями) заключить в прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, заметим, что на его правой половине имеем $\max x = x_2$; что касается $\max|y|$, то можно принять, что он достигается на $\widehat{P_0P_1}$ или на $\widehat{P_3P_4}$. Соответствующие заключения верны также для левой половины контура.

Так как

$$w(x_2, 0) - w(0, y_0) < -k\left(mX - \frac{1}{2}Y^2\right) < 0,$$

то можно вычислить границу A на основании условия

$$\max\{G(A),\ G(-A)\} = \frac{1}{2}\lambda_0^2.$$

Далее, на $\widehat{P_0P_1}$ имеем

$$y^2 = y_0^2 - 2G(x) - 2kmx \leqslant y_0^2 + 2GX,$$

а на $\widehat{P_3P_4}$ находим

$$y^2 < y_0^2 - 2G(x) \leqslant y_0^2 + 2GX;$$

отсюда $B = \sqrt{\lambda_0^2 + 2GX}$.

5.6. Дифференциальное уравнение $x'' + f(x, x')x' + g(x) = e(t)$ и более общие типы уравнений

В заключение займемся дифференциальным уравнением

$$x'' + f(x,\ x')x' + g(x) = e(t) \tag{5.6.1}$$

или его обобщениями

$$x'' + f(x,\ x',\ t)x' + g(x) = e(t) \tag{5.6.2}$$

и

$$x'' + g(x) = \varphi(x,\ x',\ t). \tag{5.6.3}$$

Эти уравнения рассматриваются в многочисленных работах. При этом всегда функция $g(x)$ трактуется как восстанавливающая сила, так что $xg(x) > 0$ по крайней мере для достаточно малых $|x|$.

Сначала рассмотрим уравнение (5.6.1) в случае, когда функция $e(t)$ описывает затухающее возмущение такое, что $|e(t)|$ интегрируема на промежутке $t \geqslant 0$, т. е.

$$\int_0^\infty |e(t)|dt = M < \infty. \tag{5.6.4}$$

Если функция $f(x, x')$ имеет характер трения, т. е. по крайней мере неотрицательна, то из физических соображений можно ожидать, что эквивалентная система

$$x' = y, \quad y' = -g(x) - f(x,\ y)y + e(t) \tag{5.6.5}$$

устойчива, т. е. обладает только ограниченными или затухающими решениями. Более точно поведение системы описано в некоторых теоремах Антосевича [2] и Опяля [8].

Теорема 5.6.1 (ср. Антосевич [2]). *Если*

а) $f(x, y) \geqslant 0$ *для всех* x, y

и

b) $G(x)=\int\limits_0^x g(s)\,ds>0$ *при* $x\neq 0$, *причем*

$$G(x)\to\infty \quad \text{при} \quad |x|\to\infty,$$

то при выполнении условия (5.6.4) *каждое решение системы* (5.6.5) *ограничено*:

$$|x(t)|\leqslant A, \quad |y(t)|\leqslant B \quad \text{при} \quad t\geqslant 0. \tag{5.6.6}$$

(*При этом границы* A *и* B *зависят от решения, т. е.* $A=A(x_0, y_0)$, $B=B(x_0, y_0)$, *где* $x_0=x(0)$, $y_0=y(0)$.)

Для доказательства рассмотрим поведение вспомогательной положительно определенной функции

$$w(x, y)=\sqrt{2G(x)+y^2} \tag{5.6.7}$$

вдоль некоторого решения. На основании (5.6.5) имеем

$$w(x, y)\frac{d}{dt}w(x, y)=g(x)y+yy'=-f(x, y)y^2+e(t)y,$$

и, следовательно, справедливы неравенства

$$w\frac{dw}{dt}\leqslant|y||e(t)|\leqslant w|e(t)|$$

и

$$w[x(t), y(t)]\leqslant w(x_0, y_0)+M.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

В частности, если $e(t)\equiv 0$, т. е. $M=0$, то

$$\sqrt{A^2(x_0, y_0)+B^2(x_0, y_0)}\to 0 \tag{5.6.8}$$

при $\sqrt{x_0^2+y_0^2}\to 0$,

т. е. тривиальное решение $x=y=0$ устойчиво в смысле Ляпунова.

Заметим, что доказательство теоремы на основании теорем, изложенных в пп. 2.4 и 2.5, можно также провести прямым методом (ср. Иошизава [11]). Для этого образуем функцию

$$U(x, y, t)=\sqrt{2G(x)+y^2}-\int\limits_0^t|e(\tau)|\,d\tau, \tag{5.6.9}$$

для которой в области $r=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant\rho>0$, очевидно, имеют место неравенства

$$0<U_1(r)\leqslant U(x, y, t),$$

где $U_1(r)\to\infty$ при $r\to\infty$.

В то же время ее полная производная по времени в силу системы (5.6.5) имеет вид

$$\frac{d}{dt}U(x, y, t) = \frac{g(x)y + yy'}{\sqrt{2G(x) + y^2}} - |e(t)| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{f(x, y)y^2}{\sqrt{2G(x) + y^2}} - |e(t)|\left[1 - \frac{|y|}{\sqrt{2G(x) + y^2}}\right] \leqslant 0.$$

Этим доказано, что функция $U(x, y, t)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 2.5.1. Тем самым выполнен критерий ограниченности для семейства решений системы (5.6.5).

Комбинируя теорему 5.6.1, примененную к частному случаю, когда $e(t) \equiv 0$, с теоремой 4.2.14, Джонс [1] пришел к следующей теореме.

Теорема 5.6.2. *Всякое решение $x(t) \not\equiv 0$ дифференциального уравнения* (5.6.1) (*при $e(t) \equiv 0$*), *существующее для достаточно больших значений t, стремится монотонно к нулю при $t \to \infty$, если выполняются следующие условия* (*здесь положено $x' = y$*):

a) $f(x, y) \geqslant 0$ *для всех* x, y;

b) $xg(x) > 0$ *при* $x \neq 0$;

c) $G(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$;

d) $\int\limits_J \{f(x, y) + g(x)/y\}\, dt < \infty$, *где* J — *объединение промежутков полуоси* $t \geqslant 0$, *таких, что* $x(t) \geqslant 0$, $y(t) \geqslant 0$.

Так как условия теоремы 5.6.1 выполнены, то каждое решение $x(t)$ уравнения (5.6.1) вместе с его производной $x'(t)$ ограничено при $t \geqslant 0$. Кроме того, условия теоремы 4.2.14 также выполнены, вследствие чего каждое решение $x(t)$ является либо колеблющимся, либо стремящимся монотонно к нулю.

Остается показать только, что условие d) исключает колеблемость решения.

Пусть $x(t) \not\equiv 0$ — колеблющееся решение, $t_0 \geqslant 0$ — один из его нулей, причем $\operatorname{sgn} x(t) = \operatorname{sgn}(t - t_0)$ в некоторой окрестности точки t_0 и, следовательно, $x'(t_0) \geqslant 0$.

Если $x'(t_0) = 0$, то на основании теоремы единственности получим $x(t) \equiv 0$, что исключено. Таким образом, должно быть $x'(t_0) > 0$.

Пусть теперь t_1 — первый нуль функции $x'(t)$, лежащий правее t_0.

На $[t_0, t_1]$ имеем

$$x'(t_1) - x'(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{-f(x, x')x' - g(x)\}\, dt$$

и

$$x'(t_0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{f(x, x')x' + g(x)\}\, dt.$$

Так как $f(x, x') \geqslant 0$ и $g(x) > 0$ на $(t_0, t_1]$, то в этом промежутке имеем $x''(t) < 0$, так что $x'(t)$ является монотонно убывающей положительной функцией. Отсюда вытекает

$$1 = \int_{t_0}^{t_1} [f(x, x')x' + g(x)]/x'(t_0)\,dt < \int_{t_0}^{t_1} [f(x, x') + g(x)/x']\,dt.$$

Сравнивая последнее неравенство с условием d), видим, что может существовать лишь конечное число таких значений t_0. Но это противоречит предположению о колеблемости рассматриваемого решения $x(t)$. Теорема доказана.

Одна из теорем Опяля [8] устанавливает убывание решений при постоянном возмущении.

Теорема 5.6.3. *Пусть $p(x)$ — непрерывная функция, для которой*

$$q(x) = \exp\left\{\int_0^x p(s)\,ds\right\} \leqslant Q$$

и

$$G_{q^2}(x) = \int_0^x q^2(s)\,g(s)\,ds.$$

Пусть, далее,

a) $f(x, y) - p(x)y$ — *положительно определенная функция;*

b) $xg(x) > 0$ *при* $x \neq 0$ *и* $G_{q^2}(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$.

Если, кроме того, выполняется условие (5.6.4) *и*

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = 0,$$

то все решения системы (5.6.5) *стремятся к нулю, т. е.*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = 0. \tag{5.6.10}$$

Действительно, для положительно определенной вспомогательной функции

$$W(x, y) = \frac{1}{2} q^2(x)\,y^2 + G_{q^2}(x) \tag{5.6.11}$$

получим ее полную производную по времени в силу системы (5.6.5):

$$\frac{d}{dt} W(x, y) = q(x)\,q'(x)\,y^3 + q^2(x)\,yy' + q^2(x)\,g(x)\,y =$$
$$= -[f(x, y) - p(x)y]\,q^2(x)\,y^2 + q^2(x)\,ye(t). \tag{6.5.12}$$

Аналогично тому, как это было сделано в теореме 5.6.1, находим

$$\frac{d}{dt} W(x, y) \leqslant Q\sqrt{2W(x, y)}\,|e(t)|,$$

отсюда

$$\sqrt{W[x(t),\ y(t)]} \leqslant \sqrt{W(x_0,\ y_0)} + \frac{QM}{\sqrt{2}}.$$

Итак, решение $\{x(t),\ y(t)\}$ ограничено при $t \geqslant 0$, откуда ясно, что функция

$$W[x(t),\ y(t)] = W(x_0,\ y_0) + \int_0^t q^2[x(\tau)]\, y(\tau)\, e(\tau)\, d\tau -$$

$$- \int_0^t \{f[x(\tau),\ y(\tau)] - p[x(\tau)]\, y(\tau)\}\, q^2[x(\tau)]\, y^2(\tau)\, d\tau \qquad (5.6.13)$$

при $t \to \infty$ стремится к некоторому конечному пределу W. В случае $W = 0$ теорема доказана.

Положим, что $W > 0$. Тогда при $t \geqslant 0$, очевидно, имеем

$$[f(x,\ y) - p(x)\, y]\, q^2(x) \geqslant \varepsilon > 0 \qquad (5.6.14)$$

и из (5.6.13) получаем, что функция $\int_0^t y^2(\tau)\, d\tau$ ограничена. Но так как

$$\frac{d}{dt}[y^2(t)] = 2y[e(t) - f(x,\ y)\, y(t) - g(x)]$$

также ограничена, то в силу использованного выше рассуждения имеем

$$\lim_{t \to \infty} y^2(t) = 0, \qquad (5.6.15)$$

а вместе с этим и $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = a$.

В случае $a \neq 0$ (благодаря тому, что $e(t) \to 0$) получим

$$\lim_{t \to \infty} y'(t) = -g(a) \neq 0,$$

что противоречит равенству (5.6.15). Поэтому имеет место равенство $a = 0$, и, значит, $W = 0$ вопреки предположению. Таким образом, теорема полностью доказана.

В случае $p(x) \equiv 0$ теорема 5.6.3 в некотором смысле дополняет теорему 5.6.1.

Теорема 5.6.4. *Всякое решение системы* (5.6.5) *стремится к нулю при* $t \to \infty$, *если, кроме условия* (5.6.4), *выполняются еще следующие*:

a) $f(x, y)$ *положительно определенная*;

b) $g(x) \operatorname{sgn} x > 0$ *при* $x \neq 0$, *причем* $G(x) \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$.

Дальнейшие исследования относятся к частному случаю, когда

$$f(x,\ y) = f(x) + p(x)\, y. \qquad (5.6.16)$$

Здесь, следуя Антосевичу [2], положим

$$q(x)=\exp\left\{\int_0^x p(s)\,ds\right\},\qquad F_q(x)=\int_0^x q(s)f(s)\,ds$$

и преобразуем систему (5.6.5) в следующую:

$$x'=\frac{z-F_q(x)}{q(x)},\qquad z'=-q(x)[g(x)-e(t)],\tag{5.6.17}$$

где $z=yq(x)+F_q(x)$.

Легко убедиться в том, что из ограниченности решения $\{x(t), z(t)\}$ следует ограниченность решения $\{x(t), x'(t)=y(t)\}$ и наоборот.

Теорема 5.6.5. *Если имеет место условие* (5.6.4) *и если, кроме того, выполняются условия*:

a) $0\leqslant q(x)\leqslant Q<\infty$ *для всех* x;

b) $F_q(x)\,g(x)\geqslant 0$ *для всех* x;

c) $G_{q^2}(x)=\int_0^x q^2(s)\,g(s)\,ds>0$ *при* $x\neq 0$ *и* $G_{q^2}(x)\to\infty$ *при* $|x|\to\infty$,

то всякое решение системы (5.6.17) (*а вместе с этим и системы* (5.6.5) *в случае* (5.6.16)) *ограничено при* $t\to\infty$, *т. е.*

$$|x(t)|\leqslant A,\quad |z(t)|\leqslant C\quad \text{при}\quad t\geqslant 0.\tag{5.6.18}$$

Для доказательства Антосевич [2] использует положительно определенную функцию $w(x, z)=\sqrt{2G_{q^2}(x)+z^2}$ и показывает, что она остается ограниченной на всякой фазовой траектории системы (5.6.17). Для этого вычисляется ее полная производная по времени

$$w(x, z)\frac{d}{dt}w(x, z)=q^2(x)\,g(x)\,x'+zz'=$$
$$=-q(x)F_q(x)\,g(x)+q(x)\,e(t)\,z.$$

Отсюда

$$w\frac{dw}{dt}\leqslant q(x)\,|e(t)|\,|z|\leqslant Q\,|e(t)|\,w$$

и, следовательно,

$$w[x(t), z(t)]\leqslant w(x_0, z_0)+QM.$$

Этим доказаны условия ограниченности (5.6.18).

Заметим, что в частном случае, когда $e(t)\equiv 0$, т. е. $M=0$, имеем, очевидно,

$$\sqrt{A^2(x_0, z_0)+C^2(x_0, z_0)}\to 0\quad \text{при}\quad \sqrt{x_0^2+z_0^2}\to 0,$$

и это влечет за собой (5.6.8). Следовательно, тривиальное решение $x=y=0$ устойчиво в смысле Ляпунова.

Другой результат для системы (5.6.5) с функцией $f(x, y)$ вида (5.6.16) был получен Опялем [8].

Теорема 5.6.6. *Пусть, кроме* (5.6.4) *и* (5.6.16), *выполнены следующие условия*:

a) $0 \leqslant q(x) \leqslant Q < \infty$;

b) $F_q(x) \operatorname{sgn} x > 0$ *при* $x \neq 0$;

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > 0$ *при* $x \neq 0$, *причем*

$$G(x) \to \infty \quad \text{при} \quad |x| \to \infty.$$

Тогда всякое решение системы (5.6.5) *стремится к нулю при неограниченно возрастающем* t.

Для доказательства возьмем положительно определенную функцию сравнения

$$W(x, y) = \frac{1}{2}[q(x)y + F_q(x)]^2 + G_{q^2}(x) \tag{5.6.19}$$

и вычислим

$$\frac{d}{dt} W(x, y) = [q(x)y + F_q(x)][q(x)e(t) - q(x)g(x)] +$$
$$+ q^2(x)g(x)y = -q(x)F_q(x)g(x) + q(x)e(t)[q(x)y + F_q(x)] \leqslant$$
$$\leqslant Q|e(t)||q(x)y + F_q(x)| \leqslant \sqrt{2}\,Q|e(t)|\sqrt{W(x, y)},$$

отсюда

$$\sqrt{W[x(t), y(t)]} \leqslant \sqrt{W(x_0, y_0)} + QM/\sqrt{2}.$$

Таким образом, каждое решение $\{x(t), y(t)\}$ ограничено при $t \geqslant 0$.

