отрезка $[\alpha - a, \alpha + a]$, *то он отличен от нуля во всем этом отрезке.*

г) Полученные в „б" результаты могут быть обобщены следующим образом: *если в некоторой точке x^0 отрезка $[\alpha - a, \alpha + a]$ ранг матрицы (7′) совокупности p решений (7) равен p, то и в любой другой точке этого отрезка ранг этой матрицы равен p.*

Теорема верна, если $p = m$. Предположим, что $p < m$. Не теряя общности, мы можем считать, что

$$\begin{vmatrix} y_{1,1}(x^0) & y_{2,1}(x^0) & \ldots & y_{p,1}(x^0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,p}(x^0) & y_{2,p}(x^0) & \ldots & y_{p,p}(x^0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Присоединим тогда к p решениям (7) еще $m - p$ решений

$$y_{1,k}(x),\quad y_{2,k}(x),\ \ldots,\ y_{m,k}(x)\quad (k = p+1, \ldots, m), \tag{10}$$

определяемых начальными условиями

$$y_{1,p+r}(x^0) = \ldots = y_{p+r-1,\, p+r}(x^0) = y_{p+r,\, p+r}(x^0) - 1 =$$
$$= y_{p+r+1,\, p+r}(x^0) = \ldots = y_{m,\, p+r}(x^0) = 0,\quad (r = 1, 2, \ldots, m - p).$$

Определитель решений (7) и (10) отличен от нуля в точке x^0, а потому он отличен от нуля и на всем отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ и, следовательно, ранг составленной из его первых p строк матрицы (7′) в любой точке отрезка $[\alpha - a, \alpha + a]$ равен p.

Из доказанной теоремы следует, что *ранг матрицы, составленной из любого числа решений системы* (1), *постоянен на отрезке* $[\alpha - a, \alpha + a]$.

3. Независимые решения. Фундаментальные системы. Понижение порядка системы линейных однородных уравнений. а) *p решений системы* (1)

$$y_{1,k},\ y_{2,k},\ \ldots,\ y_{m,k}\quad (k = 1, 2, \ldots, p) \tag{7}$$

называются линейно зависимыми, если можно найти p постоянных величин $c_1, c_2, \ldots, c_p$, из которых хотя бы одна отлична от нуля, так, что на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ тождественно выполняются соотношения

$$c_1 y_{i,1} + c_2 y_{i,2} + \ldots + c_p y_{i,p} = 0\quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{11}$$

В противном случае данные p решений называются *линейно не зависимыми.*

Из этого определения следует, что *если p решений линейно зависимы, то хотя бы одно из них является линейной комбинацией остальных решений.*

б) *Для того, чтобы p решений* (7) *системы* (1) *были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы* (7′) *равнялся p в* $[\alpha - a, \alpha + a]$.

Условие достаточно: в самом деле, если ранг матрицы (7′) равен p, то единственным решением системы (11) является нулевое решение.

Это условие также и необходимо, т. е. если p решений (7) линейно независимы, то ранг матрицы (7′) равен p. Предположим, что в некоторой точке x^0 отрезка $[\alpha - a, \alpha + a]$ ранг матрицы (7′) равен $p' < p$; тогда из матрицы (7′) можно составить p'-строчную матрицу, состоящую, например, из первых p' строк, ранг которой на всем отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ равен p'.

Выберем некоторое s, $1 \leqslant s \leqslant p - p'$. Тогда

$$y_{i, p'+s} = c_1 y_{i, 1} + c_2 y_{i, 2} + \ldots + c_{p'} y_{i, p'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{p'}$ — некоторые функции от x в $[\alpha - a, \alpha + a]$, которые рационально выражаются через $y_{i, k}$ и, следовательно, дифференцируемы.

Из того, что функции $y_{i, p'+s} (i = 1, 2, \ldots m)$ удовлетворяют системе (1), получаем, что

$$\left(\sum_{k=1}^{p'} c_k y_{i, k}\right)' = \sum_{l=1}^{m} a_{i, l} \left(\sum_{k=1}^{p'} c_k y_{l, k}\right),$$

$$\sum_{k=1}^{p'} c_k' y_{i, k} + \sum_{k=1}^{p'} c_k y_{i, k}' = \sum_{k=1}^{p'} c_k \left(\sum_{l=1}^{m} a_{i, l} y_{l, k}\right),$$

и следовательно

$$\sum_{k=1}^{p'} c_k' y_{i, k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Матрица этой системы линейных однородных уравнений относительно неизвестных c_k' имеет ранг p', а потому $c_1' = c_2' = \ldots = c_{p'}' = 0$. Отсюда вытекает, что функции $c_1, c_2, \ldots, c_{p'}$ постоянны на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$, а, следовательно, решение $y_{i, p'+s}$ является линейной комбинацией первых p' решений, вопреки предположению. Полученное противоречие доказывает наше утверждение [1]).

Из доказанной теоремы вытекает, что *если ранг матрицы p решений системы* (1) *равен r, то r из этих решений линейно независимы, а остальные решения являются их линейными комбинациями.*

в) Наибольшее число линейно независимых решений для (1) равно m, и мы покажем сейчас, что *можно бесчисленным множе-*

[1]) Независимо от проведенного только что доказательства, постоянство $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_m(x)$ в $[\alpha - a, \alpha + a]$ можно доказать следующим образом: m функций

$$y_{i, p'+s}(x) - c_1(\alpha) y_{i,1}(x) - \ldots - c_{p'}(\alpha) y_{i, p'}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

образуют решение системы (1), обращающееся в нуль в точке $x = \alpha$; в силу теоремы единственности это решение тождественно равно нулю в $[\alpha - a, \alpha + a]$, а потому $c_k(x) = c_k(\alpha)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, откуда и следует что $c_1, c_2, \ldots c_{p'}$ постоянны в $[\alpha - a \ \alpha + a]$.

ством способов построить m линейно независимых решений системы (1).

Пусть, в самом деле,

$$\Delta^0 = \|b_{i,k}\| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

— какая-либо матрица m-го порядка с отличным от нуля определителем. Построим m решений системы (1), принимающих в лежащей на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ точке x^0 значения из первой, второй, ..., m-й строчки матрицы Δ^0; в силу полученных в п. 2 „б" результатов определитель этих m решений отличен от нуля в $[\alpha - a, \alpha + a]$, а потому рассматриваемые m решений линейно независимы.

Назовем, следуя Фуксу (см. Фукс [1], стр. 126), совокупность m линейно независимых решений для (1)

$$y_{1,k}, y_{2,k}, \ldots, y_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{12}$$

фундаментальной системой. Из полученных в „б" результатов вытекает, что *для того, чтобы система* (12) *была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы определитель* (8) *был отличен от нуля в* $[\alpha - a, \alpha + a]$.

Если система (12) *является фундаментальной системой решений для* (1), *то общее решение системы* (1) *имеет вид*

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_{i,k}(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где c_k — постоянные величины [1]).

Очевидно, что если система (12) является фундаментальной системой решений для системы (1) и если $\|c_{i,k}\|$ — квадратная матрица m-го порядка с постоянными элементами, определитель которой отличен от нуля, то, перемножая по столбцам две матрицы

$$\left\| \begin{matrix} c_{1,1} & c_{2,1} & \ldots & c_{m,1} \\ c_{1,2} & c_{2,2} & \ldots & c_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1,m} & c_{2,m} & \ldots & c_{m,m} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \ldots & y_{m,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \ldots & y_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{1,m} & y_{2,m} & \ldots & y_{m,m} \end{matrix} \right\|,$$

[1]) Отметим, что если даны m^2 непрерывных вместе со своими первыми производными на $[\alpha - a, \alpha + a]$ функций

$$y_{1,k}(x), \quad y_{2,k}(x), \ldots, y_{m,k}(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{12}$$

для которых определитель (8) отличен от нуля в $[\alpha - a, \alpha + a]$, то существует одна и только одна система (1), для которой эти функции образуют фундаментальную систему решений; в самом деле, система

$$y'_{i,k} = a_{i,1} y_{1,k} + a_{i,2} y_{2,k} + \ldots + a_{i,m} y_{m,k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

определяет одним и только одним способом коэффициенты $a_{i,k}$.

мы получим новую матрицу, элементы которой образуют новую фундаментальную систему решений для системы (1): в самом деле, определитель получающейся матрицы отличен от нуля.

г) Применяя полученные результаты к уравнению (2), мы видим, что *если* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *являются* m *решениями уравнения* (2), *вронскиан которых* $W(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ *отличен от нуля в* $[\alpha - a, \alpha + a]$, *то любое другое решение имеет вид*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — постоянные [1]). Мы будем говорить в этом случае, что $y_1, y_2, \ldots, y_m$ образуют *фундаментальную систему решений* уравнения (2).

Если функции $y_1, y_2, \ldots y_m$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2), и если $\|c_{i,k}\|$ — квадратная матрица m-го порядка с постоянными элементами, определитель которой отличен от нуля, то m решений $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$,

$$\bar{y}_k = c_{k,1} y_1 + c_{k,2} y_2 + \ldots + c_{k,m} y_m \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

образуют новую систему фундаментальных решений этого уравнения.

д) Докажем, в заключение, следующую теорему:

Пусть известны p *линейно независимых решений системы* (1), *матрица которых содержит отличный от нуля во всех точках отрезка* $[\alpha - a, \alpha + a]$ *минор порядка* p. *Тогда можно, с помощью невырождающегося линейного преобразования искомых функций, свести решение системы* (1) *к решению другой линейной нормальной системы, содержащей* $m - p$ *искомых функций, и к* p *квадратурам.*

Пусть, в самом деле, известны p решений системы (1)

$$y_{1,k}, y_{2,k}, \ldots, y_{m,k} \quad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

и пусть во всех точках из $[\alpha - a, \alpha + a]$

$$\begin{vmatrix} y_{1,1} & y_{2,1} & \cdots & y_{p,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & \cdots & y_{p,2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{1,p} & y_{2,p} & \cdots & y_{p,p} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (13)$$

[1]) Заметим еще, что если $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ являются m функциями, непрерывными в $[\alpha - a, \alpha + a]$ вместе со своими производными до m-го порядка включительно и если $W(y_1, y_2, \ldots, y_m) \neq 0$ в $[\alpha - a, \alpha + a]$, то существует одно и только одно уравнение (2), для которого эти функции образуют фундаментальную систему решений. Простейшей формой такого уравнения будет

$$W(y, y_1, y_2, \ldots, y_m) = \begin{vmatrix} y & y' & y'' & \ldots & y^{(m)} \\ y_1 & y_1' & y_1'' & \ldots & y_1^{(m)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ y_m & y_m' & y_m'' & \ldots & y_m^{(m)} \end{vmatrix} = 0.$$

Положим

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_{1,1}Y_1 + y_{1,2}Y_2 + \ldots + y_{1,p}Y_p, \\ y_2 &= y_{2,1}Y_1 + y_{2,2}Y_2 + \ldots + y_{2,p}Y_p, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_p &= y_{p,1}Y_1 + y_{p,2}Y_2 + \ldots + y_{p,p}Y_p, \\ y_{p+r} &= y_{p+r,1}Y_1 + y_{p+r,2}Y_2 + \ldots + y_{p+r,p}Y_p + Y_{p+r} \\ &(r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-p). \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

При этом *обратимом в силу* (13) преобразовании $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ система (1) переходит в систему

$$Y'_i = \sum_{l=1}^{m} A_{i,l} Y_l \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \qquad (15)$$

где функции $A_{i,l}$ рационально выражаются через $a_{j,k}$ и $y_{j,k}$ $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$.

В силу (14), система (15) имеет p решений

$$\begin{aligned} &Y_1 = 1, \quad Y_2 = 0, \ldots, Y_p = 0, \ldots, Y_m = 0, \\ &Y_1 = 0, \quad Y_2 = 1, \ldots, Y_p = 0, \ldots, Y_m = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \ldots, Y_p = 1, \ldots, Y_m = 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что первые p столбцов матрицы $\|A_{i,k}\|$ $(i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$ тождественно равны нулю. Поэтому система (15) имеет вид

$$Y'_i = A_{i,p+1}Y_{p+1} + \ldots + A_{i,m}Y_m \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ p), \qquad (16_1)$$

$$Y'_{p+r} = A_{p+r,p+1}Y_{p+1} + \ldots + A_{p+r,m}Y_m \quad (r = 1,\ 2,\ \ldots,\ m-p). \qquad (16_2)$$

Уравнения системы (16_2) образуют нормальную систему $m-p$ линейных уравнений с $m-p$ неизвестными функциями, решив которую мы можем найти с помощью *квадратур* из уравнений (16_1) функции $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$, после чего из уравнений (14) находим $y_1, y_2, \ldots, y_m$.

Следует еще заметить, что при решении системы (16_2) мы получаем $m-p$ произвольных постоянных, остальные p произвольных постоянных возникают при квадратурах, необходимых для решения системы (16_1), а потому из формул (14) следует, что решения $y_1, y_2, \ldots, y_m$ содержат линейно и однородно m произвольных постоянных; из того, что преобразование (14) обратимо, следует, что описанный нами способ дает общее решение системы (1).

4. Сопряженная система дифференциальных уравнений. а) Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ будет m функций от x, дифференцируемых на отрезке $[\alpha - a,\ \alpha + a]$. Умножим выражение $y'_i - \sum_{l=1} a_{i,l} y_l$ на μ_i и просуммируем по индексу i. Мы получим тождественно

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(y_i'-\sum_{l=1}^{m}a_{i,l}y_l\right)=\sum_{i=1}^{m}(\mu_i y_i)'-\sum_{i=1}^{m}y_i\mu_i'-\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}a_{i,l}\mu_i y_l,$$

откуда следует тождество

$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i\left(y_i'-\sum_{l=1}^{m}a_{i,l}y_l\right)+\sum_{i=1}^{m}y_i\left(\mu_i'+\sum_{l=1}^{m}a_{l,i}\mu_l\right)=\sum_{i=1}^{m}(\mu_i y_i)'. \qquad (17)$$

Из него вытекает, что если $y_1, y_2, \ldots, y_m$ образуют решение для системы (1), а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ — решение для системы

$$\mu_i'=-\sum_{l=1}^{m}a_{l,i}\mu_l \quad (i=1, 2, \ldots, m), \qquad (18)$$

то функции y_i и μ_i связаны соотношением

$$\mu_1 y_1+\mu_2 y_2+\ldots+\mu_m y_m=\text{const}. \qquad (19)$$

Система (18) называется системой дифференциальных уравнений, сопряженной с системой (1) (см. Якоби [1], т. 4, стр. 404).

Очевидно, что *данная система уравнений является сопряженной для сопряженной системы дифференциальных уравнений.*

Если в системе (1)

$$a_{i,l}=-a_{l,i} \quad \text{при} \quad i\neq l, \quad a_{i,i}=0, \qquad (20)$$

т. е. матрица $\|a_{i,l}\|$ *кососимметрична*, то система (1) совпадает со своей сопряженной, или, как говорят, эта *система дифференциальных уравнений самосопряжена.*

Любые два решения $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ и $(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$ самосопряженной системы дифференциальных уравнений удовлетворяют соотношению (19) и, в частности, выбирая их совпадающими, убеждаемся, что $y_1^2+y_2^2+\ldots+y_m^2=\text{const}$.

