Дж. САНСОНЕ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

I

Дж. САНСОНЕ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТОМ I

Перевод с итальянского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

с предисловием
В. В. НЕМЫЦКОГО

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва — 1953

G. SANSONE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL CAMPO REALE

Parte Prima

Seconda Edizione

BOLOGNA
1948

ПРЕДИСЛОВИЕ

Два тома книги Дж. Сансоне весьма богаты по своему содержанию. В них нашли достаточно полное освещение такие вопросы, как краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, асимптотическое поведение решений линейных уравнений, теоремы существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости решений и многие другие. Пожалуй, главной темой книги являются весьма важные для приложений математики краевые задачи и непосредственно связанные с ними задачи об асимптотическом поведении решений на бесконечности. В различных главах первого и второго томов рассмотрены всевозможные постановки линейных и нелинейных краевых задач и разобраны самые разнообразные методы их решения.

Автор книги всюду, где это возможно, иллюстрирует общие теоремы на примерах применений к специальным функциям, доводя в этих вопросах выкладки до окончательных формул. Последние три главы второго тома (около трехсот страниц) посвящены обстоятельному изложению чисто прикладных вопросов — операционного исчисления, графических и вычислительных методов решения дифференциальных уравнений, а также вопросов теории нелинейных колебаний. Наличие этих глав делает книгу Сансоне полезной не только для математиков, но и для инженеров и научных работников технических институтов, которым приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями.

Вместе с тем читателю бросается в глаза следующий серьезный недостаток книги Сансоне. Автор счел нужным подробно, вплоть до маловажных деталей, разработать темы, развивавшиеся итальянскими математиками, и почти совсем не рассмотрел вопросов, в решении которых итальянцы не принимали участия. К таким забытым темам относится, например, изучение структуры семейства интегральных кривых около особой точки, которому уделено буквально несколько страниц. Не упоминается даже такое важнейшее понятие, как характеристические числа А. М. Ляпунова, хотя асимптотическое поведение решений линейных уравнений второго порядка на бесконечности представлено довольно подробно. Можно указать и много других примеров такого рода.

Вследствие этого недостатка сочинение Сансоне ни в какой мере не может служить единственной книгой для желающих ознакомиться с современным состоянием теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Мы указываем основной список литературы, изучение которой может заполнить этот важный пробел:

1. Биркгоф Дж. Д., Динамические системы, М.—Л., 1941;
2. Голубев В. В., Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, М.—Л., 1952;
3. Камке Э., Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., 1950;
4. Малкин И. Г., Теория устойчивости движения, М.—Л., 1952;
5. Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, 2-е изд., М.—Л., 1949;
6. Айнс Э. А., Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

Кроме того, при переводе ссылки автора на популярную учебную и обзорную литературу всюду заменены соответствующими ссылками на литературу, распространенную среди советского читателя.

В. Немыцкий

Глава I

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ НИХ

§ 1. Нормальные системы

1. Определения. а) *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется любое соотношение, связывающее независимую переменную x, функцию $y(x)$ этой переменной и производные функции $y(x)$ до некоторого порядка включительно. Обыкновенное дифференциальное уравнение может быть приведено к виду

$$F\left(x;\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^m y}{dx^m}\right)=0. \tag{1}$$

Число m, т. е. наивысший из порядков производных, входящих в (1), называется *порядком* уравнения.

Например, уравнение

$$y'+xy-e^{-\frac{x^2}{2}}=0 \tag{2}$$

является уравнением первого порядка, а уравнение

$$y+y''-x=0 \tag{3}$$

— второго порядка.

б) Пусть, вообще, даны m соотношений, связывающих независимую переменную x, m функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$ этой переменной и их производные до некоторого порядка включительно

$$F_i(x;\, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(r_1)};\, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(r_2)};\, \ldots;\, y_m, y_m', y_m'', \ldots, y_m^{(r_m)})=0 \tag{4}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Тогда говорят, что эти уравнения образуют *систему обыкновенных дифференциальных уравнений*, или проще, — *систему дифференциальных уравнений*.

в) Любая система функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, $\ldots$, $y_m(x)$, удовлетворяющая уравнениям (4), называется *частным интегралом* или *решением* этой системы уравнений; *проинтегрировать* систему уравнений означает найти все ее решения.

Легко проверить, что, какое бы значение мы ни придали постоянной c_1, функция $y=e^{-\frac{x^2}{2}}(c_1+x)$ будет решением уравнения (2); точно так же, какие бы значения мы ни придали постоянным c_1 и c_2, функция $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x$ будет решением уравнения (3); очевидно также, что при любых значениях постоянных c_1, c_2, c_3 функции

$$\left.\begin{aligned} y &= (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) e^x, \\ z &= [(c_1 + c_2) + (c_2 + 2c_3) x + c_3 x^2] e^x, \\ u &= [(c_1 + 2c_2 + 2c_3) + (c_2 + 4c_3) x + c_3 x^2] e^x \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

удовлетворяют системе уравнений

$$y' - z = 0, \quad z' - u = 0, \quad u' - 3u + 3z - y = 0 \tag{6}$$ [1].

2. Порядок системы дифференциальных уравнений. а) Две системы дифференциальных уравнений называются *эквивалентными*, если они обладают одними и теми же решениями.

б) *Всякая система дифференциальных уравнений эквивалентна системе, в которую входят лишь первые производные искомых функций.*

В самом деле, система (4) эквивалентна системе

$$F_i\left(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(r_1-1)},\ \frac{dy_1^{(r_1-1)}}{dx};\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(r_2-1)},\ \frac{dy_2^{(r_2-1)}}{dx};\ \ldots \right.$$
$$\left. \ldots;\ y_m,\ y_m',\ \ldots,\ y_m^{(r_m-1)},\ \frac{dy_m^{(r_m-1)}}{dx}\right) = 0,$$
$$\frac{dy_k}{dx} = y_k', \quad \frac{dy_k'}{dx} = y_k'', \quad \ldots, \quad \frac{dy_k^{(r_k-2)}}{dx} = y_k^{(r_k-1)}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

состоящей из $m + (r_1 - 1) + (r_2 - 1) + \ldots + (r_m - 1) = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ уравнений относительно неизвестных функций y_k, y_k', y_k'', $\ldots$, $y_k^{(r_k-1)}$ (число которых также равно $r_1 + r_2 + \ldots + r_m$) и их производных первого порядка.

---

[1]) Дифференциальные уравнения изучались впервые Лейбницем и Ньютоном. Эти ученые заложили основы анализа бесконечно малых, открыв взаимосвязь операций дифференцирования и интегрирования, и проинтегрировали простейшее дифференциальное уравнение $y' = f(x)$.

Лейбниц в 1675 г. решил уравнение $yy' = b/y$, сведя его к виду $bdx = y^2 dy$ (см. Лейбниц [1], стр. 161).

Решение уравнения $y^n = f(x)$, определенное с точностью до многочлена $(n-1)$-й степени, было дано Ньютоном в его работе Tractatus de quadratura curvarum, написанной в 1676 г. и опубликованной в качестве приложения к его „Оптике" в 1704 г.

Поэтому мы можем, не теряя общности, считать, что система дифференциальных уравнений имеет вид

$$F_i\left(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots,\ \frac{dy_m}{dx}\right)=0 \tag{7}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Натуральное число m называется *порядком* системы (7)[1].

3. Нормальные системы. а) Предположим, что функции F_i, рассматриваемые как функции своих аргументов, непрерывны вместе с частными производными первого порядка в „прямоугольном параллелепипеде“ R_{2m+1}[2]) с центром в точке $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ y_1'^0,\ y_2'^0,\ \ldots,\ \ldots,\ y_m'^0)$, координаты которой удовлетворяют системе

$$F_i(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ y_1'^0,\ y_2'^0,\ \ldots,\ y_m'^0)=0 \tag{8}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и что в R_{2m+1} *якобиан* $\dfrac{\partial(F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_m)}{\partial(y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_m')}$ отличен от нуля. Тогда по теореме о системе неявных функций[3]) найдется прямоугольный параллелепипед R_{m+1} с центром в точке $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0)$, в котором система (8) может быть разрешена относительно всех m производных $y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_m'$ и записана тем самым в виде

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{9}$$

где функции f_i непрерывны и дифференцируемы по всем аргументам в любой точке R_{m+1}. Системы вида (9) называются нормальными системами (см. гл. VIII, § 8, п. 2).

б) Заметим, что дифференциальнсе уравнение m-го порядка, имеющее вид

$$\frac{d^my}{dx^m}=f(x;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(m-1)}), \tag{10}$$

эквивалентно нормальной системе $(y=y_1)$,

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2;\ \ldots,\ \frac{dy_{m-1}}{dx}=y_m;\ \frac{dy_m}{dx}=f(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m).$$

Поэтому уравнение (10) называют нормальной формой дифференциального уравнения m-го порядка.

[1]) Этот термин не общепринят. В советской литературе по дифференциальным уравнениям система, подобная (7), называется системой m дифференциальных уравнений первого порядка. — *Прим. ред.*

[2]) Здесь, как и в дальнейшем, символом R_m обозначается (если явно не оговорено противное) прямоугольная область в евклидовом пространстве m измерений, состоящая из точек $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m)$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_i-a_i|\leqslant b_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ $(b>0)$. Точка $(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m)$ называется *центром* R_m, а постоянные $2b_1,\ 2b_2,\ \ldots,\ 2b_m$ — *измерениями* R_m.

[3]) См. Фихтенгольц [1], т. 1, стр. 518. — *Прим. ред.*

§ 2. Получение систем обыкновенных дифференциальных уравнений путем исключения произвольных постоянных

1. Системы дифференциальных уравнений, полученные путем исключения произвольных постоянных. Пусть даны m функций $\varphi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ от $2m+1$ независимых переменных, непрерывных вместе со своими частными производными первого порядка, в прямоугольном параллелепипеде R_{2m+1} с центром $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ c_1^0,\ c_2^0,\ \ldots,\ c_m^0)$, и пусть в R_{2m+1} якобиан $\frac{\partial(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_m)}{\partial(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)}$ отличен от нуля.

Предположим, что

$$\varphi_i(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ c_1^0,\ c_2^0,\ \ldots,\ c_m^0)=0\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{1}$$

Тогда, в силу теоремы о системе неявных функций, найдутся m непрерывных и дифференцируемых функций

$$y_k(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2}$$

тождественно удовлетворяющих системе уравнений

$$\varphi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)=0, \tag{3}$$

когда x изменяется в отрезке I с центром в x_0, а $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ — в прямоугольном параллелепипеде R_m с центром в $(c_1^0,\ c_2^0,\ \ldots,\ c_m^0)$.

Дифференцируя по правилу дифференцирования сложной функции соотношение (3) по переменной x, получим систему равенств

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_1}y_1'+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_2}y_2'+\ldots+\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_m}y_m'=0\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{4}$$

которым также должны тождественно удовлетворять функции (2), когда x изменяется в I, а $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ в R_m.

Заметим, что левые части уравнений систем (3), (4) определены для любой точки $(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$, принадлежащей R_{2m+1}, и любых значений $y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_m'$. Положим

$$y_k'^0=\left[\frac{dy_k(x;\ c_1^0,\ c_2^0,\ \ldots,\ c_m^0)}{dx}\right]_{x=x^0}.$$

Может случиться, что среди $2m$ уравнений систем (3), (4) найдутся m уравнений, из которых возможно однозначно определить $c_1,\ c_2,\ldots,c_m$, как функции от $x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ y_1',\ y_2',\ \ldots,\ y_m'$ в прямоугольнике $\overline{R_{2m+1}}$ с центром в точке $(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0;\ y_1'^0,\ y_2'^0,\ldots,y_m'^0)$, координаты которой удовлетворяют соотношениям

$$c_k(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ y_1'^0,\ y_2'^0,\ \ldots,\ y_m'^0)=c_k^0\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Подставляя тогда полученные для $c_1, c_2, \ldots, c_m$ выражения в остальные m уравнений, мы получим систему дифференциальных уравнений вида

$$F_i\left(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx},\ \ldots,\ \frac{dy_m}{dx}\right)=0\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \quad (5)$$

Можно найти такой отрезок $\overline{I}$ с центром x^0, лежащий в I, и такой прямоугольный параллелепипед $\overline{R_m}$ с центром в $(c_1^0, c_2^0, \ldots, c_m^0)$, лежащий в R_m, что, когда x изменяется в $\overline{I}$, а $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$ — в $\overline{R_m}$, точка с координатами

$$\left(x;\ y_1(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m),\ \ldots,\ y_m(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m);\ \frac{dy_1(x;\ c_1, c_2, \ldots, c_m)}{dx},\ \ldots \right.$$
$$\left. \ldots,\ \frac{dy_m(x;\ c_1, c_2, \ldots, c_m)}{dx}\right)$$

принадлежит прямоугольному параллелепипеду $\overline{R_{2m+1}}$, а m функций (2) удовлетворяют системе (5).

Когда мы выводили посредством дифференцирования систему (4) из системы (3), величины $c_1, c_2, \ldots, c_m$ рассматривались нами как *постоянные*; поэтому говорят, что система дифференциальных уравнений (5), полученная путем исключения $c_1, c_2, \ldots, c_m$ из (3) и (4), является *результатом исключения m произвольных постоянных*.

2. Обратная задача. Заметим, что m функций (2) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (5), причем каждая из них зависит от m постоянных величин $c_1, c_2, \ldots, c_m$, которые могут быть выбраны произвольным образом, лишь бы точка $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ принадлежала $\overline{R_m}$; естественно поэтому поставить вопрос: *дана система дифференциальных уравнений вида* (5), *можно ли найти решение этой системы $y_k(x;\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_m)$, $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, зависящее от m произвольных постоянных?*

Например, система дифференциальных уравнений (6), рассмотренная в § 1, п. 1 „в“, имеет решение, зависящее от трех произвольных постоянных. В § 5, п. 7, будет доказано, что при весьма общих предположениях решения системы дифференциальных уравнений m-го порядка зависят в точности от m произвольных постоянных.