Далее имеем

$$W[x(t), y(t)] = W(x_0, y_0) - \int_0^t q[x(\tau)]F_q[x(\tau)]g[x(\tau)]d\tau +$$
$$+ \int_0^t q[x(\tau)]e(\tau)\{q[x(\tau)]y(\tau) + F_q[x(\tau)]\}d\tau$$

и, следовательно,

$$0 \leqslant \int_0^\infty q[x(t)]F_q[x(t)]g[x(t)]dt < +\infty,$$

а так как $q[x(t)] \geqslant q > 0$, то

$$\int_0^\infty g[x(t)]F_q[x(t)]dt < +\infty. \tag{5.6.20}$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

В самом деле, если $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}|x(t)| > 0$, то, так как $y(t) = x'(t)$ ограничено, можно построить бесконечную последовательность непересекающихся отрезков оси t одинаковой длины, на каждом из которых выполнялось бы неравенство $|x(t)| \geqslant \varepsilon > 0$.

Последнее неравенство, в силу положительной определенности функции $g(x)F_q(x)$, противоречит сходимости интеграла (5.6.20). Таким образом, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$.

Остается единственная возможность:

$$\lim_{t\to\infty}\sqrt{2W[x(t),\ y(t)]}=\lim_{t\to\infty}|y(t)|=\text{const}.$$

Из соотношения $y(t)=x'(t)$ следует, что эта константа должна быть нулем.

Теоремы, начиная с 5.6.1 и кончая 5.6.6, справедливы также в частном случае, когда $f(x,y)=f(x)$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 5.6.7. *Если наряду с* (5.6.4) *выполнены условия*:

a) $f(x)\geqslant 0$ *или* $g(x)\int\limits_0^x f(s)\,ds\geqslant 0$ *для всех* x;

b) $G(x)>0$ *при* $x\neq 0$,

$G(x)\to\infty$ *при* $|x|\to\infty$,

то все решения системы

$$x'=y,\quad y'=-f(x)y+g(x)+e(t)$$

ограничены при $t\geqslant 0$.

Если вместо a) *и* b) *выполняются условия*:

a′) $f(x)>0$ *или* $\int\limits_0^x f(s)\,ds\cdot\operatorname{sgn}x>0$ *при* $x\neq 0$;

b′) $g(x)\operatorname{sgn}x>0$ *при* $x\neq 0$ *и* $G(x)\to\infty$ *при* $|x|\to\infty$,

то все решения указанной выше системы стремятся к нулю при $t\to+\infty$.

Обратимся теперь к случаю, когда возмущенная функция $e(t)$ только ограничена. Целью исследования является построение семейства контуров с известными свойствами, позволяющими установить ограниченность решений системы. Если дифференциальное уравнение, сверх того, периодично по t, то, как известно, из ограниченности семейства его решений вытекает существование по меньшей мере одного периодического решения.

Вначале приведем одну теорему Кастро [2], где он рассматривает обобщенное уравнение (5.6.2), причем условия, наложенные на функцию $f(x,y,t)$, таковы, что ее зависимость от t несущественна.

Теорема 5.6.8. *Решения* $x(t)$ *уравнения* (5.6.2) *вместе с их производными* $x'(t)=y$ *ограничены при* $t\geqslant 0$, *если функции* $g(x)$, $f(x,y,t)$, $e(t)$ *подчинены следующим условиям*:

a) $|e(t)|\leqslant m$ *при* $t\geqslant 0$;

b) $f(x, y, t) \geqslant f_0(x, y)$,

$$f_1 \geqslant f_0(x, y) \geqslant f > 0 \quad \text{для} \quad |x| \geqslant \delta,$$

$$f_0(x, y) \geqslant -f_1 \quad \text{для всех}, \ x;$$

c) $g(x) = -g(-x)$, $g(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$.

Если, сверх того, выполнено условие

$$f(x, y, t+\theta) \equiv f(x, y, t), \qquad e(t+\theta) \equiv e(t),$$

то для уравнения (5.6.2) *существует по меньшей мере одно периодическое решение периода* θ.

Построение подходящего контура на плоскости xy основывается на следующих неравенствах для нестационарного поля направлений фазовой картины:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e(t) - g(x)}{y} - f(x, y, t) \leqslant \frac{m - g(x)}{y} - f_0(x, y), \qquad y \geqslant 0,$$

$$\frac{dy}{dx} \leqslant -\frac{m + g(x)}{y} - f_0(x, y), \qquad y \leqslant 0.$$

Далее можно использовать мажоранту поля направлений. Нет надобности здесь останавливаться на способах построения семейства контуров, так как проблема их конструкции в нижеследующих теоремах решена в более общих предположениях.

Левинсону [1] и Лангенхопу [1] принадлежит следующая теорема.

Теорема 5.6.9. *Решения* $x(t)$ *уравнения* (5.6.1) *ограничены вместе с их производными* $x'(t)$ *при* $t \geqslant 0$, *если*

a) $|e(t)| \leqslant m$ *при* $t \geqslant 0$;

b) $f(x, y) \geqslant f > 0$ *для* $|x| \geqslant \delta \geqslant 2m/f$ *и* $y \geqslant \delta$, $f(x, y) \geqslant -f_1$ $(f_1 \geqslant f)$ *для остальных пар значений* (x, y);

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > 0$ *для* $|x| \geqslant \delta$, *причем* $\lim\limits_{|x| \to \infty} |g(x)| = \infty$ $[\max\limits_{|x| \leqslant \delta} |g(x)| = G < \infty]$.

Если

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{g(x)}{x} = +\infty, \tag{5.6.21}$$

то доказательство целиком можно взять у Лангенхопа [1].

Если, наоборот,

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{g(x)}{x} < +\infty,$$

то для достаточно больших положительных значений x и подходящей константы $N > 0$ имеем $g(x) < Nx$. Отсюда для функции $G(x) = \int\limits_0^x g(s)\,ds$ получаем, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{Nx}{G(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{N}{g(x)} = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{G(x)}=0. \tag{5.6.22}$$

К этому случаю применимо доказательство Левинсона, к которому мы и приступим.

Существенную роль здесь играет функция сравнения

$$w(x,\ y)=G(x)+\frac{1}{2}y^2.$$

Заметим, что кривые $w(x, y)=C$ $(C=\text{const})$ замкнуты и для достаточно больших значений параметра C не имеют двойных точек; при этом большему значению параметра кривой соответствует более удаленная во внешнюю сторону кривая. Вдоль фазовой траектории системы (5.6.5) имеем

$$\frac{d}{dt}w(x,\ y)=$$
$$=-f(x,\ y)y^2+e(t)y,$$

так что для $|x|\geqslant\delta$, $|y|\geqslant\delta$ получим

$$\frac{d}{dt}w(x,\ y)=w'\leqslant$$
$$\leqslant -fy^2\left[1-\frac{m}{f|y|}\right]\leqslant-\frac{fy^2}{2}. \tag{5.6.23}$$

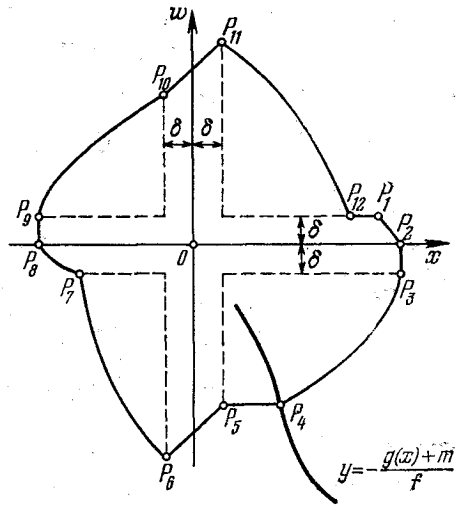

Рис. 5.6.1.

Контур составляется из 12 частей, концевые точки которых обозначаются $P_i(x_i, y_i)$ $[w(P_i)=w_i]$ (рис. 5.6.1). Сначала определяется точка $P_4(x_4, y_4)$. Она находится на кривой

$$y=-\frac{g(x)+m}{f}. \tag{5.6.24}$$

Пусть при этом $x_4\geqslant X$, где для $|x|\geqslant X$ выполняются следующие соотношения:

$$|g(x)|\geqslant 2(f_1\delta+m), \tag{5.6.25}$$

$$|g(x)|\geqslant 2(G+m), \tag{5.6.26}$$

$$G(x)\geqslant 16\delta\frac{f_1}{f}g(x), \tag{5.6.27}$$

$$G(x)\geqslant 16\delta m\frac{f_1}{f}+64\delta^2f_1^2+4\delta^2+8\delta^2f_1-2G(\delta). \tag{5.6.28}$$

Из (5.6.26), в частности, следует $x_4 > \delta$, а из (5.6.25) получаем $y_4 < -\delta$. Величину x_4 увеличиваем еще так, чтобы при $0 \leqslant x \leqslant x_4$ было выполнено неравенство $g(x_4) \geqslant g(x)$.

На дуге $\widehat{P_4P_3}$ имеем

$$w(x, y) = w_4, \qquad y_3 = -\delta.$$

На основании (5.6.23) все фазовые траектории пересекают эту дугу в направлении к меньшим значениям параметра.

Пусть $\overline{P_3P_2}$ — вертикальный отрезок: $x = x_3$, $-\delta \leqslant y \leqslant 0$. Этот отрезок благодаря тому, что $x' = y \leqslant 0$, пересекается траекториями в направлении справа налево, т. е. снаружи внутрь. Дуга $\widehat{P_2P_1}$ есть часть кривой

$$w(x, y) - (f_1\delta + m)x = w_2 - (f_1\delta + m)x_2$$

при $0 \leqslant y \leqslant \delta$. На этой дуге, если $x \geqslant X$, имеем

$$0 > \frac{dy}{dx} = \frac{-g(x) + (f_1\delta + m)}{y} \geqslant \frac{-g(x) - f(x, y)y + e(t)}{y}.$$

Это можно обеспечить, так как $x_1 \to \infty$ при $x_4 \to \infty$. Тогда фазовые траектории пересекают рассматриваемый кусок кривой в желаемом смысле.

$\widehat{P_4P_5}$ является горизонтальным отрезком: $y = y_4$, $x_4 \geqslant x \geqslant \delta$, лежащим под кривой (5.6.24). Поэтому получим

$$\frac{dy}{dt} = -g(x) - f(x, y)y + e(t) \geqslant -g(x) - m - fy \geqslant 0,$$

что и требовалось.

$\widehat{P_5P_6}$ — отрезок прямой $y = 2f_1(x - \delta) + y_5$ при $\delta \geqslant x \geqslant -\delta$, где

$$\frac{dy}{dx} = 2f_1.$$

Эта величина является мажорантой для поля направлений соответствующей части фазовой картины, так как благодаря тому, что $y \leqslant y_5 = -\dfrac{g(x_4) + m}{f}$, имеем

$$-f(x, y) + \frac{e(t) - g(x)}{y} \leqslant f_1 + \frac{m + G}{|y_5|} =$$

$$= f_1 + f\frac{m + G}{m + g(x_4)} < f_1\left(1 + \frac{m + G}{3m + 2G}\right) < \frac{3}{2}f_1.$$

Таким образом, траектории, идущие налево через $\overline{P_5P_6}$, входят во внутреннюю область контура.

На $\widehat{P_6P_7}$ положим $w(x, y) = w_6$, $y_7 = -\delta$, и поэтому

$$\frac{d}{dt}w(x, y) < 0.$$

Дуга $\widehat{P_7P_8}$ является частью кривой

$$w(x, y) + (f_1\delta + m)x = w_7 + (f_1\delta + m)x_7, \quad -\delta \leqslant y \leqslant 0,$$

на которой (если при выборе x_4 позаботиться о том, чтобы было $|x_7| \geqslant X$)

$$0 > \frac{dy}{dx} = \frac{-g(x) - (f_1\delta + m)}{y} \geqslant \frac{-g(x) - f(x, y)y + e(t)}{y},$$

так что фазовые траектории входят в контур снаружи внутрь.

$\overline{P_8P_9}$ — вертикальный отрезок: $x = x_8$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$, где $x' = y \geqslant 0$.

На $\widehat{P_9P_{10}}$ имеем

$$w(x, y) = w_9 = w_8 + \frac{1}{2}\delta^2 > w_7 + \frac{1}{2}\delta^2 = w_6 + \frac{1}{2}\delta^2,$$

$$x_{10} = -\delta, \qquad y_{10} > \sqrt{y_6^2 + \delta^2},$$

при этом

$$\frac{d}{dt}w(x, y) < 0.$$

$\overline{P_{10}P_{11}}$ — отрезок прямой $y = 2f_1(x + \delta) + y_{10}$, где $x_{11} = \delta$.

Наклон $2f_1$ является мажорантой для поля направлений траекторий в точках этого отрезка, так как

$$\frac{e(t) - g(x)}{y} \leqslant \frac{m + G}{y_{10}} < \frac{m + G}{|y_4|} = \frac{m + G}{m + g(x_4)} f < f \leqslant f_1.$$

Для дуги $\widehat{P_{11}P_{12}}$ возьмем $w(x, y) = w_{11}$, $y_{12} = \delta$.

Если P_{12} лежит левее P_1, то замкнем контур горизонтальным отрезком $y = \delta$, $x_{12} \leqslant x \leqslant x_1$, где

$$\frac{dy}{dt} = -f(x, y)y - g(x) + e(t) \leqslant -f\delta - g(x) + m < 0.$$

Для проверки неравенства $x_{12} < x_1$ рассмотрим изменение величины w на отдельных частях контура. Имеем

$$w_2 - w_1 = \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx - \frac{1}{2}\delta^2 = (f_1\delta + m)(x_2 - x_1) > 0.$$

Так как на дуге $\widehat{P_1P_2}$ должно выполняться неравенство (5.6.25), то

$$2(f_1\delta + m)(x_2 - x_1) \leqslant G(x_2) - G(x_1) \leqslant \frac{1}{2}\delta^2 + (f_1\delta + m)(x_2 - x_1),$$

и поэтому $w_2 - w_1 \leqslant \frac{1}{2}\delta^2$.