б) Мы хотим доказать, что *если известна фундаментальная система решений сопряженной системы дифференциальных уравнений, то можно найти фундаментальную систему решений данной системы уравнений с помощью рациональных операций.*

В самом деле, если

$$\mu_{1,k}, \quad \mu_{2,k}, \ldots, \mu_{m,k} \quad (k=1, 2, \ldots, m)$$

— фундаментальная система решений для (18), то определитель $\Delta'=\mathrm{Det}\|\mu_{i,k}\|$ отличен от нуля в $[\alpha-a, \alpha+a]$. Поэтому система линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}\mu_{1,1}y_1+\mu_{2,1}y_2+\ldots+\mu_{m,1}y_m=c_1,\\ \mu_{1,2}y_1+\mu_{2,2}y_2+\ldots+\mu_{m,2}y_m=c_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mu_{1,m}y_1+\mu_{2,m}y_2+\ldots+\mu_{m,m}y_m=c_m\end{array}\right\} \qquad (21)$$

разрешима относительно $y_1, y_2, \ldots, y_m$, причем

$$y_k = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\Delta'} c_i A_{k,i} \quad (k = 1, 2, \ldots, m), \tag{22}$$

где $A_{k,i}$ — алгебраическое дополнение элемента определителя Δ', стоящего в k-м столбце и i-й строке.

При любых значениях постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_m$ формула (22) дает нам решение системы (1). В самом деле, учитывая (18), мы получаем из тождества (17), что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}\left(y_i' - \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l\right) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Но $\operatorname{Det}\|\mu_{i,k}\| \neq 0$, а потому

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l.$$

Так как обратный к Δ' определитель $|A_{k,i}/\Delta'|$ отличен от нуля, то функции

$$\frac{A_{1,i}}{\Delta'}, \frac{A_{2,i}}{\Delta'}, \ldots, \frac{A_{m,i}}{\Delta'} \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

образуют фундаментальную систему решений для (1).

Из изложенного следует, что две проблемы — решение системы однородных линейных дифференциальных уравнений и решение сопряженной с ней однородной системы — могут рассматриваться как *эквивалентные*.

5. Неоднородные линейные системы. Метод Лагранжа. Пусть дана нормальная система неоднородных линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l + u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{23}$$

где $a_{i,l}$, u_i — известные непрерывные функции от x, определенные в $[\alpha - a, \alpha + a]$.

Покажем, что решение такой системы может быть сведено к решению однородной линейной системы и к квадратурам. Мы укажем два различных пути такого сведения.

а) Рассмотрим вместе с однородной системой

$$z_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} z_l,$$

получающейся из данной системы (23), если положить $u_i = 0$, сопряженную с ней систему

$$\mu_i' = -\sum_{l=1}^{m} a_{l,i}\mu_l.$$

Пусть

$$\mu_{1,k},\ \mu_{2,k},\ \ldots,\ \mu_{m,k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

— фундаментальная система решений этой сопряженной системы. Из тождества (17) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}\Big(y_i' - \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_l\Big) = \sum_{i=1}^{m} (\mu_{i,k}y_i)' \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

откуда, в силу того, что Det $\|\mu_{i,k}\| \neq 0$, следует эквивалентность системы (23) и системы

$$\sum_{i=1}^{m} (\mu_{i,k}y_i)' - \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}u_i = 0.$$

Интегрируя последнюю систему, мы получаем систему уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}y_i - \int_a^x \sum_{i=1}^{m} \mu_{i,k}u_i\,dx = c_k \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

решая которую, находим функции y_i.

б) Изложим теперь принадлежащий Лагранжу метод решения системы (23) при помощи вариации произвольных постоянных (см. Лагранж [1], т. IV, стр. 159 и далее). Пусть

$$y_{1,k},\ y_{2,k},\ \ldots,\ y_{m,k} \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

— фундаментальная система решений линейной однородной системы

$$y_i' = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_l. \tag{24}$$

В силу доказанного в п. 3 „в“ общее решение имеет вид

$$y_i = \sum_{k=1}^{m} c_k y_{i,k} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{25}$$

где c_k — постоянные. Будем рассматривать теперь c_k как функции от x. Тогда получаемые из (25) значения y_i будут удовлетворять данной системе (23), если

$$\sum_{k=1}^{m} c_k y_{i,k}' + \sum_{k=1}^{m} c_k' y_{i,k} = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l}\Big(\sum_{k=1}^{m} c_k y_{l,k}\Big) + u_i =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} c_k\Big(\sum_{l=1}^{m} a_{i,l}y_{l,k}\Big) + u_i.$$

В силу (24) для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{m} c'_k y_{i,k} = u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Определитель $\|y_{i,k}\|$ этой системы линейных уравнений относительно c'_k отличен от нуля в $[\alpha - a, \alpha + a]$. Поэтому при помощи рациональных операций мы можем найти c'_k как функции от x в $[\alpha - a, \alpha + a]$, после чего m квадратурами находим, наконец, c_k.

Чтобы получить выражение для c_k в более явном виде, обозначим через $Y_{i,k}(x)$ приведенное алгебраическое дополнение элемента $y_{i,k}$ в $\mathrm{Det}\|y_{i,k}\|$, т. е. отношение алгебраического дополнения $y_{i,k}$ в $\mathrm{Det}\|y_{i,k}\|$ к значению этого определителя. Тогда

$$c'_k = \sum_{l=1}^{m} Y_{l,k}(x)\, u_l(x)$$

и потому, в силу (25),

$$y_i(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k^0 y_{i,k}(x) + \sum_{l=1}^{m} \int_a^x H_{i,l}(x, \xi)\, u_l(\xi)\, d\xi, \tag{25_1}$$

где

$$H_{i,l}(x, \xi) = \sum_{k=1}^{m} y_{i,k}(x)\, Y_{l,k}(\xi), \tag{25_2}$$

и $c_1^0, c_2^0, \ldots, c_m^0$ — *произвольные постоянные*. (Относительно формул (25_1) и (25_2) см. Пиконе [1], стр. 26.)

В силу известных свойств определителей имеют место следующие соотношения для $H_{i,l}(x, \xi)$:

$$H_{i,i}(x, x) = 1; \quad H_{i,l}(x, x) = 0 \quad \text{при} \quad i = 1, 2, \ldots, m, \ i \neq l.$$

Почти излишне указывать, что первая сумма в правой части равенства (25_1) представляет общее решение однородной системы (24).

в) Рассмотрим теперь, в частности, неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(m)} + p_1(x) y^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}(x) y' + p_m(x) y = X(x) \quad (m > 1), \tag{$2'$}$$

где $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_m(x), X(x)$ — известные функции от x, непрерывные на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$.

Предположим, что функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ образуют *фундаментальную систему* решений однородного уравнения

$$y_i^{(m)} + p_1(x) y_i^{(m-1)} + \ldots + p_{m-1}(x) y'_i + p_m(x) y_i = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m), \tag{$2''$}$$

а $y_0(x)$ *является частным решением данного уравнения* (2'). Тогда общее решение уравнения (2') имеет вид

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x) + y_0(x),$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — *произвольные постоянные.*

Метод вариации произвольных постоянных приводит к следующему выражению для $y_0(x)$:

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \int_a^x \frac{W_{n,k}}{W} X\,dx,$$

где через $W = W(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ обозначен вронскиан фундаментальной системы решений $y_1, y_2, \ldots, y_m$ однородного уравнения (2''), а через $W_{n,k}$ — алгебраическое дополнение элемента $y_k^{(n-1)}$ в W.

Некоторые авторы называют функцию $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_m y_m(x)$, представляющую общее решение однородного уравнения (2''), *дополнительной функцией.*

6. Нормальные системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. а) Предположим, что коэффициенты $a_{i,l}$ линейной однородной системы

$$y'_i = \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} y_l, \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{26}$$

постоянны.

Выясним, можно ли удовлетворить системе (26), положив

$$y_1 = \alpha_1 e^{\rho x}, \quad y_2 = \alpha_2 e^{\rho x}, \ \ldots, \ y_m = \alpha_m e^{\rho x}, \tag{27}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ и ρ постоянны, причем *хотя бы одно α_k отлично от нуля* [1]).

Подставляя эти значения в (26), мы получаем, что должны иметь место равенства

$$\alpha_i \rho e^{\rho x} = e^{\rho x} \sum_{l=1}^{m} a_{i,l} \alpha_l,$$

т. е.

$$\left.\begin{array}{l}
(a_{1,1} - \rho)\alpha_1 + a_{1,2}\alpha_2 + \ldots + a_{1,m}\alpha_m = 0, \\
a_{2,1}\alpha_1 + (a_{2,2} - \rho)\alpha_2 + \ldots + a_{2,m}\alpha_m = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m,1}\alpha_1 + a_{m,2}\alpha_2 + \ldots + (a_{m,m} - \rho)\alpha_m = 0.
\end{array}\right\} \tag{28}$$

---

[1]) См. также Петровский И. Г. [1], стр. 143—167 и Степанов В. В. [1], стр. 283—296. — *Прим. перев.*

Эти уравнения относительно α_i должны иметь ненулевое решение. Для этого достаточно, чтобы ρ было корнем алгебраического уравнения m-й степени относительно ρ

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}-\rho & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-\rho & \dots & a_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m}-\rho \end{vmatrix}=0. \tag{29}$$

Обратно, если ρ является корнем уравнения (29), то система (28) имеет ненулевые решения, а тогда формулы (27) дают решение предложенной системы (26).

Уравнение (29) называется *характеристическим* (*или фундаментальным*) *уравнением системы* (26).

б) Предположим, что *уравнение* (29) *имеет m различных корней* $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ и обозначим через

$$\alpha_1^{(k)},\ \alpha_2^{(k)},\ \dots,\ \alpha_m^{(k)} \qquad (k=1,\ 2,\ \dots,\ m)$$

ненулевое решение системы (28), соответствующее корню $\rho=\rho_k$; докажем тогда, что *m решений*

$$y_{1,k}=\alpha_1^{(k)}e^{\rho_k x},\ y_{2,k}=\alpha_2^{(k)}e^{\rho_k x},\ \dots,\ y_{m,k}=\alpha_m^{(k)}e^{\rho_k x} \qquad (k=1,\ 2,\dots,\ m)$$

образуют фундаментальную систему решений для системы (26)[1]. В самом деле, если бы это было не так, то существовала бы, по крайней мере, одна тождественно равная нулю линейная комбинация $e^{\rho_1 x},\ e^{\rho_2 x},\ \dots,\ e^{\rho_m x}$ с постоянными коэффициентами, не все из которых равны нулю, чего не может быть. Этот факт будет доказан в более общем виде в „в"; в нашем простейшем случае достаточно заметить, что

$$W(e^{\rho_1 x},\ e^{\rho_2 x},\ \dots,\ e^{\rho_m x})=e^{x(\rho_1+\rho_2+\dots+\rho_m)}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_1^{m-1} & \rho_2^{m-1} & \dots & \rho_m^{m-1} \end{vmatrix}\neq 0.$$

Отсюда следует, что при наших предположениях решения системы (26) выражаются формулой

$$y_i=c_1\alpha_i^{(1)}e^{\rho_1 x}+c_2\alpha_i^{(2)}e^{\rho_2 x}+\dots+c_m\alpha_i^{(m)}e^{\rho_m x} \qquad (i=1,\ 2,\ \dots,\ m),$$

где $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_m$ — произвольные постоянные.

[1]) Проведенные нами рассуждения справедливы независимо от того, являются постоянные $a_{i,k}$ действительными или комплексными числами. В случае, когда они действительны, корни ρ_k могут тем не менее принимать комплексные значения (попарно сопряженные); в этом случае, выражая показательную функцию по формуле Эйлера, мы приводим ответ к действительной форме.

в) Нам осталось рассмотреть случай, когда уравнение (29) имеет кратные корни. Докажем следующую теорему:

Если ρ_1 — *корень характеристического уравнения кратности* p, *то ему соответствует* p *линейно независимых решений системы* (26), *причем любое составленное из них решение имеет вид*

$$y_1 = e^{\rho_1 x} P_1(x),\ y_2 = e^{\rho_1 x} P_2(x),\ \ldots,\ y_m = e^{\rho_1 x} P_m(x),$$

где $P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_m(x)$ — *многочлены от* x, *степень которых не превосходит* $p-1$ (*и которые линейно зависят от* p *произвольных постоянных*).

Доказательство проведем по индукции. Теорема верна, если $p = 1$. Покажем теперь, что если она верна для корней характеристического уравнения кратности $p-1$, то она верна и для корней кратности p.

Не теряя общности, мы можем считать, что $\rho_1 = 0$, так как в противном случае с помощью преобразования

$$y_l = e^{\rho_1 x} Y_l \qquad (l = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

мы привели бы систему (26) к системе

$$Y_i' = a_{i,1} Y_1 + \ldots + (a_{i,i} - \rho_1) Y_i + \ldots + a_{i,m} Y_m,$$

характеристическое уравнение которой

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - (\rho_1 + \rho) & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - (\rho_1 + \rho) & \ldots & a_{2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & & a_{m,m} - (\rho_1 + \rho) \end{vmatrix} = 0$$

имеет, в силу сделанных предположений, корень $\rho = 0$ кратности p. Итак, положим $\rho_1 = 0$; в этом случае система (26) имеет частное решение

$$y_1 = \alpha_1,\quad y_2 = \alpha_2,\ \ldots,\ y_m = \alpha_m,$$

причем хоть одно из α_i отлично от нуля. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$; не теряя общности, мы можем считать, что $\alpha_1 = 1$ (легко проверить, что числа α_i определены с точностью до постоянного множителя).