§ 3. Доказательство основной теоремы существования и единственности по методу последовательных приближений Пикара — Пеано

1. Формулировка теоремы существования. Пусть дана нормальная система дифференциальных уравнений

$$y_i'=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \quad (1)$$

и пусть *в определяемом неравенствами*

$$-a\leqslant x-\alpha\leqslant a;\ \ -b\leqslant y_i-\beta_i\leqslant b\ \ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \quad (2)$$

(*a и b — некоторые постоянные величины*) *прямоугольном параллелепипеде R с центром в точке* $[\alpha;\ \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m]$ *функции* $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ *однозначны и непрерывны.* Тогда функции f_i ограничены в R, иными словами существует такое число M [1]), что для любой точки $(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ из R имеем

$$|f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)| \leqslant M \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{3}$$

Предположим, далее, что функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ удовлетворяют условию Липшица первого порядка относительно переменных y_i, т. е. что существуют m постоянных $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$, для которых

$$|f_i(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_{r-1},\ y_r+h,\ y_{r+1},\ \ldots,\ y_m) - \\ - f_i(x;\ y_1,\ \ldots,\ y_{r-1},\ y_r,\ y_{r+1},\ \ldots,\ y_m)| \leqslant |h|\, L_r \text{ [2]} \\ (r,\ i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{4}$$

Тогда, каковы бы ни были точки $(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ и $(x;\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m)$ из R для всех $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$ имеем

$$|f_i(x;\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)| \leqslant \\ \leqslant L\{|\bar{y}_1-y_1| + |\bar{y}_2-y_2| + \ldots + |\bar{y}_m-y_m|\}, \tag{5}$$

где через L обозначена наибольшая из величин $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$ В самом деле,

$$|f_i(x;\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)| \leqslant \\ \leqslant |f_i(x;\ \bar{y}_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots\ \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1,\ \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m)| + \\ + |f_i(x;\ y_1,\ \bar{y}_2,\ \bar{y}_3\ \ldots\ \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \bar{y}_3,\ \ldots,\ \bar{y}_m)| + \ldots + \\ + |f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{m-1},\ \bar{y}_m) - f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{m-1},\ y_m)| \leqslant \\ \leqslant L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k - y_k|.$$

Мы хотим доказать, что если для функций f_i выполняются указанные выше условия, то имеет место следующая теорема:

---

[1]) В качестве M в дальнейшем будем выбирать наибольшую из верхних граней $|f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ldots,\ y_m)|$ в R.

[2]) Соотношение (4) выполняется, если абсолютные значения производных чисел функций $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ относительно переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ не превосходят соответственно величин $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$. Постоянные $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$ называются постоянными Липшица функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ относительно переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$.

Заметим, что соотношение (4) выполняется, в частности, если функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ обладают непрерывными в R частными производными по $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$.

Условие (4), необходимое при классическом доказательстве теоремы существования и единственности, было дано Липшицем (см. Липшиц [1]) (ср. также § 6).

Пусть δ — наименьшее из чисел a и $\frac{b}{4M}$, x^0 — точка, принадлежащая отрезку $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, а $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ — система начальных значений, отличающихся по абсолютной величине от соответствующих постоянных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ не более, чем на $\frac{b}{2}$, иными словами, пусть справедливы неравенства

$$|x^0 - \alpha| \leqslant \delta, \quad |y_i^0 - \beta_i| \leqslant \frac{b}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Тогда существует одна и только одна система функций

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_m = y_m(x),$$

определенных в отрезке $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$,

$$|x - \alpha| \leqslant \delta \tag{7}$$

и удовлетворяющих как системе дифференциальных уравнений (1), *так и начальным условиям*

$$y_i(x^0) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Эту теорему формулируют иначе, говоря, что *задача Коши* для системы (1) (и для начальных условий (8)) имеет одно и только одно решение, называемое обычно *решением Коши.*

2. Доказательство теоремы существования по методу последовательных приближений Пикара-Пеано[1]**.** Система (1) эквивалентна системе *интегральных уравнений*[2])

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x; y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9}$$

Если функции f_i *не зависят от аргументов* $y_1, y_2, \ldots, y_m$, то система (1) может быть решена в квадратурах, так как соотношения (9) приобретают в этом случае вид

$$y_i(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x)\, dx \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9'}$$

[1]) Метод последовательных приближений (подстановок) для систем линейных уравнений в действительной области впервые был указан Пеано (см. Пеано [1] (ср. также гл. II, § 2, п. 3).

Во всей общности этот метод был рассмотрен Пикаром (см. Пикар [1]); с помощью метода Пикара был выполнен ряд весьма важных исследований в различных областях анализа.

[2]) Термин „интегральное уравнение" впервые встречается в работе Дюбуа-Реймона (см. Дюбуа-Реймон [1], стр. 228).

В общем случае примем в качестве *первой системы приближений* начальные значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ искомых функций и подставим их в правые части соотношений (9) вместо $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$. Выполнив квадратуры, мы найдем *вторую систему приближений* $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x)$, определяемых соотношениями

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)\,dx \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Как будет видно из дальнейших рассуждений, вместо начальных значений искомых функций можно было в качестве первых приближений взять *любую систему функций* $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$, *непрерывных в* $[\alpha - a, \alpha + a]$ *и удовлетворяющих при* $a - \delta \leqslant x \leqslant a + \delta$ *неравенствам*

$$|u_i(x) - \beta_i| \leqslant b.$$

Тогда в качестве *вторых приближений* мы взяли бы функции, определяемые соотношениями

$$y_i^{(1)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))\,dx \; (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9_1}$$

Докажем, что если x изменяется в отрезке $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$, то найденные нами функции $y_i^{(1)}(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ отличаются от соответствующих β_i не более, чем на b. В самом деле, в силу соотношений (9_1), (3), (6), (7) и того, что $\delta \leqslant \frac{b}{4M}$, имеем

$$|y_i^{(1)}(x) - \beta_i| = |y_i^0 - \beta_i + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x))\,dx| \leqslant$$
$$\leqslant |y_1^0 - \beta_i| + M|x - x^0| \leqslant |y_i^0 - \beta_i| + M\{|x - \alpha| + |x^0 - \alpha|\} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{b}{2} + 2\delta M \leqslant \frac{b}{2} + \frac{b}{2} = b.$$

Определим теперь *третью систему вспомогательных функций* $y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x), \ldots, y_m^{(2)}(x)$, подставив в правую часть соотношений (9) вместо неизвестных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ найденные нами функции $y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x)$. Мы получаем

$$y_i^{(2)}(x) = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \ldots, y_m^{(1)}(x))\,dx$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m). \tag{9_2}$$

Повторяя проведенные выше рассуждения, выводим, что получаемые путем выполнения квадратур функции $y_i^{(2)}(x)$ непрерывны на отрезке

$[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ и отличаются на этом отрезке от β_i не более, чем на b.

Вообще, если уже *найдена* $(r+1)$-*я система вспомогательных функций, то мы определяем* $(r+2)$-*ю систему с помощью квадратур по формулам*

$$y_i^{(r+1)}(x)=y_i^0+\int\limits_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(r)}(x),\ y_2^{(r)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r)}(x))\,dx$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (9_{r+1})$$

Каково бы ни было r, функции $y_i^{(r)}(x)$ конечны и непрерывны на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ и отличаются на этом отрезке от β_i не более, чем на b.

Докажем теперь, что, когда $r\to\infty$, *функции* $y_i^{(r)}(x)$ *равномерно сходятся на отрезке* $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ *к предельным функциям* $y_i(x)$, *удовлетворяющим системе* (1) *и начальным условиям* (8); *функции* $y_i(x)$ *и дают искомое решение системы* (9).

Для того, чтобы доказать это утверждение, покажем сначала, что ряд

$$u_i(x)+[y_i^{(1)}(x)-u_i(x)]+[y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)]+\ldots$$

$$\ldots+[y_i^{(r)}(x)-y_i^{(r-1)}(x)]+\ldots \qquad \text{(I)}$$

абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$. Так как функции $y_i^{(1)}(x)-u_i(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, то найдется такая постоянная C, что для всех x в этом отрезке имеем

$$\sum_{i=1}^{m}|y_i^{(1)}(x)-u_i(x)|\leqslant C. \qquad (10_1)$$

Из (9_2) и (9_1) получаем, учитывая соотношения (5) и (10_1), что

$$|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\leqslant\left|\int\limits_{x^0}^{x}|f_i(x;\ y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(1)}(x))-\right.$$

$$\left.-f_i(x;\ u_1(x),\ u_2(x),\ \ldots,\ u_m(x))|\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant L\left|\int\limits_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{m}|y_i^{(1)}(x)-u_i(x)|\,dx\right|\leqslant CL\,|x-x^0|,$$

т. е. что

$$|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\leqslant\frac{C}{m}[mL\,|x-x^0|] \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \qquad (10_2)$$

Аналогично, из (9_2) и (9_1) получаем, учитывая соотношения (5) и (10_1), что

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leqslant\left|\int_{x^0}^{x}|f_i(x;\,y_1^{(2)}(x),\,y_2^{(2)}(x),\,\ldots,\,y_m^{(2)}(x))-\right.$$
$$\left.-f_i(x;\,y_1^{(1)}(x),\,y_2^{(1)}(x),\,\ldots,\,y_m^{(1)}(x))|\,dx\right|\leqslant$$
$$\leqslant L\left|\int_{x^0}^{x}\sum_{i=1}^{m}|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)|\,dx\right|\leqslant mCL^2\left|\int_{x^0}^{x}|x-x^0|\,dx\right|.$$

Отсюда следует, что

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leqslant mCL^2\frac{|x-x^0|^2}{2!},$$

и потому

$$|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)|\leqslant\frac{C}{m}\,\frac{[mL\,|x-x^0|]^2}{2!}. \tag{10_3}$$

По индукции получаем, что

$$|y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)|\leqslant\frac{C}{m}\,\frac{[mL\,|x-x^0|]^r}{r!}. \tag{10}$$

Принимая во внимание, что $|x-x^0|\leqslant|x-\alpha|+|x^0-\alpha|\leqslant2\delta$, мы получаем отсюда неравенство

$$|y_i^{(r+1)}(x)-y_i^{(r)}(x)|<\frac{C}{m}\,\frac{(2mL\delta)^r}{r!}.$$

Это неравенство показывает, что абсолютная величина членов ряда, получающегося из ряда (I) отбрасыванием первых двух членов, не превосходит величины соответствующих членов ряда

$$\frac{C}{m}\left[\frac{2mL\delta}{1!}+\frac{(2mL\delta)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2mL\delta)^{r-1}}{(r-1)!}+\ldots\right]=\frac{C}{m}\,[e^{2mL\delta}-1],$$

а потому ряд (I) абсолютно и равномерно сходится на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$.

Положим теперь

$$y_i(x)=\lim_{r\to\infty}y_i^{(r)}(x)\quad(i=1,\,2,\,\ldots,\,m).$$

Из проведенных рассуждений следует, что функции $y_i(x)$ непрерывны на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$.

Докажем теперь, что последовательность функций

$$f_i(x;\,u_1(x),\,u_2(x),\,\ldots,\,u_m(x));\ f_i(x;\,y_1^{(1)}(x),\,y_2^{(1)}(x),\,\ldots,\,y_m^{(1)}(x));\ldots$$
$$\ldots;\ f_i(x;\,y_1^{(r)}(x),\,y_2^{(r)}(x),\,\ldots,\,y_m^{(r)}(x));\ \ldots \tag{11}$$

также равномерно сходится на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$ к функции

$$f_i(x;\,y_1(x),\,y_2(x),\,\ldots,\,y_m(x)),$$

иными словами, покажем, что каково бы ни было положительное число σ, найдется такой номер r_0, начиная с которого для всех x, принадлежащих отрезку $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, справедливо неравенство

$$|f_i(x;\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x)) - \\ - f_i(x;\ y_1^{(r)}(x),\ y_2^{(r)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r)}(x))| < \sigma. \tag{12}$$

В самом деле, найдется такое r_0, что при $r > r_0$ имеем

$$|y_k(x) - y_k^{(r)}(x)| < \frac{\sigma}{mL} \quad [r > r_0;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\\ \alpha-\delta \leqslant x \leqslant \alpha+\delta].$$

Учитывая вытекающее из (5) неравенство

$$|f_i(x;\ y_1(x), y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x)) - f_i(x;\ y_1^{(r)}(x),\ y_2^{(r)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r)}(x))| \leqslant \\ \leqslant L \sum_{k=1}^{m} |y_k(x) - y_k^{(r)}(x)|,$$

мы убеждаемся в том, что при $r > r_0$ справедливо соотношение (12).

Покажем, наконец, что полученные описанным выше образом функции $y_i(x)$ удовлетворяют системе (9). Для этого положим

$$F_i(x) = y_i(x) - y_i^0(x) - \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x))\,dx$$

и покажем, что $F_i(x) \equiv 0$ на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$. Из (9_{r+1}) следует, что

$$F_i(x) = y_i(x) - y_i^{(r+1)}(x) + \int_{x^0}^{x} [f_i(x;\ y_1^{(r)}(x),\ y_2^{(r)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r)}(x)) - \\ - f_i(x;\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x))]\,dx.$$

Поэтому если выбрать индекс r_0 так, чтобы при $r > r_0$ выполнялось неравенство (12), то при $r > r_0$ получим, что

$$|F_i(x)| < |y_i(x) - y_i^{(r+1)}(x)| + 2\sigma\delta.$$

В силу равномерной сходимости $y_i^{(r+1)}(x)$ к $y_i(x)$ правая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой при всех x, принадлежащих отрезку $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$[1]), откуда и следует, что $F_i(x) \equiv 0$, когда $\alpha-\delta \leqslant x \leqslant \alpha+\delta$.

Итак, мы доказали, что *построенная* нами система функций удовлетворяет как системе дифференциальных уравнений (1), так и начальным условиям (8).

---

[1]) Рассуждения, проведенные в последнем абзаце, могли быть опущены, так как достаточно было заметить, что, в силу равномерной сходимости последовательности (11), в соотношении (9_{r+1}) можно перейти справа к пределу при $r \to \infty$ под знаком интеграла.

3. Доказательство Гурса теоремы единственности. Изложим теперь доказательство теоремы единственности, принадлежащее Гурса (см. Гурса [1], т. II, стр. 322).