Далее имеем

$$w_3 - w_2 = \frac{1}{2}\delta^2,$$

$$w_4 - w_3 = 0,$$

$$w_5 - w_4 = G(\delta) - G(x_4),$$

$$w_6 - w_5 = \left\{\frac{1}{2}y_6^2 + G(-\delta)\right\} - \left\{\frac{1}{2}y_5^2 + G(\delta)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}[y_4 - 4f_1\delta]^2 + G(-\delta) - \frac{1}{2}y_4^2 - G(\delta) =$$

$$= 8f_1 - 4f_1\delta y_4 + G(-\delta) - G(\delta),$$

$$w_7 - w_6 = 0,$$

$$w_8 - w_7 = (f_1\delta + m)(x_7 - x_8) = \int_{x_7}^{x_8} g(x)\,dx - \frac{1}{2}\delta^2 \geqslant$$

$$\geqslant 2(f_1\delta + m)(x_7 - x_8) - \frac{1}{2}\delta^2,$$

т. е.

$$w_8 - w_7 \leqslant \frac{1}{2}\delta^2,$$

$$w_9 - w_8 = \frac{1}{2}\delta^2,$$

$$w_{10} - w_9 = 0,$$

$$w_{11} - w_{10} = G(\delta) + \frac{1}{2}[y_{10} + 4f_1\delta]^2 - G(-\delta) - \frac{1}{2}y_{10}^2 =$$

$$= 8f_1^2\delta^2 + 4f_1\delta y_{10} + G(\delta) - G(-\delta),$$

$$w_{12} - w_{11} = 0.$$

В результате получаем

$$w_{12} - w_1 \leqslant 2\delta^2 + G(\delta) + 16f_1^2\delta^2 + 4f_1\delta(|y_4| + y_{10}) - G(x_4).$$

В силу того, что $x_6 = x_{10} = -\delta$, находим

$$y_{10}^2 - y_6^2 = 2(w_{10} - w_6) \leqslant 2\delta^2,$$

$$y_{10} - |y_6| \leqslant \frac{2\delta^2}{y_{10} - |y_6|} \leqslant \frac{2\delta^2}{2|y_6|} < \frac{\delta^2}{|y_4|} < \frac{\delta^2}{\delta} = \delta,$$

следовательно,

$$y_{10} < |y_4| + 4f_1\delta + \delta.$$

Это дает

$$w_{12}-w_1 \leqslant 2\delta^2+G(\delta)+32f_1^2\delta^2+4f_1\delta^2+8f_1\delta\,|y_4|-G(x_4)=$$

$$=2\delta^2+G(\delta)+32f_1^2\delta^2+4f_1\delta^2+8\frac{f_1}{f}m\delta+8\frac{f_1}{f}\delta g(x_4)-G(x_4)\leqslant$$

$$\leqslant-\frac{1}{2}\left\{G(x_4)-16\frac{f_1}{f}m\delta-64f_1^2\delta^2-8f_1\delta^2-4\delta^2-2G(\delta)\right\}<0, \tag{5.6.29}$$

т. е. $x_{12}<x_1$.

Таким образом, в случае Левинсона теорема доказана.

В доказательстве Лангенхопа построение изменяется так, что в качестве $\widehat{P_4P_5}$ используется не горизонтальный отрезок, а берется интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx}=-f-\frac{g(x)+m}{y}\equiv h(x,\ y) \tag{5.6.30}$$

до ее пересечения с вертикалью $x=\delta$.

Нужно доказать теперь следующее:

1. Фазовые траектории пересекают новый участок контура $\widehat{P_4P_5}$ в желаемом смысле.

2. Для $x_4\to\infty$ получается $y_5\to-\infty$, так что точка P_7 может быть передвинута как угодно далеко влево.

3. Для достаточно больших значений x_4 имеем $w_{12}<w_1$.

Доказательство. 1. В самом деле, имеет место неравенство

$$-f(x,\ y)+\frac{e(t)-g(x)}{y}\leqslant h(x,\ y),$$

так что дуга $\widehat{P_4P_5}$ при возрастающем t пересекается траекториями вверх.

2. Проведем через точку $(\delta,\ y_5'<0)$ прямую с наклоном $-f$:

$$y=-f(x-\delta)+y_5'.$$

Пусть ее первой точкой пересечения с кривой (5.6.24) в области $x\geqslant\delta$ будет точка $P_4'(x_4',\ y_4')$. Таким образом, x_4' есть наименьший корень при $x\geqslant\delta$ уравнения

$$g(x)-f^2x+(m+f^2\delta)=-fy_5'. \tag{5.6.31}$$

Для достаточно больших значений $|y_5'|$ такой корень существует. Пусть число $\Delta\geqslant\delta$ будет сколь угодно большим, но фиксированным, и пусть

$$S=\max_{0\leqslant x\leqslant\Delta}[g(x)-f^2x+m+f^2\delta]>0;$$

тогда для $y_5'<-S/f$, очевидно, получим $x_4'>\Delta$.

В дальнейшем, вместо исходной точки P_4, возьмем точку $P_4'(x_4', y_4')$. При этом x_4' можно выбрать сколь угодно большим и также добиться, чтобы $y_5' \to -\infty$ при $x_4' \to \infty$.

Чтобы убедиться, что $y_5 < y_5'$, достаточно заметить, что на $\widehat{P_4'P_5}$ имеет место неравенство

$$0 > h(x, y) > -f.$$

Отсюда вытекает, что такая точка P_5 действительно существует.

3. Теперь нужно оценить разность $w_5 - w_4'$. Имеем

$$w_5 - w_4' = \int_{P_4'}^{P_5} [y\,dy + g(x)\,dx] = \int_{\delta}^{x_4'} (fy + m)\,dx < (m + fy_5)(x_4' - \delta).$$

Далее, принимая во внимание, что

$$y_{10} < |y_5| + 4f_1\delta + \delta,$$

вместо (5.6.29) получим

$$w_{12} - w_1 < 2\delta^2 + 32f_1^2\delta^2 + 4f_1\delta^2 + 8f_1\delta|y_5| + (m + fy_5)(x_4' - \delta) =$$

$$= 2\delta^2 + 32f_1^2\delta^2 + 4f_1\delta^2 + 8\frac{f_1}{f}\delta m + (m + fy_5)\left(x_4' - \delta - 8\frac{f_1}{f}\delta\right) < 0,$$

если x_4' достаточно велико. Так что $y_5 \to -\infty$ при $x_4' \to \infty$. Теорема доказана.

Более общие условия для функции $f(x, y)$ были даны Барбалатом [1].

Теорема 5.6.10. *Все решения системы* (5.6.5) *ограничены, если*

a) $|e(t)| \leqslant m$ *для* $t \geqslant 0$;

b) $f(x, y)|y|^{\vartheta} \geqslant f$ $(0 < f \leqslant m,\ \vartheta < 1)$ *для* $|x| \geqslant \delta \geqslant \left(\frac{m}{f}\right)^{\frac{1}{1-\vartheta}}$, $|y| \geqslant \delta$,

$$f(x, y)|y| \geqslant -f_1 (f_1 \geqslant f) \quad \textit{при} \quad |x| \geqslant \delta, \quad 0 \leqslant y \operatorname{sgn} x \leqslant \delta,$$

$$f(x, y) \geqslant -f_1 \quad \textit{при} \quad |x| \leqslant \delta, \quad |y| \geqslant \delta;$$

c) $g(x) \operatorname{sgn} x > 0$ *при* $|x| \geqslant \delta$,

$$\lim_{|x| \to \infty} g(x) \operatorname{sgn} x = \infty \qquad [\max_{|x| \leqslant \delta} |g(x)| = G].$$

Действительно, имеет место либо равенство

$$\overline{\lim_{x \to \infty}} \frac{[g(x)]^{\frac{1}{1-\vartheta}}}{x} = \infty, \tag{5.6.32}$$

либо неравенство

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{[g(x)]^{\frac{1}{1-\vartheta}}}{x} < \infty.$$

Во втором случае для достаточно больших значений x и подходящей константы $N > 0$ получим

$$[g(x)]^{\frac{1}{1-\vartheta}} < Nx$$

и, так как

$$0 < \frac{[g(x)]^{\frac{1}{1-\vartheta}}}{G(x)} < \frac{Nx}{G(x)}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{G(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{g(x)} = 0,$$

то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{G(x)}{[g(x)]^{\frac{1}{1-\vartheta}}} = \infty. \tag{5.6.33}$$

Сначала будем предполагать, что это равенство выполнено.

Согласно Левинсону, для доказательства теоремы выберем такое число $X > \delta$, что для $|x| \geqslant X$ выполнены неравенства

$$|g(x)| \geqslant 2(f_1\delta + m)$$

и

$$|g(x)| \geqslant [2(G+m)]^{1-\vartheta}.$$

Пусть начальной точкой $P_4(x_4, y_4)$ контура в области $x \geqslant \delta$ будет первая точка пересечения кривой

$$y = -\left[\frac{g(x)+m}{f}\right]^{\frac{1}{1-\vartheta}}$$

с горизонталью $y = y_4 < -\delta$, где должно быть $|y_4| > \left[\frac{G+m}{f}\right]^{\frac{1}{1-\vartheta}}$. Тогда получим $x_4 \to \infty$ при $y_4 \to -\infty$ и, таким образом, можно предполагать, что $x_4 > X$.

Требуется показать, что части контура, в измененных условиях для функции $f(x, y)$, сохраняют нужные свойства относительно фазовых траекторий.

В самом деле, на дугах $\widehat{P_3P_4}$, $\widehat{P_6P_7}$, $\widehat{P_9P_{10}}$, $\widehat{P_{11}P_{12}}$, лежащих в области $|x| \geqslant \delta$, $|y| \geqslant \delta$ и заданных уравнением $w(x, y) = \text{const}$, выполняется неравенство

$$\frac{d}{dt} w(x, y) \leqslant -f|y|^{2-\vartheta}\left[1 - \frac{m}{f\delta^{1-\vartheta}}\right] < 0.$$

На вертикальном отрезке $\overline{P_4P_5}$ имеем

$$y' = f(x, y)|y| - g(x) + e(t) \geqslant f|y|^{1-\vartheta} - g(x) - m > 0,$$

так как $|y| > \left[\frac{g(x)+m}{f}\right]^{\frac{1}{1-\vartheta}}$.

На остальных частях контура неравенства сохраняют свой смысл. Несмотря на то, что связь между x_4 и y_4 изменена, разность $w_{12} - w_1$ удовлетворяет вновь неравенству (5.6.29). Это проверяется следующим образом:

$$w_{12} - w_1 < -G(x_4)\left\{1 - \frac{2\delta^2 + G(\delta) + 32f_1^2\delta^2 + 4f_1\delta^2}{G(x_4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{8f_1\delta}{f^{\frac{1}{1-\vartheta}}}\left[\frac{g(x_4)+m}{g(x_4)}\right]^{\frac{1}{1-\vartheta}} \frac{[g(x_4)]^{\frac{1}{1-\vartheta}}}{G(x_4)}\right\}.$$

Так как $x_4 \to \infty$ и $g(x_4) \to \infty$ при $y_4 \to -\infty$, то из соотношения (5.6.33) немедленно следует $w_{12} < w_1$ для достаточно больших значений $|y_4|$.

Если же выполняется соотношение (5.6.32), то, как указал Лангенхоп [1], доказательство нужно модифицировать.

Опяль ослабил требования, налагаемые на функцию $g(x)$, а именно, произведение $g(x)\operatorname{sgn} x$ не должно неограниченно возрастать, а должно лишь не превосходить известные границы.

Теорема 5.6.11. *Решения системы* (5.6.5) *ограничены, если*

a) $|e(t)| \leqslant m$ *при* $t \geqslant 0$;

b) $f(x, y) \geqslant f > 0$ *при* $|x| \geqslant \delta$, $|y| \geqslant \delta$, $f(x, y) \geqslant -f_1$ $(f_1 > 0)$ *для всех остальных пар значений* (x, y);

c) $\lim\limits_{|x|\to\infty} g(x)\operatorname{sgn} x > (m + \delta f_1)$.

Для доказательства по Опялю [5], которое аналогично доказательству Левинсона [1], отыскивается число $\Delta > \delta$ такое, что

$$f - \frac{m}{\Delta} = \mu > 0,$$

причем для $|x| \geqslant \Delta$ имеем

$$\frac{g(x)\operatorname{sgn} x - m}{\delta} - f_1 \geqslant \varepsilon > 0. \tag{5.6.34}$$

Тогда рассматриваются четыре вспомогательных уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\mu - \frac{g(x)}{y}, \tag{5.6.35}$$

$$\frac{dy}{dx} = -f - \frac{g(x) - m}{y}, \tag{5.6.36}$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1 - \frac{g(x) - m}{y}, \tag{5.6.37}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y}. \tag{5.6.38}$$

После выбора начальной точки $P_4(x_4, 0)$ с достаточно большой абсциссой x_4 строится (рис. 5.6.2) последовательность дуг $P_1P_2P_3P_4Q_1Q_2$ такая, что дуга $\overset{\frown}{P_1P_2}$ удовлетворяет уравнению (5.6.35), дуга $\overset{\frown}{P_2P_3}$ — уравнению (5.6.36), $\overset{\frown}{P_3P_4}$ — уравнению (5.6.37) и $\overset{\frown}{Q_1Q_2}$ — уравнению (5.6.38). Возможность такого построения обеспечивает соотношение (5.6.34).

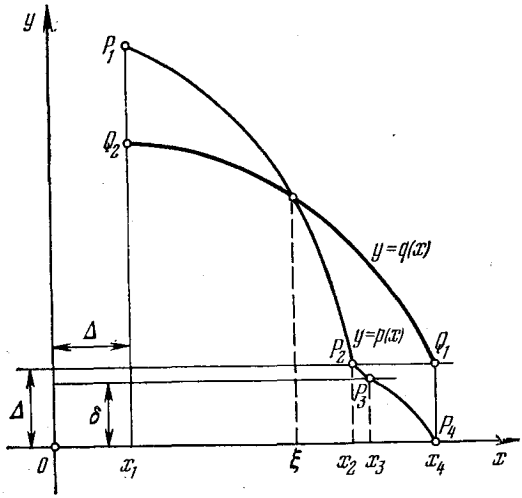

Рис. 5.6.2.

Доказывается, что точка P_1 лежит над Q_2, если только x_4 достаточно велико, и что $\lim\limits_{x_4\to\infty} \overline{P_1Q_2} = +\infty$.

Пусть $y = p(x, x_4)$ и $y = q(x, x_4)$ (или, короче, $p(x)$ и $q(x)$) — соответственно уравнения дуг $\overset{\frown}{P_1P_4}$ и $\overset{\frown}{Q_2Q_1}$, где $p(x_4) = 0$ и $q(x_4) = \Delta$. Нужно показать, что

$$\lim_{x_4\to\infty} q(\Delta, x_4) = \infty \tag{5.6.39}$$

и

$$\lim_{x_4\to\infty} [p(\Delta, x_4) - q(\Delta, x_4)] = \infty. \tag{5.6.40}$$

На отрезке $[x_3, x_4]$ выполняется неравенство

$$p(x) \leqslant \delta < \Delta \leqslant q(x)$$

и

$$q'(x) = -\frac{g(x)}{q(x)}, \quad p'(x) = f_1 - \frac{g(x) - m}{p(x)} \leqslant -\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$[q^2(x) - p^2(x)]' = -2[f_1 p(x) + m] \geqslant -2(f_1\delta + m)$$

и, кроме того, $x_4 - x_3 \leqslant \delta/\varepsilon$.

Интегрируя, получаем

$$[q^2(x) - p^2(x)]\Big|_{x_3}^{x_4} \geqslant -2(f_1\delta + m)(x_4 - x_3);$$

отсюда

$$q^2(x_3) \leqslant Q^2 = \Delta^2 + \delta^2 + \frac{2\delta}{\varepsilon}(f_1\delta + m).$$

На отрезке $[x_2, x_3]$ имеем $\delta \leqslant p(x) \leqslant \Delta < q(x)$ и

$$q'(x) = -\frac{g(x)}{q(x)}, \qquad p'(x) = -f - \frac{g(x) - m}{p(x)} \leqslant -f;$$

таким образом, $x_3 - x_2 \leqslant (\Delta - \delta)/f$.

Вычислим

$$[q^2(x) - p^2(x)]' = 2[fp(x) - m] \geqslant -2m;$$

отсюда

$$q^2(x_2) \leqslant Q'^2 = Q^2 + \Delta^2 - \delta^2 + 2m\frac{\Delta - \delta}{f}.$$

На отрезке $[\Delta, x_2]$ имеем

$$q'(x) = -\frac{g(x)}{q(x)}, \qquad p'(x) = -\mu - \frac{g(x)}{p(x)}$$

и до тех пор, пока $q(x) \geqslant p(x)$, справедливо неравенство

$$q'(x) - p'(x) \geqslant \mu > 0.$$

Отсюда вытекает, что на отрезке $\left[x_2 - \frac{Q' - \Delta}{\mu}, x_2\right]$ существует некоторое значение ξ, для которого

$$p(\xi) = q(\xi).$$

Так как $\frac{Q' - \Delta}{\mu}$ — константа, то $\xi \to \infty$ при $x_4 \to \infty$.