Выполним тогда для системы (26) указанное в п. 3 „д" преобразование, приводящееся в нашем случае к виду

$$y_1 = Y_1,\ y_2 = \alpha_2 Y_1 + Y_2,\ \ldots,\ y_m = \alpha_m Y_1 + Y_m. \tag{30}$$

Мы получим новую систему (допускающую решение $Y_1 = 1$, $Y_2 = \ldots = Y_m = 0$)

$$Y_1' = A_{1,2} Y_2 + \ldots + A_{1,m} Y_m, \tag{31$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_2' &= A_{2,2} Y_2 + \ldots + A_{2,m} Y_m, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_m' &= A_{m,2} Y_2 + \ldots + A_{m,m} Y_m, \end{aligned}\right\} \tag{31$_2$}$$

где

$$A_{1,l}=a_{1,l} \qquad (l=2,\ 3,\ \ldots,\ m), \tag{32}$$

$$A_{i,l}=a_{i,l}-\alpha_i a_{1,l} \qquad (i,\ l=2,\ 3,\ \ldots,\ m). \tag{32'}$$

Докажем, что если обозначить через $D_1(\rho)$ левую часть характеристического уравнения системы (31_1), (31_2),

$$D_1(\rho)=\begin{vmatrix} -\rho & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,m} \\ 0 & a_{2,2}-\alpha_2 a_{1,2}-\rho & a_{2,3}-\alpha_2 a_{1,3} & \ldots & a_{2,m}-\alpha_2 a_{1,m} \\ 0 & a_{3,2}-\alpha_3 a_{1,2} & a_{3,3}-\alpha_3 a_{1,3}-\rho & \ldots & a_{3,m}-\alpha_3 a_{1,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{m,2}-\alpha_m a_{1,2} & a_{m,3}-\alpha_m a_{1,3} & \ldots & a_{m,m}-\alpha_m a_{1,m}-\rho \end{vmatrix}=0, \tag{33}$$

то $D(\rho)$ тождественно равно $D_1(\rho)$. В самом деле, прибавляя к элементам i-й строчки умноженные на α_i элементы первой строчки $(i=2,\ 3,\ \ldots,\ m)$, мы получим

$$D_1(\rho)\equiv\begin{vmatrix} -\rho & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,m} \\ -\alpha_2\rho & a_{2,2}-\rho & a_{2,3} & \ldots & a_{2,m} \\ -\alpha_3\rho & a_{3,2} & a_{3,3}-\rho & \ldots & a_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\alpha_m\rho & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots & a_{m,m}-\rho \end{vmatrix}.$$

Вычитая теперь из первого столбца умноженный на α_2 второй столбец, умноженный на α_3 третий, ..., умноженный на α_m m-й столбец и учитывая, что

$$a_{i,1}+a_{i,2}\alpha_2+\ldots+a_{i,m}\alpha_m=0 \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

мы получим в точности определитель $D(\rho)$; поэтому $D_1(\rho)\equiv D(\rho)$.

Из (32), (32′), (33) следует, что $\rho=0$ является корнем кратности $p-1$ для уравнения

$$\begin{vmatrix} A_{2,2}-\rho & A_{2,3} & \ldots & A_{2,m} \\ A_{3,2} & A_{3,3}-\rho & \ldots & A_{3,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m,2} & A_{m,3} & \ldots & A_{m,m}-\rho \end{vmatrix}=0, \tag{34}$$

а потому, в силу предположения индукции, система (31_2) имеет $p-1$ линейно независимых решений, причем любое другое составленное из них решение имеет вид

$$Y_2=Q_2(x), \quad Y_3=Q_3(x), \quad \ldots, \quad Y_m=Q_m(x), \tag{35}$$

где $Q_2(x)$, $Q_3(x)$, ..., $Q_m(x)$ — многочлены от x, степень которых не превосходит $p-2$ (и которые линейно зависят от $p-1$ произвольных постоянных).

Подставляя выражения (35) в (31_1), получаем

$$Y_1 = C_1 + \sum_{l=2}^{m} A_{1,l} \int_0^x Q_l(x)\,dx, \tag{36}$$

где C_1 — новая произвольная постоянная, а подставляя (35) и (36) в (30), получаем, что $y_1, y_2, \ldots, y_m$ имеет указанный выше вид.

Остается показать, что с помощью описанного здесь процесса мы получаем в точности p линейно независимых решений для (26). Заметим для этого, что мы имели $p-1$ линейно независимых решений для (31_2)

$$Y_{2,k},\ Y_{3,k},\ \ldots,\ Y_{m,k} \qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ p-1)$$

и что ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \sum\limits_{l=2}^{m} A_{1,l} \int Y_{l,2}\,dx & Y_{2,2} & Y_{3,2} & \ldots & Y_{m,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum\limits_{l=2}^{m} A_{1,l} \int Y_{l,p-1}\,dx & Y_{2,p-1} & Y_{3,p-1} & \ldots & Y_{m,p-1} \end{matrix} \right\|,$$

составленной из p решений системы (31_1), (31_2), равен p. Этим же рангом p обладает и матрица, составленная из соответствующих p решений системы (26), построенных по формулам (30).

Итак, мы доказали, что любому корню ρ_1 характеристического уравнения, имеющему кратность p, соответствуют p линейно независимых систем решений.

Если ρ_1 и p известны, то для того, чтобы построить эффективно многочлены $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$, достаточно подставить в данную систему вместо $y_1, y_2, \ldots, y_m$, соответственно, $e^{\rho_1 x}P_1(x)$, $e^{\rho_1 x}P_2(x), \ldots$, $e^{\rho_1 x}P_m(x)$ и получить таким путем для коэффициентов многочленов $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_m(x)$ линейную систему уравнений, решения которой содержат p произвольных постоянных.

Заметим, наконец, что если поставить в соответствие каждому корню характеристического уравнения столько линейно независимых решений, какова его кратность, то совокупность решений, поставленных в соответствие всем различным корням характеристического уравнения, образует фундаментальную систему решений. Для доказательства этого покажем, что соотношение вида

$$A_1(x)\,e^{\rho_1 x} + A_2(x)\,e^{\rho_2 x} + \ldots + A_s(x)\,e^{\rho_s x} \equiv 0, \tag{37}$$

где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_s$ — попарно различные постоянные, а $A_1(x)$, $A_2(x), \ldots, A_s(x)$ — многочлены, может тождественно выполняться лишь в случае, когда все $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_s(x)$ тождественно равны нулю [1]).

Этот факт очевиден, если $s=1$; докажем теперь справедливость его в общем случае по индукции. Из (37) получаем

$$A_1(x)e^{(\rho_1-\rho_s)x}+A_2(x)e^{(\rho_2-\rho_s)x}+\ldots+A_{s-1}(x)e^{(\rho_{s-1}-\rho_s)x}+A_s(x)\equiv 0.$$

Продифференцировав это равенство $n+1$ раз, где n — степень многочлена $A_s(x)$, мы получаем тождество

$$B_1(x)e^{(\rho_1-\rho_s)x}+B_2(x)e^{(\rho_2-\rho_s)x}+\ldots+B_{s-1}(x)e^{(\rho_{s-1}-\rho_s)x}\equiv 0,$$

в котором $B_1(x)$, $B_2(x)$, ..., $B_{s-1}(x)$ — многочлены той же степени, что и $A_1(x)$, $A_2(x)$, ..., $A_{s-1}(x)$ соответственно. Но это невозможно по предположению индукции.

г) Применим теперь полученные результаты к частному случаю, когда система получается из однородного линейного уравнения

$$a_0y^{(m)}+a_1y^{(m-1)}+\ldots+a_{m-1}y'+a_my=0, \tag{38}$$

где a_0, a_1, ..., a_{m-1}, a_m — постоянные, $a_0\neq 0$. Тогда, если характеристическое уравнение

$$a_0\rho^m+a_1\rho^{m-1}+\ldots+a_{m-1}\rho+a_m=0$$

имеет корни ρ_1, ρ_2, ..., ρ_s, кратность которых равна, соответственно, p_1, p_2, ..., p_s, $(p_1+p_2+\ldots+p_s=m)$, то общее решение уравнения (38) имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{s}e^{\rho_kx}\left(c_0^{(k)}+c_1^{(k)}x+\ldots+c_{p_k-1}^{(k)}x^{p_k-1}\right),$$

где $c_0^{(k)}$, $c_1^{(k)}$, ..., $c_{p_k-1}^{(k)}$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ s)$ — произвольные постоянные.

§ 2. Применение матричного исчисления к определению решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

1. Сведения по матричному исчислению. Приведем некоторые сведения по „*матричному исчислению*“ [2]), необходимые для изложения предложенного Пеано доказательства существования решения Коши системы линейных дифференциальных уравнений. Это доказательство,

1) Решение задачи Коши для случая, когда линейная система с постоянными коэффициентами не является нормальной, будет рассмотрено в гл. X, § 7, п. 3 „г“.

2) См. Скорца [1], стр. 139—168, Шлезингер [1], стр. 132—143, Жюлиа [1], стр. 109—110, Фрезер, Дункан, Коллар [1]. [См. также Гантмахер [1]. — *Прим. перев*].

основанное на методе последовательных приближений, будет изложено нами в п. 3[1]). Читатель увидит, что использование матриц позволяет получить весьма короткое и изящное построение решений Коши; оно представляет также интерес и с точки зрения приближенных вычислений, так как приводит к процессу, позволяющему находить одновременно все члены искомых функций, соответствующие одному и тому же шагу приближений.

а) Матрица с m строками и n столбцами

$$A=\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{matrix}\right\|$$

обозначается символом $A=\|a_{i,k}\|$ и называется матрицей *типа* (m, n).

Числа $a_{i,k}$, действительные или комплексные, называются *элементами* или *членами* матрицы.

Две матрицы одного и того же типа называются *подобными*.

Две подобные матрицы $A=\|a_{i,k}\|$ и $B=\|b_{i,k}\|$ называются *равными*, если

$$a_{i,k}=b_{i,k} \quad (i=1, 2, \dots, m;\ k=1,2, \dots, n).$$

Матрица типа (m, m) называется *квадратной* матрицей порядка m.

Если $A=\|a_{i,k}\|$ $(i, k=1, 2, \dots, m)$ — квадратная матрица, то, как известно из алгебры, ее *определителем* называется сумма $\sum(-1)^s a_{1,j_1}a_{2,j_2}, \dots, a_{m,j_m}$, распространенная на все перестановки $j_1, j_2, \dots, j_m$ чисел $1, 2, \dots, m$, где s обозначает число беспорядков в перестановке $j_1, j_2, \dots, j_m$ по отношению к основной перестановке $1, 2, \dots, m$. Мы будем писать

$$\operatorname{Det} A=\sum(-1)^s a_{1,j_1}a_{2,j_2}\dots a_{m,j_m}=$$
$$=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,m} \end{vmatrix}=|a_{i,k}|^{2)}.$$

Квадратная матрица с отличным от нуля определителем называется *регулярной*; если же ее определитель равен нулю, то она называется *нерегулярной* (*сингулярной*, *вырожденной*).

---

[1]) См. примечание [1]) на стр. 11.

[2]) В дальнейшем мы будем обозначать матрицы знаком $\|\quad\|$, а определители квадратных матриц знаком $|\quad|$.

Квадратные матрицы

$$\left\| \begin{matrix} a_{1,1} & 0 & 0 \ldots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots & a_{n,n} \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 \ldots 0 \end{matrix} \right\|$$

называются соответственно *диагональной матрицей*, *единичной матрицей*, *нулевой матрицей*. Единичная матрица обозначается символом 1, нулевая — символом 0.

б) Назовем *суммой* (*разностью*) двух подобных матриц $A = \|a_{i,k}\|$ и $B = \|b_{i,k}\|$ и обозначим символом $A + B$ $(A - B)$ матрицу, элементы которой равны $a_{i,k} + b_{i,k}$ $(a_{i,k} - b_{i,k})$; таким образом,

$$A + B = \|a_{i,k} + b_{i,k}\|, \quad A - B = \|a_{i,k} - b_{i,k}\|.$$

Если α — действительное или комплексное число, то *произведением матрицы* $A = \|a_{i,k}\|$ *на число* α называется матрица $\|\alpha a_{i,k}\|$, обозначаемая символами αA, $A\alpha$, т. е.

$$\alpha A = A\alpha = \left\| \begin{matrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} & \ldots & \alpha a_{1,n} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} & \ldots & \alpha a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha a_{m,1} & \alpha a_{m,2} & \ldots & \alpha a_{m,n} \end{matrix} \right\|.$$

в) Пусть даны две матрицы

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,r} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,r} \end{matrix} \right\|$$

типов (m, n) и (n, r) соответственно, иными словами, пусть число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Назовем *произведением матрицы A на матрицу B* и обозначим символом AB матрицу $AB = C = \|c_{i,k}\|$ типа (m, r), в которой каждый элемент $c_{i,k}$ является суммой произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и k-го столбца матрицы B; в символах

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}b_{n,k} = \sum_{\nu=1}^{n} a_{i,\nu}b_{\nu,k}.$$

Если

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{matrix} \right\|, \quad X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{matrix} \right\|,$$

то произведение $AX=Y$ является матрицей типа $(m, 1)$, причем, если

$$Y=\left\|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{matrix}\right\|,$$

то

$$y_i=a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\dots+a_{i,n}x_n \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Если A и B являются матрицами типа (m, n) и (n, m), то можно образовать два произведения AB и BA. Вообще говоря, $AB \neq BA$, иными словами, *произведение матриц не обладает свойством коммутативности.*

Этот факт очевиден, если $m \neq n$, так как в этом случае матрицы AB и BA имеют различные порядки m и n. Но это же имеет, вообще говоря, место и в случае, когда $m=n$; например, если

$$A=\left\|\begin{matrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}\right\|, \quad B=\left\|\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right\|,$$

то

$$AB=\left\|\begin{matrix} 2 & 0 \\ 12 & 2 \end{matrix}\right\|, \quad BA=\left\|\begin{matrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \end{matrix}\right\|.$$

Если A и B — квадратные подобные матрицы, то по теореме Бине[1])

$$\operatorname{Det} A \times \operatorname{Det} B = \operatorname{Det} AB.$$

Заметим, что

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{matrix}\right\| =$$

$$= \left\|\begin{matrix} a_{1,1}\alpha & a_{1,2}\alpha & \dots & a_{1,n}\alpha \\ a_{2,1}\alpha & a_{2,2}\alpha & \dots & a_{2,n}\alpha \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1}\alpha & a_{m,2}\alpha & \dots & a_{m,n}\alpha \end{matrix}\right\| = A\alpha,$$

$$\left\|\begin{matrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{matrix}\right\| \times \left\|\begin{matrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{matrix}\right\| = \alpha A,$$

[1]) См. Курош А. Г. [1], стр. 91. — *Прим. перев.*

откуда следует, что умножение матрицы A на число α равносильно умножению матрицы A на диагональную матрицу

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \alpha \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & \alpha \end{Vmatrix}.$$

В дальнейшем, если $A = \|a_{i,k}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — квадратная матрица, а α — число, то мы будем обозначать символом $\alpha + A$ $(\alpha - A)$ сумму (разность) диагональной матрицы

$$\begin{Vmatrix} \alpha & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \alpha \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \\ 0 & 0 \ldots & \alpha \end{Vmatrix}$$

типа (n, n) и матрицы A, т. е. $\alpha \pm A = \|\alpha\delta_{i,k} \pm a_{i,k}\|$, где $\delta_{i,k} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{i,i} = 1$.

Если $A, B, C, D, \ldots$ — матрицы, имеющие соответственно типы $(m, n), (n, p), (p, q), (q, r), \ldots$, то, по определению, положим

$$ABC = (AB)C, \quad ABCD = (ABC)D, \ldots$$

Легко проверить, что $(AB)C = A(BC)$, т. е. что *произведение матриц обладает свойством ассоциативности.*

Имеет место также *дистрибутивный закон*

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Произведение AB может равняться нулю даже в том случае, когда ни одна из матриц A и B не равна нулю. Например, если

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \text{ то } AB = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что *если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, такие, что $AB = 0$, и если определитель одного из сомножителей*, например $\operatorname{Det} A$, *отличен от нуля, то второй сомножитель B является нулевой матрицей.* В самом деле, если $\operatorname{Det} A \neq 0$, то линейная однородная система уравнений с неизвестными $b_{1,k}, b_{2,k}, \ldots, b_{n,k}$

$$c_{i,k} = a_{i,1}b_{1,k} + a_{i,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}b_{n,k} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет лишь нулевые решения.