Пусть $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_m(x)$, $|z_k(x)-\beta_k|\leqslant b$ $(k=1, 2, \ldots, \ldots, m)$, — система функций, удовлетворяющих уравнениям (1) и начальным условиям (8), т. е. таких, что

$$z_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ z_1(x),\ z_2(x),\ \ldots,\ z_m(x))\,dx \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{1'}$$

Вычитая из них функции $y_1^{(r)}(x), y_2^{(r)}(x), \ldots, y_m^{(r)}(x)$, образующие $(r+1)$-е приближение

$$y_i^{(r)}(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(r-1)}(x),\ y_2^{(r-1)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r-1)}(x))\,dx,$$

получим

$$z_i(x)-y_i^{(r)}(x)=\int_{x^0}^{x}\{f_i(x;\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)-$$
$$-f_i(x;\ y_1^{(r-1)}(x),\ y_2^{(r-1)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(r-1)}(x))\}\,dx,$$

и потому, в силу соотношения (5),

$$|z_i(x)-y_i^{(r)}(x)|\leqslant L\left|\int_{x^0}^{x}\sum_{k=1}^{m}|z_k(x)-y_k^{(r-1)}(x)|\,dx\right|. \tag{13}$$

Неравенство (13) позволяет оценить разность $|z_i-y_i^{(r)}|$. В самом деле, из того, что $\beta_k-b\leqslant z_k(x)\leqslant\beta_k+b$, вытекает неравенство

$$|z_k(x)-u_k(x)|\leqslant 2b \quad (k=1, 2, \ldots, m).$$

Поэтому, полагая в (13) $r=1$, получаем неравенство

$$|z_i(x)-y_i^{(1)}(x)|\leqslant 2bmL\,|x-x^0|,$$

из которого выводим, полагая в (13) $r=2$, что

$$|z_i(x)-y_i^{(2)}(x)|\leqslant 2b\,\frac{[mL\,|x-x^0|]^2}{2!}.$$

По индукции заключаем теперь, что при всех r имеем

$$|z_i(x)-y_i^{(r)}(x)|\leqslant 2b\,\frac{[mL\,|x-x^0|]^r}{r!} \quad (i=1, 2, \ldots, m)^{1)} \tag{14}$$

и, так как при всех x, принадлежащих отрезку $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, правая часть (14) стремится к нулю, когда $r\to\infty$, то функции $y_i^{(r)}(x)$

---

1) Заметим, что эта формула дает величину *наибольшей ошибки* $(r+1)$*-го приближения.*

равномерно на этом отрезке стремятся к функциям $z_i(x)$. Отсюда и следует, что функции $z_i(x)$ совпадают с найденными ранее функциями $y_i(x)$.

4. Дополнения к формулировке теоремы существования. а) При проведении изложенного выше доказательства существования мы предполагали, что x принадлежит отрезку $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, где δ не превосходит не только a, *но также* и $\frac{b}{4M}$. Последнее ограничение было наложено для того, чтобы последовательные приближения $y_i^{(r)}(x)$ не выходили из области, в которой выполняются условия Липшица. Это ограничение может быть снято, если соотношение (5) выполняется для всех значений x, принадлежащих отрезку $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, *независимо от значений y.* В этом случае можно считать, что $\delta=a$, т. е. что решение нашей системы существует и единственно на всем отрезке изменения x. *Так будет, например, если найдется такое число M, что для любых значений x, принадлежащих отрезку $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$, и любых значений y_k частные производные функций f_i по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_m$ существуют, причем*

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \leqslant M \quad (i=1, 2, \ldots, m;\ k=1, 2, \ldots, m).$$

К системам, обладающим описанными выше свойствами, принадлежат системы, для которых функции f_i линейны по всем y_k, т. е. системы вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}(x) y_l+u_i(x) \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

где функции $a_{i,l}(x)$ и $u_i(x)$ непрерывны при $\alpha-a \leqslant x \leqslant \alpha+a$, ибо в этом случае частные производные функций f_i по y_k зависят лишь от x.

Полезно заметить, что если система имеет вид

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}(x, \lambda) y_l+u_i(x, \lambda) \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

где функции $a_{i,l}(x, \lambda)$ и $u_i(x, \lambda)$ непрерывны по x и λ, когда $\alpha-a \leqslant x \leqslant \alpha+a$, а λ пробегает область D, и голоморфны по параметру λ в области D, то все члены ряда (I) голоморфны по λ в области D, а сам этот ряд равномерно сходится в области D. Поэтому, в силу теоремы Вейерштрасса, решения y_i голоморфны по λ в D[1]).

б) Можно указать другие случаи, для которых имеют место отмеченные в „а" обстоятельства; они имеют место, например, для

[1]) См. Привалов [1], стр. 175. — *Прим. ред.*

системы вида

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{l=1}^{m}a_{i,l}(x)\sin y_l+u_i(x)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где $a_{i,l}(x)$ и $u_i(x)$ — непрерывные на отрезке $[\alpha-a,\ \alpha+a]$ функции.

в) Отметим еще, что *если ограничиться нахождением решения системы* (1), *удовлетворяющего начальным условиям*

$$y_i(\alpha)=\beta_i\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

то в качестве δ *можно взять наименьшее из чисел* a *и* $\frac{b}{M}$ (причем, если $M=0$, то можно положить $\delta=a$). Для доказательства достаточно заметить, что при таком выборе δ все рассуждения, проведенные при доказательстве теорем существования и единственности, сохраняют силу.

§ 4. Аналитическое продолжение решений. Примеры

1. Аналитическое продолжение решений. Будем, сохраняя сделанные в § 3, п. 1, предположения, искать решение системы

$$y_i'=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),\tag{1}$$

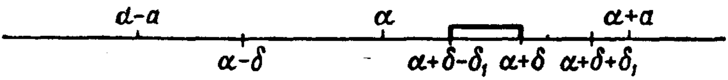
удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(\alpha)=\beta_i.\tag{2}$$

Согласно сделанному в § 3, п. 4 „в", замечанию, теорема существования и единственности обеспечивает существование этого решения на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, где δ — наименьшее из чисел a и $\frac{b}{M}$. Этот отрезок составляет, *вообще говоря*, лишь часть первоначального отрезка $[\alpha-a,\ \alpha+a]$ изменения x. Однако отсюда не следует, что это решение существует лишь на отрезке $[\alpha-\delta,\ \alpha+\delta]$, оно может существовать и вне этого отрезка, но получается там с помощью нового ряда последовательных приближений. В самом деле, пусть $\delta<a$ и пусть построенное в § 3, п. 2, решение принимает при $x=\alpha+\delta$ значения $y_i(\alpha+\delta)=b_i$. Тогда если существует содержащийся в R прямоугольный параллелепипед $\overline{R}$ с центром в точке $(\alpha+\delta;\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m)$, в котором выполняются указанные в § 3, п. 1, предположения, то можно построить новый ряд последовательных приближений, который даст решение системы (1), определенное на отрезке $[\alpha+\delta-\delta_1,\ \alpha+\delta+\delta_1]$ длины $2\delta_1$ и принимающее в точке $\alpha+\delta$ значения $b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$ (фиг. 1). В силу теоремы единственности это решение системы совпадает на отрезке $[\alpha+\delta-\delta_1,\ \alpha+\delta]$ со старым решением и, с другой стороны, определено на отрезке $[\alpha+\delta,\ \alpha+\delta+\delta_1]$, на котором старое решение не было

определено; новое решение называется *аналитическим продолжением* старого.

Повторяя последовательно процесс аналитического продолжения, мы получим в качестве области существование решения системы, удовлетворяющего начальным условиям (2), либо весь отрезок $[\alpha - a,$



Фиг. 1.

$\alpha + a]$, либо его часть. Во всяком случае важно заметить, что *это решение системы дифференциальных уравнений* (1) *однозначно определяется дифференциальными уравнениями этой системы и начальными данными.*

2. Система дифференциальных уравнений, определяющая тригонометрические функции. Рассмотрим систему

$$\frac{du}{dx} = v, \quad \frac{dv}{dx} = -u \tag{3}$$

с начальными условиями

$$u(0) = 0, \quad v(0) = 1. \tag{4}$$

Как известно, решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям (4), дают функции

$$u = \sin x, \quad v = \cos x.$$

Покажем, как этот результат можно получить с помощью процесса последовательных приближений.

Согласно сделанным ранее замечаниям, мы имеем

$$f_1(x;\ u,\ v) = v; \quad f_2(x;\ u,\ v) = -u,$$

x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, и условия Липшица выполнены.

Учитывая начальные условия (4), получаем

$$u^{(1)} = 0 + \int_0^x f_1[x;\ 0,\ 1]\,dx = x;$$

$$u^{(2)} = 0 + \int_0^x f_1[x;\ x,\ 1]\,dx = x;$$

$$u^{(3)} = 0 + \int_0^x f_1\left[x;\ x,\ 1 - \frac{x^2}{2}\right]dx = x - \frac{x^3}{3!};$$

$$v^{(1)} = 1 + \int_0^x f_2[x;\ 0,\ 1]\,dx = 1;$$

$$v^{(2)} = 1 + \int_0^x f_2[x;\ x,\ 1]\,dx = 1 - \frac{x^2}{2!};$$

$$v^{(3)} = 1 + \int_0^x f_2\left[x;\ x,\ 1 - \frac{x^2}{2!}\right]dx = 1 - \frac{x^2}{2!},$$

откуда, продолжая процесс последовательных приближений, выводим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ разлагаются в ряды

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots; \quad v(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,$$

сходящиеся при всех значениях x.

б) Докажем, независимо от сделанного выше замечания, что функции $u(x)$ и $v(x)$ — периодические, и выведем для них формулу сложения.

Из системы (3) следует, что $2uu' + 2vv' = 0$, $(u^2 + v^2)' = 0$, $u^2 + v^2 = \text{const}$, откуда, в силу (4),

$$u^2(x) + v^2(x) = 1, \tag{5}$$

а потому функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны и принимают значения, лежащие на отрезке $[-1,\ 1]$.

Так как $u'(0) = v(0) = 1$, то функция $u(x)$ возрастает, а потому она положительна в некотором промежутке, расположенном справа от точки $x = 0$; она остается возрастающей (и значит положительной) до тех пор, пока не обратится в нуль ее первая производная $v(x)$, т. е. в силу того, что $v^2(x) = 1 - u^2(x)$ до тех пор, пока $u(x)$ не примет значение 1. Отсюда следует, что для всех x, принадлежащих отрезку $[0,\ K]$, где через K обозначено первое значение x, для которого $u(K) = 1$, имеет место равенство $u'(x) = \sqrt{1 - u^2}$ (в силу сказанного выше мы должны выбрать перед корнем знак $+$). Но тогда

$$dx = (1 - u^2)^{-\frac{1}{2}}\,du,$$

откуда, интегрируя от 0 до K, получаем

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} \quad \left(= \frac{\pi}{2}\right).$$

Положим

$$u_1(x) = -v(x + K), \quad v_1(x) = u(x + K).$$

Подставляя в (3) вместо x значение $x+K$, найдем, что

$$u_1'(x)=v_1;\quad v_1'(x)=-u_1,$$

и при $x=0$

$$u_1(0)=-v(K)=0,\quad v_1(0)=u(K)=1.$$

В силу теоремы единственности отсюда вытекает, что $u_1(x)=u(x)$, $v_1(x)=v(x)$, т. е. что

$$u(x+K)=v(x),\quad v(x+K)=-u(x). \tag{5_1}$$

Подставляя в эти соотношения вместо x значение $x+K$, мы видим, что

$$u(x+2K)=-u(x),\quad v(x+2K)=-v(x), \tag{5_2}$$

и, наконец,

$$u(x+4K)=u(x),\quad v(x+4K)=v(x). \tag{5_3}$$

Отсюда следует, что функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют период $4K(=2\pi)$.

в) Для доказательства теоремы сложения положим

$$U(x)=u(x)v(a)+v(x)u(a),\quad V(x)=v(x)v(a)-u(x)u(a),$$

где a — некоторая постоянная величина. Функции $U(x)$ и $V(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$U'(x)=V(x),\quad V'(x)=-U(x)$$

и начальным условиям

$$U(0)=u(a),\quad V(0)=v(a),$$

т. е. той же системе уравнений и тем же начальным условиям, что и функции $u(x+a)$, $v(x+a)$; в силу теоремы единственности отсюда следует, что

$$u(x+a)=u(x)v(a)+v(x)u(a);\quad v(x+a)=v(x)v(a)-u(x)u(a).$$

Эти равенства можно записать в виде элементарных формул

$$\sin(x+a)=\sin x\cos a+\cos x\sin a,$$

$$\cos(x+a)=\cos x\cos a-\sin x\sin a.$$

3. Система дифференциальных уравнений, определяющая эллиптические функции Якоби. а) Пусть k — положительное число, меньшее единицы, x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ и u, v, w — функции, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dx}=vw,\quad \frac{dv}{dx}=-uw,\quad \frac{dw}{dx}=-k^2uv \tag{6}$$

с начальными условиями

$$u(0)=0,\quad v(0)=w(0)=1. \tag{7}$$

Пусть при изменении x от -1 до 1 функции u, v, w отличаются от своих начальных значений не более, чем на b ($b>0$), т. е.

$$-b\leqslant u\leqslant b,\quad 1-b\leqslant v\leqslant 1+b,\quad 1-b\leqslant w\leqslant 1+b.$$

Тогда функции vw, $-uw$, $-k^2uv$ не превосходят числа $(1+b)^2$, а потому существует определенное на отрезке $[-b(1+b)^{-2}, b(1+b)^{-2}]$ решение системы (6), удовлетворяющее начальным условиям (7).

Но легко видеть, что функции u, v, w существуют при всех значениях x; в самом деле, на любом отрезке, для которого доказано их существование, абсолютные значения этих функций не превосходят единицы (см. (8)). Поэтому их можно продолжить с этого отрезка как вправо, так и влево на отрезок длины $b(1+b)^{-2}$.

б) Из (6) получаем, что

$$(u^2+v^2)'=0\quad (k^2u^2+w^2)'=0,$$

откуда вытекают равенства

$$u^2+v^2=\mathrm{const},\quad k^2u^2+w^2=\mathrm{const}.$$

В силу (7) эти равенства приводятся к равенствам

$$u^2+v^2=1,\quad k^2u^2+w^2=1. \tag{8}$$

Отсюда следует, что функции u и v изменяются от -1 до 1, а w — от $1-k^2$ до 1, а потому функции $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ определены и непрерывны (в силу (6) вместе со своими производными) на всей оси, причем абсолютные значения этих функций не превосходят единицы.