На отрезке $[\Delta, \xi)$ выполняется неравенство $p(x) > q(x)$ и, следовательно,

$$[p^2(x) - q^2(x)]' = 2[p(x)p'(x) - q(x)q'(x)] <$$
$$< 2p(x)[p'(x) - q'(x)] \leqslant -2\mu p(x) < -2\mu q(x);$$

отсюда

$$[p^2(\xi) - q^2(\xi)] - [p^2(\Delta) - q^2(\Delta)] < -2\mu\int_{\Delta}^{\xi} q(x)\,dx,$$

т. е.

$$p^2(\Delta) - q^2(\Delta) > 2\mu\int_{\Delta}^{\xi} q(x)\,dx.$$

С другой стороны,

$$q^2(x) + 2G(x) = C,$$

где $G(x) = \int\limits_{\Delta}^{x} g(s)\,ds$ и $C = q^2(x_4) + 2G(x_4) = \Delta^2 + 2G(x_4)$, причем $G(\Delta) = 0$; отсюда

$$q(x) = \sqrt{\Delta^2 + 2[G(x_4) - G(x)]}.$$

Из соотношения

$$q(\Delta) = \sqrt{\Delta^2 + 2G(x_4)} \tag{5.6.41}$$

следует утверждение (5.6.39).

Далее, при $x \geqslant \Delta$ имеем

$$\frac{p^2(\Delta) - q^2(\Delta)}{q(\Delta)} > 2\mu \int\limits_{\Delta}^{\xi} \frac{q(x)}{q(\Delta)}\,dx = 2\mu \int\limits_{\Delta}^{\xi} \sqrt{1 - \frac{G(x)}{\frac{1}{2}\Delta^2 + G(x_4)}}\,dx.$$

В правой части этого неравенства подынтегральная функция при фиксированном x является монотонно возрастающей функцией параметра x_4; кроме того, $\xi \to \infty$ при $x_4 \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{x_4 \to \infty} \frac{p^2(\Delta) - q^2(\Delta)}{q(\Delta)} = +\infty.$$

Но

$$\frac{p^2(\Delta) - q^2(\Delta)}{q(\Delta)} = \{p(\Delta) - q(\Delta)\}\left\{2 + \frac{p(\Delta) - q(\Delta)}{q(\Delta)}\right\},$$

и, таким образом, справедлива формула (5.6.40)

Заметим, что утверждения

$$p(\Delta, x_4) \to \infty \qquad (P_1 \to \infty),$$

$$p(\Delta, x_4) - q(\Delta, x_4) \to \infty \qquad (\overline{P_1Q_2} \to \infty),$$

$$x_4 \to \infty \qquad (P_4 \to \infty)$$

эквивалентны.

Рассуждения останутся верными, если вместо $g(x)$ положить $-g(-x)$. В этом случае последовательность дуг обозначается $P_1'P_2'P_3'P_4'Q_1'Q_2'$.

После сделанных приготовлений легко построить желаемый контур (рис. 5.6.3). На прямой $x = \Delta$ выберем начальную точку $P_1(\Delta, y_1)$, такую, что

$$\overline{P_1Q_2} > 4f_1\Delta \quad \text{и} \quad y_1 \geqslant \frac{G + m}{f_1} + 4f_1\Delta \quad [G = \max_{|x| \leqslant \Delta} |g(x)|].$$

Далее возьмем точку $P_1'(-\Delta, -y_1)$ и позаботимся о том, чтобы

$$\overline{P_1'Q_2'} > 4f_1\Delta.$$

Дугу $\overset{\frown}{P_1 \ldots P_4}$ проведем так, как об этом говорилось выше. Дугу $\overset{\frown}{P_4 \ldots P_6}$ получим как зеркальное отображение дуги $\overset{\frown}{P_4 Q_1 Q_2}$ относительно оси x. Дуга $\overset{\frown}{P_8 \ldots P_{11}}$ симметрична дуге $\overset{\frown}{P_1' \ldots P_4'}$ относительно начала координат, и дуга $\overset{\frown}{P_{11} \ldots P_{13}}$ — есть зеркальное отображение дуги $\overset{\frown}{P_4' Q_1' Q_2'}$ относительно оси ординат.

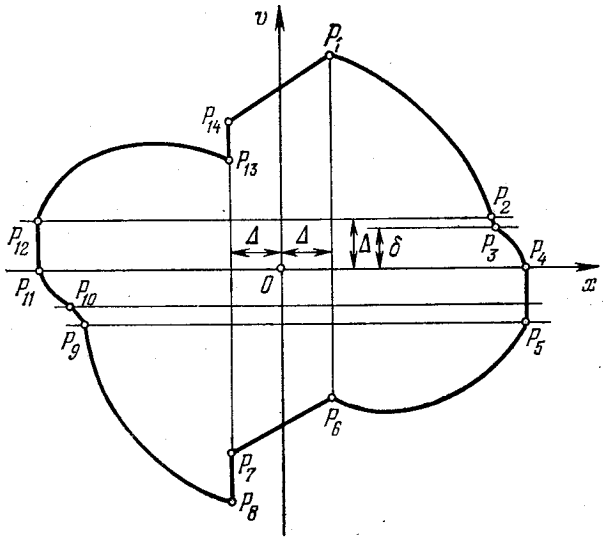

Рис. 5.6.3.

К этому присоединим еще отрезки $\overline{P_{14}P_1}$ и $\overline{P_7P_6}$ с наклоном $2f_1$, а также вертикальные отрезки $\overline{P_{13}P_{14}}$ и $\overline{P_8P_7}$. Легко убедиться в том, что фазовые траектории по отношению к построенному контуру ведут себя нужным образом.

Теорема, таким образом, доказана.

Изложим еще две теоремы, в которых утверждается принадлежность системы (5.6.5) к классу D.

Теорема 5.6.12 (ср. Рейссиг [6]). *Решения системы* (5.6.5) *допускают при* $t \geqslant t_0$ *оценки вида*

$$|x(t)| \leqslant A, \qquad |y(t)| \leqslant B$$

(A, B — *константы, зависящие от системы*), *если выполняются следующие условия*:

а) $|e(t)| \leqslant m$ *при* $t \geqslant 0$;

b) $f(x, y) \leqslant 0$ *только при* $|x| \leqslant \delta$ *и* $|y| \leqslant \eta$ (η *при фиксированном* δ *может быть сколь угодно малым*), *причем* $-f(x, y) \leqslant f$ ($f \geqslant 0$) *и*

$$f(x, y) \geqslant \frac{m \operatorname{sgn} y - g(x)}{y} \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \delta, \quad -y \operatorname{sgn} x \geqslant H > \eta;$$

c) $g(x) \operatorname{sgn} x \geqslant (m + \eta f)(1 + \varepsilon)$ *при* $|x| \geqslant \delta$, $\varepsilon > 0$.

Второе условие из b) допускает следующую физическую интерпретацию: на некотором расстоянии от нулевого положения торможение $[-f(x, y) y]$, направленное противоположно скорости быстровращающегося вибратора (для которого $|y|$ велико и $xy < 0$), превышает по модулю силы (т. е. сумму восстанавливающей силы $-g(x)$ и экстремума возбуждающей силы $\pm m$). При этом условии выполняется неравенство

$$yy' \leqslant 0. \tag{5.6.42}$$

Для доказательства теоремы построим семейство контуров $W(\lambda)$, однако не на обычной фазовой плоскости xy, а на плоскости xw, где

$$w(x, y) = \frac{1}{2} y^2 + G(x), \qquad G(x) = \int_0^x g(s)\, ds.$$

Прежде всего оценим полную производную по времени

$$w' = \frac{d}{dt} w(x, y);$$

имеем

$$w' = -f(x, y) y^2 + e(t) y \leqslant |y| [m + fY], \tag{5.6.43}$$

отсюда

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) - (m + fY) x \operatorname{sgn} y\} \leqslant 0$$

для $|x| \leqslant \delta$, $|y| \leqslant Y$.

Далее,

$$w' \leqslant |y| (m + f\eta), \tag{5.6.44}$$

и, следовательно,

$$\frac{d}{dt} \{w(x, y) - (m + f\eta) x \operatorname{sgn} y\} \leqslant 0$$

для $|x| \geqslant \delta$ и любого y.

Из (5.6.42)—(5.6.44) получаем, что контур $W(\lambda)$ на плоскости xw можно построить по кускам из отрезков прямых

$$w - (m + f\eta) x \operatorname{sgn} y = \text{const},$$

$$w - (m + fY) x \operatorname{sgn} y = \text{const}$$

и частей кривых $w - G(x) = \text{const}$ ($y^2 = \text{const}$).

Положим

$$Y = 8\delta f + \frac{4\delta (m + G) + H^2}{4\delta f}, \tag{5.6.45}$$

где $G = \max\limits_{|x| \leqslant \delta} |g(x)|$, и выберем число λ_0 столь большим, чтобы для $|x| \geqslant \lambda_0$

$$G(x) \geqslant (1 + 1/\varepsilon)[|G(\delta)| + |G(-\delta)| + 4\delta/Y]. \qquad (5.6.46)$$

Очевидно, что $\lambda_0 > \delta$.

Изобразим на плоскости xw кривые C_0: $w = G(x)$ $(y = 0)$ и G_H: $w = G(x) + \frac{1}{2} H^2$ $(y = H)$.

В качестве начальной точки построения возьмем точку $P_1(x_1, w_1)$ на C_0, где $x_1 = -\lambda$, $\lambda \geqslant \lambda_0$.

Построение контура $W(\lambda)$ будем последовательно проводить по частям (рис. 5.6.4).

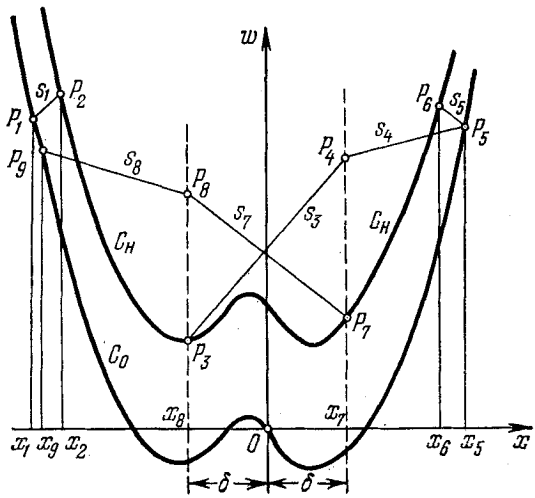

Рис. 5.6.4.

1. Куску W_1 контура соответствует прямолинейный отрезок s_1:

$$w = w_1 + (m + f\eta)(x - x_1), \qquad x_1 \leqslant x \leqslant x_2.$$

Если отрезок s_1 пересекает (слева направо) кривую C_H, оставаясь левее вертикали $x = -\delta$, то в качестве концевой точки $P_2(x_2, w_2)$ отрезка возьмем точку, лежащую на C_H.

Если же отрезок s_1 сначала доходит до вертикали $x = -\delta$ (или до вертикали и кривой он доходит одновременно), то для абсциссы конца отрезка $P_2(x_2, w_2)$ примем $x_2 = -\delta$. Кусок контура W_2 тогда исключается из рассмотрения $(P_2 = P_3)$.

2. Куску W_2 контура соответствует отрезок кривой C_H в промежутке $x_2 \leqslant x \leqslant -\delta = x_3$ с концевой точкой $P_3(x_3, w_3)$.

3. Куску W_3 контура соответствует отрезок s_3:

$$w = w_3 + (m + fY)(x + \delta), \qquad -\delta \leqslant x \leqslant \delta = x_4$$

с концевой точкой $P_4(x_4, w_4)$.

Оценим высоту отрезка над кривой C_0:

$$h(x) = \left[G(-\delta) + \frac{1}{2} y_3^2\right] + (m + fY)(x + \delta) - G(x).$$

Чтобы кусок контура можно было составить в нужной форме и чтобы он пересекался фазовыми траекториями снаружи внутрь, должно быть выполнено неравенство $0 < h(x) < \frac{1}{2} Y^2$.

Действительно, при $-\delta < \xi < x$ имеем

$$h(x) = \frac{1}{2} y_3^2 + (m + fY)(x + \delta) - g(\xi)(x + \delta);$$

отсюда

$$h(x) \geqslant \frac{1}{2} y_3^2 + (m + fY)(x + \delta) - (x + \delta) G \geqslant \frac{1}{2} y_3^2 > 0,$$

так как $Y = (C - m)/f$.

С другой стороны, справедливы неравенства

$$h(x) \leqslant \frac{1}{2} y_3^2 + (m + fY + G)(x + \delta) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} H^2 + 2\delta(m + fY + G) < 4\delta f Y < \frac{1}{2} Y^2.$$

4. Куску W_4 контура соответствует отрезок s_4:

$$w = w_4 + (m + f\eta)(x - \delta), \qquad x_4 = \delta \leqslant x \leqslant x_5$$

до пересечения с кривой C_0 в точке $P_5(x_5, w_5)$.

Куски $W_1, \ldots, W_4$ образуют верхнюю половину контура $(y \geqslant 0)$.

5. Куску W_5 контура соответствует отрезок s_5:

$$w = w_5 - (m + f\eta)(x - x_5), \qquad x_6 \leqslant x \leqslant x_5.$$

Если отрезок s_5 пересекает кривую C_H в области $x > \delta$, то он заканчивается в точке пересечения $P_6(x_6, w_6)$. Если же этого не происходит, то его конечная точка лежит на вертикали $x = \delta$ и следующий кусок контура вырождается в точку $(P_6 = P_7)$.

6. Куску W_6 контура соответствует отрезок кривой C_H в промежутке $x_7 = \delta \leqslant x \leqslant x_6$.

7. Куску W_7 контура соответствует отрезок s_7:

$$w = w_7 - (m + fY)(x - \delta), \qquad x_8 = -\delta \leqslant x \leqslant \delta = x_7.$$

Для высоты этого отрезка над кривой C_0

$$h(x) = \left[G(\delta) + \frac{1}{2} y_7^2\right] - (m + fY)(x - \delta) - G(x)$$

должна выполняться оценка

$$0 < h(x) < \frac{1}{2} Y^2.$$

В самом деле, при $x < \xi < \delta$ имеем

$$h(x) = \frac{1}{2} y_7^2 - (m + fY)(x - \delta) + g(\xi)(\delta - x);$$

отсюда

$$h(x) \geqslant \frac{1}{2} y_7^2 + (m + fY - G)(\delta - x) \geqslant \frac{1}{2} y_7^2 > 0.$$

Далее,

$$h(x) \leqslant \frac{1}{2} y_7^2 + 2\delta(m + fY + G) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} H^2 + 2\delta(m + fY + G) < 4\delta Y^{-1} < \frac{1}{2} Y^2.$$

8. Куску W_8 контура соответствует отрезок s_8:

$$w = w_8 - (m + f\eta)(x + \delta), \qquad x_9 \leqslant x \leqslant -\delta = x_8$$

до кривой C_0 (точка пересечения $P_9(x_9, w_9)$). Куски контура $W_5, \ldots, W_8$ в плоскости $y \leqslant 0$ образуют нижнюю половину контура.

Теперь утверждается, что $x_1 < x_9$.