г) Если A — квадратная матрица, то полагаем, по определению,

$$A^0 = 1, \quad A^1 = A, \quad A^n = A^{n-1}A \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Матрица A^n называется *n-й степенью матрицы* A. В силу свойства ассоциативности имеем

$$A^m A^n = A^{m+n}.$$

Если A — квадратная матрица, а $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — некоторые числа, то сумма $\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu A^\nu$ также является матрицей, обозначаемой кратко символом $P(A)$; матрица $P(A)$ называется *многочленом* от A.

д) Пусть квадратная матрица $A = \|a_{i,k}\|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ регулярна, т. е. пусть $\operatorname{Det} A = D \neq 0$; тогда существует одна и только одна матрица B, такая, что $AB = 1$.

В самом деле, линейная система ($\delta_{i,k} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{i,i} = 1$)

$$a_{i,1}b_{1,k} + a_{1,2}b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}b_{n,k} = \delta_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет одно и только одно решение, даваемое формулами

$$b_{1,k} = \frac{A_{k,1}}{D}, \quad b_{2,k} = \frac{A_{k,2}}{D}, \ldots, b_{n,k} = \frac{A_{k,n}}{D} \, (k = 1, 2, \ldots, n),$$

где через $A_{k,l}$ обозначено алгебраическое дополнение элемента $a_{k,l}$ в определителе A.

Если $AB = 1$, то матрица B называется *обратной* для A и обозначается A^{-1}; по определению $AA^{-1} = 1$.

Непосредственно проверяется, что $A^{-1}A = 1$.

Если A — регулярная матрица, а m — целое положительное число, то полагаем по определению $A^{-m} = (A^{-1})^m$; легко проверить, что равенство $A^m A^n = A^{m+n}$ сохраняет силу для любых целых показателей m и n.

е) Если $A = \|a_{i,k}\|$ является квадратной матрицей n-го порядка, то n значений λ, удовлетворяющих равенству

$$\operatorname{Det}(\lambda - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{1,1} & -a_{1,2} & \ldots & -a_{1,n} \\ -a_{2,1} & \lambda - a_{2,2} & \ldots & -a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_{n,1} & -a_{n,2} & \ldots & \lambda - a_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. n значений λ, для которых матрица $\lambda - A$ вырождена, называются *характеристическими числами* матрицы A; совокупность характеристических чисел называется *спектром этой матрицы*.

ж) Назовем *абсолютным значением матрицы* $A = \|a_{i,k}\|$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ и обозначим символом $|A|$ неотрицательное число

$$|A| = \sqrt{\sum_{i,k} |a_{i,k}^2|}$$

(см. Фробениус [1], стр. 20—29 и 128—129). Очевидно, что для любого элемента $a_{i,k}$ матрицы A имеем $|a_{i,k}| \leqslant |A|$.

Расстоянием между двумя подобными матрицами A и B назовем число $|B-A|$. Будем обозначать его через $\Delta(A, B)$.

Очевидно, что $\Delta(A, B)=0$ тогда и только тогда, когда $A=B$. Имеют место неравенства

$$|A+B|\leqslant|A|+|B| \quad (\textit{неравенство треугольника}) \tag{1}$$

и

$$|AB|\leqslant|A|\cdot|B| \quad (\textit{неравенство произведения}). \tag{2}$$

Последнее неравенство имеет смысл, если A и B являются матрицами типов (m, n) и (n, p) соответственно.

Неравенство (1) доказывается следующим образом. Имеем

$$|A+B|^2=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}+b_{i,k}|^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(|a_{i,k}|+|b_{i,k}|)^2\leqslant$$
$$\leqslant|A|^2+|B|^2+2\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}||b_{i,k}|,$$

но, в силу неравенства Лагранжа,

$$\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}||b_{i,k}|\Big)^2\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|b_{i,k}|^2\Big)=|A|^2\cdot|B|^2,$$

а потому $|A+B|^2\leqslant|A|^2+|B|^2+2|A||B|$, откуда и следует (1).

Неравенство (2) можно записать в виде

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\Big|\sum_{\nu=1}^{n}a_{i,\nu}b_{\nu,k}\Big|^2\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|^2\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|b_{i,k}|^2\Big).$$

Чтобы доказать это неравенство, заметим, что по неравенству Лагранжа

$$\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{i,\nu}b_{\nu,k}|\Big)^2\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|a_{i,\nu}|^2\sum_{\nu=1}^{n}|b_{\nu,k}|^2.$$

Суммируя по i от 1 до m и по k от 1 до p, получаем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{i,\nu}b_{\nu,k}|^2\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}|a_{i,\nu}|^2\Big)\Big(\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{k=1}^{p}|b_{\nu,k}|^2\Big)=|A|^2|B|^2,$$

откуда следует нужное неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\Big|\sum_{\nu=1}^{n}a_{i,\nu}b_{\nu,k}\Big|^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|a_{i,\nu}b_{\nu,k}|\Big)^2\leqslant|A|^2\cdot|B|^2.$$

з) Пусть дана последовательность $A^0, A^{(1)}, \ldots, A^{(\nu)}, \ldots$ подобных матриц, имеющих тип (m, n),

$$A^{(\nu)} = \| a_{i,k}^{(\nu)} \| \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если mn последовательностей $\{a_{i,k}^{(\nu)}\}$ сходятся, когда $\nu \to \infty$, и

$$\lim_{\nu \to \infty} a_{i,k}^{(\nu)} = a_{i,k} \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots n),$$

то мы будем называть *матрицу* $A = \| a_{i,k} \|$ *пределом последовательности матриц* $\{ \| a_{i,k}^{(\nu)} \| \}$ и писать

$$\lim_{\nu \to \infty} A^{(\nu)} = A.$$

Точно так же, если дана последовательность матриц $\{A^{(\nu)}\}$ типа (m, n), такая, что mn рядов

$$a_{i,k}^{(0)} + a_{i,k}^{(1)} + \ldots + a_{i,k}^{(\nu)} + \ldots \quad (i = 1, 2, \ldots m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

сходятся, то положим

$$a_{i,k} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,k}^{(\nu)},$$

будем называть матрицу $A = \| a_{i,k} \| = \| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,k}^{(\nu)} \|$ *суммой сходящегося ряда матриц* $A^{(0)} + A^{(1)} + \ldots + A^{(\nu)} + \ldots$ и писать

$$A = A^{(0)} + A^{(1)} + \ldots + A^{(\nu)} + \ldots.$$

Этот ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходятся mn рядов $\sum_{\nu=0}^{\infty} | a_{i,k}^{(\nu)} |$.

Покажем, что если A — *квадратная матрица и* $|A|$ — *ее абсолютное значение, то ряд*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^{\nu}}{\lambda^{\nu+1}} \tag{3}$$

сходится абсолютно для всех значений λ, *таких, что* $|\lambda| > |A|$.

Пусть $A^{\nu} = \| a_{i,k}^{(\nu)} \|$, тогда $| a_{i,k}^{(\nu)} | \leqslant | A^{\nu} | \leqslant |A|^{\nu}$, а потому ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} | a_{i,k}^{(\nu)} \lambda^{-(\nu+1)} |$ мажорируется геометрической прогрессией $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{|A|^{\nu}}{|\lambda|^{\nu+1}}$, которая сходится в силу того, что $|\lambda| > |A|$.

Этот результат может быть уточнен; можно доказать, что если спектр матрицы A состоит из чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то ряды $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i,k}^{(\nu)} / \lambda^{\nu+1}$ абсолютно сходятся при $|\lambda| > \rho$, где через ρ обозначено число $\rho = \max |\lambda_1|, |\lambda_2|, \ldots, |\lambda_n|)$, а тогда абсолютно сходится и ряд (3) (см. Жюлиа [1], стр. 101).

Пусть

$$G(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu z^\nu \tag{4}$$

— степенной ряд, радиус сходимости которого $R > \rho$, т. е. пусть *круг сходимости ряда* (4) *содержит внутри точки спектра квадратной матрицы* A; *покажем тогда, что ряд матриц*

$$\sum_{\nu=2}^{\infty} g_\nu A^\nu \tag{5}$$

абсолютно сходится.

Пусть, в самом деле, ε такое положительное число, что $\rho + \varepsilon < R$; в силу сходимости ряда $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} |a_{i,k}^{(\nu)}| |\lambda|^{-(\nu+1)}$ при $|\lambda| > \rho$ найдется такое постоянное число α, что $|a_{i,k}^{(\nu)}| < \alpha (\rho + \varepsilon)^{\nu+1}$ и, следовательно,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu a_{i,k}^{(\nu)}| \leqslant \alpha (\rho + \varepsilon) \sum_{\nu=0}^{\infty} |g_\nu| (\rho + \varepsilon)^\nu < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

В частности, если $G(z)$ — целая функция, то ряд (5) абсолютно сходится, какова бы ни была квадратная матрица A. Это имеет место, например, для ряда матриц

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!},$$

который обозначается символом e^A, иными словами, по определению полагается

$$e^A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{A^\nu}{\nu!}.$$

Если A и B перестановочные квадратные матрицы одного и того же порядка, то

$$e^A e^B = e^{A+B}.$$

В самом деле, так как матрицы A и B перестановочны, то при любых целых положительных r и s имеем $A^r B^s = B^s A^r$. Поэтому, перемножая ряды матриц $\sum\limits_{r=0}^{\infty} A^r/r!$ и $\sum\limits_{s=0}^{\infty} B^s/s!$ и группируя члены с одинаковой суммой $r+s$, получим в результате $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (A+B)^\nu/\nu! = e^{A+B}$.

и) Пусть элементы матрицы $A(x)=\|a_{i,k}(x)\|$ типа (m, n) являются функциями независимой переменной x, тогда

$$\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\left\|\frac{a_{i,k}(x+h)-a_{i,k}(x)}{h}\right\|$$

и потому для существования предела $\lim\limits_{h\to\infty}[A(x+h)-A(x)]/h$ необходимо и достаточно, чтобы все mn элементов $\|a_{i,k}(x)\|$ матрицы A были дифференцируемы в точке x. Матрица $\|da_{i,k}(x)/dx\|$ называется *производной от матрицы* A и обозначается

$$A'=\frac{dA}{dx}=\left\|\frac{da_{i,k}}{dx}\right\|.$$

Легко проверить, что

$$\frac{d}{dx}(A+B)=\frac{dA}{dx}+\frac{dB}{dx},\quad \frac{d}{dx}(AB)=A\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{dx}B.$$

Пусть $A(x)=\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}A^{(\nu)}(x)$, где матрицы $A^{(\nu)}(x)$ дифференцируемы в окрестности I точки x_0, а ряд $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}dA^{(\nu)}(x)/dx$ *равномерно сходится в* I, т. е. для любого числа $\varepsilon>0$ можно найти такое ν_0, что для всех x из I имеет место неравенство

$$\left|\frac{da_{i,k}^{(\nu_0+p)}}{dx}+\frac{da_{i,k}^{(\nu_0+p+1)}}{dx}+\ldots\right|<\varepsilon\quad (p=0,\ 1,\ \ldots).$$

Применяя тогда известные теоремы о дифференцировании рядов, получаем, что при сделанных предположениях

$$\frac{dA}{dx}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{dA^{(\nu)}}{dx}.$$

Если элементы матрицы $A=\|a_{i,k}(x)\|$ являются голоморфными функциями от x в окрестности I точки α, то в любой точке x, лежащей внутри I, справедливо разложение в ряд Тейлора

$$A(x)=A(\alpha)+A'(\alpha)\frac{x-\alpha}{1!}+A''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!}+\ldots.$$

к) Пусть $A(x)=\|a_{i,k}(x)\|$ и пусть $a_{i,k}(x)$ — действительные функции действительной переменной x, непрерывные в $[\alpha-a,\ \alpha+a]$, $a>0$. Матрица $\left\|\int\limits_a^x a_{i,k}(\tau)\,d\tau\right\|$, $\alpha-a\leqslant x\leqslant\alpha+a$ называется *инте-*

гралом от a до x матрицы $A(x)$ и обозначается $\int\limits_a^x A(\tau)\,d\tau$ или $\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$.

Из сделанного определения вытекает, что $\frac{d}{dx}\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = A(x)$.

Если $a_{i,k}(x)$ являются голоморфными функциями от x в открытой области C и если α и x — две точки из C, то полагаем аналогично

$$\int\limits_a^x A(\tau)\,d\tau = \overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \left\| \int\limits_a^x a_{i,k}(\tau)\,d\tau \right\|,$$

где каждый из интегралов берется по любому регулярному пути в C, соединяющему α и x.

Если функции $a_{i,k}(x)$ действительны в $[\alpha - a,\ \alpha + a]$ (голоморфны в C) и удовлетворяют там неравенствам

$$|a_{i,k}(x)| \leqslant L \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то

$$\left| \int\limits_a^x a_{i,k}(\tau)\,d\tau \right| \leqslant L\,|x - \alpha|,$$

откуда получаем для абсолютной величины матрицы $\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)$ неравенство

$$|\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau)| \leqslant \sqrt{mn}\,L\,|x - \alpha|.$$

2. Матрицант квадратной матрицы. а) Пусть $A = \|a_{i,k}(x)\|$ $(i,\ k = 1,\ 2\ \ldots,\ m)$ — квадратная матрица порядка m, элементы которой являются непрерывными в $[\alpha - a,\ \alpha + a]$, действительными функциями действительной переменной x. По определению имеем

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \left\| \int\limits_a^x a_{i,k}(\tau)\,d\tau \right\|, \quad \alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a$$

и, вообще,

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1)\,\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int\limits_a^x A(\tau_1)\,[\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]\,d\tau_1,$$

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_2)\,\overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1)\,\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int\limits_a^x A(\tau_2)\,[\overset{\tau_2}{\underset{a}{Q}} A(\tau_1)\,\overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]\,d\tau_2,$$

. . . .

$$\overset{x}{\underset{a}{Q}} A(\tau_n)\,\overset{\tau_n}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau) = \int\limits_a^x A(\tau_n)\,[\overset{\tau_n}{\underset{a}{Q}} A(\tau_{n-1}) \ldots \overset{\tau_1}{\underset{a}{Q}} A(\tau)]\,d\tau_n.$$

Назовем *матрицантом матрицы* A и обозначим символом $\underset{a}{\overset{x}{\Omega}} A(\tau)$ (см. Бекер [1], стр. 335) составленный из матриц ряд

$$\underset{a}{\overset{x}{\Omega}} A(\tau) = 1 + \underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau) + \underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau) + \underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_2) \underset{a}{\overset{\tau_2}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau) + \ldots, \tag{6}$$

где в правой части через 1 обозначена единичная матрица порядка m (см. п. 1 „а").