в) Положим

$$u_1(x)=-u(-x),\quad v_1(x)=v(-x),\quad w_1(x)=w(-x), \tag{9}$$

тогда

$$\frac{du_1(x)}{dx}=v_1w_1,\quad \frac{dv_1}{dx}=-u_1w_1,\quad \frac{dw_1}{dx}=-k^2u_1v_1, \tag{6'}$$

$$u_1(0)=0,\quad v_1(0)=w_1(0)=1. \tag{7'}$$

Отсюда заключаем, что функции $u_1(x)$, $v_1(x)$, $w_1(x)$ совпадают с функциями $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$, т. е. что (см. (9))

$$u(-x)=-u(x),\quad v(-x)=v(x),\quad w(-x)=w(x). \tag{10}$$

Таким образом, *функция $u(x)$ нечетна, а функции $v(x)$ и $w(x)$ четны.*

г) Из равенств (6) и (8) следует, что $u'^2=v^2w^2=(1-u^2)(1-k^2u^2)$, а потому $u'(x)$ обращается в нуль, когда $u=\pm1$; но при $x=0$ $u'(0)=1$, откуда видно, что $u(x)$ возрастает в точке $x=0$ и, следовательно, остается возрастающей и положительной (но не превосходящей единицы), когда x изменяется от 0 до K, где через K обозначено первое положительное значение, для которого $u(K)=1$.

Тогда для любого x между нулем и K имеем

$$u'(x)=\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \quad dx=\frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{11}$$

где корни берутся в арифметическом смысле. Интегрируя это равенство по x от 0 до 1, получаем

$$K=\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{12}$$

откуда при $x=K$ имеем

$$u(K)=1, \quad v(K)=0, \quad w(K)=\sqrt{1-k^2}=k', \tag{13}$$

причем k' связано с k соотношением

$$k^2+k'^2=1. \tag{14}$$

Заметим, что в последнем из равенств (13) надо также рассматривать положительное значение корня; это следует из непрерывности $w(x)$ и начального условия $w(0)=1$.

Если положить в уравнении (11)

$$u=\sin\varphi,$$

то получим

$$dx=(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\,d\varphi$$

и потому

$$x=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad K=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}. \tag{15}$$

Дуга φ называется *амплитудой* x и обозначается

$$\varphi=\operatorname{am} x.$$

Поэтому

$$u=\sin\varphi=\sin\operatorname{am} x, \quad v=\cos\varphi=\cos\operatorname{am} x,$$

$$w=\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}=\sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} x}=\Delta\varphi=\Delta\operatorname{am} x.$$

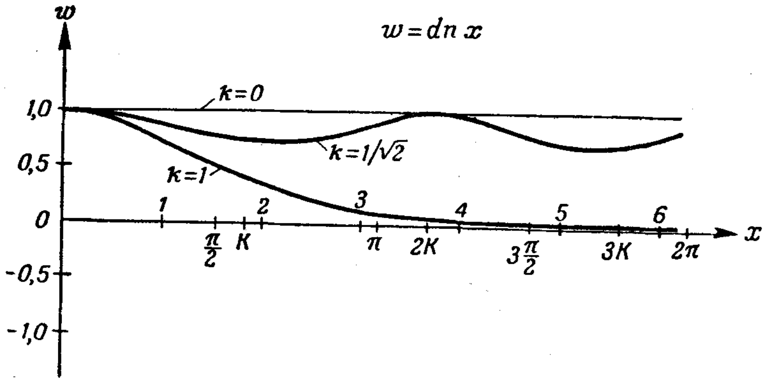
Функции $\sin\operatorname{am} x$, $\cos\operatorname{am} x$, $\Delta\operatorname{am} x$ являются эллиптическими функциями Якоби и называются соответственно *синусом амплитуды* x, *косинусом амплитуды* x и *дельтой амплитуды* x; в настоящее время они обозначаются введенными Гудерманном символами

$$u(x)=\operatorname{sn}(x;\ k), \quad v(x)=\operatorname{cn}(x;\ k), \quad w(x)=\operatorname{dn}(x;\ k)$$

или более коротко

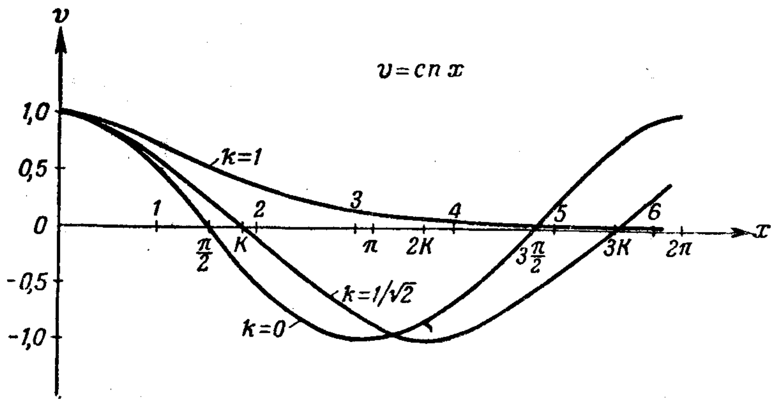
$$\operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn} x, \quad \operatorname{dn} x.$$

Постоянная k называется *модулем* эллиптических функций $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$, а k' — *дополнительным модулем*. Таблицы эллиптических функций Якоби см. Милн — Томсон [1]. На фиг. 2—4 приведены графики этих функций.



Фиг. 2.

д) Аналогично тому, как это было сделано в п. 2 „б", найдем вещественные периоды эллиптических функций Якоби. В силу второго



Фиг. 3.

равенства (8) функция $w(x)$ отлична от нуля, а потому можно ввести функции

$$U(x) = \frac{v}{w}; \quad V(x) = -k' \frac{u}{w}; \quad W(x) = \frac{k'}{w}. \tag{16}$$

Тогда

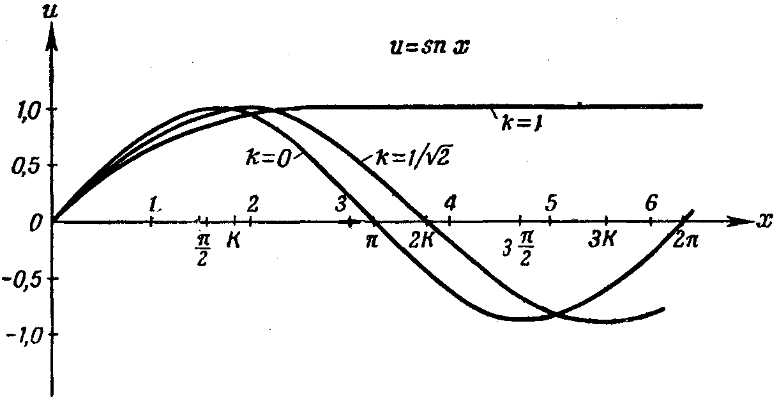
$$U' = \frac{1}{w} v' - \frac{v}{w^2} w' = -u + k^2 \frac{uv^2}{w^2} = \frac{u}{w^2}(k^2v^2 - w^2) =$$
$$= \frac{u}{w^2}(k^2v^2 + k^2u^2 - 1) = -\frac{u}{w^2} k'^2 = VW,$$

и, в силу аналогичных рассуждений для V и W, функции U, V, W удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$U' = VW, \quad V' = -UW, \quad W' = -k^2UW \tag{16_1}$$

с начальными условиями

$$U(0) = 1, \quad V(0) = 0, \quad W(0) = k'. \tag{16_2}$$



Ф и г. 4.

В силу (6) и (13), тем же самым условиям (16_1) и (16_2) удовлетворяют функции

$$u(x+K), \quad v(x+K), \quad w(x+K),$$

а потому

$$U = u(x+K), \quad V = v(x+K), \quad W = w(x+K)$$

и, согласно (16),

$$\operatorname{sn}(x+K) = \frac{\operatorname{cn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{cn}(x+K) = -k' \frac{\operatorname{sn} x}{\operatorname{dn} x}, \quad \operatorname{dn}(x+K) = \frac{k'}{\operatorname{dn} x}, \tag{17_1}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+2K) &= -\operatorname{sn} x, \\ \operatorname{cn}(x+2K) &= -\operatorname{cn} x, \\ \operatorname{dn}(x+2K) &= \operatorname{dn} x, \end{aligned}\right\} \tag{17_2}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sn}(x+4K) &= \operatorname{sn} x, \\ \operatorname{cn}(x+4K) &= \operatorname{cn} x, \\ \operatorname{dn}(x+4K) &= \operatorname{dn} x. \end{aligned}\right\} \tag{17_3}$$

Итак, *функция* $\operatorname{dn} x$ *имеет* (вещественный) *период* $2K$, *а функции* $\operatorname{sn} x$ *и* $\operatorname{cn} x$ — (вещественный) *период* $4K$.

е) Функции $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ и $\operatorname{dn} x$, рассматриваемые как функции комплексного переменного, обладают вторым периодом. Положим

$$K' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k'^2u^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin^2\varphi}}, \tag{18}$$

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}, \quad x = \frac{2K}{\pi}v. \tag{19}$$

Тогда

$$\operatorname{sn} x = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1(v)}{\theta(v)}, \quad \operatorname{cn} x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\theta_2(v)}{\theta(v)}, \quad \operatorname{dn} x = \sqrt{k'}\frac{\theta_3(v)}{\theta(v)},$$

где $\theta(v)$, $\theta_1(v)$, $\theta_2(v)$, $\theta_3(v)$ — так называемые тета-функции Якоби, определяемые рядами

$$\theta(v) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m q^{m^2}\cos 2mv,$$

$$\theta_1(v) = 2\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}\sin(2m-1)v,$$

$$\theta_2(v) = 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{\frac{1}{4}(2m-1)^2}\cos(2m-1)v,$$

$$\theta_3(v) = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}\cos 2mv$$

(см. Якоби [1], т. I, стр. 497). Доказано, что

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{sn}(x+2iK') = \operatorname{sn} x, \quad \operatorname{cn}(x+2K+2iK') = \operatorname{cn} x, \\ &\operatorname{dn}(x+4iK') = \operatorname{dn} x \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

и что эти функции имеют *полюсы первого порядка в точках*

$$x = 2mK + (2n+1)iK'$$

и нули первого порядка в точках: $2mK + 2niK'$ *для* $\operatorname{sn} x$, *в* $(2m+1)K + 2niK'$ *для* $\operatorname{cn} x$ и *в* $(2m+1)K + (2n+1)iK'$ *для* $\operatorname{dn} x$, *где* m *и* n — *целые числа*[1]).

---

[1]) Более глубокое знакомство с эллиптическими функциями Якоби и общей теорией эллиптических функций читатель может получить из книг Гурвица [1] и Ахиезера Н. И. [1]. — *Прим. перев.*

§ 5. Решения дифференциальных уравнений как функции начальных значений

1. Непрерывность. а) *Пусть дана система дифференциальных уравнений*

$$y'_i = f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{1}$$

где функции f_i непрерывны по их аргументам в прямоугольном параллелепипеде R_{m+2}, определенном неравенствами

$$|x - \alpha| \leqslant a,\ |y_i - \beta_i| \leqslant b \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{2_1}$$

$$|\lambda - \gamma| \leqslant c, \tag{2_2}$$

причем x — независимая переменная, $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$ — искомые функции, λ — параметр, и пусть в R_{m+2} имеем

$$|f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ v_m;\ \lambda)| \leqslant M \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Предположим также, что функции f_i удовлетворяют условиям Липшица

$$|f_i(x; \bar{y}_1, \bar{y}_2,\ \ldots,\ \bar{y}_m;\ \lambda) - f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \lambda)| \leqslant L \sum_{k=1}^{m} |\bar{y}_k - y_k| \tag{3}$$

и что δ — наименьшее из чисел a и $\frac{b}{4M}$. Тогда, в силу результатов, изложенных в § 3, *каждой точке x^0 из $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta]$, системе начальных значений $y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0$, удовлетворяющей условию*

$$|y_i^0 - \beta_i| \leqslant \frac{b}{2}$$

и значению параметра λ, принадлежащему $(\gamma - c,\ \gamma + c)$, соответствует одно и только одно решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(x^0) = y_i^0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{4}$$

Можно сказать, что это решение системы (1) зависит от $m + 3$ аргументов $x,\ x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ \lambda$, изменяющихся в прямоугольном параллелепипеде R_{m+3}, заданном неравенствами

$$|x - \alpha| \leqslant \delta,\ |x^0 - \alpha| \leqslant \delta;\ |y_i^0 - \beta_i| \leqslant \frac{b}{2},\ |\lambda - \gamma| \leqslant c. \tag{5}$$

Обозначив это решение символом $y_i(x,\ x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ \lambda)$, мы можем записать (4) в виде

$$y_i(x^0,\ x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ \lambda) = y_i^0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{6}$$

Решение $y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)$ *непрерывно в прямоугольном параллелепипеде* R_{m+3}[1]. В самом деле, нетрудно показать, что при сформулированных выше условиях все вспомогательные функции, получаемые путем последовательных приближений, непрерывны в R_{m+3}, и что построенный в § 3, п. 2, ряд (I) равномерно сходится в R_{m+3}. Отсюда и следует непрерывность функций $y_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda)$ в R_{m+3}.

б) В некоторых вопросах (см., например, гл. IV, § 6, п. 3) приходится рассматривать начальные значения $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ как непрерывные функции параметра λ; проведенные только что рассуждения показывают, что и в этом случае решения системы (1) являются непрерывными функциями параметра λ.

2. Дифференцируемость. Сохраняя указанные выше предположения о функциях f_i, заменим условие Липшица (3) более ограничительным условием, потребовав, чтобы *функции* $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \lambda)$ *имели в* R_{m+2} *непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным* $y_1, y_2, \ldots, y_m, \lambda$; *покажем, что тогда решения* y_i *будут иметь непрерывные частные производные по аргументам* $x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda$.