В самом деле,

$$\frac{G(x_9) - G(-\delta)}{x_9 + \delta} \leqslant -(m + f\eta)(1 + \varepsilon),$$

отсюда

$$-\delta - x_9 \leqslant \frac{G(x_9) - G(-\delta)}{(m + f\eta)(1 + \varepsilon)};$$

далее,

$$G(x_9) \leqslant \left[G(\delta) + \frac{1}{2} H^2\right] + 2\delta(m + fY) +$$

$$+ (m + f\eta)(-\delta - x_0) < G(\delta) + 4\delta fY + \frac{G(x_9) - G(-\delta)}{1 + \varepsilon},$$

и, таким образом,

$$G(x_9) < \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)[\,|G(\delta)| + 4\delta fY] + \frac{1}{\varepsilon}|G(-\delta)| \leqslant G(x_1),$$

т. е.

$$-\delta > x_9 > x_1.$$

Таким образом, контур $W(\lambda)$ можно замкнуть дугой $\widehat{P_9P_1}$ кривой C_0, соответствующей на плоскости xy отрезку оси x $(y = 0)$ от x_1 до x_9, на котором

$$y' = -g(x) + e(t) \geqslant |g(x)| - m > \eta f \geqslant 0.$$

Этим, на основании приведенных выше рассуждений о поведении фазовых траекторий относительно семейства замкнутых контуров, заканчивается доказательство теоремы.

Для аналогичной теоремы, принадлежащей Барбалату [1], ограничимся приведением лишь ее формулировки, так как доказательство этой теоремы может быть проведено известным методом, о котором подробно рассказано выше.

Теорема 5.6.13. *Решения системы* (5.6.5) *ограничены при* $t \to +\infty$, *если*

a) $|e(t)| \leqslant m$;

b) $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x, y)|y| = +\infty$ *при* $|y| \geqslant \delta > 0$,

$$f(x, y) \geqslant -f \quad (f \geqslant 0) \quad \text{при} \quad |x| \geqslant \delta,$$
$$0 \leqslant y \operatorname{sgn} x \leqslant \delta;$$

c) $\dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$ *при* $|x| \geqslant \delta$.

В заключение изложим еще одну теорему Рейтера [3] относительно дифференциального уравнения (5.6.3), эквивалентного системе

$$x' = y, \qquad y' = -g(x) + \varphi(x, y, t). \tag{5.6.47}$$

Теорема 5.6.14. *Решения системы* (5.6.47) *ограничены при* $t \to +\infty$, *если*

a) $g(x) \operatorname{sgn} x \to \infty$ *при* $|x| \to \infty$;

b) $\varphi(x, y, t) \operatorname{sgn} y \leqslant$

$$\leqslant \begin{cases} \varphi'(1 + |y|) & \text{для всех троек значений } (x, y, t \geqslant 0), \\ -\varphi|y| & \text{для } |x| \geqslant \delta,\ |y| \geqslant \delta,\ t \geqslant 0, \end{cases}$$

где φ, φ', δ — *положительные константы.*

Отметим, что Рейтер рассматривает более общий случай, когда функция $\varphi(x, y, t)$ снабжена множителем k, $0 < k \leqslant 1$, и показывает, что для решений соответствующей системы существуют границы, не зависящие от параметра k. Однако мы ограничимся случаем $k = 1$ и дадим построение семейства контуров $W(\lambda)$, следуя Рейтеру [3].

Считая число δ достаточно большим, будем предполагать, что $\delta \geqslant 1$ и что при $|x| > \delta$ справедливы неравенства

$$g(x) \operatorname{sgn} x > 0, \qquad G(x) = \int_0^x g(s)\, ds > 0.$$

Пусть $\max\limits_{|x| \leqslant \delta} |g(x)| = G$. Положим $C = (2\varphi' + G)\delta$ и определим такое число $\Delta \geqslant \dfrac{4\delta(1 + \varphi')}{\varphi} + \delta$, что

$$\left.\begin{aligned} &G(\Delta) - G(\delta) \\ &G(\Delta) - G(-\delta) \end{aligned}\right\} > \delta C + \frac{1}{2} C^2$$

и

$$g(x) \operatorname{sgn} x > 2(1 + \delta)\varphi' \quad \text{для} \quad |x| > \Delta,$$
$$G(x) < G(\Delta \operatorname{sgn} x) \quad \text{для} \quad |x| < \Delta.$$

Полагая $\max\limits_{|x|\leqslant\Delta}|g(x)|=G'$, определим константу

$$\lambda_0=2C+\delta^2+2\delta(1+C)\varphi'+2(\Delta-\delta)(\varphi+2G')+1.$$

Заметим, что

$$\lambda_0>\max\{2C+\delta,\ 2[C+(\Delta-\delta)(\varphi+2G')],\ \delta^2+2\delta\varphi'(1+C)\}$$

и

$$2\delta(1+C+\lambda)\varphi'+\delta^2<\frac{1}{2}(\Delta-\delta)\varphi\lambda$$

при $\lambda\geqslant\lambda_0$.

Теперь займемся построением правой половины контура $P_0\ldots P_6$ $(x\geqslant 0)$. Координаты точек P_i обозначим через (x_i, y_i). Начальной точкой пусть будет точка $P_0(0, y_0)$, где $y_0=\lambda\geqslant\lambda_0$.

1. Дуга $\widehat{P_0P_1}$ есть решение $y=z(x)$ вспомогательного уравнения

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{g(x)}{z}+\left(1+\frac{1}{z}\right)\varphi',$$

где $z(0)=y_0$ и $0\leqslant x\leqslant\delta$. До тех пор, пока на этой дуге справедливо неравенство $z(x)\geqslant\delta$, будем иметь

$$\frac{dz}{dx}\leqslant\frac{G}{\delta}+\left(1+\frac{1}{\delta}\right)\varphi'\leqslant G+2\varphi';$$

отсюда

$$|z(x)-y_0|\leqslant(G+2\varphi')\delta=C,$$

и, таким образом,

$$z(x)>\delta\quad\text{на}\quad[0,\delta].$$

2. Дуга $\widehat{P_1P_2}$ — решение $y=z(x)$ уравнения

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{g(x)}{z}-\varphi,$$

где $z(\delta)=y_1$.

Так как $y_1\geqslant y_0-C$, то при $\delta\leqslant x\leqslant\Delta$, $z\geqslant\frac{1}{2}y_0$ получаем

$$\frac{dz}{dx}\geqslant\frac{-G'}{\frac{1}{2}y_0}-\varphi>-(\varphi+2G')$$

и

$$z(x)>y_1-(\varphi+2G')(\Delta-\delta)\geqslant y_0-[C+(\varphi+2G')(\Delta-\delta)]>\frac{1}{2}y_0.$$

Следовательно, дуга $y=z(x)$ пересечет горизонталь $y=\delta$ в некоторой точке P_2 с абсциссой $x_2>\Delta$.

3. $\widehat{P_2P_3}$ есть дуга кривой

$$w(x, y)-(1+\delta)\varphi'x=w(P_2)-(1+\delta)\varphi'x_2,$$

где

$$w(x, y)=G(x)+\frac{1}{2}y^2.$$

Так как

$$\frac{d}{dx}\{G(x)-(1+\delta)\varphi' x\}=g(x)-(1+\delta)\varphi'>(1+\delta)\varphi',$$

то дуга пересечет ось x в некоторой точке $P_3(x_3, 0)$, где $x_3>x_2$ и $2(1+\delta)\varphi'(x_3-x_2)<\delta^2$.

4. $\widehat{P_3P_4}$ — дуга кривой

$$w(x, y)+(1+\delta)\varphi' x=w(P_3)+(1+\delta)\varphi' x_3.$$

Она пересечет (при убывающем x) горизонталь $y=-\delta$ в точке P_4, для которой $x_3-x_4<x_3-x_2$; отсюда $x_4>x_2>\Delta$. При равных x имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\widehat{P_3P_4}}-\frac{d}{dx}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{\widehat{P_2P_3}}=-2(1+\delta)\varphi'<0.$$

5. $\widehat{P_4P_5}$ — дуга кривой $w(x, y)=w(P_4)$.

Так как для $0\leqslant x<x_4$ имеем $G(x_4)>G(x)$, то эта дуга остается под горизонталью $y=-\delta$ и пересекает вертикаль $x=\delta$ в точке P_5, для которой $y_5<-\delta$. Справедливы неравенства

$$y_5^2=\delta^2+2[G(x_4)-G(\delta)]>\delta^2+2[G(\Delta)-G(\delta)]>$$
$$>\delta^2+2\delta C+C^2=(\delta+C)^2,$$

т. е. $|y_5|>C+\delta$.

6. $\widehat{P_5P_6}$ — интегральная кривая $y=z(x)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{g(x)}{x}+\left(1-\frac{1}{z}\right)\varphi',$$

где $\delta\geqslant x\geqslant 0$ и $z(\delta)=y_5$.

Дуга $\widehat{P_5P_6}$ также остается в области $y\leqslant-\delta$, так как имеем

$$\frac{dz}{dx}\geqslant-\frac{G}{\delta}+\varphi';$$

отсюда

$$y_5-z(x)\geqslant-G+\delta\varphi' \quad \text{при} \quad x\in[0, \delta]$$

и, следовательно,

$$z(x)\leqslant y_5+(G-\delta\varphi')<y_5+C<-\delta.$$

Докажем теперь, что $|y_6|<y_0$, т. е. $w(P_6)<w(P_0)$.

В самом деле, на дуге $\widehat{P_0P_1}$ имеем

$$\frac{dw}{dx}=(z+1)\varphi'\leqslant(y_0+C+1)\varphi';$$

отсюда

$$w(P_1)-w(P_0)\leqslant(y_0+C+1)\delta\varphi'.$$

На дуге $\widehat{P_1P_2}$ получаем

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi z < -\frac{1}{2}\varphi y_0 \quad \text{при} \quad \delta \leqslant x \leqslant \Delta,$$

и, таким образом,

$$w(P_2) - w(P_1) < -\frac{1}{2}\varphi y_0 (\Delta - \delta).$$

Далее соответственно выводим:

$$w(P_3) - w(P_2) = (1+\delta)\varphi'(x_3 - x_2),$$
$$w(P_4) - w(P_3) = (1+\delta)\varphi'(x_3 - x_4),$$
$$w(P_5) - w(P_4) = 0;$$

отсюда следует

$$w(P_5) - w(P_2) < 2(1+\delta)\varphi'(x_3 - x_2) < \delta^2.$$

Итак,

$$w(P_5) - w(P_0) < (y_0 + C + 1)\delta\varphi' - \frac{1}{2}\varphi y_0(\Delta - \delta) + \delta^2 < 0$$

и благодаря тому, что $G(\delta) \geqslant 0$, $|y_5| > y_0$.

Наконец, на дуге $\widehat{P_5P_6}$ получаем

$$\frac{dw}{dx} = (z-1)\varphi' > (y_5 - C - 1)\varphi' > -(y_0 + C + 1)\varphi',$$

и, следовательно,

$$w(P_6) - w(P_5) < (y_0 + C + 1)\delta\varphi'.$$

Отсюда окончательно имеем

$$w(P_6) - w(P_0) < 2(y_0 + C + 1)\delta\varphi' + \delta^2 - \frac{1}{2}\varphi y_0(\Delta - \delta) < 0,$$

т. е. $w(P_6) < w(P_0)$.

Левую половину контура $(x \leqslant 0)$ $P_0' \ldots P_6'$ строим аналогичным образом, выбирая P_0' $(0, -y_0)$ и используя симметрию условий теоремы для функций $g(x)$ и $\varphi(x, y, t)$ относительно переменных x и y. Обе половины контура соединим друг с другом вертикальными отрезками $\overline{P_6P_6'}$ и $\overline{P_6'P_0}$. На этих отрезках фазовые траектории идут, очевидно, внутрь контура, в то время как для остальных кусков контура это должно быть установлено подробными расчетами.

На фазовых траекториях, пересекающих дуги $\widehat{P_0P_1}$ и $\widehat{P_5P_6}$, справедливы неравенства

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{g(x)}{y} + \frac{\varphi(x, y, t)}{y} = -\frac{g(x)}{y} + \frac{\varphi(x, y, t)\operatorname{sgn} y}{|y|} \leqslant$$
$$\leqslant -\frac{g(x)}{y} + \left(1 + \frac{1}{|y|}\right)\varphi' = -\frac{g(x)}{z} + \left(1 + \frac{1}{|z|}\right)\varphi' = \frac{dz}{dx}.$$

Для фазовых траекторий, доходящих до дуги $\widehat{P_1P_2}$, имеем

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{g(x)}{y}+\frac{\varphi(x,y,t)}{y}\leqslant-\frac{g(x)}{y}-\varphi=-\frac{g(x)}{z}-\varphi=\frac{dz}{dx}.$$

На дугах $\widehat{P_2P_3}$ и $\widehat{P_3P_4}$ получаем

$$\frac{d}{dt}\{w(x,y)-(1+\delta)\varphi' x\operatorname{sgn}y\}=[\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y-(1+\delta)\varphi']|y|,$$

соответственно на дуге $\widehat{P_4P_5}$ имеем

$$\frac{d}{dt}w(x,y)=\varphi(x,y,t)|y|\operatorname{sgn}y\leqslant-\varphi y^2<0.$$

То, что все фазовые траектории входят во внутреннюю область контура $W(\lambda_0)$, следует из обычных рассуждений. Этим уже все доказано.

Для частного случая $\varphi(x,y,t)=e(t)-f(x,y)y$ из теоремы 5.6.14 вытекает следующий результат:

если $|e(t)|\leqslant m$ при $t\geqslant 0$ и

$$f(x,y)\geqslant\begin{cases}-f_1 & \text{для всех } x,\ y,\\ f>0 & \text{для } |x|\geqslant\delta,\ |y|\geqslant\delta,\end{cases}$$

то (при сохранении прежних условий, налагаемых на функцию $g(x)$) решения системы (5.6.5) ограничены при $t\to+\infty$.

Действительно, все условия теоремы 5.6.14 в этом случае выполнены, так как, выбирая $\delta\geqslant 2m/f$, получим

$$\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y\leqslant m-f(x,y)|y|\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}m+f_1|y| & \text{для всех } x,\ y,\\ m-f|y|\leqslant-\frac{1}{2}f|y| & \text{для } |x|\geqslant\delta,\ |y|\geqslant\delta.\end{cases}$$

Другой результат относительно ограниченности решений системы (5.6.47) при $t\to+\infty$ получил Иошизава [5] путем построения соответствующей функции Ляпунова. Его условия, налагаемые на функции $\varphi(x,y,t)$ и $g(x)$, таковы:

a) $\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y\leqslant-\varphi$ для $|y|\geqslant\eta$,

$|\varphi(x,y,t)|\leqslant\varphi'$ для $|y|\leqslant\eta$;

b) $g(x)\operatorname{sgn}x\geqslant\varphi'(1+\eta)+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$ для $|x|\geqslant\delta$.

Действительно, выберем Δ настолько большим, чтобы было $4\eta/\Delta\leqslant\varphi$, и определим функцию Ляпунова вне прямоугольника $|x|\leqslant\Delta$, $|y|\leqslant\eta$ следующим образом:

$$U(x,y)-w(x,y)=\begin{cases}\text{a)} & 0 & \text{при } y\geqslant\eta;\\ \text{b)} & (y-\eta)\operatorname{sgn}x & \text{при } |x|\geqslant\Delta,\ |y|\leqslant\eta;\\ \text{c)} & -2\eta\operatorname{sgn}x & \text{при } |x|\geqslant\Delta,\ y\leqslant-\eta;\\ \text{d)} & -2\eta x/\Delta & \text{при } |x|\leqslant\Delta,\ y\leqslant-\eta.\end{cases}$$

В силу системы (5.6.47) получим

$$\frac{d}{dt}U(x,\ y)=\frac{\partial U}{\partial x}y+\frac{\partial U}{\partial y}[\varphi(x,\ y,\ t)-g(x)]=$$

$$=\begin{cases} \text{a)}\quad y\varphi(x,\ y,\ t)\leqslant-\varphi|y|; \\ \text{b)}\quad (y+\operatorname{sgn}x)\varphi(x,\ y,\ t)-g(x)\operatorname{sgn}x\leqslant(1+\eta)\varphi'- \\ \qquad\qquad -|g(x)|\leqslant-\varepsilon; \\ \text{c)}\quad y\varphi(x,\ y,\ t)\leqslant-\varphi|y|; \\ \text{d)}\quad |y|\{\varphi(x,\ y,\ t)\operatorname{sgn}y-(2\eta\operatorname{sgn}y)/\Delta\}\leqslant \\ \qquad\qquad \leqslant-|y|(\varphi-2\eta/\Delta)\leqslant-\varphi|y|/2. \end{cases}$$

Непосредственно видно, что функция $U(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.5.6 и поэтому обеспечивает достаточные условия ограниченности при $t\to+\infty$ решений системы (5.6.47), или, иначе говоря, выполнен достаточный признак D-поведения системы.