Пусть для всех элементов матрицы A выполняется на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ неравенство

$$|a_{i,k}(x)| \leqslant L \quad (\alpha - a \leqslant x \leqslant \alpha + a).$$

Тогда абсолютные величины элементов матрицы $\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau)$ не превосходят $L|x - \alpha|$, матрицы $A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau)$ не превосходят $mL^2|\tau_1 - \alpha|$, матрицы $\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau)$ не превосходят $mL^2|x - \alpha|^2/2!$, матрицы $\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_2) \times$ $\times \underset{a}{\overset{\tau_2}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau)$ не превосходят $m^2L^3|x - \alpha|^3/3!$, и по индукции получаем, что элементы матрицы

$$\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_{n-1}) \underset{a}{\overset{\tau_{n-1}}{Q}} A(\tau_{n-2}) \ldots \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau)$$

не превосходят по абсолютной величине $m^{n-1}L^n|x - \alpha|^n/n!$. Поэтому

$$\left|\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_{n-1}) \underset{a}{\overset{\tau_{n-1}}{Q}} A(\tau_{n-2}) \ldots \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau)\right| \leqslant m^nL^n|x - \alpha|^n/n!,$$

и, следовательно, ряд (6) мажорируется рядом

$$m^{1/2} + mL\frac{|x - \alpha|}{1!} + m^2L^2\frac{|x - \alpha|^2}{2!} + \ldots + m^nL^n\frac{|x - \alpha|^n}{n!} + \ldots,$$

а потому ряд (6) абсолютно и равномерно сходится в $[\alpha - a, \alpha + a]$.

б) Рассмотрим теперь одно свойство $\underset{a}{\overset{x}{\Omega}} A(\tau)$, которое вскоре нам понадобится.

Дифференцируя почленно ряд (6), мы получим ряд

$$A(x) + A(x)\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau) + A(x)\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau) +$$
$$+ A(x)\underset{a}{\overset{x}{Q}} A(\tau_2) \underset{a}{\overset{\tau_2}{Q}} A(\tau_1) \underset{a}{\overset{\tau_1}{Q}} A(\tau) + \ldots,$$

который, в силу неравенства (2) из п. 1 „ж", равномерно и абсолютно сходится в $[\alpha - a, \alpha + a]$. Поэтому

$$\frac{d}{dx}\underset{a}{\overset{x}{\Omega}} A(\tau) = A(x)\underset{a}{\overset{x}{\Omega}} A(\tau). \tag{7}$$

3. Метод Пеано — Бекера. а) Мы можем теперь изложить так называемый метод интегрирования Пеано — Бекера системы линейных дифференциальных уравнений при помощи последовательных подстановок.

Метод был предложен в 1887 г. Пеано [1]), причем последний использовал для доказательства гиперкомплексную систему с m единицами или, что тоже самое, матричное исчисление. В 1903 г. Бекер [2]), независимо от Пеано, вновь нашел и развил способ Пеано, выведя из него так называемый метод интегрирования Пеано — Бекера, к изложению которого мы и переходим.

б) Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(x) y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{8_1}$$

где $a_{i,k}(x)$ — непрерывные на отрезке $[\alpha - a, \alpha + a]$ функции от x, и пусть надо найти решение системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(\alpha) = y_i^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8_2}$$

Положим

$$A = \| a_{i,k}(x) \|, \qquad Y(x) = \left\| \begin{matrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m(x) \end{matrix} \right\|, \qquad Y_0 = \left\| \begin{matrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_m^0 \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Тогда систему (8) можно записать в виде

$$\frac{dY}{dx} = AY, \quad Y(\alpha) = Y_0 \tag{10}$$

и из (7) вытекает сразу, что система (10) имеет решение

$$Y(x) = [\overset{x}{\underset{\alpha}{\Omega}} A(\tau)]\, Y_0. \tag{11}$$

Таким образом, существование решения Коши для системы (10) доказано; единственность следует из изложенного в гл. I, § 3, п. 3.

в) Заметим, что если элементы матрицы A постоянные величины, т. е. если система (8_1) имеет постоянные коэффициенты, то

$$\overset{x}{\underset{\alpha}{\Omega}} A(\tau) = 1 + A\frac{x-\alpha}{1!} + A^2\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ldots + A^n\frac{(x-\alpha)^n}{n!} + \ldots,$$

---

[1]) См. Пеано [1]. Ср. также примечание на стр. 11.

Вскоре после этого Вольтерра опубликовал свое исследование (см. [1]), где отметил (стр. 14), что дифференциальное и интегральное исчисления для подстановок приводят к общей теории линейных дифференциальных уравнений (см. также Вольтерра [2]).

[2]) См. упомянутые в п. 2 „а" работы, а также Бекер [2]. О дальнейших приложениях теории матриц к системам линейных дифференциальных уравнений см. Лаппо-Данилевский И. А. [1], Цвирнер [1], Керубино [1].

а потому решение системы (8_1), (8_2) получает весьма простой вид

$$Y(x) = e^{A(x-\alpha)} Y_0,$$

который в точности совпадает с решением системы (10), получаемым, при предположении о постоянстве A, путем формального решения этого уравнения [1]).

§ 3. Частные преобразования линейных однородных дифференциальных уравнений

1. Преобразование линейного однородного уравнения порядка n в уравнение порядка $n-1$. Пусть дано линейное однородное дифференциальное уравнение

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — непрерывные на отрезке $[a, b]$ функции от x, причем $a_0 \neq 0$ в $[a, b]$; покажем, что *если ввести новую искомую функцию z, связанную с y соотношением*

$$y = e^{\int z\,dx}, \qquad (2)$$

то (1) *превратится в* (*нелинейное*) *уравнение порядка* $n-1$.

В самом деле, имеем

$$y' = e^{\int z\,dx} z, \quad y'' = e^{\int z\,dx}(z^2 + z'), \quad y''' = e^{\int z\,dx}(z^3 + 3zz' + z''), \ldots$$

и, подставляя в (1) эти выражения, получаем после сокращения обеих частей равенства на $e^{\int z\,dx}$ уравнение $n - 1$-го порядка относительно z.

2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка и уравнение Риккати. В частности, уравнение второго порядка

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

сводится преобразованием (2) к уравнению Риккати [2])

$$a_0 z' + a_0 z^2 + a_1 z + a_2 = 0.$$

Обратно, уравнение Риккати

$$z' + Lz^2 + Mz + N = 0,$$

где L не обращается в нуль и дифференцируемо в $[a, b]$, сводится преобразованием [3])

$$y = e^{\int Lz\,dx}$$

---

[1]) Отметим еще, что введенный в п. 2 матрицант получается при применении к уравнению (10) метода последовательных подстановок, если сократить все получающиеся при этом члены справа на общий множитель Y_0.

[2]) Риккати [1]. Рассмотренное Риккати уравнение имело вид $nx^{m+n-1} = u' + u^2 x^{-n}$.

[3]) Относительно этого преобразования см. Дарбу [1], стр. 34.

к линейному уравнению второго порядка

$$y'' + \left(M - \frac{L'}{L}\right)y' + LNy = 0.$$

3. Линейные дифференциальные уравнения, у которых коэффициент при $y^{(n-1)}$ равен производной коэффициента при $y^{(n)}$. а) Рассмотрим еще одно преобразование линейных дифференциальных уравнений, полезное иногда в приложениях.

Пусть $\lambda(x)$ — функция, необращающаяся в нуль на отрезке $[a, b]$; умножая (1) на $\lambda(x)$, получим эквивалентное уравнение

$$(\lambda a_0)y^{(n)} + (\lambda a_1)y^{(n-1)} + \ldots + (\lambda a_{n-1})y' + (\lambda a_n)y = 0.$$

Если мы хотим, чтобы в получившемся уравнении коэффициент при $y^{(n-1)}$ равнялся производной коэффициента при $y^{(n)}$, то достаточно выбрать множитель $\lambda(x)$ так, чтобы $\lambda a_1 = (\lambda a_0)'$, $a_1/a_0 = (\lambda a_0)'/(\lambda a_0)$

$$\lambda = \frac{c}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \qquad (c = \text{const}). \tag{3}$$

б) Например, уравнение

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

при умножении на $e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}/a_0$ приобретает вид (*самосопряженный*, см. § 5, п. 3 „б")

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} y = 0.$$

§ 4. Относительная нормализация и каноническая нормализация линейных однородных дифференциальных уравнений

1. Относительная нормализация и дифференциальные семиинварианты. а) Если разделить уравнение (1) из § 3 на a_0, то оно примет вид

$$L(y) = y^{(n)} + \binom{n}{1} p_1 y^{(n-1)} + \binom{n}{2} p_2 y^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1} p_{n-1} y' + \binom{n}{n} p_n y = 0^{1)}. \tag{1}$$

Мы будем предполагать в этом и последующих пунктах, что *коэффициенты $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ являются функциями от x, имеющими в $[a, b]$ все производные, которые нам придется рассматривать.*

---

[1] Здесь $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Рассмотрим класс преобразований, определенный соотношением

$$y = tu,$$

где t — известная функция от x, имеющая в $[a, b]$ производные до n-го порядка включительно, и рассмотрим соответствующее преобразование уравнения (1).

Имеем

$$L(tu) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k (tu)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_k \sum_{r=k}^{n} \binom{n-k}{n-r} t^{(r-k)} u^{(n-r)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} \binom{r}{k} p_k t^{(r-k)} u^{(n-r)} =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \left[\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} p_k t^{(r-k)} \right] u^{(n-r)},$$

откуда

$$\frac{1}{t} L(tu) = u^{(n)} + \binom{n}{1} \pi_1 u^{(n-1)} + \binom{n}{2} \pi_2 u^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n-1} \pi_{n-1} u' + \binom{n}{n} \pi_n u, \qquad (2)$$

где

$$\pi_r = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} p_k t^{(r-k)} = \frac{1}{t} \left[\binom{r}{0} t^r + \binom{r}{1} p_1 t^{(r-1)} + \ldots + \binom{r}{r} p_r t \right], \qquad (3)$$

и, в частности,

$$\pi_1 = \frac{t' + p_1 t}{t}. \qquad (4)$$

Если выбрать множитель t так, чтобы $t' + p_1 t$ равнялось нулю, или, иными словами,

$$t = ce^{-\int p_1\,dx} \quad (c = \text{const}), \qquad (5)$$

то в (2) мы будем иметь $\pi_1 = 0$. Полагая, в частности, $c = 1$, мы получаем, что *преобразование* T

$$T \sim y = e^{-\int p_1\,dx} u \qquad (5')$$

переводит уравнение (1) ***в уравнение***

$$u^{(n)} + \binom{n}{2} P_2 u^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n} P_n u = 0, \qquad (6)$$

где

$$P_r = e^{\int p_1\,dx} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} p_k \frac{d^{r-k}\left(e^{-\int p_1\,dx}\right)}{dx^{r-k}} \quad (r = 2, \ldots, n). \qquad (7)$$

В частности, имеем

$$P_2 = p_2 - p_1^2 - p_1', \qquad P_3 = p_3 - 3p_1 p_2 + 2p_1^3 - p_1''. \tag{8}$$

На языке проективной дифференциальной геометрии говорят, что преобразование (5′) выполняет *относительную нормализацию* уравнения (1), а (6) называется *полуканонической* (*семиканонической*) *формой* уравнения (1).

б) Заметим, что, какова бы ни была постоянная c, уравнение (1) переходит при преобразовании $y = ce^{-\int p_1 dx}$ в уравнение (6), а также, что *две полуканонические формы, переводимые одна в другую преобразованием типа $y = tu$, совпадают.*

Если мы применим к уравнению $L(y) = 0$ преобразование $T_1 \sim y = h\bar{u}$ и приведем преобразованное уравнение к полуканонической форме с помощью преобразования $T_2 \sim \bar{u} = lv$, то получим уравнение

$$v^{(n)} + \binom{n}{2}\Pi_2 v^{(n-2)} + \ldots + \binom{n}{n}\Pi_n v = 0, \tag{9}$$

которое должно совпадать с (6); в самом деле, от полуканонической формы (6) можно перейти к полуканонической форме (9) с помощью преобразования

$$T^{-1}T_1 T \sim u = (e^{\int p_1 dx} hl)\, v.$$

Отсюда следует, что

$$P_k = \Pi_k \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

т. е. что определенные равенствами (7) $n-1$ *величин* $P_2, P_3, \ldots, P_n$, *являются инвариантами относительно класса преобразований* $y = tu$; они называются *дифференциальными семиинвариантами.*

2. Замена независимой переменной. а) Изучим, как влияет на дифференциальное уравнение введение вместо независимой переменной x независимой переменной ξ, связанной с x соотношением

$$\xi = \xi(x)\,[1]. \tag{10}$$

[1]) Важность указанных в п. 1 и 2 преобразований вытекает из следующей теоремы Штекеля — Ли: наиболее общее точечное преобразование, переводящее линейное дифференциальное уравнение порядка $n > 3$ в уравнение того же типа, имеет вид

$$\xi = \xi(x), \qquad y = t(x)\, u \tag{a}$$

(см. Вильчинский [1], стр. 14).

Заметим, что название „дифференциальные семиинварианты" в п. 1 связано с тем, что „абсолютные дифференциальные инварианты" уравнения (1) являются функциями коэффициентов $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и их производных, которые остаются инвариантными как по форме, так и по значениям, при замене независимой переменной и искомой функции, определенной в „а". По теории дифференциальных семиинвариантов и инвариантов читатель может посмотреть гл. II цитированной книги Вильчинского; на стр. 39—40 он найдет там ссылки на работы Кокля, Лагерра, Бриоски, Форсайта, Альфана, Бутона, Фано.

Если обозначить символами $y', y'', \ldots, y^{(n)}, \ldots; \xi', \xi'', \ldots, \xi^{(n)}, \ldots$ *производные функций* y *и* ξ *по* x, то будем иметь

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = \xi'\frac{dy}{d\xi},$$

и с помощью последовательного дифференцирования найдем

$$\left.\begin{aligned} y' &= \xi'\frac{dy}{d\xi}, \\ y'' &= (\xi')^2\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi''\frac{dy}{d\xi}, \\ y''' &= (\xi')^3\frac{d^3y}{d\xi^3} + 3\xi'\xi''\frac{d^2y}{d\xi^2} + \xi^{(3)}\frac{dy}{d\xi}; \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

и вообще

$$y^{(m)} = \sum_{k=1}^{m}\frac{A_{m,k}}{k!}\frac{d^ky}{d\xi^k} \quad (m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{12}$$

где $A_{m,k}$ — целые рациональные функции от производных функции $\xi(x)$.