Предположим, что мы доказали эту теорему и обозначим для краткости

$$\frac{\partial y_i}{\partial x^0} = Z_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7_1}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} = V_{i,k}(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda) \; (i, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{7_2}$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial \lambda} = U_i(x, x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0; \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7_3}$$

$$\varphi_{i,k}(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \lambda) = \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m), \tag{8_1}$$

$$\psi_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m; \lambda) = \frac{\partial f_i}{\partial \lambda} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8_2}$$

Дифференцируя уравнения системы (1) по аргументам x^0, y_k^0, λ и предполагая, что в левых частях можно изменить порядок дифференцирования, мы получаем для функций $Z_i, V_{i,k}, U_i$ линейные

[1] Зависимость решений от начальных значений и от параметров рассматривалась в работах Николетти [1], Линделёфа [1], Лихтенштейна [1], Блисса [1], Ритта [1], Гронуолла [1].

системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dZ_i}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\, Z_l \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{9_1}$$

$$\frac{dV_{i,k}}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\, V_{l,\,k} \ (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{10_1}$$

$$\frac{dU_i}{dx} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\lambda)\, U_l + \psi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots, y_m;\lambda) \tag{11_1}$$

$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

а дифференцируя равенства (6) и учитывая систему (1), получаем для функций Z_i, $V_{i,\,k}$, U_i начальные условия

$$Z_i(x^0) = -f_i(x^0;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0;\ \lambda) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{9_2}$$

$$V_{i,\,k}(x^0) = \delta_{i,\,k} \ (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ \delta_{i,\,k}=0 \text{ при } i\neq k,\ \delta_{i,\,i}=1), \tag{10_2}$$

$$U_i(x^0)=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{11_2}$$

Для доказательства этой теоремы и соотношений (9_1), (10_1), (11_1) докажем предварительно в п. 3 лемму Гронуолла, а в п. 4, 5, 6 покажем последовательно дифференцируемость по параметру λ, по начальным значениям $y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0$ и по начальному значению x^0 независимого переменного, а также покажем справедливость соотношений (11_1), (10_1) и (9_1).

3. Лемма Гронуолла. [1]) *Пусть при $x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + h$ непрерывная функция $z(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant z(x) \leqslant \int_{x^0}^{x} (Mz + A)\,dx + B, \tag{12}$$

где M, A, B — некоторые неотрицательные постоянные. Тогда

$$0 \leqslant z(x) \leqslant (Ah+B)\,e^{Mh} \quad (x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + h). \tag{12'}$$

В самом деле, пусть $z(x) = e^{M(x-x^0)}\,\xi(x)$ и пусть x_1 — точка (или одна из точек) отрезка $[x^0,\ x^0+h]$, где $\xi(x)$ принимает наибольшее значение. Тогда

$$0 \leqslant e^{M(x_1-x^0)}\,\xi(x_1) \leqslant \int_{x^0}^{x_1} [Me^{M(x-x^0)}\,\xi(x) + A]\,dx + B$$

---

[1]) См. примечание на стр. 28. Аналогичные леммы имеются в работах Пеано [2] и Камке [1], стр. 92, а несколько более общая — в работе Джулиано [1].

и потому

$$0 \leqslant e^{M(x_1-x^0)}\xi(x_1) \leqslant \xi(x_1)\int_{x^0}^{x} Me^{M(x-x^0)}\,dx + A(x_1-x^0)+B =$$

$$= \xi(x_1)\left[e^{M(x_1-x^0)}-1\right] + A(x_1-x^0)+B.$$

Но отсюда следует, что

$$0 \leqslant \xi(x_1) \leqslant A(x_1-x^0)+B \leqslant Ah+B,$$

чем и доказана справедливость неравенства (12′).

4. Дифференцируемость по параметру. Докажем теперь дифференцируемость решений по параметру λ, а также справедливость равенств (11_1) и (11_2).

Обозначим через $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ два решения системы (1), отвечающих соответственно значениям λ и $\bar{\lambda}$ параметра λ, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, и удовлетворяющих начальным условиям (4); тогда

$$y_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)\,dx,$$

$$\bar{y}_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda})\,dx,$$

откуда следует, что

$$\bar{y}_i - y_i = \int_{x^0}^{x} [f_i(x;\ \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda}) - f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)]\,dx,$$

и, в силу теоремы о среднем,

$$\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda}-\lambda} = \int_{x^0}^{x}\left[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\,l}(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ \lambda^*)\frac{\bar{y}_l - y_l}{\bar{\lambda}-\lambda} + \right.$$

$$\left. + \psi_i(x;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ \lambda^*)\right]dx,$$

где для всех $\varphi_{i,\,l}$ и ψ_i через $(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ \lambda^*)$ обозначена внутренняя точка отрезка, соединяющего точки $(y_1, y_2, \ldots, y_m;\ \lambda)$ и $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m;\ \bar{\lambda})$.

Пусть M_1 и A являются соответственно наибольшими значениями в R_{m+2} функций $m\,|\varphi_{i,\,k}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ и $|\psi_i|$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Зафиксируем некоторые значения λ и $\bar{\lambda}$, $\lambda \neq \bar{\lambda}$, и обозначим для всех x [1]), принадлежащих отрезку $[x^0, x^0+h]$, через $z(x;\ \lambda, \bar{\lambda})$ наибольшее из m

[1]) Мы предполагаем здесь неявным образом, что $x \geqslant x^0$, но при этом не теряем общности, так как в противном случае мы заменили бы x на $-x$.

выражений $\left|\frac{\bar{y}_l-y_l}{\bar{\lambda}-\lambda}\right|$ $(l=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. Функция $z(x;\ \lambda,\ \bar{\lambda})$ непрерывна по x на отрезке $[x^0,\ x^0+h]$, а потому, в силу леммы Гронуолла на $[x^0,\ x^0+h]$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\bar{y}_i-y_i}{\bar{\lambda}-\lambda}\right| \leqslant Ahe^{M_1 h} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Как уже было отмечено в п. 1 этого параграфа, из доказанной оценки следует, что решения y_i (равномерно) непрерывны по λ.

Так как теорема существования и единственности применима к системе (11_1) с начальными условиями (11_2) (см. § 3, п. 4), дифференцируемость решений по параметру λ будет доказана, равно как и соотношения (11_1) и (11_2), если мы покажем, что $\frac{\partial y_i}{\partial \lambda}$ существует и равно U_i.

Из (11_1) и (11_2) следует, что

$$U_i=\sum_{l=1}^{m}\int_{x^0}^{x}\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\,U_l\,dx+ \\ +\int_{x^0}^{x}\varphi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\,dx,$$

и потому

$$\frac{\bar{y}_i-y_i}{\bar{\lambda}-\lambda}-U_i=\int_{x^0}^{x}\Bigg[\sum_{l=1}^{m}\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1^*,\ y_2^*,\ \ldots,\ y_m^*;\ \lambda^*)\left(\frac{\bar{y}_l-y_l}{\bar{\lambda}-\lambda}-U_l\right)+ \\ +\sum_{l=1}^{m}(\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1^*,\ y_2^*,\ \ldots,\ y_m^*;\ \lambda^*)-\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\,U_l+ \\ +\psi_i(x;\ y_1^*,\ y_2^*,\ \ldots,\ y_m^*;\ \lambda^*)-\psi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\Bigg]dx.$$

Так как функции y_i непрерывны по λ, а функции $\varphi_{i,\,l}$ и ψ_i непрерывно зависят от своих аргументов, то для любого ε найдется такое ρ, что при $|\bar{\lambda}-\lambda|<\rho$ имеем [1])

$$\Big|\sum_{l=1}^{m}[\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1^*,\ y_2^*,\ \ldots,\ y_m^*;\ \lambda^*)-\varphi_{i,\,l}(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)]\,U_l+ \\ +\psi_i(x;\ y_1^*,\ y_2^*,\ \ldots,\ y_m^*;\ \lambda^*)-\psi_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m;\ \lambda)\Big|<\varepsilon,$$

где $i=1,\ 2,\ \ldots,\ m$. Зафиксируем λ и $\bar{\lambda}$ и для всех x, лежащих на $[x^0,\ x^0+h]$, обозначим через $\bar{z}(x;\ \lambda,\ \bar{\lambda})$ наибольшее из m выраже-

[1]) Отметим, что на отрезке $[x^0,\ x^0+h]$ функции U_l ограничены в совокупности.

ний $\left|\dfrac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} - U_i\right|$. Тогда, применяя снова лемму Гронуолла, мы получим, что

$$\left|\frac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} - U_i\right| < \varepsilon h e^{M_1 h},$$

равномерно при $|\bar{\lambda} - \lambda| < \rho$, а потому $U_i = \lim\limits_{\bar{\lambda} \to \lambda} \dfrac{\bar{y}_i - y_i}{\bar{\lambda} - \lambda} = \dfrac{\partial y_i}{\partial \lambda}$, что и требовалось доказать.

5. Дифференцируемость по начальным значениям решений. Теперь легко показать, что функции y_i дифференцируемы по начальным значениям решений, и доказать справедливость равенств (10_1) и (10_2). Подставим в систему (1) вместо функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$ функции $z_1, z_2, \ldots, z_m$, связанные с ними равенствами

$$y_i = z_i + y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{13}$$

Функции z_i удовлетворяют системе

$$\frac{dz_i}{dx} = f_i(x;\ z_1 + y_1^0, \ldots, z_m + y_m^0;\ \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1'}$$

и начальным условиям $z_i = 0$ при $x = x^0$. Рассматривая y_k^0 как параметр, получаем в силу результатов предыдущего пункта [1]), что

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial z_i}{\partial y_k^0}\right) = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,l}(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_m, \lambda)\left(\frac{\partial z_l}{\partial y_k^0} + \delta_{l,k}\right)$$

и что при $x = x^0$ $\dfrac{\partial z_i}{\partial y_k^0} = 0$. С помощью соотношений (13) мы убеждаемся теперь в справедливости равенств (10_1) и (10_2).

6. Дифференцируемость по начальному значению независимой переменной. Для того, чтобы доказать, наконец, дифференцируемость решений по x^0 и вывести соотношения (9_1) и (9_2), обозначим через $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ решение системы (1), получающееся, если мы заменим x^0 на $\bar{x}^0$, оставив неизменными $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$. Используя оче-

---

[1]) Мы предполагаем при этом, что в системе (1′) z_k изменяются на отрезке, лежащем внутри $[\beta_k - y_k^0 - b,\ \beta_k - y_k^0 + b]$, центр которого лежит в нуле.

видные обозначения, мы получаем, что

$$y_i = y_i^0 + \int_{x^0}^{x} f_i(x;\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m;\, \lambda)\, dx,$$

$$\overline{y}_i = y_i^0 + \int_{\overline{x}^0}^{x} f_i(x;\, \overline{y}_1,\, \overline{y}_2,\, \ldots,\, \overline{y}_m;\, \lambda)\, dx,$$

$$\frac{\overline{y}_i - y_i}{\overline{x}^0 - x^0} = \int_{x^0}^{x} \frac{f_i(x;\, \overline{y}_1,\, \overline{y}_2,\, \ldots,\, \overline{y}_m;\, \lambda) - f_i(x;\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m;\, \lambda)}{\overline{x}^0 - \overline{x}^0}\, dx -$$

$$- \frac{1}{\overline{x}^0 - x^0} \int_{x^0}^{\overline{x}^0} f_i\ (x;\, \overline{y}_1,\, \overline{y}_2,\, \ldots,\, \overline{y}_m;\, \lambda)\, dx,$$

$$\frac{\overline{y}_i - y_i}{\overline{x}^0 - x^0} = \int_{x^0}^{x} \left[\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\, l}(x;\, y_1^*,\, y_2^*,\, \ldots,\, y_m^*;\, \lambda) \frac{\overline{y}_l - y_l}{\overline{x}^0 - x^0} \right] dx -$$

$$- f_i(x^{**};\, y_1^{**},\, y_2^{**},\, \ldots,\, y_m^{**};\, \lambda).$$

Из системы (9_1) и начальных условий (9_2) получаем, что

$$Z_i = \int_{x^0}^{x} [\sum_{l=1}^{m} \varphi_{i,\, l}(x;\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m;\, \lambda)\, Z_l]\, dx -$$

$$- f_1(x^0;\, y_1^0,\, y_2^0,\, \ldots,\, y_m^0;\, \lambda),$$

откуда, с помощью рассуждений, аналогичных проведенным в п. 4 этого параграфа, следует, что

$$\lim_{\overline{x}^0 \to x^0} \frac{\overline{y}_i - y_i}{\overline{x}^0 - x^0} = Z_i.$$

7. Общее решение системы дифференциальных уравнений. а) Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x;\, y_1,\, y_2,\, \ldots,\, y_m) \quad (i = 1,\, 2,\, \ldots,\, m), \tag{1}$$

причем функции f_i удовлетворяют условиям, указанным в п. 2 этого параграфа. Тогда для любой точки x^0 отрезка $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta]$ и любой системы значений $y_1^0;\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0$, удовлетворяющей указанным там ограничениям, найдется одно и только одно решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $y_i(x^0) = y_i^0$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$. То же самое решение получится, если взять в качестве начальных значений в какой-либо другой точке отрезка $[\alpha - \delta,\ \alpha + \delta]$ систему значений, принимаемых в этой точке рассматриваемыми решениями. Поэтому можно сказать, что решения системы (1) являются функциями $m+1$ аргумента x; $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ в прямоугольном параллелепипеде, заданном неравенствами

$$|x-\alpha|\leqslant\delta, \quad |y_i^0-\beta_i|\leqslant\frac{b}{2}.$$

Если обозначить функции y_i через $\varphi_i(x; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, *то функции* $y_1=\varphi_1(x; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, $y_2=\varphi_2(x; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$, $\ldots$, $y_m=\varphi_m(x; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)$ *образуют общее решение или общий интеграл нашей системы.*

б) Общее решение системы зависит от m произвольных постоянных, причем зависит от них существенным образом.

Последнее выражение означает, что невозможно найти меньшее число постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_l$ $(l<m)$ таким образом, чтобы тождественно выполнялось равенство

$$\varphi_i(x; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)\equiv\Phi_i(x; c_1, c_2, \ldots, c_l) \quad (i=1, 2, \ldots, m), \tag{14}$$

где функции Φ_i имеют непрерывные производные по своим аргументам.