ГЛАВА 6

В последней главе мы займемся вопросами устойчивости (важность этих рассмотрений была подчеркнута в главе 1), при этом будем опираться на теорию, изложенную в п. 2.3.

До сих пор после нахождения решений определенного типа (например, ограниченных или периодических) мы выделяли одно из них, представляющее собой особый интерес (главным образом по практическим соображениям), и исследовали его устойчивость. Для выяснения этого вопроса по смыслу теории Ляпунова мы сравнивали это решение с соседними, т. е. изучали близость их координат, соответствующих одному и тому же моменту времени, иными словами, занимались *синхронной устойчивостью*.

Известно, что периодические решения автономной системы, вообще говоря, не являются синхронно устойчивыми даже в том случае, когда соответствующие им фазовые траектории отличаются устойчивым расположением, так что их положительные полутраектории сколь угодно мало уклоняются друг от друга, если начальные точки достаточно близки. Этого вида устойчивостью решения, так называемой *орбитальной устойчивостью*, мы здесь не будем заниматься. Стационарные решения, относящиеся к нашим исследованиям, есть либо постоянные решения автономных систем, либо решения неавтономных систем.

Мы ограничимся изучением обобщенного уравнения Льенара (1.1)

$$x'' + f(x)x' + g(x) = e(t),$$

рассматриваемого главным образом в специальной литературе, и на одном примере продемонстрируем способ построения функции Ляпунова, обеспечивающей соответствующий критерий устойчивости. Будет также показано, что этим способом в ряде случаев может быть установлена асимптотическая устойчивость системы в целом. Естественно, что нелинейности при этом сильно ограничиваются. Например, в частном случае Дюффинга, где

$$f(x) = 2\gamma > 0, \quad g(x) = k^2(x + \beta x^3), \quad e(t) = M \sin \omega t,$$

исследование резонансной кривой не является полным.

С другой стороны, наши способы позволяют определить затухание переходного процесса и могут быть использованы даже для оценки его характеристик времени перехода; хотя эти оценки вначале грубы, тем не менее они имеют перспективу практического применения.

В общей теории устойчивости (ср. п. 2.3) рассматривается дифференциальное уравнение (2.3.2) $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ для заданного возмущения $\boldsymbol{x}(t)$. На самом же деле исходным является не это уравнение в вариациях, а уравнение (2.3.1) $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)$ для процесса $\boldsymbol{p}(t)$ исследуемой динамической системы. Между (2.3.1) и (2.3.2) существует следующая связь:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \{\boldsymbol{F}[\boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{x}, t] - \boldsymbol{F}[\boldsymbol{p}(t), t]\}.$$

Так как аналитическое представление функции $\boldsymbol{p}(t)$, описывающей процесс, как правило, неизвестно, то явная зависимость функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t)$ от времени также неопределенна. Однако на основании свойств этой функции должна быть построена функция Ляпунова в качестве критерия устойчивости для уравнения (2.3.2).

Отсюда возникает новая проблема, которая может быть разрешена в следующем плане. Положим, что для невозмущенного движения $\boldsymbol{p}(t)$ ограничены те компоненты, изменение которых во времени описывается уравнением (2.3.2). Допустим, что $\boldsymbol{p}(t)$ включено в однородное семейство возмущенных движений $\boldsymbol{p}(t) + \boldsymbol{x}(t)$, обладающих общими границами названных компонент. Предположим, далее, что функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)$ относительно этих $\boldsymbol{p}$-компонент в области их изменения такова, что для (2.3.2) можно построить функцию Ляпунова возможно более простым образом. Естественно, что требуемые свойства функции $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)$ зависят от способа конструирования функции Ляпунова. Например, часто пробуют рассматривать систему $\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{p}, t)$ в некоторой $\boldsymbol{p}$-области как линейную или кусочно-линейную.

В общих чертах решение этой проблемы можно использовать следующим образом: данное уравнение (2.3.2) включается в некоторый класс уравнений, обладающих известной структурной устойчивостью и имеющих такой же характер устойчивости, как определенный представитель этого класса, исследуемый с помощью известных математических средств.

Последующие рассуждения относительно уравнения (1.1), отвечающие современному уровню исследований, не являются систематическими. Они сводятся к отдельным замечаниям.

Итак, рассмотрим обобщенное дифференциальное уравнение Льенара

$$x'' + f(x)x' + g(x) = e(t), \tag{6.1}$$

где

$$F(x)=\int_0^x f(s)\,ds, \quad G(x)=\int_0^x g(s)\,ds,$$

$$E(t)=\int_0^t e(\tau)\,d\tau,$$

или эквивалентные системы

$$x'=y, \quad y'=-f(x)y-g(x)+e(t) \tag{6.2}$$

и

$$x'=v-F(x), \quad v'=-g(x)+e(t). \tag{6.3}$$

Положим, что

a) $f(x)>0$ для всех x,

$$F(x)\operatorname{sgn} x\to\infty \quad \text{при} \quad |x|\to\infty;$$

b) $xg(x)>0$ при $x\neq 0$,

$$G(x)\to\infty \quad \text{при} \quad |x|\to\infty;$$

c) $|e(t)|\leqslant M$, $|E(t)|\leqslant M$ при $t\geqslant 0$;

тогда все решения системы (6.2) ограничены в пределе при $t\to+\infty$, т. е.

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,|x(t)|<A, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\,|y(t)|<B.$$

Это вытекает, например, из теоремы 5.4.3. На основании этого Рейтер [1] устанавливает следующую теорему о конвергентности.

Теорема 6.1. *Пусть $g(x)$ дважды дифференцируема при $|x|\leqslant A$ и вместе с условиями* a), b), c) *справедливы еще при $|x|\leqslant A$ следующие неравенства*:

$$\left.\begin{aligned} &0<2\gamma\leqslant f(x)\leqslant 2\gamma';\\ &k^2\leqslant g'(x)\leqslant k'^2;\\ &|g''(x)|\leqslant m(A)<\frac{2\gamma k^2}{B}\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

($m(A)=0$ *в частном случае, когда* $g(x)=x$). *Тогда система* (6.2) *вполне устойчива.*

Под этим подразумевается, что все решения системы ограничены и асимптотически устойчивы в целом.

Для доказательства, согласно Рейтеру [1], используем систему (6.3).

Сравним какое-нибудь решение $\{x(t), v(t)\}$ с другим решением $\{x(t)+X(t), v(t)+V(t)\}$ и ограничимся при этом промежутком времени, в течение которого рассматриваемые решения не покидают прямоугольник

$$R\{|x|\leqslant A,\ |v|\leqslant C=\max[F(A), -F(-A)]+B\}.$$

Для возмущений $\{X(t), V(t)\}$ получим систему дифференциальных уравнений

$$X' = V - \frac{F[x(t)+X] - F[x(t)]}{X} X \equiv V - \varphi(X, t) X,$$
$$V' = -\frac{g[x(t)+X] - g[x(t)]}{X} X \equiv -\psi(X, t) X, \tag{6.5}$$

где

$$2\gamma \leqslant \varphi(X, t) \leqslant 2\gamma', \quad k^2 \leqslant \psi(X, t) \leqslant k'^2.$$

Вычислим

$$\psi' \equiv \frac{\partial\psi}{\partial X} X' + \frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{g'[x(t)+X][x'(t)+X'] - g'[x(t)]x'(t)}{X} -$$
$$- \frac{g[x(t)+X] - g[x(t)]}{X^2} X' = \frac{x'(t)}{X}\{g'[x(t)+X] -$$
$$- g'[x(t)]\} - \frac{X'}{X^2}\{g[x(t)+X] - g[x(t)] - Xg'[x(t)+X]\} =$$
$$= x'(t) g''[x(t)+\vartheta X] - \frac{1}{2} X' g''[x(t)+\vartheta' X]$$
$$(0 < \vartheta, \ \vartheta' < 1).$$

Так как

$$|x'(t)| \leqslant B, \quad |X'| \leqslant 2B, \quad |g''(x)| \leqslant m(A),$$

то $|\psi'| \leqslant 2Bm(A)$.

Образуем теперь (равномерно малую) функцию

$$W(X, V, t) = \psi(X, t) X^2 + V^2 - 2\eta XV,$$

где $0 < \eta < k$, причем параметр η выберем так, что функция W относительно переменных X, V является положительно определенной:

$$W(X, V, t) \geqslant \frac{1}{2}\left[(1+k^2) - \sqrt{(1-k^2)^2 + 4\eta^2}\,(X^2+V^2)\right].$$

Вычислим ее полную производную по времени в силу системы (6.5)

$$W' \equiv \frac{\partial W}{\partial X} X' + \frac{\partial W}{\partial V} V' + \frac{\partial W}{\partial t} =$$
$$= \psi' X^2 + 2\psi(V - \varphi X) - 2\psi XV + 2\eta\psi X^2 - 2\eta V(V - \varphi X) =$$
$$= -(2\varphi\psi - \psi' - 2\eta\psi) X^2 + 2\eta\varphi XV - 2\eta V^2.$$

Отсюда справедливо равенство

$$W' + \eta W = -(2\varphi\psi - \psi' - 3\eta\psi) X^2 + 2\eta(\varphi - \eta) XV - \eta V^2,$$

где

$$2\varphi\psi - \psi' \geqslant 2[2\gamma k^2 - Bm(A)] \geqslant \varepsilon > 0.$$

Поэтому $W' + \eta W$ отрицательно полуопределенная, если величину η выбрать столь малой, что $\eta(\varphi - \eta)^2 \leqslant \varepsilon - 3\eta\psi$. Это будет иметь место, например, при $4\eta \leqslant \varepsilon/(\gamma'^2 + k'^2)$.

Так как теперь $W' \leqslant -\eta W$ отрицательно определенная, то существование функции $W(X, V, t)$ в силу основной теоремы теории устойчивости служит достаточным критерием асимптотической устойчивости тривиального решения $X = V = 0$ системы (6.5) и, соответственно, рассмотренного (невозмущенного) решения $\{x(t), v(t)\}$ системы (6.3). Областью притяжения этой системы (область устойчивости относительно начальных возмущений) является прямоугольник R, внутрь которого в конце концов входит каждое решение системы (6.3). Этим теорема доказана.

Другое доказательство дает Бхатия [1], редуцируя условия (6.4) к условию

$$m(A) < \frac{4\gamma k^2}{B}. \tag{6.6}$$

В качестве функции Ляпунова он использует выражение

$$W(X, V, t) = 2\int_0^X \psi(s, t)\, s\, ds + V^2 - 2\eta XV,$$

где параметр $\eta > 0$ берется достаточно малым.

Справедливы неравенства

$$k^2X^2 + V^2 - 2\eta XV \leqslant W(X, V, t) \leqslant k'^2X^2 + V^2 - 2\eta XV,$$

так что при $\eta < k$ функция W положительно определенная и равномерно малая.

Ее полная производная по времени в силу системы (6.5) есть

$$W' = 2\psi(X, t)\, XX' + 2\int_0^X \frac{\partial\psi(s, t)}{\partial t}\, s\, ds + 2VV' - 2\eta(XV' + X'V),$$

где

$$\frac{\partial\psi(s, t)}{\partial t}\, s = \{g'[x(t) + s] - g'[x(t)]\}\, x'(t)$$

и

$$\int_0^X \frac{\partial\psi(s, t)}{\partial t}\, s\, ds = x'(t)\{g[x(t) + X] - g[x(t)] -$$

$$- g'[x(t)]\, X\} = \frac{1}{2} x'(t)\, g''[x(t) + \vartheta X]\, X^2.$$

Таким образом, находим

$$-W' = (2\varphi\psi - x'\tilde{g}'' - 2\eta\psi)\, X^2 - 2\eta\varphi XV + 2\eta V^2 \geqslant$$

$$\geqslant (4\gamma k^2 - m(A)\, B - 2\eta k'^2)\, X^2 - 4\eta\gamma' |XV| + 2\eta V^2.$$

Квадратичная форма в правой части последнего неравенства положительно определенная при выполнении неравенств

$$4\gamma k^2 - m(A)B \geqslant \varepsilon > 0,$$
$$2\eta(\varepsilon - 2\eta k'^2) > 4\eta^2\gamma'^2.$$

Первое неравенство вытекает из (6.6), второе выполняется при $2\eta < \varepsilon/(\gamma'^2 + k'^2)$. Этим завершается доказательство теоремы.

Бхатия [1] доказал еще одну теорему о конвергентности, не требующую существования второй производной функции $g(x)$.

Теорема 6.2. *Если $g(x)$ дифференцируема при $|x| \leqslant A$ и, кроме условий* a), b), c), *имеют место неравенства*

$$0 < 2\gamma \leqslant f(x) \leqslant 2\gamma',$$
$$k^2 \leqslant g'(x) \leqslant k'^2, \quad k'^2 = k^2 + \varepsilon(\gamma, \gamma', k^2),$$

то система (6.2) *вполне устойчива.*

Величина разности $k'^2 - k^2 = \varepsilon(\gamma, \gamma', k^2)$ зависит от способа доказательства, и путем достаточно точных оценок можно добиться того, чтобы она не была весьма малой.

Для доказательства на этот раз возьмем положительно определенную функцию Ляпунова

$$W(X, Y) = 2G(X) + V^2 - 2\eta XV$$
$$(0 < \eta < k)$$

и вычислим ее полную производную:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}W' = &- g(X)[V - \varphi(X, t)X] + \psi(X, t)XV - \\ &- \eta\psi(X, t)X^2 + \eta V[V - \varphi(X, t)X] = \\ &= [g'(\vartheta X)\varphi(X, t) - \eta\psi(X, t)]X^2 + \\ &+ [\psi(X, t) - g'(\vartheta X) - \eta\varphi(X, t)]XV + \eta V^2 \geqslant \\ &\geqslant (2\gamma k^2 - \eta k'^2)X - (k'^2 - k^2 + 2\gamma'\eta)|XV| + \eta V^2. \end{aligned}$$

Квадратичная форма в правой части последнего неравенства будет положительно определенной, если

$$4\eta(2\gamma k^2 - \eta k'^2) > (k'^2 - k^2 + 2\eta\gamma')^2.$$

Чтобы обеспечить это условие, положим $k'^2 - k^2 = 2\lambda\eta$; отсюда получим

$$2\gamma k^2 - \eta(k^2 + 2\lambda\eta) > \eta(\lambda + \gamma')^2$$

и

$$\eta < \frac{2\gamma k^2}{(k^2 + 2\lambda\eta) + (\lambda + \gamma')^2} < \frac{\gamma k^2}{\mu},$$

где $2\mu = k^2 + (\lambda + \gamma')^2$.

Наконец, полагая $H = \{\sqrt{\mu^2 + 4\lambda\gamma k^2} - \mu\}/2\lambda$, будем иметь $\eta < H$.

Величину λ можно выбрать так, что отношение λ/μ станет максимальным; пусть при этом $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$. Несложное вычисление дает

$$\lambda_0 = \sqrt{k^2 + \gamma'^2}, \quad \mu_0 = \lambda_0(\gamma' + \lambda_0).$$

Таким образом, можно положить

$$\varepsilon(\gamma, \gamma', k) < \sqrt{\mu_0^2 + 4\lambda_0\gamma k^2} - \mu_0.$$

На основании рассуждений, связанных с теоремой 2.3.2, полученная функция Ляпунова обеспечивает экспоненциальное убывание возмущений, т. е.

$$\rho(t) \leqslant \varkappa\rho(t_0)\exp\{-(t - t_0)/T\},$$

где $\rho = \sqrt{X^2 + V^2}$, $\varkappa$ — некоторая положительная константа и $T = T(\gamma, \gamma', k, k')$.