Легко проверить, что

$$\left.\begin{aligned} &A_{1,1} = \xi'; \quad \frac{A_{2,2}}{2!} = (\xi')^2, \quad \frac{A_{2,1}}{1!} = \xi''; \\ &\frac{A_{3,3}}{3!} = (\xi')^3, \quad \frac{A_{3,2}}{2!} = 3\xi'\xi'', \quad \frac{A_{3,1}}{1!} = \xi'''. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Мы хотим показать, что вообще

$$A_{m,m} = (m!)(\xi')^m, \quad A_{m,1} = \xi^{(m)}, \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_{m,m-1}}{(m-1)!} = \binom{m}{2}\xi''(\xi')^{m-2} \quad (m = 2,\ 3,\ \ldots), \\ &\frac{A_{m,m-2}}{(m-2)!} = \binom{m}{3}\xi'''(\xi')^{m-3} + 3\binom{m}{4}(\xi'')^2(\xi')^{m-4} \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (m = 4,\ 5,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Дифференцируя (12) и *обозначая через* $A'_{m,k}$ *производную функции* $A_{m,k}$ *по* x, получаем

$$\begin{aligned} y^{(m+1)} &= \sum_{k=1}^{m}\frac{A_{m,k}}{k!}\frac{d^{k+1}y}{d\xi^{k+1}}\xi' + \sum_{k=1}^{m}\frac{A'_{m,k}}{k!}\frac{d^ky}{d\xi^k} = \\ &= \frac{A_{m,m}}{m!}\xi'\frac{d^{m+1}y}{d\xi^{m+1}} + \sum_{k=2}^{m}\frac{A'_{m,k} + kA_{m,k-1}\xi'}{k!}\frac{d^ky}{d\xi^k} + A'_{m,1}\frac{dy}{d\xi}, \end{aligned}$$

откуда

$$A_{m+1,m+1} = (m+1)A_{m,m}\xi', \quad A_{m+1,1} = A'_{m,1}, \tag{16}$$

$$A_{m+1,k} = A'_{m,k} + k\xi'A_{m,k-1} \quad (k = 2,\ \ldots,\ m). \tag{17}$$

Из (13) следует, что $A_{1,1}=\xi'$, а потому соотношение (14) непосредственно следует из (16).

Далее, имеем соотношения

$$\begin{aligned}
A_{m,k-1} &= A'_{m-1,k-1}+(k-1)\xi' A_{m-1,k-2},\\
A_{m-1,k-2} &= A'_{m-2,k-2}+(k-2)\xi' A_{m-2,k-3},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_{m-k+3,2} &= A'_{m-k+2,2}+2\xi' A_{m-k+2,1},\\
A_{m-k+2,1} &= \xi^{(m-k+2)}.
\end{aligned}$$

Умножая второе из них на $(k-1)\xi'$, третье на $(k-1)(k-2)(\xi')^2, \ldots$ $\ldots$, предпоследнее на $(k-1)(k-2)\ldots 3(\xi')^{k-3}$, последнее на $(k-1)(k-2)\ldots 3\cdot 2(\xi')^{k-2}$ и складывая, получаем, что

$$\begin{aligned}
A_{m,k-1} = A'_{m-1,k-1} &+ (k-1)\xi' A'_{m-2,k-2}+\\
&+(k-1)(k-2)(\xi')^2 A'_{m-3,k-3}+\ldots+\\
&+(k-1)(k-2)\ldots 3(\xi')^{k-3} A'_{m-k+2,2}+\\
&+(k-1)!(\xi')^{k-2}\xi^{(m-k+2)}.
\end{aligned}\tag{18}$$

Полагая здесь $k=m$ и учитывая, что $A'_{l,l}=(l!)l(\xi')^{l-1}\xi''$, получаем соотношение

$$\begin{aligned}
A_{m,m-1} &= (m-1)!\,[(m-1)+(m-2)+\ldots+2+1]\,\xi''(\xi')^{m-2}=\\
&=(m-1)!\binom{m}{2}\xi''(\xi')^{m-2},
\end{aligned}$$

из которого и следует первое из равенств (15).

Полагая в (18) $k=m-1$, учитывая первое из равенств (15) и известные свойства биноминальных коэффициентов, получаем

$$\begin{aligned}
A_{m,m-2} &= A'_{m-1,m-2}+(m-2)\xi' A'_{m-2,m-3}+\\
&+(m-2)(m-3)(\xi')^2 A'_{m-3,m-4}+\ldots+\\
&+(m-2)(m-3)\ldots 3(\xi')^{m-4}A'_{3,2}+(m-2)!(\xi')^{m-3}\xi'''=\\
&=(m-2)!\left[\binom{m-1}{2}+\binom{m-2}{2}+\ldots+\binom{3}{2}+\binom{2}{2}\right]\xi'''(\xi')^{m-3}+\\
&+3(m-2)!\left[\binom{m-1}{3}+\binom{m-2}{3}+\ldots+\binom{4}{3}+\binom{3}{3}\right](\xi'')^2(\xi')^{m-4}=\\
&=(m-2)!\left[\binom{m}{3}\xi'''(\xi')^{m-3}+3\binom{m}{4}(\xi'')^2(\xi')^{m-4}\right],
\end{aligned}$$

откуда и следует второе из равенств (15).

б) Подставляя (12) в (1), получаем

$$L(y)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}p_i y^{(n-i)}=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}p_i\sum_{r=i}^{n-1}\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!}\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}+\binom{n}{n}p_n y=$$

$$=\sum_{r=0}^{n-1}\left[\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}p_i\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!}\right]\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}+\binom{n}{n}p_n y.$$

Коэффициент при $\frac{d^n y}{d\xi^n}$ в правой части равен $p_0(\xi')^n$, $[=(\xi')^n]$, и следовательно, $L(y)$ преобразуется в

$$\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\bar{p}_r\frac{d^{n-r}y}{d\xi^{n-r}}=0\quad(\bar{p}_0=1,\ \bar{p}_n=p_n/(\xi')^n),\tag{19}$$

где

$$\binom{n}{r}(\xi')^n\bar{p}_r=\sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}p_i\frac{A_{n-i,\,n-r}}{(n-r)!}\qquad(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).\tag{20}$$

В частности, имеем

$$\binom{n}{1}(\xi')^n\bar{p}_1=\binom{n}{0}\frac{A_{n,\,n-1}}{(n-1)!}+\binom{n}{1}p_1\frac{A_{n-1,\,n-1}}{(n-1)!}=$$

$$=\binom{n}{2}\xi''(\xi')^{n-2}+np_1(\xi')^{n-1},$$

или, полагая

$$\frac{\xi''}{\xi'}=\eta,\tag{21}$$

$$\bar{p}_1=\frac{1}{\xi'}\left[\frac{n-1}{2}\eta+p_1\right].\tag{22}$$

Далее, имеем

$$\binom{n}{2}(\xi')^n\bar{p}_2=\frac{A_{n,\,n-2}}{(n-2)!}+n\frac{A_{n-1,\,n-2}}{(n-2)!}p_1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{A_{n-2,\,n-2}}{(n-2)!}p_2=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\xi^{(3)}(\xi')^{n-3}+\frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot3\cdot4}(\xi'')^2(\xi')^{n-4}+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)}{2}\xi''(\xi')^{n-3}p_1+\frac{n(n-1)}{2}(\xi')^{n-2}p_2,$$

откуда

$$\bar{p}_2=\frac{1}{(\xi')^2}\left[p_2+(n-2)p_1\frac{\xi''}{\xi'}+\frac{n-2}{3}\frac{\xi'''}{\xi'}+\frac{(n-2)(n-3)}{4}\left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2\right].$$

Но, дифференцируя (21) по x, получаем, что $\eta'+\eta^2=\xi^{(3)}/\xi'$, и потому

$$\bar{p}_2=\frac{1}{(\xi')^2}\left[p_2+(n-2)p_1\eta+\frac{(n-2)(3n-5)}{12}\eta^2+\frac{n-2}{3}\eta'\right].\tag{23}$$

С помощью простого вычисления можно найти для семиинварианта $\overline{P}_2$ уравнения (19)

$$\overline{P}_2 = \overline{p}_2 - \overline{p}_1^2 - \frac{d\overline{p}_1}{d\xi}$$

выражение

$$\overline{P}_2 = \frac{1}{(\xi')^2}\left[P_2 + \frac{n+1}{12}\eta^2 - \frac{n+1}{6}\eta'\right], \tag{24}$$

где через η' *обозначена производная* η *по* x. Это выражение будет использовано нами в п. 3.

3. Каноническая нормализация Лагерра — Форсайта. Покажем, что если дано уравнение

$$y^{(n)} + \binom{n}{1} p_1 y^{(n-1)} + \binom{n}{2} p_2 y^{(n-2)} + \binom{n}{3} p_3 y^{(n-3)} + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1} p_{n-1} y' + \binom{n}{n} p_n y = 0, \tag{1}$$

то, *применяя последовательно указанные в п.* 1 *и* 2 *преобразования, его можно привести к уравнению, не содержащему членов с* $y^{(n-1)}$ *и* $y^{(n-2)}$.

С помощью преобразования

$$y = e^{-\int p_1\,dx}\,\overline{y}$$

получаем полуканоническую форму

$$\overline{y}^{(n)} + \binom{n}{2} P_2 \overline{y}^{(n-2)} + \binom{n}{3} P_3 \overline{y}^{(n-3)} + \ldots + \binom{n}{n-1} P_{n-1} \overline{y}' + P_n \overline{y} = 0,$$

где

$$P_2 = p_2 - p_1^2 - p_1', \quad P_3 = p_3 - 3p_1 p_2 + 2p_1^3 - p_1''.$$

Сделаем в получившемся уравнении преобразование $\overline{y} = \lambda u$, где λ — некоторая функция от x, которую мы определим несколько позже. Получаем

$$u^{(n)} + \binom{n}{1} \pi_1 u^{(n-1)} + \binom{n}{2} \pi_2 u^{(n-2)} + \ldots + \\ + \binom{n}{n-1} \pi_{n-1} u' + \binom{n}{n} \pi_n u = 0$$

и, в силу (3),

$$\left.\begin{aligned} \pi_1 &= \frac{\lambda'}{\lambda}, \\ \pi_2 &= \frac{1}{\lambda}[\lambda'' + P_2\lambda], \\ \pi_3 &= \frac{1}{\lambda}[\lambda''' + 3P_2\lambda' + P_3\lambda], \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

в то время как семиинвариант Π_2 равен, в силу сказанного в п. 1, семиинварианту P_2.

Последнее уравнение преобразуется с помощью замены переменной $\xi=\xi(x)$ к виду

$$\frac{d^n u}{d\xi^n}+\binom{n}{1}\bar{p}_1\frac{d^{n-1}u}{d\xi^{n-1}}+\binom{n}{2}\bar{p}_2\frac{d^{n-2}u}{d\xi^{n-2}}+\binom{n}{3}\bar{p}_3\frac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}}+\ldots+$$
$$+\binom{n}{n-1}\bar{p}_{n-1}u'+\binom{n}{n}\bar{p}_n u=0, \quad [\bar{p}_n=\pi_n/(\xi')^n], \tag{26}$$

причем, в силу (22), (24), (21), имеем

$$\bar{p}_1=\frac{1}{\xi'}\left[\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{n-1}{2}\eta\right] \quad [\eta=\xi'/\xi''],$$
$$\bar{P}_2=\frac{1}{(\xi')^2}\left[P_2+\frac{n+1}{12}\eta^2-\frac{n+1}{6}\eta'\right] \quad [\bar{P}_2=\bar{p}_2-\bar{p}_1^2-\bar{p}_1'].$$

Предположим, что уравнение Риккати

$$\eta'-\frac{1}{2}\eta^2=\frac{6}{n+1}P_2 \tag{27}$$

имеет *определенное на отрезке* $[a, b]$ решение. Найдем тогда (с помощью квадратуры) λ таким образом, что

$$\frac{\lambda'}{\lambda}+\frac{n-1}{2}\eta=0. \tag{28}$$

Тогда $\bar{P}_2$, $\bar{p}_1$, а следовательно и $\bar{p}_2$, обращаются в нуль, и уравнение (26) приводится к указанному выше виду.

Из (28) и (21) имеем

$$\lambda=e^{-\frac{n-1}{2}\int\eta\,dx} \quad \xi=\int e^{\int\eta\,dx}dx+c,$$

а потому, применяя к уравнению (1) последовательно преобразования

$$y=e^{-\int\left(p_1+\frac{n-1}{2}\eta\right)dx}u, \quad \xi=\int e^{\int\eta\,dx}dx+c, \tag{29}$$

где η — решение уравнения Риккати (27) (мы предполагаем, что это решение существует в $[a, b]$), получаем уравнение

$$\frac{d^n u}{d\xi^n}+\binom{n}{3}\bar{p}_3\frac{d^{n-3}u}{d\xi^{n-3}}+\ldots+\binom{n}{n-1}\bar{p}_{n-1}u'+\binom{n}{n}\bar{p}_n u=0. \tag{26$'$}$$

Указанные преобразования называются *канонической нормализацией* Лагерра — Форсайта уравнения (1), а (26′) называется *канонической формой* уравнения (1).

С помощью преобразования

$$z=e^{-\frac{1}{2}\int\eta\,dx}$$

(см. § 3, п. 2) уравнение (27) сводится к линейному уравнению второго порядка

$$z'' + \frac{3}{n+1} P_2 z = 0, \tag{27'}$$

а потому можно сказать, что *если уравнение* (27′) [1]) *имеет положительное на отрезке* $[a, b]$ *решение* z, *то, применяя к уравнению* (1) *последовательно два преобразования*

$$y = e^{-\int p_1\,dx} z^{n-1} u, \qquad \xi = \int \frac{1}{z^2}\,dx + c,$$

мы приводим его к канонической форме (26′) [2]).

4. Преобразования уравнений второго и третьего порядка. а) Уравнение второго порядка $(a_0 \neq 0)$

$$\frac{d}{dx}\left[a_0 \frac{dy}{dx}\right] + a_2 y = f$$

приводится с помощью замены переменной $\xi = \xi(x)$ к виду

$$\xi' \frac{d}{d\xi}\left(a_0 \xi' \frac{dy}{d\xi}\right) + a_2 y = f\,^{3)}.$$

Поэтому, если выбрать ξ так, чтобы $a_0 \xi' = 1$, т. е. сделать замену переменной

$$\xi = \int \frac{1}{a_0}\,dx + c,$$

то получится уравнение

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + a_0 a_2 y = a_0 f.$$

б) Вообще, уравнение второго порядка $(a_0 \neq 0)$

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = f$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dx}\left(e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx} \frac{dy}{dx}\right) + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx} y = \frac{f}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0}dx}$$

---

[1]) Мы увидим в гл. IV, § 2, п. 7 „в“, что для данного линейного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, в котором функции p и q непрерывны в $[a, b]$, не всегда можно найти (действительное) решение, не обращающееся в нуль на отрезке $[a, b]$.

[2]) Относительно геометрического значения полуканонической и канонической формы линейного дифференциального уравнения см. Бомпиани [1].

[3]) Относительно рассматриваемых в этом пункте вопросов см., например, Курант и Гильберт [1], гл. IV.

В приводимых далее примерах мы, для удобства читателя, рассматриваем неоднородные уравнения.