В самом деле, якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m)}{\partial(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0)}$$

имеет, в силу формулы (7_2), вид

$$\begin{vmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} & \ldots & V_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{m,1} & V_{m,2} & \ldots & V_{m,m} \end{vmatrix}$$

и поэтому, в силу (10_2), равен единице при $x=x^0$. Но отсюда следует невозможность равенства (14) при $l<m$ (см. Бианки [1], стр. 30)[1]).

§ 6. Доказательство теоремы существования по методу Коши — Липшица

1. Геометрические рассмотрения. а) Рассмотрим сначала уравнение

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y), \tag{1}$$

где функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике R_2, определенном неравенствами

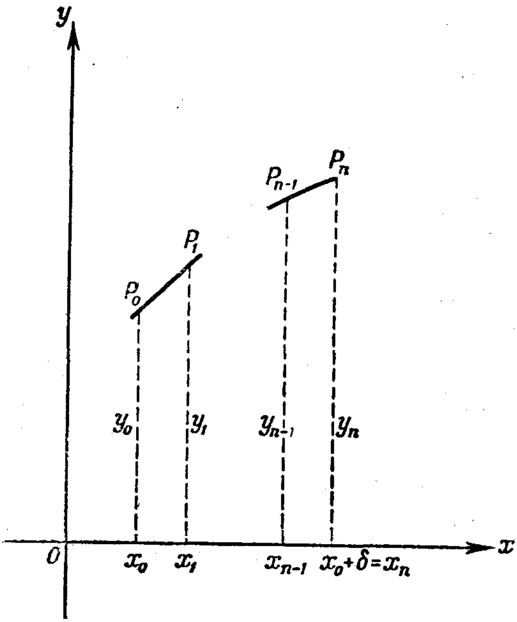
$$|x-\alpha|\leqslant a, \quad |y-\beta|\leqslant b,$$

и предположим, что каждой точке (x_0, y_0) этого прямоугольника соответствует одно и только одно решение $y=y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$.

[1]) См. также Чеботарев Н. Г. [1], стр. 73.

Рассматривая x и y как прямоугольные декартовы координаты на плоскости, скажем, что $y = y(x)$ является уравнением *интегральной кривой* уравнения (1), проходящей через точку $P_0 \equiv (x_0, y_0)$. Наши предположения означают, что через каждую точку P_0 прямоугольника R_2 проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (1).

Вообще, уравнение (1) *фиксирует* в каждой точке $P \equiv (x, y)$ из R_2 направление с угловым коэффициентом $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Назовем, вместе с Ли (см. Ли [1], т. I, стр. 11) *линейным элементом* совокупность точки и некоторого направления. На прямоугольнике R_2 имеется ∞^3 линейных элементов, из совокупности которых уравнение (1) выделяет совокупность ∞^2 линейных элементов, распадающихся на ∞^1 интегральных кривых. Эти рассуждения намечают путь для установления существования решения уравнения (1), который был строго проведен Коши в данном им первом доказательстве теоремы существования[1]).



Фиг. 5.

Разделим отрезок $[x^0, x^0 + \delta]$, на котором мы хотим построить решение уравнения (1), на n последовательно расположенных отрезков δ_1, $\delta_2, \ldots, \delta_n$ и построим ломаную $P_0P_1P_2 \ldots P_n$, проекциями звеньев которой на ось x являются, соответственно отрезки $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, а угловой коэффициент каждого звена P_iP_{i+1} равен $f(x_i, y_i)$, где через x_i и y_i обозначены координаты точки P_i (фиг. 5).

[1]) Это доказательство, данное Коши в его лекциях, читанных с 1820 г. по 1830 г. в парижской Политехнической школе, было изложено Муаньо [1]. В доказательстве Коши требуется, в случае уравнения (1), непрерывность $f_y(x, y)$ в R_2.

Липшиц доказал теорему при более общем предположении, что в R_2 имеем $|f(x, \bar{y}) - f(x, y)| \leqslant L\,|\bar{y} - y|$, где L — абсолютная постоянная (см. § 3, п. 1); метод Коши — Липшица приводит к одному из наиболее важных способов численного решения уравнений и систем дифференциальных уравнений (см. гл. XI, § 4).

Пусть n стремится к бесконечности, а длины отрезков δ_i равномерно стремятся к нулю; тогда, как мы увидим в п. 2, из ломаных $P_0P_1P_2 \ldots P_{n-1}P_n$ можно выбрать последовательность, равномерно сходящуюся к искомой интегральной кривой.

б) Аналогично рассматривается случай двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx}=g(x, y, z) \tag{2}$$

с двумя искомыми функциями y и z. В этом случае каждой точке $P \equiv (x, y, z)$ пространства соответствует направление с направляющими косинусами

$$[1+f^2+g^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad f[1+f^2+g^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad g[1+f^2+g^2]^{-\frac{1}{2}} \tag{3}$$

и, тем самым, точка P определяет некоторый *линейный элемент*; интегральными кривыми будут кривые, касательные к которым в каждой точке имеют направление, определяемое формулами (3). Если функции f и g удовлетворяют сделанным в § 3, п. 1 предположениям, то через каждую точку P проходит только одна интегральная кривая, а потому интегральные кривые образуют двупараметрическое семейство кривых или, как говорят, *конгруенцию*.

в) Аналогичные рассмотрения можно провести и для систем высшего порядка.

2. Теорема существования в формулировке Пеано. Доказательство Арцела. а) Докажем методом Коши — Липшица теорему существования для системы

$$y_i'=f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{4}$$

Предположим, что функции $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ непрерывны в прямоугольном параллелепипеде R_{m+1} с центром $[x^0+\frac{a}{2}; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0]$, определенном неравенствами

$$x^0 \leqslant x \leqslant x^0+a; \qquad -b \leqslant y_i-y_i^0 \leqslant b, \quad (i=1, 2, \ldots, m),$$

и пусть в R_{m+1}

$$|f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)| \leqslant M. \tag{5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел a и $\frac{b}{M}$.

Если ограничиться лишь теоремой существования, то, как мы далее увидим, непрерывность функций $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ достаточна для того, чтобы обеспечить существование хотя бы одного решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ системы (4), *определенного на $[x^0, x^0+\delta]$ и удовлетворяющего начальным условиям*

$$y_i(x^0)=y_i^0 \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Этот важный результат теории дифференциальных уравнений принадлежит Пеано (см. Пеано [3], [4]). Мы изложим доказательство, аналогичное данному Арцела (см. Арцела [1], [2])[1]) для случая уравнения $y' = f(x, y)$.

Разделим отрезок $[x^0, x^0+\delta]$ на 2^n равных частей и положим

$$x_{n,k} = x^0 + k\delta 2^{-n} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2^n; \quad n = 1, 2, \ldots). \tag{7}$$

Определим теперь на отрезке $[x^0, x^0+\delta]$ функции

$$\Phi_{1,n}(x), \quad \Phi_{2,n}(x), \ldots, \Phi_{m,n}(x)$$

по следующему закону: положим

$$\Phi_{1,n}(x_{n,0}) = y_1^0, \ldots, \quad \Phi_{m,n}(x_{n,0}) = y_m^0 \tag{8_0}$$

для точек x, принадлежащих отрезку $(x_{n,0} \leqslant x \leqslant x_{n,0} + \delta 2^{-n})$,

$$\Phi_{l,n}(x) = \Phi_{l,n}(x_{n,0}) + \\ + (x - x_{n,0}) f_l[x_{n,0}; \ \Phi_{1,n}(x_{n,0}), \ldots, \Phi_{m,n}(x_{n,0})] \tag{8_1}$$

$(l = 1, 2, \ldots, m)$ для точек, принадлежащих $[x_{n,1}, x_{n,1} + \delta 2^{-n}]$,

$$\Phi_{l,n}(x) = \Phi_{l,n}(x_{n,1}) + \\ + (x - x_{n,1}) f_l[x_{n,1}; \ \Phi_{1,n}(x_{n,1}), \ldots, \Phi_{m,n}(x_{n,1})] \tag{8_2}$$

и, вообще, для точек, принадлежащих $[x_{n,k}; x_{n,k} + \delta 2^{-n}]$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$,

$$\Phi_{l,n}(x) = \Phi_{l,n}(x_{n,k}) + \\ + (x - x_{n,k}) f_l[x_{n,k}; \ \Phi_{1,n}(x_{n,k}), \ldots, \Phi_{m,n}(x_{n,k})]. \tag{8_{k+1}}$$

Пусть

$$\psi_{l,n}(x) = f_l[x_{n,k}; \quad \Phi_{1,n}(x_{n,k}), \ldots, \Phi_{m,n}(x_{n,k})], \tag{9}$$

когда $x_{n,k} \leqslant x \leqslant x_{n,k} + \delta 2^{-n}$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$. Тогда для x, принадлежащих $[x_{n,k}, x_{n,k} + \delta 2^{-n}]$, имеем

$$\Phi_{l,n}(x) = \Phi_{l,n}(x_{n,k}) + \int_{x_{n,k}}^{x} \psi_{l,n}(x)\,dx.$$

Но

$$\Phi_{l,n}(x_{n,k}) = \Phi_{l,n}(x_{n,k-1}) + \int_{x_{n,k-1}}^{x_{n,k}} \psi_{l,n}(x)\,dx,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Phi_{l,n}(x_{n,1}) = y_l^0 + \int_{x_{n,0}}^{x_{n,1}} \psi_{l,n}(x)\,dx.$$

[1]) Относительно уравнения $y' = f(x, y)$ и *нового метода* доказательства, основанного на использовании аппроксимирующих многочленов, см. Северини [1], [2] (ср. также гл. VIII, § 7, п. 1). Относительно приведенного в тексте доказательства см. Камке [1], стр. 126—130.

Суммируя эти равенства, получаем для любой точки x из $[x^0, x^0+\delta]$ равенство

$$\Phi_{l,n}(x)=y_l^0+\int_{x^0}^{x}\psi_{l,n}(x)\,dx. \tag{10}$$

Легко доказать по индукции, что написанные формулы имеют смысл, т. е. что

$$|\psi_{l,n}(x)|\leqslant M, \quad |\Phi_{l,n}(x)-y_l^0|\leqslant b. \tag{11}$$

Заметим, в самом деле, что в силу (8_0) $|\Phi_{l,n}(x^0)-y_l^0|=0$, а в силу (9) $|\psi_{l,n}(x)|\leqslant M$ на отрезке $[x_{n,0}, x_{n,1}]$. Но тогда из соотношения (10) вытекает, что

$$|\Phi_{l,n}(x)-y_l^0|\leqslant|x-x^0|\,M\leqslant bM^{-1}M=b.$$

Тем самым показана законность формулы (8_2) и справедливость равенства (10) на $[x_{n,1}, x_{n,2}]$. Переходя таким образом от каждого отрезка к последующему, мы убеждаемся в справедливости неравенств (11).

Если ξ_1, ξ_2 — любые точки, принадлежащие $[x^0, x^0+\delta]$, то в силу (10)

$$|\Phi_{l,n}(\xi_2)-\Phi_{l,n}(\xi_1)|=\left|\int_{\xi_1}^{\xi_2}\psi_{l,n}(x)\,dx\right|\leqslant M\,|\xi_2-\xi_1|, \tag{12}$$

а потому функции

$$\Phi_{1,1}(x),\ \Phi_{1,2}(x),\ \ldots,\ \Phi_{1,n}(x),\ \ldots \tag{13}$$

равностепенно непрерывны и равномерно ограничены в $[x^0, x^0+\delta]$. По теореме Асколи[1]) из последовательности (13) можно выделить

[1]) Для удобства читателя напомним интересующее нас предложение. [См., например, Петровский И. Г. [1], стр. 36. — *Прим. ред.*]

а) Последовательность $\{f_n(x)\}$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций называется *равностепенно непрерывной*, если для любого $\sigma>0$ можно найти такое $\delta>0$, что колебание каждой функции $f_n(x)$ на любом отрезке, длина которого не превосходит δ, меньше или равна σ.

б) Критерий Арцела: *если разностные отношения функций $f_n(x)$ ограничены в совокупности на $[a, b]$, то функции $f_n(x)$ равностепенно непрерывны на $[a, b]$*. В самом деле, в этом случае найдется такая постоянная M, что, каковы бы ни были точки x_1 и x_2 из $[a, b]$, имеет место неравенство $|f_n(x_1)-f_n(x_2)|<M\,|x_1-x_2|$ и, следовательно, в качестве δ можно выбрать $\frac{\sigma}{M}$.

в) Докажем теперь теорему Асколи: *пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных на $[a, b]$ функций; тогда можно выбрать из нее подпоследовательность, равномерно сходящуюся к непрерывной функции $\varphi(x)$.*

Рассмотрим всюду плотное на $[a, b]$ счетное множество $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, например множество рациональных чисел, заключенных между a и b. Пусть $|f_n(x)|\leqslant M$ $(n=1, 2, \ldots, a\leqslant x\leqslant b)$. Тогда последовательность $\{f_n(x_1)\}$ ограподпоследовательность

$$\Phi_{1,\lambda_1}(x), \ldots, \Phi_{1,\lambda_2}(x), \ldots, \Phi_{1,\lambda_p}(x), \ldots \quad [\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_p < \ldots],$$

равномерно сходящуюся к непрерывной функции $\Phi_1(x)$.