Представляет практический интерес фактическое нахождение множителя $\varkappa$ и времени затухания T в зависимости от параметров системы γ, γ', k, k'. Однако это требует проведения дополнительных громоздких вычислений, от которых мы здесь откажемся, так как позднее эта проблема разрешается проще по способу Айзермана.

Сначала мы изложим один метод для решения проблемы ограниченности и проблемы устойчивости с помощью одной и той же функции Ляпунова. Он дает возможность (на основании п. 2.3) одновременно получить явные выражения оценок для решений, а также для их возмущений.

Теорема 6.3 (ср. Рейссиг [22]). *Пусть функции $f(x)$ и $e(t)$ непрерывны и, кроме того, удовлетворяют (по мере надобности) следующим условиям:*

a) $0 < k^2 \leqslant g(x)/x$;

b) $g(x)/x \leqslant k^2(1 + \tau|x|^\alpha)$, $\alpha \geqslant 0$;

c) $|[g(\bar{x}) - g(x)] - g(\bar{x} - x)| \leqslant \mu\varkappa(s)|\bar{x} - x|$ *при* $\bar{x}, x \in [-s, s]$;

d) $0 < 2\gamma \leqslant f(x) \leqslant 2(\gamma + \sigma)$;

e) $|f(\bar{x}) - f(x)| \leqslant \mu\varphi(s)|\bar{x} - x|$ *при* $\bar{x}, x \in [-s, s]$;

f) $|e(t)| \leqslant M$.

Тогда:

1. *При выполнении условий* a), d), f) *решения системы* (6.2) *ограничены при $t \to +\infty$ в том смысле, что*

$$r(t) \leqslant R \text{ для } t \geqslant t_0 + T(R_0), \tag{6.7}$$

где

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}, \quad x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0,$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \leqslant R_0,$$

иными словами, решения равномерно ограничены в пределе при $t \to +\infty$.

2. *Если, кроме* a), d), f), *выполняется условие* b), *то для* $r(t) \geqslant P$, $t \geqslant t_0$, *имеет место неравенство*

$$r(t) \leqslant \sqrt{c_2/c_1}\,\{R_0^{\alpha} - [\alpha c_3(t-t_0)]/[(\alpha+2)\,c_2]\}^{(\alpha+2)/(2\alpha)}, \quad \alpha > 0, \tag{6.8}$$

или

$$r(t) \leqslant \sqrt{c_2/c_1}\; R_0 \exp[-c_3(t-t_0)/(2c_2)], \quad \alpha = 0. \tag{6.9}$$

При этом значения c_i *зависят от параметров* k, τ, α, *а также от* γ *и* σ.

3. *При условиях* a) *и* c)—f), *а также при ограничении*

$$\mu \leqslant c_3/\{2\sqrt{1+c^2}\;[\varkappa(R_1) + 2R_1\varphi(R_1)]\}, \tag{6.10}$$

где значения c *и* R_1 *зависят от параметров системы, каждое решение* $\{x(t), y(t)\}$ *системы* (6.2) *асимптотически устойчиво в том смысле, что для соседних с ним решений* $\{x(t)+X(t), y(t)+Y(t)\}$ *при* $t \geqslant t_1 \geqslant t_0 + T(r_0)$ *и* $\rho_1 = \rho(t_1) \leqslant \delta(\varepsilon)$ *или при* $t \geqslant t_1 + \tau(\varepsilon)$ *и* $\rho_1 \leqslant \delta_1$ *имеет место неравенство*

$$\rho(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)} \leqslant \varepsilon. \tag{6.11}$$

Это значит, что рассматриваемое решение $\{x(t), y(t)\}$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

4. *Если, кроме того, выполняется и условие* b), *то существует экспоненциальная устойчивость*

$$\rho(t) \leqslant \sqrt{c_2/c_1}\;\rho_1 \exp[-c_3(t-t_1)/(2c_2)] \tag{6.12}$$

при $t \geqslant t_1$ *и* $0 \leqslant \rho_1 \leqslant \delta_1$.

Замечание. Условия a)—c) тривиальным образом выполняются для линейного дифференциального уравнения. Условия c) и e) выполняются, например, тогда, когда функции $f(x)$ и $g(x)$ являются полиномами:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i x^i, \quad f(x) = \sum_{i=0}^{m} f_i x^i.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы используем весьма простую функцию Ляпунова:

$$W(x, y) = 2cG(x) + 2xy + cy^2, \tag{6.13}$$

где, как всегда,

$$G(x) = \int_0^x g(s)\,ds, \quad c = (\gamma + \sigma + k)^2/(2\gamma k^2).$$

На основании a) и b) имеем

$$k^2x^2 \leqslant 2G(x) \leqslant k^2x^2\left(1 + \frac{2\tau}{\alpha+2}\,|x|^{\alpha}\right),$$

кроме того, выбор c обеспечивает выполнение неравенств

$$cf(x) - 1 \geqslant 2\gamma c - 1 > 0 \quad \text{(в силу условия d))},$$

$$4[g(x)/x][cf(x) - 1] - f^2(x) \geqslant 4k^2(2\gamma c - 1) - 4(\gamma + \sigma)^2 > 0$$

(в силу условий a) и d)),

$$2c^2G(x)/x^2 - 1 \geqslant c^2k^2 - 1 > 0 \quad \text{(в силу условия a))}.$$

Из уравнения

$$\begin{vmatrix} 2cG(x)/x^2 - \lambda & 1 \\ 1 & c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

находим его корни

$$\lambda_{1,2} = \frac{c}{2}\{2G(x)/x^2 + 1\} \mp \frac{1}{2}\sqrt{c^2\{2G(x)/x^2 - 1\}^2 + 4}.$$

Из условия a) имеем

$$\lambda_1 \geqslant \frac{c^2k^2 - 1}{c(k^2 + 1) + 1} = c_1 > 0 \text{ для всех } x;$$

на основании условия b) получаем

$$\lambda_2 \leqslant [c(k^2 + 1) + 1] + \frac{2ck^2\tau}{\alpha + 2}|x|^\alpha \leqslant \begin{cases} c_2r^\alpha & (r \geqslant 1), \\ c_2 & (r \leqslant 1), \end{cases}$$

где

$$c_2 = [c(k^2 + 1) + 1] + 2ck^2\tau/(\alpha + 2).$$

Полная производная по времени функции $W(x, y)$ в силу системы (6.2) имеет вид

$$\frac{dW}{dt} = -\Phi(x, y) + 2(x + cy)e(t),$$

где

$$\frac{1}{2}\Phi(x, y) = xg(x) + xyf(y) + [cf(x) - 1]y^2$$

и

$$|x + cy||e(t)| \leqslant \sqrt{1 + c^2}\, Mr \quad \text{(из условия } f\text{))}.$$

Для уравнения

$$\begin{vmatrix} 2g(x)/x - \mu & f(x) \\ f(x) & 2[cf(x) - 1] - \mu \end{vmatrix} = 0$$

находим его корни

$$\mu_{1,2} = \{g(x)/x + [cf(x) - 1]\} \mp \sqrt{\{g(x)/x - [cf(x) - 1]\}^2 + f^2(x)}.$$

Из условий a) и d) будем иметь

$$\mu_1 \geqslant 2c_3,$$

где

$$c_3 = \frac{k^2(2\gamma c - 1) - (\gamma + \sigma)^2}{k^2 + (\gamma + \sigma)(2c + 1) - 1} > 0.$$

Отсюда получаем

$$W(x, y) \geqslant c_1 r^2 \text{ для всех } x, y \text{ (согласно условию a)),}$$

$$W(x, y) \leqslant \begin{cases} c_2 r^{\alpha+2} & \text{при } r \geqslant 1, \\ c_2 r^2 & \text{при } r \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{(из условия b)),}$$

$$\frac{dW}{dt} \leqslant -c_3 r^2 \quad \text{при} \quad r \geqslant 2\sqrt{1+c^2}\, M/c_3 \text{ (на основании a), d) и f)).}$$

Наконец, положим $P = \max\{1, 2\sqrt{1+c^2}\, M/c_3\}$ и в условиях a), d), f) рассмотрим решение системы (6.2) при $R_0 \geqslant r_0 = r(t_0) \geqslant P$. Тогда можно доказать, что в промежутке $t \geqslant t_0$, где $r(t) \geqslant P$, выполнены неравенства

$$c_1 P^2 \leqslant c_1 r^2(t) \leqslant W[x(t), y(t)] \leqslant W(R_0) - c_3 P^2 (t - t_0), \quad (6.14)$$

где

$$W(R_0) = \max_{x^2+y^2 \leqslant R_0^2} W(x, y).$$

Таким образом,

$$t - t_0 \leqslant T(R_0) = \frac{c_1}{c_3}\left[\frac{W(R_0)}{c_1 P^2} - 1\right]. \quad (6.15)$$

Пусть теперь существует решение, для которого $r_0 < P$ и $r(t_1) = P$, причем в некотором промежутке $t \geqslant t_1 \geqslant t_0$ выполнено неравенство $r(t) \geqslant P$. Для этих значений t найдем

$$c_1 r^2(t) \leqslant W[x(t), y(t)] \leqslant W(P); \quad (6.16)$$

отсюда для всех $t \geqslant t_0$ получим

$$r(t) \leqslant R = \sqrt{\frac{W(P)}{c_1}}.$$

Если, кроме того, выполнено условие b), то можно принять

$$R = \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\, P^{1+\alpha/2}.$$

Отсюда

$$P = \left(R\sqrt{\frac{c_1}{c_2}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha/2}} = \left[\frac{W(P)}{c_2}\right]^{\frac{1}{2+\alpha}},$$

и, следовательно, учитывая (6.14), получим

$$r(t) \geqslant \left[\frac{W(P)}{c_2}\right]^{\frac{1}{2+\alpha}} \geqslant \left\{\frac{1}{c_2} W[x(t), y(t)]\right\}^{\frac{1}{2+\alpha}}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{dW}{dt} \leqslant -c_3 r^2, \quad r \geqslant \left(\frac{W}{c_2}\right)^{\frac{1}{2+\alpha}}$$

и, вследствие этого,

$$\frac{dW}{dt} \leqslant -c_3 \left(\frac{W}{c_2}\right)^{\frac{2}{2+\alpha}}.$$

Отсюда интегрированием получаем формулы (6.8) и (6.9). После того, как доказаны пункты 1 и 2 теоремы, для изучения устойчивости решения (движения) $\{x(t), y(t)\}$ составим дифференциальные уравнения для возмущения $\{X(t), Y(t)\}$:

$$X' = Y, \quad Y' = -g(X) - f(X)Y + p(X, Y, t), \tag{6.17}$$

где тождественно имеем

$$-p(X, Y, t) = \{(g[x(t) + X] - g[x(t)] - g(X)\} + \\ + \{f[x(t) + X] - f[x(t)]\} y(t) + \{f[x(t) + X] - f(X)\} Y.$$

На основании условий c) и e), предполагая, что

$$|x(t)| \leqslant R_1, \quad |X| \leqslant R_1, \quad |x(t) + X| \leqslant R_1, \quad |y(t)| \leqslant R_1, \quad |Y| \leqslant R_1, \\ |y(t) + Y| \leqslant R_1,$$

получим неравенство

$$|p(X, Y, t)| \leqslant \mu\varkappa(R_1)|X| + \mu\varphi(R_1)|X| R_1 + \\ + \mu\varphi(R_1) R_1 |Y| \leqslant \mu\{\varkappa(R_1) + 2R_1\varphi(R_1)\}\rho, \tag{6.18}$$

где $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

Мы находимся в условиях пункта 1 теоремы. Поэтому можно ввести новое подходящее время $t_1 \geqslant t_0 + T(r_0)$ такое, что $r(t) \leqslant R$ при $t > t_1$. Кроме того, считая возмущения сравнительно малыми, например $\rho \leqslant \varepsilon_1 \leqslant 1$, можно положить $R_1 = R + \varepsilon_1$.

Далее используем ту же функцию Ляпунова $W(X, Y)$, которую на основании условия a) можно оценить следующим образом:

$$W(X, Y) \geqslant c_1\rho^2.$$

В то же время на основании условия b) для $\rho \leqslant 1$ будем иметь

$$W(X, Y) \leqslant c_2\rho^2. \tag{6.19}$$

Полная производная по времени в силу (6.17) по условиям a) и d) допускает для всех X, Y оценку

$$\frac{dW}{dt} \leqslant -c_3\rho^2, \tag{6.20}$$

если позаботиться о том, чтобы было

$$\rho \geqslant 2\sqrt{1 + c^2}\max|p(X, Y, t)|/c_2.$$

Это может быть обеспечено в силу условия (6.10), наложенного на параметры системы.

Теперь возьмем произвольное положительное число $\varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, где ε_1 соответствует границе R в доказательстве ограниченности, и, кроме того, определим $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (аналогично P) условием $\sqrt{W(\delta)/c_1} = \varepsilon$.

Тогда, как и выше, получим, что из неравенства $\rho_1 = \rho(t_1) \leqslant \delta$ следует неравенство $\rho(t) \leqslant \varepsilon$ при $t \geqslant t_1$.

Затем положим $\delta(\varepsilon_1) = \delta_1$ (по аналогии с R_0) и рассмотрим всевозможные возмущения, определяемые системой (6.17) при $\rho_1 \leqslant \delta_1$. Для них $\rho(t) \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ при $t \geqslant t_1 + \tau(\varepsilon)$, если, аналогично (6.15), принять

$$\tau(\varepsilon) = \frac{c_1}{c_2}\left[\frac{1}{c_1\delta^2} W(\delta_1) - 1\right].$$

Если, кроме того, выполняется и условие b), то можно для $\rho_1 \leqslant \delta_1$ использовать неравенство (6.19) и на основании предыдущих вычислений установить формулу (6.12).

Этим заканчивается доказательство теоремы. Заметим, что оно основано прежде всего на совпадении видов дифференциальных уравнений (6.2) и (6.17) для движения и возмущения.

Изложим способ оценки времени переходного процесса, основанный на идее Айзермана. Этот способ может быть также применен к обобщенным типам уравнений, причем на систему (6.3) налагаются следующие условия:

a) $k^2 \leqslant g'(x) \leqslant k'^2$;

b) $0 < 2\gamma \leqslant f(x) = F'(x) \leqslant 2\gamma'$;

c) $|e(t)| \leqslant M$, $|E(t)| \leqslant M$ при $t \geqslant 0$.

Из первых двух условий следует, что нелинейные члены $g(x)$ и $F(x)$ системы заключены соответственно между некоторыми линейными функциями. В дальнейшем конструируется линейная система сравнения с некоторой определенной областью изменения ее коэффициентов.

Уравнения возмущений для системы (6.3), вместо (6.5), запишем в форме

$$\begin{aligned} X' &= V - 2\gamma[1 + \sigma(X, t)]X, \\ V' &= -k^2[1 + \tau(X, t)]X, \end{aligned} \tag{6.21}$$

где

$$0 \leqslant \sigma(X, t) \leqslant \frac{\gamma}{\gamma} - 1, \quad 0 \leqslant \tau(X, t) \leqslant \left(\frac{k'}{k}\right)^2 - 1.$$

Теперь для установления асимптотической устойчивости линейной системы

$$X' = V - 2\gamma X, \quad V' = -k^2 X \tag{6.22}$$

построим функцию Ляпунова в виде положительно определенной квадратичной формы

$$W = AX^2 + 2BXV + CV^2, \tag{6.23}$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, причем подберем их так, чтобы они обеспечивали также асимптотическую устойчивость нелинейной системы (6.21). Это приводит к определенным ограничениям для параметров γ, γ', k, k', надлежащим выбором которых можно добиться того, чтобы нелинейная система (6.21) была бы вполне устойчивой.