(см. § 3, п. 3) и с помощью замены переменной

$$\xi = \int e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} dx + c,$$

свести к виду

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} + \frac{a_2}{a_0} e^{2\int \frac{a_1}{a_0} dx} y = \frac{f}{a_0} e^{2\int \frac{a_1}{a_0} dx}.$$

в) Рассмотрим уравнение третьего порядка ($a_0 \neq 0$)

$$a_0 y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = f \tag{31}$$

или, что то же,

$$y''' + \frac{a_1}{a_0} y'' + \frac{a_2}{a_0} y' + \frac{a_3}{a_0} y = \frac{f}{a_0}.$$

По результатам предшествующих пунктов имеем

$$n = 3, \ p_1 = a_1/3a_0, \ p_2 = a_2/3a_0, \ p_3 = a_3/a_0,$$

$$P_2 = \frac{a_2}{3a_0} - \frac{1}{9}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'; \ P_3 = \frac{a_3}{a_0} - \frac{a_1 a_2}{3a_0^2} + \frac{2}{27}\frac{a_1^3}{a_0^3} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'',$$

в то время, как уравнения (27) и (27′) принимают вид

$$\eta' - \frac{1}{2}\eta^2 = \frac{3}{2} P_2,$$

$$z'' + \frac{1}{4}\left[\frac{a_2}{a_0} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2 - \left(\frac{a_1}{a_0}\right)'\right] z = 0. \tag{32}$$

Из результатов п. 3 вытекает, что если существует положительное в $[a, b]$ решение уравнения (32), то уравнение (31) приводится подстановкой

$$y = e^{-\frac{1}{3}\int \frac{a_1}{a_0} dx} z^2 u, \quad \xi = \int \frac{1}{z^2} dx + c$$

к виду

$$\frac{d^3u}{d\xi^3} + \bar{p}_3 u = \frac{f}{a_0} e^{\frac{1}{3}\int \frac{a_1}{a_0} dx} z^4. \tag{33}$$

Вид правой части определяется тем, что при первом из преобразований u''' получается с коэффициентом $e^{-\frac{1}{3}\int \frac{a_1}{a_0} dx} z^2$, а при замене переменной умножается еще на z^{-6}.

Вычислим явным образом $\bar{p}_3$.

В силу (28) имеем $\lambda' = -\eta\lambda$, а потому

$$\lambda'' = -\eta\lambda' - \eta'\lambda = \lambda(\eta^2 - \eta') = \lambda\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}P_2\right),$$

$$\lambda''' = \lambda'\left(\frac{1}{2}\eta^2 - \frac{3}{2}P_2\right) + \lambda\left(\eta\eta' - \frac{3}{2}P_2'\right) = \lambda\left(3\eta P_2 - \frac{3}{2}P_2'\right),$$

откуда, в силу (25) и (26), получаем

$$\bar{p}_3 = \frac{\pi_3}{(\xi')^3} = z^6\left(\frac{\lambda'''}{\lambda} + 3P_2\frac{\lambda'}{\lambda} + P_3\right) = z^6\left(P_3 - \frac{3}{2}P_2'\right)$$

и, наконец,

$$\bar{p}_3 = \left[\frac{1}{6}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)'' + \frac{1}{3}\frac{a_1}{a_0}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)' + \frac{2}{27}\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^3 - \frac{1}{3}\frac{a_1a_2}{a_0^2} + \frac{a_3}{a_0}\right]z^6,$$

где все производные взяты относительно переменной x.

§ 5. Сопряженное уравнение Лагранжа

1. Сопряженные дифференциальные многочлены и уравнения. а) Рассмотрим дифференциальный многочлен порядка n

$$L(y) = a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny, \tag{1}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — непрерывные функции от x, обладающие всеми встречающимися в дальнейшем производными, $a_0 \neq 0$ в $[a, b]$ и $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ являются последовательными производными y. Рассмотрим следующую проблему: *существует ли такая функция $z(x)$, что для нее тождественно выполняется соотношение*

$$zL(y) \equiv \frac{d}{dx}[\psi(y, z)], \tag{2}$$

где функция $\psi(y, z)$ линейно зависит от y и ее производных до n — 1-го порядка включительно, или, как говорят, существует ли множитель для дифференциального многочлена $L(y)$?

Ответ на этот вопрос положителен. В самом деле, последовательным интегрированием по частям получаем

$$\int (a_kz)y^{(n-k)}dx = y^{(n-k-1)}(a_kz) - y^{(n-k-2)}(a_kz)' + y^{(n-k-3)}(a_kz)'' + \ldots + \\ + (-1)^{n-k-1}y(a_kz)^{(n-k-1)} + (-1)^{n-k}\int y(a_kz)^{(n-k)}dx,$$

откуда, дифференцируя по x, выводим, что

$$(a_kz)y^{(n-k)} = \frac{d}{dx}[y^{(n-k-1)}(a_kz) - y^{(n-k-2)}(a_kz)' + \ldots + \\ + (-1)^{n-k-1}y(a_kz)^{(n-k-1)}] + (-1)^{n-k}y(a_kz)^{(n-k)},$$

а потому тождественно выполняется соотношение

$$zL(y) \equiv \frac{d}{dx}[y^{(n-1)}(a_0z) - y^{(n-2)}(a_0z)' + \ldots + (-1)^{n-1}y(a_0z)^{(n-1)}] + \\ + \frac{d}{dx}[y^{(n-2)}(a_1z) - y^{(n-2)}(a_1z)' + \ldots + (-1)^{n-2}y(a_1z)^{(n-2)}] + \\ + \ldots + \frac{d}{dx}[y(a_{n-1}z)] + yM(z), \tag{3}$$

где положено

$$M(z)=(-1)^n\frac{d^n(a_0z)}{dx^n}+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_1z)}{dx^{n-1}}+\ldots-\frac{d(a_{n-1}z)}{dx}+a_nz. \quad (4)$$

Из соотношения (3) получаем тождество

$$zL(y)-yM(z)\equiv\frac{d}{dx}[\psi(y,\ z)], \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}\psi(y,\ z)= & \qquad (6)\\ =y\Big[a_{n-1}z-\frac{d(a_{n-2}z)}{dx}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(a_1z)}{dx^{n-2}}+(-1)^{n-1}\frac{d^{n-1}(a_0z)}{dx^{n-1}}\Big]+ &\\ +y'\Big[a_{n-2}z-\frac{d(a_{n-3}z)}{dx}+\ldots+(-1)^{n-2}\frac{d^{n-2}(a_0z)}{dx^{n-2}}\Big]+ &\\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ &\\ +y^{(n-2)}\Big[a_1z-\frac{d(a_0z)}{dx}\Big]+ &\\ +y^{(n-1)}[a_0z], &\end{aligned}$$

и потому функция $\psi(y,\ z)$ является билинейной формой относительно y, z и их производных до $n-1$-го порядка включительно.

Из (5) и (6) получаем, что если выбрать в качестве z решение уравнения $M(z)=0$, то, какова бы ни была функция y, произведение $zL(y)$ будет производной от $\psi(y,\ z)$ по x, а потому z является множителем для $L(y)$; кроме того, если выбрать z указанным выше образом, то линейное уравнение $n-1$-го порядка

$$\psi(y,\ z)=\text{const} \quad (7)$$

будет *первым интегралом для уравнения*

$$L(y)=0\text{ [1]}. \quad (1')$$

б) Уравнение $M(z)=0$ называется *сопряженным уравнением* Лагранжа для уравнения $L(y)=0$, а многочлен $M(z)$ — *сопряженным многочленом для* $L(y)$[2].

в) Покажем, что для $M(z)$ *сопряженным многочленом* является $L(y)$, т. е. что отношение сопряженности двух дифференциальных многочленов симметрично.

---

[1]) Если $f(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n)})=0$ — дифференциальное уравнение, то любое соотношение вида $F(x,\ y,\ y',\ldots,\ y^{n-1})=\text{const}$, которому удовлетворяют *все* решения этого уравнения, называется его *первым интегралом.*

[2]) См. Лагранж [1], т. I, стр. 471. Подробное рассмотрение сопряженного уравнения Лагранжа см. у Дарбу [1], т. II, стр. 112—149. Геометрическое значение сопряженного уравнения и его главные свойства изложены в статье Бореля [1]. Название „сопряженное уравнение" ввел Фукс [2], стр. 183.

В самом деле, если $L_1(y)$ — сопряженный с $M(z)$ многочлен, то имеет место тождество

$$yM(z) - zL_1(y) \equiv \frac{d}{dx}[\psi_1(y, z)]. \tag{5'}$$

Складывая тождества (5) и (5′), получаем тождество

$$z[L(y) - L_1(y)] \equiv \frac{d}{dx}[\psi(y, z) + \psi_1(y, z)]. \tag{8}$$

Если бы дифференциальный многочлен $\psi(y, z) + \psi_1(y, z)$ содержал z или одну из производных $z^{(k)}$, то в правую часть равенства (8) вошла бы, по крайней мере, одна производная от z, в то время как в левую часть входит лишь z, чего не может быть в силу тождественного характера соотношения (8). По той же причине этот дифференциальный многочлен не может быть отличной от постоянной функцией y и производных $y^{(k)}$, так как в противном случае правая часть (8) зависела бы только от y и $y^{(k)}$, в то время как левая часть (8) зависит также и от z. Поэтому имеем $z[L(y) - L_1(y)] \equiv 0$ и, в силу произвольности z,

$$L(y) \equiv L_1(y).$$

г) Укажем еще на связь понятия сопряженной системы, введенного в § 1, п. 4 „а“, с понятием сопряженного уравнения.

Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

Оно эквивалентно линейной однородной системе

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3; \ \ldots, \ \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n,$$
$$\frac{dy_n}{dx} = -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \ldots - a_2 y_{n-1} - a_1 y_n,$$

сопряженной с которой является система

$$\frac{dz_1}{dx} = a_n z_n, \quad \frac{dz_2}{dx} = -z_1 + a_{n-1} z_n,$$
$$\frac{dz_3}{dx} = -z_2 + a_{n-2} z_n, \ \ldots, \ \frac{dz_n}{dx} = -z_{n-1} + a_1 z_n.$$

Из этой системы имеем

$$\frac{dz_1}{dx} = (a_n z_n), \ -\frac{d^2 z_2}{dx^2} = \frac{dz_1}{dx} - \frac{d(a_{n-1} z_n)}{dx}, \ \frac{d^3 z_3}{dx^3} = -\frac{d^2 z_2}{dx^2} + \frac{d^2 (a_{n-2} z_n)}{dx^2}, \ldots$$
$$\ldots, (-1)^{n-1} \frac{d^n z_n}{dx^n} = (-1)^{n-2} \frac{d^{n-1} z_{n-1}}{dx^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(a_1 z_n)}{dx^{n-1}},$$

откуда, суммируя и приводя подобные члены, получаем

$$(-1)^n \frac{d^n z_n}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(a_1 z_n)}{dx^{n-1}} + \ldots + \frac{d^2(a_{n-2} z_n)}{dx^2} - \\ - \frac{d(a_{n-1} z_n)}{dx} + a_n z_n = 0.$$

Таким образом, z_n является решением уравнения, сопряженного с данным.

2. Соотношения между фундаментальными системами решений сопряженных дифференциальных уравнений. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений уравнения (1′). Тогда, полагая

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

(см. § 1, п. 3), видим, что $\Delta \neq 0$ в $[a, b]$. Так как $\partial\Delta/\partial y_i^{(k)}$ является алгебраическим дополнением $y_i^{(k)}$ в Δ, то, полагая

$$\Theta_i(y) = \frac{1}{\Delta}\left[\frac{\partial\Delta}{\partial y_i} y + \frac{\partial\Delta}{\partial y_i'} y' + \ldots + \frac{\partial\Delta}{\partial y_i^{(n-1)}} y^{(n-1)}\right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

получим, что

$$\Theta_i(y_i) = 1, \quad \Theta_i(y_j) = 0, \quad \text{если} \quad i \neq j.$$

Поэтому, если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, то

$$\Theta_i(c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n) = c_i,$$

следовательно, линейное дифференциальное уравнение порядка n

$$\frac{d}{dx}\Theta_i(y) = 0 \tag{9}$$

имеет те же решения, что и (1′); отсюда вытекает, что коэффициенты этих двух уравнений пропорциональны, а потому[1])

$$\frac{d\Theta_i(y)}{dx} = z_i L(y) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1]) Отметим, что если два дифференциальных уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$
$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + \ldots + b_{n-1} y' + b_n y = 0,$$

где $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$ в $[a, b]$; $a_0, a_1, \ldots, a_n$; $b_0, b_1, \ldots, b_n$ непрерывны в $[a, b]$, имеют одни и те же решения, то их коэффициенты пропорциональны.

В самом деле, если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений для обоих уравнений, то они удовлетворяют уравне-

Сравнивая коэффициенты при $y^{(n)}$ в обеих частях, мы видим, что

$$z_i = \frac{1}{a_0} \frac{\partial \ln |\Delta|}{\partial y_i^{(n-1)}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Но, в силу равенства (5) из п. 1 „а"

$$z_i L(y) - yM(z_i) \equiv \frac{d}{dx}[\psi(y, z_i)],$$

а потому

$$yM(z_i) \equiv \frac{d}{dx}[\Theta_i(y) - \psi(y, z_i)].$$

Повторяя проведенные в п. 1 „в" рассуждения, получаем, что

$$M(z_i) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\,^{1)},$$

т. е. что функции $z_1, z_2, \ldots, z_n$, полученные по формуле (10), являются решениями сопряженного уравнения и, как мы сейчас покажем, образуют фундаментальную систему решений.

В самом деле, по известным свойствам определителей

$$\begin{gathered} z_1 y_1 + z_2 y_2 + \ldots + z_n y_n = 0, \\ z_1 y_1' + z_2 y_2' + \ldots + z_n y_n' = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1 y_1^{(n-1)} + z_2 y_2^{(n-1)} + \ldots + z_n y_n^{(n-1)} = \frac{1}{a_0}. \end{gathered}$$

Дифференцируя эти тождества, получаем

$$\left.\begin{aligned} z_1^{(i)} y_1^{(k)} + z_2^{(i)} y_2^{(k)} + \ldots + z_n^{(i)} y_n^{(k)} &= 0 \quad (i + k < n - 1), \\ z_1^{(i)} y_1^{(k)} + z_2^{(i)} y_2^{(k)} + \ldots + z_n^{(i)} y_n^{(k)} &= \frac{(-1)^i}{a_0} \; (i + k = n - 1). \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Положим

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & \ldots & z_n \\ z_1' & z_2' & \ldots & z_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_1^{(n-1)} & z_2^{(n-1)} & \ldots & z_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

нию $n-1$-го порядка

$$\left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}\right) y^{(n-1)} + \left(\frac{a_2}{a_0} - \frac{b_2}{b_0}\right) y^{(n-2)} + \ldots + \left(\frac{a_n}{a_0} - \frac{b_n}{b_0}\right) y = 0.$$

Но это уравнение, если оно не является тождеством, может иметь лишь $n-1$ линейно независимых решений, откуда следует, что

$$\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} = \frac{a_2}{a_0} - \frac{b_2}{b_0} = \ldots = \frac{a_n}{a_0} - \frac{b_n}{b_0} = 0.$$

1) При этом мы имеем $\Theta_i(y) \equiv \psi(y, z_i)$, а потому $\psi(y_i, z_i) = 1$, $\psi(y_i, z_j) = 0$, если $i \neq j$.