Но, в силу неравенства (12), функции последовательности

$$\Phi_{2,\lambda_1}(x), \ \Phi_{2,\lambda_2}(x), \ldots, \Phi_{2,\lambda_p}(x), \ldots$$

также равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на $[x^0, x^0+\delta]$, а потому из нее можно извлечь подпоследовательность

$$\Phi_{2,\mu_1}(x), \ \Phi_{2,\mu_2}(x), \ldots, \Phi_{2,\mu_p}(x), \ldots \quad [\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_p < \ldots],$$

равномерно сходящуюся на $[x^0, x^0+\delta]$ к некоторой функции $\Phi_2(x)$. Поэтому на $[x^0, x^0+\delta]$ равномерно выполняются соотношения

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_{1,\mu_p}(x) = \Phi_1(x), \quad \lim_{p\to\infty} \Phi_{2,\mu_p}(x) = \Phi_2(x).$$

Продолжая таким же образом далее, мы получим m последовательностей

$$\Phi_{l,\nu_1}(x), \ \Phi_{l,\nu_2}(x), \ldots, \Phi_{l,\nu_p}(x), \ldots$$
$$(l = 1, 2, \ldots, m; \ \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p < \ldots),$$

таких, что на $[x^0, x^0+\delta]$ равномерно выполняются соотношения

$$\lim_{p\to\infty} \Phi_{l,\nu_p}(x) = \Phi_l(x) \quad (l = 1, 2, \ldots, m), \tag{14}$$

ничена, так как $-M \leqslant f_n(x_1) \leqslant M$ и потому существует наибольший предел $\varphi(x_1)$ этой последовательности. Из последовательности $\{f_n(x_1)\}$ можно выбрать такую подпоследовательность

$$f_{1,1}(x), f_{1,2}(x), \ldots, f_{1,n}(x), \ldots, \tag{1}$$

что

$$\lim_{n\to\infty} f_{1,n}(x_1) = \varphi(x_1) \qquad [\,|\varphi(x_1)| \leqslant M].$$

Повторяя это рассуждение для точки x_2, выделим из (1) подпоследовательность

$$f_{2,1}(x), f_{2,2}(x), \ldots, f_{2,n}(x), \ldots \tag{2}$$

такую, что

$$\lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_1) = \varphi(x_1), \ \lim_{n\to\infty} f_{2,n}(x_2) = \varphi(x_2), \ [\,|\varphi(x_2)| \leqslant M].$$

Продолжим этот процесс и рассмотрим подпоследовательность

$$f_{1,1}(x), f_{2,2}(x), \ldots, f_{n,n}(x), \ldots \tag{3}$$

Она сходится в точках $x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots$ к значениям $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \ldots, \varphi(x_m), \ldots$ соответственно. Покажем, что она *сходится в* $[a, b]$ *и притом равномерно*.

Выберем, в самом деле, $\sigma > 0$ и найдем такое δ, что колебание всех функций $f_n(x)$ на любом отрезке, длина которого не превосходит δ, меньше или равна σ. Разделим $[a, b]$ на p равных отрезков, выбрав p так, что $\frac{b-a}{p} < \delta$. Пусть это будут отрезки $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$. Так как множество $\{x_n\}$ всюи в силу (8_0) и второго неравенства из (11)

$$\Phi_l(x^0)=y_l^0, \ |\Phi_l(x)-y_l^0|\leqslant b, \ (x^0\leqslant x\leqslant x^0+\delta; \ l=1, 2, \ldots, m). \quad (15)$$

Докажем теперь, что m функций

$$y_1=\Phi_1(x), \ y_2=\Phi_2(x), \ \ldots, \ y_m=\Phi_m(x)$$

дают нам решение системы (4). Для этого нам *достаточно показать, что на* $[x^0, x^0+\delta]$ *равномерно выполняются соотношения*

$$\lim_{p\to\infty}\psi_{l,\nu_p}(x)=f_l\,[x; \ \Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ \ldots, \ \Phi_m(x)], \quad (16)$$

ибо тогда, полагая в (10) $n=\nu_p$ и переходя к пределу при $p\to\infty$, мы получим равенства

$$\Phi_l(x)=y_l^0+\int_{x_0}^{x} f_l\,[x; \ \Phi_1(x), \ \Phi_2(x), \ \ldots, \ \Phi_n(x)]\,dx,$$

из которых следует, что функции $\Phi_l(x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений, равносильных данной системе (4).

Пусть $x^0\leqslant x\leqslant x^0+\delta$; для данного x и любого ν_p можно найти такое k, что

$$x_{\nu_p,k}\leqslant x\leqslant x_{\nu_p,k}+\delta 2^{-\nu_p}, \quad |x-x_{\nu_p,k}|\leqslant\delta 2^{-\nu_p}, \quad (17)$$

и потому, в силу (8_{k+1}), имеем

$$|\Phi_{l,\nu_p}(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})|\leqslant\delta 2^{-\nu_p}M. \quad (18)$$

Аналогично доказывается, что

$$|\Phi_l(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})|\leqslant|\Phi_l(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x)|+|\Phi_{l,\nu_p}(x)-\Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})|.$$

ду плотно на $[a, b]$, то в каждом из этих отрезков найдутся точки этого множества. Обозначим через ξ_1 первую из точек последовательности $\{x_n\}$, лежащую внутри δ_1, через ξ_2 — первую из точек этой последовательности, лежащую внутри δ_2, и т. д. Последовательность (3) сходится в точках ξ_1, $\xi_2, \ldots, \xi_p$, а потому найдется такое целое число m^0, что при $m'>m^0$, $m''>m^0$ имеем

$$|f_{m',m'}(\xi_r)-f_{m'',m''}(\xi_r)|<\sigma \qquad (r=1, 2, \ldots, p).$$

Пусть теперь x принадлежит отрезку δ_r; тогда

$$|f_{m',m'}(x)-f_{m'',m''}(x)|=|[f_{m',m'}(x)-f_{m',m'}(\xi_r)]-$$
$$-[f_{m'',m''}(x)-f_{m'',m''}(\xi_r)]+[f_{m',m'}(\xi_r)-f_{m'',m''}(\xi_r)]|<3\sigma,$$

откуда, в силу произвольности σ, следует, что подпоследовательность (3) *равномерно* сходится к некоторой функции $\varphi(x)$, причем, в силу непрерывности функций $f_n(x)$, функция $\varphi(x)$ непрерывна.

г) Из проведенного доказательства вытекает следствие: *если функции $f_n(x)$ последовательности $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывны и равномерно ограничены на отрезке $[a,b]$ и если эта последовательность сходится на некотором счетном всюду плотном в $[a, b]$ множестве, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится на $[a, b]$ к некоторой непрерывной функции $\varphi(x)$.*

Отсюда, в силу (18) и равномерной сходимости в $[x^0, x^0+\delta]$ последовательности (14), вытекает, что в $[x^0, x^0+\delta]$ равномерно выполняется соотношение

$$\lim_{p\to\infty} |\Phi_l(x) - \Phi_{l,\nu_p}(x_{\nu_p,k})| = 0,$$

а потому, в силу (9) и непрерывности функций $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ в R_{m+1}, равномерно выполняется и соотношение (16).

б) Если функции $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ определены в прямоугольном параллелепипеде, заданном неравенствами

$$x^0 - a \leqslant x \leqslant x^0; \; |y_i - y_i^0| \leqslant b \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

то в отрезке $[x^0 - \delta, x^0]$ система (4) с начальными условиями (6) имеет хотя бы одну систему решений $y_1 = y_1(x)$, $y_2 = y_2(x)$, ..., $y_m = y_m(x)$ (относительно обозначений см. „а").

в) Из наших рассуждений не следует единственность системы решений для (4), (6) и в гл. VIII будет показано, что непрерывности функций $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ недостаточно для того, чтобы обеспечить эту единственность.

г) Отметим, наконец, что из проведенных в „а" рассуждений вытекает следствие: *если функции $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ определены в полосе S*

$$S\colon x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + a, \quad -\infty < y_1, y_2, \ldots, y_m < +\infty$$

и непрерывны и ограничены в этой полосе, то, какова бы ни была совокупность m чисел $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$, найдется хотя бы одно определенное во всем отрезке $[x^0, x^0+a]$ решение системы дифференциальных уравнений

$$y_i' = f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(x^0) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Точно так же, *для любого дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} = f(x; y, y', \ldots, y^{(n-1)}),$$

такого, что функция $f(x; y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ непрерывна и ограничена в полосе S

$$S : x^0 \leqslant x \leqslant x^0 + a, \quad -\infty < y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)} < +\infty,$$

найдется хотя бы одно решение $y = y(x)$, определенное в $[x^0, x^0+a]$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x^0) = y^0; \quad y'(x^0) = y_1^0; \quad y^{(n-1)}(x^0) = y_{n-1}^0,$$

где $y^0, y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0$ — любые постоянные величины.

Для доказательства достаточно рассмотреть эквивалентную систему

$$y_1'=y_2, \ldots, y_{n-1}'=y_n, \quad y_n'=f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

3. Доказательство Тонелли теоремы существования в формулировке Пеано. а) Мы хотим дать упрощенное доказательство теоремы Пеано, получающееся специализацией способа доказательства теорем существования, разработанного Тонелли для функциональных уравнений типа Вольтерра. Отметим, что способ Тонелли[1]), основанный в значительной степени на методе Коши — Липшица, не только дает полезный метод эффективного вычисления решений, но позволяет также доказать теорему существования при значительно менее ограничительных предположениях о функциях $f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m)$ (см. гл. VIII, § 8, п. 1).

б) Предположим, что система

$$y_i'=f_i(x; y_1, y_2, \ldots, y_m) \quad (i=1, 2, \ldots, m)$$

удовлетворяет указанным в п. 2 „а" условиям. Покажем, что в этом случае существует *хотя бы одно* определенное в $[x^0, x^0+\delta]$ решение $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(x^0)=y_i^0 \quad (i=1, 2, \ldots, m). \tag{6}$$

Как и в § 3, п. 2, заменим систему (4), (6) эквивалентной ей системой интегральных уравнений

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x; y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x))\,dx \tag{19}$$

и покажем существование хотя бы одной системы непрерывных функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$, определенных в $[x_0, x_0+\delta]$ и удовлетворяющих системе (19). Определим для любого натурального n функции $y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \ldots, y_m^{(n)}(x)$ на $[x^0, x^0+\delta]$ по следующему правилу:

$$y_i^{(n)}(x)=y_i^0 \quad \text{при} \quad x^0\leqslant x\leqslant x^0+\frac{\delta}{n}, \tag{20_1}$$

$$y_i^{(n)}(x)=y_i^0+\int_{x^0}^{x-\frac{\delta}{n}} f_i(x; y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \ldots, y_m^{(n)}(x))\,dx \tag{20_2}$$

при $x^0+\frac{\delta}{n}\leqslant x\leqslant x^0+\delta$[2]).

---

[1]) См. Тонелли [1]. Этот мемуар содержит теорему существования и некоторые удобные условия теоремы единственности; относительно непрерывной зависимости решений от начальных данных см. Чинквини [1].

[2]) Для применения формулы (20_2) следует, учитывая формулу (20_1), найти функции $y_i^{(n)}(x)$ на отрезке $\left[x^0+\frac{\delta}{n}, x^0+\frac{2\delta}{n}\right]$, потом найти те же функции $y_i^{(n)}(x)$ на $\left[x^0+\frac{2\delta}{n}, x^0+\frac{3\delta}{n}\right]$ и так далее.

Формулы (20_1) и (20_2) показывают, что значения функции $y_i^{(n)}(x)$ не выходят из области, в которой существует $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$. В самом деле,

$$|y_i^{(n)}(x)-y_i^0|\leqslant M\delta\leqslant b.$$

В силу формул (20_1) и (20_2) функции $\{y_1^{(n)}(x)\}$, $\{y_2^{(n)}(x)\}, \ldots$ $\ldots,\ \{y_m^{(n)}(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Поэтому, как было указано в п. 2 „а", можно выделить m подпоследовательностей

$$\{y_1^{(\lambda_n)}(x)\},\ \{y_2^{(\lambda_n)}(x)\},\ \ldots,\ \{y_m^{(\lambda_n)}(x)\},\quad \lambda_1<\lambda_2<\ \ldots\ <\lambda_n<\ \ldots,$$

которые при $n\to\infty$ равномерно сходятся к m непрерывным функциям

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x).$$

Начальные условия (6) выполнены в силу построения. Легко доказать также, что построенные функции удовлетворяют и системе (19) В самом деле,

$$y_i^{(\lambda_n)}(x)=y_i^0+\int\limits_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1^{(\lambda_n)}(x),\ y_2^{(\lambda_n)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(\lambda_n)}(x))\,dx-$$
$$-\int\limits_{x-\frac{\delta}{\lambda_n}}^{x} f_i(x;\ y_1^{(\lambda_n)}(x),\ y_2^{(\lambda_n)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(\lambda_n)}(x))\,dx. \tag{21}$$

Во втором слагаемом в правой части можно перейти к пределу при $n\to\infty$ под знаком интеграла, а третий член в правой части не превосходит по абсолютной величине значения $\frac{M\delta}{\lambda_n}$ и потому стремится к нулю при $n\to\infty$. Поэтому, переходя в (21) к пределу при $n\to\infty$, получаем (19).

в) *Пусть в системе*

$$y_i'=f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{4}$$

функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ *определены в полосе* S:

$$x^0<x\leqslant x^0+a;\quad -\infty<y_i<+\infty\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)\,^{1)},$$

непрерывны там и удовлетворяют неравенству

$$|f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)|\leqslant M(x)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

где функция $M(x)$ *суммируема в смысле Лебега в* $[x^0,\ x^0+a]$.

---

[1]) Функции $f_i(x;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ могут обращаться в точке $x=x^0$ в бесконечность или же не быть определенными в этой точке.

Построим по формулам (20_1) и (20_2) последовательности $\{y_1^{(n)}(x)\}$, $\{y_2^{(n)}(x)\}$, ..., $\{y_m^{(n)}(x)\}$; по формуле (20_2) получаем, что

$$|y_i^{(n)}(x')-y_i^{(n)}(x'')|=$$
$$=\left|\int\limits_{x'-\frac{\delta}{n}}^{x''-\frac{\delta}{n}} f_i(x;\ y_1^{(n)}(x),\ y_2^{(n)}(x),\ \ldots,\ y_m^{(n)}(x))\,dx\right|\leqslant\left|\int\limits_{x'-\frac{\delta}{n}}^{x''-\frac{\delta}{n}} M(x)\,dx\right|,$$

и, в силу абсолютной непрерывности $\int\limits_{x^0}^{x} M(x)\,dx$, отсюда заключаем, что функции последовательности $\{y_1^{(n)}(x)\}$, ..., $\{y_m^{(n)}(x)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Повторяя рассуждение Тонелли, мы убеждаемся, что *при сделанных предположениях существует, по крайней мере, одна система определенных в* $[x^0,\ x^0+a]$ *функций, которые абсолютно непрерывны в* $[x^0,\ x^0+a]$ *и являются решениями системы*

$$y_i(x)=y_i^0+\int\limits_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_m(x))\,dx. \tag{19}$$

Эти функции удовлетворяют тогда при $x^0<x\leqslant x^0+a$ *системе* (4) *и начальным условиям* $y_i(x^0)=y_i^0$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

г) Если для системы (4) при любом выборе начальных значений y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0 справедлива теорема единственности, то при выполнении сделанных в „в" предположений описанный там процесс приводит к соответствующему решению

$$y_1(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0),\ y_2(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0),\ldots,\ y_m(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0).$$

Докажем, что *если выполнены сделанные в „в" предположения и если для системы* (4) *имеет место теорема единственности при любых начальных значениях* y_1^0, y_2^0, ..., y_m^0, *то все решения* $y_i(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0)$ *непрерывно зависят от точки* $(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ldots,\ y_m^0)$ *из* S [1]).