Чтобы построить форму $W(X, V)$, для ее полной производной по времени в силу системы (6.22) выберем по возможности простую отрицательно определенную квадратическую форму, например:

$$\frac{dW}{dt} = -4\gamma k^2 (X^2 + Y^2). \tag{6.24}$$

Тогда

$$A = k^2(1 + k^2), \quad B = -2\gamma k^2, \quad C = 1 + k^2 + 4\gamma^2,$$

и, следовательно, матрица $\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$ имеет собственные значения

$$\lambda_i = 2qk^2 [1 + (-1)^i \sqrt{1 - 1/q}], \quad i = 1, 2,$$

где

$$q = \frac{\gamma^2}{k^2} + \left(\frac{1 + k^2}{2k}\right)^2.$$

Отсюда вытекает, что выполнены неравенства

$$\lambda_1 (X^2 + V^2) \leqslant W(X, V) \leqslant \lambda_2 (X^2 + V^2). \tag{6.25}$$

Полная производная по времени функции $W(X, V)$ в силу нелинейной системы (6.21) равна

$$\frac{dW}{dt} = -4\gamma k^2 [1 + (1 + k^2)\sigma - k^2\tau] X^2 - \\ - 2k^2 [(1 + k^2 + 4\gamma^2)\tau - 4\gamma^2\sigma] XV - 4\gamma k^2 V^2.$$

Если потребовать, чтобы было обеспечено неравенство

$$\frac{dW}{dt} \leqslant -4\gamma^2 k^2 \vartheta (X^2 + Y^2), \quad 0 \leqslant \vartheta \leqslant 1, \tag{6.26}$$

то получим следующее условие для параметров σ и τ:

$$16\gamma^2 (1 - \vartheta) [(1 - \vartheta) + (1 + k^2)\sigma - k^2\tau] \geqslant [(1 + k^2 + 4\gamma^2)\tau - 4\gamma^2\sigma]^2.$$

Последнее неравенство на плоскости $\sigma\tau$ выполняется на некоторой параболе Γ_ϑ и в ее внутренней области Ω_ϑ. Параметр ϑ определяет семейство вложенных друг в друга парабол. Из них Γ_0 является внешней параболой, а парабола Γ_1 (представляющая собой совокупность двух полупрямых, выходящих из начала координат O) — внутренней (вырожденной) параболой семейства. Внутри Γ_0 имеем асимптотическую устойчивость, в то время как вне Γ_0 отсутствует устойчивость.

Для $(\sigma, \tau) \in \overline{\Omega}_\vartheta = \Omega_\vartheta + \Gamma_\vartheta$ возмущения $\{X(t), V(t)\}$ допускают экспоненциальную оценку. А именно, при $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$ на основании рассуждений из п. 2.3 следует, что

$$\rho(t) \leqslant \varkappa \rho_0 \exp[-(t - t_0)/T], \tag{6.27}$$

где

$$\varkappa = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \sqrt{q} + \sqrt{q - 1}, \quad T = \frac{\sqrt{q}(\sqrt{q} + \sqrt{q - 1})}{\gamma\vartheta}.$$

Заметим, что множитель $\varkappa$ не зависит от ϑ, тогда как время затухания T обратно пропорционально ϑ. Параболы Γ_ϑ можно рассматривать как кривые постоянного времени затухания.

Пусть задано ϑ и на плоскости $\sigma\tau$ построен прямоугольник $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$. Тогда для возмущения можно получить неравенство в форме (6.27), если функции $f(h)$ и $g(x)$, вместо условий a) и b), подчинить следующим условиям:

a′) $k^2(1+\tau_1) \leqslant g'(x) \leqslant k^2(1+\tau_2)$;

b′) $2\gamma(1+\sigma_1) \leqslant f(x) \leqslant 2\gamma(1+\sigma_2)$.

Условия a) и b) будут иметь место, если выбранный прямоугольник примыкает к координатным осям, т. е.

$$\sigma_1 = \tau_1 = 0, \quad 2\gamma' = 2\gamma(1+\sigma_2), \quad k'^2 = k^2(1+\tau_2).$$

Этот способ дает возможность получить числовые оценки, связанные с решением вопроса о переходных процессах.

Приведенный выше метод, основанный на исследовании первого приближения системы, является широко распространенным методом анализа устойчивости системы. Этот метод при некоторой модификации рассуждений Опяля [6] пригоден также для констатации асимптотической или экспоненциальной устойчивости системы в целом (в большом). Идеи Опяля, которые в известном смысле связаны с идеями Зейферта [1] (ср. теорему 2.9.6), мы изложим для общей системы

$$x' = f(x, y, t), \quad y' = g(x, y, t), \tag{6.28}$$

где правые части f, g — ограниченные или периодические по t функции и обладают непрерывными частными производными по x и y.

Допустим, что система (6.28) в качестве предельной граничной области ее решений допускает на фазовой плоскости xy некоторую область G. Пусть G ограничена ориентированным простым замкнутым контуром W, причем все выходящие из W фазовые траектории входят в G. Возникает вопрос: при каких условиях траектории системы сближаются при $t \to \infty$ по экспоненциальному закону времени? Иными словами, если $\{x_0(t), y_0(t)\}$ и $\{x_1(t), y_1(t)\}$ — два любых решения из семейства решений $\{L_W\}$, заключенных при $t \geqslant t_0$ внутри W, то отыскивается достаточный признак для наличия следующего соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 0, \tag{6.29}$$

где

$$d(t) = \{[x_0(t) - x_1(t)]^2 + [y_0(t) - y_1(t)]^2\}^{1/2},$$

причем

$$d(t) \leqslant \varkappa d_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{T}\right), \quad d_0 = d(t_0). \tag{6.30}$$

Константы $\varkappa \geqslant 1$ и $T > 0$ должны быть одними и теми же в области G.

Для решения проблемы, согласно Опялю [6], воспользуемся следующим геометрическим представлением. В пространстве движений xyt рассмотрим непрерывное отображение образа G_t области $G_{t_0}=G$ на плоскость $t=t_0$ $(t \geqslant t_0)$, индуцируемое решениями системы (6.28). Это отображение представляет собой проекцию множества G_t на плоскость $t=t_0$, содержащую множество G_{t_0}. Начальные точки $P_{00}(x_{00}, y_{00})$ и $P_{10}(x_{10}, y_{10})$ обоих рассматриваемых решений в плоскости $t=t_0$ представим себе соединенными дугой γ_0 конечной длины l_0, лежащей в G_{t_0}. Пусть эта дуга имеет параметрическое представление

$$\{x(s, t_0),\ y(s, t_0)\},\ \text{где}\ 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

причем

$$x(0, t_0)=x_{00};\quad y(0, t_0)=y_{00},\quad x(1, t_0)=x_{10},\quad y(1, t_0)=y_{10},$$

и пусть функции $x(s, t_0)$, $y(s, t_0)$ являются кусочно-дифференцируемыми по s. Рассмотрим решение L_s:

$$\{x(t, P_{s0}, t_0),\quad y(t, P_{s0}, t_0)\}$$

с начальными точками $P_{s0}(x_{s0}, y_{s0})$, где

$$x_{s0}=x(s, t_0),\ y_{s0}=y(s, t_0)\ (0 \leqslant s \leqslant 1).$$

Это решение индуцирует в области G_t образ γ_t прообраза γ_0 с длиной дуги $l(t)$, что можно записать в форме

$$x=x(s, t),\ y=y(s, t),$$

где s — переменная, а t — параметр. В то же время для дуги L_s t рассматривается как переменная, а s как параметр.

Вычислим

$$l(t)=\int_0^1 \left\{\left[\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}\right]^2+\left[\frac{\partial y(s, t)}{\partial s}\right]^2\right\}^{1/2} ds \geqslant d(t).$$

Если равномерно по s выполнены соотношения

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}=\lim_{t\to\infty}\frac{\partial y(s, t)}{\partial s}=0,$$

то отсюда получим соотношение (6.29).

Если же

$$\left\{\left[\frac{\partial x(s, t)}{\partial s}\right]^2+\left[\frac{\partial y(s, t)}{\partial s}\right]^2\right\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa\left\{\left[\frac{\partial x(s, t_0)}{\partial s}\right]^2+\left[\frac{\partial y(s, t_0)}{\partial s}\right]^2\right\}^{1/2} \exp\left(-\frac{t-t_0}{T}\right)$$

с константами $\varkappa$ и T, не зависящими от s, то будем иметь соотношение (6.30).

Как известно, производные по параметрам

$$X(s, t) = \frac{\partial x(s, t)}{\partial s}, \quad Y(s, t) = \frac{\partial y(s, t)}{\partial s}$$

решений системы (6.28) удовлетворяют относительно переменной t однородной линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial s} = f_x \frac{\partial x}{\partial s} + f_y \frac{\partial y}{\partial s},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial s} = g_x \frac{\partial x}{\partial s} + g_y \frac{\partial y}{\partial s}.$$

Отсюда получаем линейную систему

$$X' = f_x X + f_y Y, \quad Y' = g_x X + g_y Y,$$

где частные производные функций f и g зависят от переменных $x(s, t)$, $y(s, t)$ и t и, вообще говоря, представляют собой нестационарные функции.

Учитывая, что оба решения системы (6.28) были взяты из многообразия $\{L_W\}$ произвольно, получим следующий ответ на сформулированный выше вопрос об устойчивости.

Если для нелинейной системы (6.28) линеаризованная система в вариациях

$$X' = f_x X + f_y Y, \quad Y' = g_x X + g_y Y \tag{6.31}$$

на многообразии решений $\{L_W\}$ равномерно относительно всего класса асимптотически или экспоненциально устойчива, то в $\{L_W\}$ существует асимптотическая или, соответственно, экспоненциальная устойчивость (в большом).

Так как коэффициенты системы (6.31) не заданы явно, а известна лишь область изменения их, определяемая множеством G, то предположение о равномерности структуры класса не является существенным ограничением метода построения критериев устойчивости для класса систем (6.31).

Простой критерий экспоненциальной устойчивости получается, когда в качестве функции Ляпунова для системы (6.31) берут квадратичную форму (ср. Опяль [6])

$$W(X, Y, t) = L(x, y) X^2 + 2M(x, y) XY + N(x, y) Y^2. \tag{6.32}$$

При этом коэффициенты L, M, N должны быть непрерывно дифференцируемыми и на замкнутой области $\bar{G}$ должно быть выполнено условие положительной определенности

$$L(x, y) > 0, \quad L(x, y) N(x, y) - M^2(x, y) > 0. \tag{6.33}$$

Вычислим с помощью (6.28) и (6.31) полную производную по времени от W:

$$\frac{\partial}{\partial t} W(X, Y, t) = \left(\frac{\partial L}{\partial x} f + \frac{\partial L}{\partial y} g\right) X^2 + 2\left(\frac{\partial M}{\partial x} f + \frac{\partial M}{\partial y} g\right) XY + \\ + \left(\frac{\partial N}{\partial x} f + \frac{\partial N}{\partial y} g\right) Y^2 + 2(LX + MY)(f_x X + f_y Y) + \\ + 2(MX + NY)(g_x X + g_y Y) = \\ = -[P(x, y, t) X^2 + 2Q(x, y, t) XY + R(x, y, t) Y^2]. \quad (6.34)$$

Требуется, чтобы при $t \geqslant t_0$ на G были равномерно выполнены неравенства

$$P(x, y, t) > 0, \ P(x, y, t) R(x, y, t) - Q^2(x, y, t) > 0. \quad (6.35)$$

Тогда существуют оценки вида (2.3.8) с функциями $\varphi_i(r) = a_i r^2$ и тем самым обеспечена экспоненциальная устойчивость.

Применим изложенный выше способ к уравнению (6.1), эквивалентному системе (6.3) (ср. Опяль [7]), причем, как и в теореме 6.1, предположим, что в плоскости xy имеется предельное множество решений (относительная граница) $G \subset \subset \{|x| \leqslant A, \ |y| \leqslant B\}$ и выполнены условия:

$$0 < 2\gamma \leqslant f(x) \leqslant 2\gamma', \ k^2 \leqslant g'(x) \leqslant k'^2,$$

$$|g''(x)| \leqslant m(A) = 4\gamma k^2 (1 - \vartheta)/B \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Соответствующие системе (6.3) линеаризованные уравнения в вариациях имеют вид

$$X' = -f[x(t)] X + V, \ V' = -g'[x(t)] X. \quad (6.36)$$

В квадратичной форме (6.32) выберем

$$L(x, v) = g'(x), \ M(x, v) = -\eta < 0, \ N(x, v) = 1,$$

причем чтобы обеспечить выполнение неравенств (6.33), нужно принять, что $\eta < k$.

Для коэффициентов формы (6.34) получим

$$P(x, v, t) = -g''(x) x' + 2g'(x) f(x) - 2\eta g'(x),$$

$$Q(x, v, t) = -2\eta f(x),$$

$$R(x, v, t) = 2\eta;$$

отсюда неравенства (6.35) сведутся к следующему неравенству:

$$-g''(x) x' + 2g'(x) f(x) - 2\eta g'(x) > 2\eta f^2(x). \quad (6.37)$$

Последнее неравенство будет выполнено, если

$$2\eta\,[f^2(x)+g'(x)]\leqslant 2\eta\left(4\gamma'^2+k'^2\right)<4\gamma k^2\vartheta=$$
$$=4\gamma k^2\left[1-\frac{m(A)B}{4\gamma k^2}\right]\leqslant 2f(x)\,g'(x)-|g''(x)|\,|x'|,$$

т. е. если $\eta<2\gamma k^2\vartheta/(4\gamma'^2+k'^2)$.

Полагая в (6.37) $x'=v-F(x)$, получим, что для существования экспоненциальной устойчивости системы (6.3) достаточно выполнения в расширенном прямоугольнике

$$\{|x|\leqslant A,\ |v|\leqslant C=B+\max[F(A),\ -F(-A)]\},$$

содержащем предельное множество решений G (ср. с теоремой 5.3.12), следующих неравенств:

$$f(x)>0,\ g'(x)>0,$$
$$|g''(x)|\,|v-F(x)|<2f(x)\,g'(x).$$

В заключение рассмотрим еще один метод исследования устойчивости, состоящий в том, что данная нелинейная система дифференциальных уравнений сравнивается с некоторой кусочно-линейной, но разрывной системой, которая удовлетворяет поставленным требованиям, причем из ее устойчивости следует устойчивость нелинейной системы. Этот способ особенно удобен для систем второго порядка, где речь идет о весьма наглядном сравнении траекторий на фазовой плоскости. Метод позволяет доказать ограниченность и устойчивость нелинейной системы (ср. Рейссиг 20]) и даже дает возможность количественных оценок переходных процессов (ср. Рейссиг [19]).

Отметим, что в этом случае мажоранта решений строится не в форме непрерывно затухающей экспоненциальной функции, а в виде некоторой ступенчатой функции с экспоненциально уменьшающейся высотой.

Для наглядности идею метода мы изложим на примере уравнения вида (6.1), которое можно заменить эквивалентной системой

$$x'=z-F(x)+E(t),\ z'=-g(x). \tag{6.38}$$

Положим, что функции $f(x)$, $g(x)$ и $e(t)$ непрерывны всюду и удовлетворяют следующим условиям:

a) $0<k^2\leqslant\dfrac{g(x_1)-g(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant k'^2$ при $x_1\neq x_2$;

b) $0<2\gamma\leqslant f(x)$;

c) $|E(t)|\leqslant M$ при $t\geqslant 0$.

При этом, не ограничивая общности рассуждений, можно принять, что $\gamma\leqslant k'$.

Наш метод доказательства устойчивости и ограниченности требует некоторых вспомогательных рассмотрений.