и умножим определитель Δ на Δ_1 справа. Учитывая равенства (11), получим

$$\Delta\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{1}{a_0} \\ 0 & 0 & \ldots & -\frac{1}{a_0} & \\ 0 & \frac{(-1)^{n-2}}{a_0} & & & \\ \frac{(-1)^{n-1}}{a_0} & & & & \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{a_0}\right)^n, \tag{12}$$

а потому Δ_1 не равно нулю в (a, b) и, следовательно, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ образуют фундаментальную систему решений сопряженного уравнения $M(z) = 0$.

3. Самосопряженные дифференциальные уравнения и многочлены. а) Дифференциальное уравнение называется *самосопряженным*, если оно обладает теми же решениями, что и сопряженное с ним уравнение.

Для того чтобы уравнение $L(y) = 0$ было самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты многочленов $L(y)$ и $M(z)$ были пропорциональны[1]. Из того, что коэффициенты при $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ в (1) и (4) отличаются множителем $(-1)^n$, следует, что уравнение $L(y) = 0$ самосопряжено тогда и только тогда, когда тождественно

$$L(y) \equiv (-1)^n M(y). \tag{13}$$

Дифференциальный многочлен $L(y)$ называется *самосопряженным*, если для него и для сопряженного с ним многочлена выполняется тождество (13).

Из (13) следует, что *сумма* (разность) *двух самосопряженных дифференциальных многочленов, порядки которых имеют одну и ту же четность, является самосопряженным многочленом.*

б) Из введенного определения вытекает, что для того, чтобы многочлен $a_0y' + a_1y$ был самосопряженным, должно выполняться тождество $a_0y' + a_1y \equiv (a_0y)' - a_1y$, $2a_1 = a_0'$, а потому самосопряженный многочлен первого порядка имеет вид

$$\frac{d}{dx}[Ay] + Ay' \quad \left[A = \frac{a_0}{2}\right]. \tag{14_1}$$

Аналогично, если многочлен второго порядка $a_0y'' + a_1y' + a_2y$ самосопряжен, то имеет место тождество $(a_0y)'' - (a_1y)' + a_2y \equiv a_0y'' + a_1y' + a_2y$, а потому $2(a_0' - a_1)y' + (a_0'' - a_1') \equiv 0$, откуда $a_0' = a_1$. Поэтому самосопряженный многочлен второго порядка имеет вид

$$\frac{d}{dx}[A_0y'] + A_1y, \quad [A_0 = a_0,\ A_1 = a_2]. \tag{14_2}$$

---

[1]) См. примечание на стр. 92.

В частности, в силу результатов § 3, п. 3 „б", многочлен $a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y$ может быть приведен к самосопряженному виду

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} \frac{dy}{dx}\right] + \frac{a_2}{a_0} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx} y$$

путем умножения на

$$a_0^{-1} e^{\int \frac{a_1}{a_0} dx}.$$

в) Докажем, что *дифференциальные многочлены*

$$\frac{d^p}{dx^p}[Ay^{(p)}], \tag{15_1}$$

$$\frac{d^p}{dx^p}[Ay^{(p-1)}] + \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[Ay^{(p)}] \tag{15_2}$$

самосопряжены.

В самом деле, имеем

$$\frac{d^p[Ay^{(p)}]}{dx^p} = \binom{p}{0} Ay^{(2p)} + \binom{p}{1} A'y^{(2p-1)} + \ldots + \binom{p}{p-1} A^{(p-1)} y^{(p+1)} + \binom{p}{p} A^{(p)} y^{(p)},$$

а потому сопряженный с (15) дифференциальный многочлен имеет вид

$$\frac{d^{2p}(Ay)}{dx^{2p}} - \binom{p}{1}\frac{d^{2p-1}(A'y)}{dx^{2p-1}} + \binom{p}{2}\frac{d^{2p-2}(A''y)}{dx^{2p-2}} - \ldots + (-1)^p \frac{d^p(A^{(p)}y)}{dx^p} \equiv$$
$$\equiv \frac{d^p}{dx^p}\left[\frac{d^p}{dx^p}(Ay) - \binom{p}{1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y) + \binom{p}{2}\frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}(A''y) - \ldots + (-1)^p A^{(p)} y\right].$$

Но получившееся выражение равно $\frac{d^p[Ay^{(p)}]}{dx^p}$ в силу тождества

$$Ay^{(p)} \equiv \frac{d^p}{dx^p}(Ay) - \binom{p}{1}\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y) + \binom{p}{2}\frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}(A''y) - \ldots + (-1)^p A^{(p)} y \text{ [1]}. \tag{16}$$

[1] Тождество (16) доказывается следующим образом. Составим для последовательности

$$A^{(p)} y,\ \frac{d}{dx}(A^{(p-1)} y),\ \ldots,\ \frac{d^p}{dx^p}(Ay)$$

Аналогичным путем доказывается самосопряженность выражения (15_2); достаточно, кроме тождества (16), учесть аналогичное тождество для $Ay^{(p-1)}$.

г) Покажем теперь, что *самосопряженный многочлен четного порядка* $2m$ *имеет вид*

$$\frac{d^m}{dx^m}[A_0y^{(m)}]+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_1y^{(m-1)}]+\ldots+\frac{d}{dx}[A_{m-1}y']+A_my,$$

а нечетного порядка $2m-1$ — *вид*

$$\left[\frac{d^m}{dx^m}[A_0y^{(m-1)}]+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_0y^{(m)}]\right]+$$
$$+\left[\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}[A_1y^{(m-2)}]+\frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}}[A_1y^{(m-1)}]\right]+\ldots$$
$$\ldots+\left[\frac{d}{dx}[A_{m-1}y]+A_{m-1}y'\right].$$

В „б“ мы показали справедливость этой теоремы для случая, когда $m=1$, и теперь можем провести доказательство по индукции. Пусть $L(y)$ — самосопряженный многочлен. Сравнивая в тождестве (13) коэффициенты при $y^{(n-1)}$, получаем $na_0'-a_1=a_1$, $2a_1=na_0'$. Рассмотрим в случае, когда $n=2m$, разность $L(y)-\frac{d^m}{dx^m}[a_0y^{(m)}]$, а в случае, когда $n=2m-1$, — выражение

$$L(y)-\left[\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{1}{2}a_0y^{(m-1)}\right)+\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}}\left(\frac{1}{2}a_0y^{(m)}\right)\right].$$

Мы получим тогда самосопряженный многочлен порядка $n-2$, чем и доказывается наше утверждение.

д) Легко доказать, что *если* $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ *образуют систему независимых решений самосопряженного уравнения n-го порядка, то произведение* $a_0^{\frac{n}{2}-1}W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ *также является решением этого уравнения.*

таблицу последовательных разностей

$$\begin{array}{l}
A^{(p)}y,\ \frac{d}{dx}(A^{(p-1}y),\ \frac{d^2}{dx^2}(A^{(p-2)}y)\ \ldots,\ \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(A'y),\ \frac{d^p}{dx^p}(Ay),\\
A^{(p-1)}y',\ \frac{d}{dx}(A^{(p-2)}y'),\ \frac{d^2}{dx^2}(A^{(p-3)}y'),\ \ldots,\ \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}(Ay'),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A'y^{(p-1)},\ \frac{d}{dx}(Ay^{(p-1)}),\\
Ay^{(p)}.
\end{array}$$

Применяя известную формулу, выражающую p-ю разность через члены последовательности, получим формулу (16). [См., например, Гельфонд А. О. [1], стр. 40. — *Прим. перев.*]

В самом деле, положим в равенстве (10) из п. 2 $i=n$ и заметим, что, в силу самосопряженности уравнения, функция

$$z_n = \frac{1}{a_0}\frac{1}{\Delta} W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$$

также является решением нашего уравнения; но из формулы Лиувилля (см. § 1, п. 2, „в") получаем

$$\Delta = W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x_0)\, e^{-\int \frac{a_1}{a_0} dx} \equiv W(x_0)\, e^{-\frac{n}{2}\int \frac{a_0'}{a_0} dx} =$$
$$= W(x_0)\, a_0^{-\frac{n}{2}}$$

и потому

$$z_n = \frac{1}{W(x_0)} a_0^{\frac{n}{2}-1} W(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$$

($1/W(x_0)$ является постоянным множителем).

4. Первый интеграл самосопряженного уравнения нечетного порядка. Пусть $L(y)$ — самосопряженный дифференциальный многочлен нечетного порядка $2m-1$; подставляя в тождество (5) вместо $M(z)$ многочлен $-L(y)$, получим

$$zL(y) + yL(z) \equiv \frac{d}{dx}[\psi(y, z)]$$

и, полагая $z=y$, имеем

$$yL(y) = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}[\psi(y, y)].$$

Таким образом, *самосопряженный дифференциальный многочлен* $L(y)$ *имеет множитель* y, *а соответствующее дифференциальное уравнение* $L(y)=0$ *имеет первый интеграл* (второй степени)

$$\psi(y, y) = \text{const}.$$

5. Самосопряженные уравнения третьего порядка. В частности, самосопряженное уравнение третьего порядка

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}[A_0 y'] + \frac{d}{dx}[A_0 y'']\right] + \left[\frac{d}{dx}[A_1 y] + A_1 y'\right] = 0 \qquad (17)$$

имеет первый интеграл

$$2A_0 y y'' - A_0 y'^2 + A_0' y y' + A_1 y^2 = \text{const}.$$

Если положить постоянную, стоящую в этом уравнении справа, равной нулю и подставить z^2 вместо y, то получится дифференциальное уравнение второго порядка

$$4A_0 z'' + 2A_0' z' + A_1 z = 0.$$

Если z_1 и z_2 — два линейно независимых решения этого уравнения, то z_1^2 и z_2^2 являются линейно независимыми решениями уравнения (17).

В силу полученных в п. 3 „д" результатов, уравнение (17) имеет также решение

$$A_0^{\frac{1}{2}}\begin{vmatrix} z_1^2 & z_2^2 \\ 2z_1z_1' & 2z_2z_2' \end{vmatrix} = 2A_0^{\frac{1}{2}} z_1z_2 \begin{vmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{vmatrix} = cz_1z_2 \quad (c = \text{const} \neq 0)\,^{1)},$$

и потому уравнение (17) имеет фундаментальную систему решений z_1^2, z_1z_2, z_2^2 [2]).

§ 6. Преобразование линейного дифференциального уравнения с начальными данными в интегральное уравнение Вольтерра второго рода

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$L(y) = f(x), \tag{1}$$

где

$$L(y) = \frac{d^ny}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + p_n(x)y, \tag{2}$$

$p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$, $f(x)$ — непрерывные в $[a, b]$ функции от x, и пусть надо решить задачу Коши для этого уравнения, т. е. найти решение уравнения (1), которое в точке a удовлетворяет начальным условиям

$$y(a) = c_0, \quad y'(a) = c_1, \ \ldots, \ y^{(n-1)}(a) = c_{n-1} \tag{3}$$

(см. § 1, п. 1 „в" и п. 5 „в").

Примем $y^{(n)}(x)$ за искомую функцию и положим

$$y^{(n)}(x) = \varphi(x) \tag{4}$$

($\varphi(x)$ — искомая функция). Отсюда, учитывая условия (3), получаем

$$y(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)\,dt + c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + \\ + c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + c_1\frac{x-a}{1!} + c_0, \tag{5}$$

---

1) По формуле Лиувилля (см. § 1, п. 2 „в") имеем

$$\begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ z_1', & z_2' \end{vmatrix} = W(x_0)\,e^{-\frac{1}{2}\int \frac{A_0'}{A_0}dx} = W(x_0)\,A_0^{-\frac{1}{2}}.$$

2) Относительно самосопряженных уравнений третьего порядка см. Дарбу [1], т. II, стр. 129—130, а также Маммана [1] и Галлина [1].

откуда, дифференцируя r раз по x, находим

$$y^{(r)}(x)=\frac{1}{(n-r-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-r-1}\varphi(t)\,dt+c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}+$$
$$+c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-r-2}}{(n-r-2)!}+\ldots+c_r. \qquad (6)$$

Подставляя полученные выражения в (1), получаем для $\varphi(x)$ интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\varphi(x)-\int_a^x K(x,\ t)\,\varphi(t)\,dt=F(x), \qquad (7)$$

где *ядро* $K(x,\ t)$ и функция $F(x)$ определены, соответственно, выражениями

$$K(x,\ t)=-p_1(x)-\frac{p_2(x)}{1!}(x-t)-\frac{p_3(x)}{2!}(x-t)^2-\ldots-$$
$$-\frac{p_n(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \qquad (8_1)$$

$$a\leqslant x\leqslant b, \qquad a\leqslant t\leqslant b, \qquad (9_1)$$

$$F(x)=f(x)-\sum_{r=0}^{n-1}p_{n-r}(x)\left[c_{n-1}\frac{(x-a)^{n-r-1}}{(n-r-1)!}+\right.$$
$$\left.+c_{n-2}\frac{(x-a)^{n-r-2}}{(n-r-2)!}+\ldots+c_{r+1}\frac{x-a}{1!}+c_r\right], \qquad (8_2)$$

$$a\leqslant x\leqslant b. \qquad (9_2)$$

Хорошо известно, что интегральное уравнение (7) имеет одно и только одно решение[1]).

Положим

$$K_1(x,\ t)=K(x,\ t),$$
$$K_n(x,\ t)=\int_t^x K(x,\ z)\,K_{n-1}(z,\ t)\,dz \qquad (n=2,\ 3,\ \ldots)$$

[$K_n(x,\ t)$ называется n-й итерацией ядра $K(x,\ t)$]. Если обозначить через M наибольшее значение $|K(x,\ t)|$ в квадрате Q, определенном неравенствами (9_1), то

$$|K_n(x,\ t)|\leqslant M\frac{|x-t|^{n-1}}{(n-1)!};$$

[1]) В этой книге мы будем, когда найдем полезным, использовать теорию линейных интегральных уравнений, считая, что она уже известна читателю. [Относительно теории линейных интегральных уравнений см. Гурса [1], т. III, стр. 3, Петровский И. Г. [2], Привалов И. И. [2], а также Курант и Гильберт [1], т. I. — *Прим. перев.*]

а потому ряд

$$\Gamma(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x, t)$$

равномерно сходится в Q и (7) имеет единственное решение

$$\varphi(x) = \int_a^x \Gamma(x, t) F(t) dt + F(x)$$

[$\Gamma(x, t)$ называется *резольвентой* для (7)].

Подставляя полученное для $\varphi(x)$ выражение в (5), получаем искомое решение $y(x)$.

Таким образом, задача Коши для дифференциального уравнения (1) сводится к интегральному уравнению (7), которое всегда имеет единственное решение; отсюда следует, что если привлекать теорию линейных интегральных уравнений, то *указанное преобразование дает новое доказательство теоремы существования и единственности решения дифференциального уравнения* (1) *с заданными начальными данными.*

Систематическое изучение линейных дифференциальных уравнений посредством сведения их к интегральным уравнениям было впервые проведено Дини (см. Дини [1], Коттон [1], стр. 16); хотя Дини не употреблял в своих мемуарах слов „интегральное уравнение“, но он строил эти уравнения, когда это было нужно при изучении линейных дифференциальных уравнений.