Положим, для упрощения записи, $P\equiv(y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0)$, $y_i(x,\ P)=$ $=y_i(x;\ y_1^0,\ y_2^0,\ \ldots,\ y_m^0)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ и докажем сначала, что при любой точке $\overline{P}\equiv(\overline{y}_1^0,\ \overline{y}_2^0,\ \ldots,\ \overline{y}_m^0)$ для всех x справедливо равенство

$$\lim_{P\to\overline{P}} y_i(x;\ P)=y_i(x;\ \overline{P})\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m). \tag{22}$$

[1]) Относительно частного случая этой теоремы см. § 5, п. 1 „а". Относительно теоремы, указанной в тексте, см. Каратеодори [1], стр. 678.

Докажем это утверждение от противного. Предположим, что для некоторого $\bar{x}$ можно найти хотя бы один индекс i ($i=1, 2, \ldots, m$), для которого равенство (22) не имеет места. Тогда можно было бы найти такую последовательность точек $\{P_n\}$, $P_n \equiv (y_1^{(n, 0)}, y_2^{(n, 0)}, \ldots$ $\ldots, y_m^{(n, 0)})$, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \bar{P}$ и

$$\lim_{n\to\infty} y_i(\bar{x};\ P_n) = \gamma \neq y_i(\bar{x};\ \bar{P}). \tag{23}$$

В самом деле, в силу неравенства

$$|y_i(x;\ P)| \leqslant |y_i^0| + \int\limits_{x^0}^{x^0+a} M(x)\,dx,$$

функция $y_i(\bar{x};\ P)$ остается ограниченной, когда P изменяется в m-мерном шаре с центром в точке $\bar{P}$ и радиусом ρ ($\rho > 0$). Обозначим через M_n и m_n соответственно верхнюю и нижнюю грани значений функции $y_i(\bar{x}, P)$ при условии, что P пробегает m-мерный шар $\left(\text{центр которого лежит в точке } \bar{P} \text{ и радиус равен } \frac{\rho}{n}\right)$, не совпадая при этом с точкой $\bar{P}$. Тогда оба предела $\lim\limits_{n\to\infty} M_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} m_n$ конечны, причем хотя бы один из них, например $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = \gamma$, отличен от $y_i(\bar{x};\ \bar{P})$.

Отсюда следует, что для любого n найдется такая точка P_n, $P_n \neq \bar{P}$, что P_n лежит в сфере радиуса $\frac{\rho}{n}$ с центром $\bar{P}$, причем

$$M_n - \frac{1}{n} \leqslant y_i(\bar{x};\ P_n) \leqslant M_n.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_i(\bar{x};\ P_n) = \gamma \neq y_i(\bar{x};\ \bar{P})$.

В силу того, что

$$|y_i(x+h;\ P) - y_i(x;\ P)| \leqslant \left| \int\limits_{x}^{x+h} M(x)\,dx \right| \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{24}$$

функции $y_i(x;\ P_n)$ ($i = 1, 2, \ldots, m$; $n = 1, 2, \ldots$) равномерно ограничены и равностепенно непрерывны в $[x^0, x^0 + a]$ и по теореме Асколи[1]) из последовательностей $\{y_i(x;\ P_n)\}$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) можно извлечь m подпоследовательностей, обозначаемых для простоты

---

[1]) См. примечание на стр. 38. Вместо функций $f_n(x)$ следует применить указанные там рассуждения к функциям $y(x;\ P_n)$, изменяющимся при изменении у точек P_n индекса n. [Нетрудно видеть, что для применимости теоремы Асколи безразлично, принадлежат ли концы отрезка $[a, b]$ к этому отрезку. — *Прим. ред.*]

записи также через $\{y_i(x;\ P_n)\}$[1]), что для всех x, принадлежащих $[x^0,\ x^0+a]$, равномерно выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} y_i(x;\ P_n)=\varphi_i(x) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{25}$$

где функции $\varphi_i(x)$ непрерывны в $[x^0,\ x^0+a]$. Так как

$$y_i(x;\ P_n)=y_i^{(n,\ 0)}+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ y_1(x;\ P_n),\ y_2(x;\ P_n),\ \ldots,\ y_m(x;\ P_n))\,dx,$$

а f_i непрерывны в S, то, переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем, что

$$\varphi_i(x)=\bar{y}_1^0+\int_{x^0}^{x} f_i(x;\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x))\,dx.$$

Таким образом, функции $\varphi_i(x)$ образуют систему решений для (4), удовлетворяющую начальным условиям $\varphi_i(x^0)=\bar{y}_i^0$, $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$, а потому, в силу предположения о единственности решения, имеет место равенство

$$\varphi_i(x)=y_i(x;\ \bar{P}),$$

и, в частности, $\varphi_i(\bar{x})=y_i(\bar{x};\ \bar{P})$, вопреки (23) и (25).

Для того, чтобы доказать, наконец, непрерывность решений относительно пары $(x;\ P)$, заметим, что в силу (24)

$$|y_i(x+h;\ P)-y_i(x;\ \bar{P})|\leqslant y_i(x+h;\ P)-y_i(x;\ P)|+$$
$$+|y_i(x;\ P)-y_i(x;\ \bar{P})|\leqslant\left|\int_{x}^{x+h} M(x)\,dx\right|+|y_i(x;\ P)-y_i(x;\ \bar{P})|,$$

откуда, ввиду абсолютной непрерывности интеграла $\int_{x_0}^{x} M(x)\,dx$ и равенства (22), и следует наше утверждение.

[1]) Относительно рассуждений см. п. 2 „а".

Глава II

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений.

1. Нормальные системы однородных линейных дифференциальных уравнений и линейные дифференциальные уравнения.

а) *Нормальной системой* однородных дифференциальных уравнений называется система вида[1])

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,m}y_m, \\ y_2' &= a_{2,1}y_1 + a_{2,2}y_2 + \ldots + a_{2,m}y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m' &= a_{m,1}y_1 + a_{m,2}y_2 + \ldots + a_{m,m}y_m, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $a_{i,k}$ — непрерывные функции от x на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$, а $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — искомые функции.

б) К системе типа (1) приводит решение *однородного линейного дифференциального уравнения порядка* m

$$y^{(m)} = p_1 y^{(m-1)} + p_2 y^{(m-2)} + \ldots + p_{m-1} y' + p_m y, \tag{2}$$

коэффициенты которого $p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}, p_m$ являются функциями от x, непрерывными на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$.

В самом деле уравнение (2) эквивалентно линейной системе (см. гл. I, § 1, п. 2 „а“)

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{m-1}' &= y_m, \\ y_m' &= p_m y_1 + p_{m-1} y_2 + \ldots + p_1 y_m. \end{aligned}$$

Обратно, система вида (1) может быть при достаточно общих предположениях приведена путем исключения $m-1$ искомой функ-

[1]) Этот параграф посвящен изучению *нормальных* линейных систем; общая теория систем m линейных дифференциальных уравнений, содержащих m искомых функций и их производные, будет изложена в гл. X.

ции к одному однородному линейному дифференциальному уравнению относительно одной искомой функции, имеющему, вообще говоря, порядок m [1]. Например, если коэффициенты $a_{i,k}$ системы (1) имеют производные $m-1$-го порядка в $[\alpha - a, \alpha + a]$, то мы можем последовательно дифференцировать первое уравнение системы (1), учитывая каждый раз остальные уравнения этой системы. Таким образом мы получаем

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}y_1 + a_{1,2}y_2 + \ldots + a_{1,m}y_m; \\ y_1'' &= b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(m)} &= c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_my_m. \end{aligned}$$

Если определитель этой системы отличен от нуля на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$, то ее можно решить относительно $y_1, y_2, \ldots, y_m$, причем для y_1 получится требуемое уравнение.

в) В силу замечания, сделанного в гл. I, § 3, п. 4 „а", *какова бы ни была точка x^0 из отрезка $[\alpha - a, \alpha + a]$ и какова бы ни была система начальных значений $c_1, c_2, \ldots, c_m$, существует одна и только одна система функций, удовлетворяющих системе* (1) *и принимающих в точке x^0 значения $c_1, c_2, \ldots, c_m$ соответственно; эти функции, кроме того, непрерывно зависят от x^0 на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$* [2].

Отметим еще, что если выбрать в описанном в гл. I, § 3, п. 2 процессе последовательных приближений за первые приближения $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_m(x)$ начальные значения $c_1, c_2, \ldots, c_m$, то приведенный там ряд последовательных приближений (I) примет вид

$$y_i(x) = c_1y_{i,1}(x) + c_2y_{i,2}(x) + \ldots + c_my_{i,m}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3}$$

Отсюда следует, что *содержащиеся в решении системы* (1) *произвольные постоянные входят в него линейно.*

Функции

$$y_{1,k}(x),\ y_{2,k}(x),\ \ldots,\ y_{m,k}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

образуют частное решение для (1), так как оно может быть получено из формулы (3), если положить

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = c_k - 1 = c_{k+1} = \ldots = c_m = 0.$$

Формула (3) дает нам вид решения системы (1). Мы рассмотрим глубже этот важный результат в „г" и „в" п. 2 и в п. 3.

---

[1] Для линейных систем без предположения о нормальности этот вопрос будет изучен в гл. X, § 4.

[2] См. гл. I, § 5, п. 1. Отметим, что если $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, то соответствующие решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ тождественно равны нулю или, как говорят, образуют нулевое решение.

Применяя полученные результаты к уравнению (2), мы видим, что *для любой точки* x^0 из $[\alpha - a, \alpha + a]$ *и любых постоянных величин* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *существует одно и только одно решение уравнения* (2), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x^0) = c_1,\ y'(x^0) = c_2,\ \ldots,\ y^{(m-1)}(x^0) = c_m,$$

иными словами, *задача Коши* для уравнения (2) имеет одно и только одно решение[1]).

г) Пусть вообще мы имеем p решений системы (1)

$$y_{1,k}(x),\ y_{2,k}(x),\ \ldots,\ y_{m,k}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{4}$$

иными словами, пусть

$$y'_{i,k} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_{l,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, p). \tag{5}$$

Умножая обе части этих равенств на постоянные c_k и суммируя по k от 1 до p, мы получим

$$\Big(\sum_{k=1}^{p} c_k y_{i,k}\Big)' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \Big(\sum_{k=1}^{p} c_k y_{l,k}\Big),$$

а потому, каковы бы ни были постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_p$, система m функций

$$y_i(x) = c_1 y_{i,1}(x) + c_2 y_{i,2}(x) + \ldots + c_p y_{i,p}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{6}$$

удовлетворяет данной системе уравнений.

Система (6) *называется линейной комбинацией p решений* (4) *с p произвольными постоянными.*

2. Формулы Лиувилля и Якоби. а) Пусть даны p решений системы (1)

$$y_{1,k},\ y_{2,k},\ \ldots,\ y_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p); \tag{7}$$

матрица

$$\left\| \begin{matrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{m,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,p} & y_{2,p} & \cdots & y_{m,p} \end{matrix} \right\| \tag{7'}$$

называется *матрицей этих p решений* (7).

б) Пусть даны m решений системы (1)

$$y_{1,k},\ y_{2,k},\ \ldots,\ y_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

---

[1]) Отметим, что если $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, то соответствующее решение уравнения (2) является *нулевым решением* $y(x) = 0$.

Рассмотрим определитель

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{m,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m} & y_{2,m} & \cdots & y_{m,m} \end{vmatrix} \cdot \tag{8}$$

их матрицы. Докажем, что если $\Delta(x^0)$ отличен от нуля в некоторой точке x^0 из $[\alpha-a, \alpha+a]$, то $\Delta(x)$ отличен от нуля на всем отрезке $[\alpha-a, \alpha+a]$.

В самом деле, дифференцируя $\Delta(x)$ по столбцам, мы получаем

$$\Delta'(x)=\sum_{i=1}^{m}\begin{vmatrix} y_{1,1} & \cdots & y_{i-1,1} & y'_{i,1} & y_{i+1,1} & \cdots & y_{m,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m} & \cdots & y_{i-1,m} & y'_{i,m} & y_{i+1,m} & \cdots & y_{m,m} \end{vmatrix},$$

откуда, в силу (5),

$$\Delta'(x)=\Delta(x)\sum_{i=1}^{m} a_{i,i}.$$

Интегрируя теперь от x^0 до x, мы получаем формулу Якоби (см. Якоби [2], стр. 222)

$$\Delta(x)=\Delta(x^0)\,e^{\int_{x_0}^{x}\sum_{i=1}^{m} a_{i,i}\,dx},$$

из которой следует, что $\Delta(x)\neq 0$ в $[\alpha-a, \alpha+a]$.

в) Применим теперь полученные результаты к дифференциальному уравнению (2). Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — система m решений этого уравнения. Из замечаний, сделанных в п. 1 „б", вытекает, что в этом случае определитель $\Delta(x)$ заменяется определителем

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y'_1 & y''_1 & \cdots & y_1^{(m-1)} \\ y_2 & y'_2 & y''_2 & \cdots & y_2^{(m-1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & y'_m & y''_m & \cdots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}, \tag{8'}$$

а формула (9) переходит в формулу Лиувилля

$$W(x)=W(x^0)\,e^{\int_{x^0}^{x} p_1\,dx} \tag{9'}$$

(см. Лиувилль [1], стр. 349).

Определитель W называется *вронскианом* m функций $y_1, y_2, \ldots, \ldots, y_m$; из наших рассуждений следует, что *если вронскиан W решений уравнения* (2) *отличен от нуля в какой-либо точке*