Умножая первое равенство на $J_n(bx)$, а второе на $J_n(ax)$ и вычитая, выводим, что

$$\frac{d}{dx}\left[x\left\{J_n(ax)\frac{dJ_n(bx)}{dx}-J_n(bx)\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right\}\right]=$$
$$=(a^2-b^2)\,xJ_n(ax)\,J_n(bx).$$

Так как $n>-1$, можно интегрировать это равенство от 0 до x, а потому

$$\int\limits_0^x xJ_n(ax)\,J_n(bx)\,dx=\frac{x}{a^2-b^2}\left[J_n(ax)\frac{dJ_n(bx)}{dx}-J_n(bx)\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right]. \qquad (23)$$

Нетрудно видеть, что это равенство справедливо и в случае, когда одна из постоянных a или b равна нулю.

Переходя в формуле (23) к пределу при $b\to a$ и применяя к правой части правило Лопиталя, получаем

$$\int\limits_0^x xJ_n^2(ax)\,dx=\frac{x}{2a}\left[\frac{dJ_n(ax)}{dx}\,\frac{dJ_n(ax)}{da}-J_n(ax)\frac{d}{da}\,\frac{dJ_n(ax)}{dx}\right],$$

но

$$\frac{d}{da}\,\frac{dJ_n(ax)}{dx}=\frac{d^2J_n(ax)}{d(ax)^2}\,ax+\frac{dJ_n(ax)}{d(ax)},$$

и потому

$$\int\limits_0^x xJ_n^2(ax)\,dx=\frac{x^2}{2}\left\{\left[\frac{dJ_n(ax)}{d(ax)}\right]^2-J_n(ax)\frac{d^2J_n(ax)}{d(ax)^2}-\frac{J_n(ax)}{ax}\,\frac{dJ_n(ax)}{d(ax)}\right\}. \qquad (24)$$

б) В гл. IV, § 3, п. 2, будет показано, что если $n>-1$, то $J_n(x)$ имеет бесконечное множество нулей, причем все эти нули действительны и, за исключением $x=0$, простые. Принимая сейчас без доказательства справедливость этого результата, обозначим через $\{\lambda_r\}$ *последовательность положительных нулей* $J_n(x)$ [1]).

Полагая в формуле (23) верхний предел интегрирования равным 1, $a=\lambda_r$, $b=\lambda_s$, $r\neq s$, получаем

$$\int\limits_0^1 xJ_n(\lambda_r x)\,J_n(\lambda_s x)\,dx=0 \quad (r\neq s). \qquad (25)$$

Таким образом, *система функций* $\{x^{1/2}J_n(\lambda_r x)\}$ $(r=0, 1, 2, \ldots;$ $n>-1)$ *ортогональна на отрезке* $[0, 1]$.

Полагая в формуле (24) $x=1$, $a=\lambda_r$, получаем

$$\int\limits_0^1 xJ_n^2(\lambda_r x)\,dx=\frac{1}{2}\,[J_n'(\lambda_r)]^2. \qquad (26_1)$$

---

[1]) В силу (11), нулями $J_n(x)$ являются λ_r и $-\lambda_r$.

В силу (22_3), эту формулу можно также записать в виде

$$\int_0^1 xJ_n^2(\lambda_r x)\,dx = \frac{1}{2}J_{n+1}^2(\lambda_r) = \frac{1}{2}J_{n-1}^2(\lambda_r). \qquad (26_2)$$

8. Задача о разложении в ряды по бесселевым функциям. Вернемся снова к рассматривавшейся в п. 1 задаче Д. Бернулли и сведем ее к разложениям в ряды по бесселевым функциям.

Уравнение (9) имеет решение $\omega = J_0(\eta) = J_0(\lambda\sqrt{\xi})$, причем постоянная λ должна быть такой, что $J_0(\lambda) = 0$, следовательно

$$\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots.$$

Поэтому элементарное решение (4) имеет вид

$$y(\xi, \tau) = J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\left[a_r\cos\frac{\lambda_r\tau}{2} + b_r\sin\frac{\lambda_r\tau}{2}\right].$$

В силу линейности уравнения в частных производных (2) можно предположить, что существуют такие две последовательности чисел $\{a_r\}$, $\{b_r\}$, что функция

$$y(\xi, \tau) = \sum_{r=1}^{\infty} J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\left(a_r\cos\frac{\lambda_r\tau}{2} + b_r\sin\frac{\lambda_r\tau}{2}\right) \qquad (27)$$

является решением уравнения (2), удовлетворяющим условиям (3_1), (3_2), (3_3).

Условие (3_1) выполняется в силу того, что $J_0(\lambda_r) = 0$, условия же (3_2) и (3_3) приводят к равенствам

$$f(\xi) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}), \quad g(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} b_r\lambda_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}) \qquad (28)$$

(второе получается при предположении, что ряд (27) можно почленно дифференцировать).

Заменяя в (25) и (26_2) x на $\sqrt{\xi}$, получаем соответственно

$$\int_0^1 J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})J_0(\lambda_s\sqrt{\xi})\,d\xi = 0 \quad (r \neq s),$$

$$\int_0^1 J_0^2(\lambda_r\sqrt{\xi})\,d\xi = J_1^2(\lambda_r).$$

Поэтому, умножая в равенствах (28) обе части на $J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})$ и предполагая законность почленного интегрирования, получаем

$$\left.\begin{aligned} a_r &= \frac{1}{J_1^2(\lambda_r)}\int\limits_0^1 f(\xi)\,J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\,d\xi, \\ b_r &= \frac{2}{\lambda_r J_1^2(\lambda_r)}\int\limits_0^1 g(\xi)\,J_0(\lambda_r\sqrt{\xi})\,d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Таким образом, вопрос сводится к нахождению достаточных условий того, что для заданных двух функций $f(\xi)$, $g(\xi)$ ряды

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}), \quad \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{\infty} b_r\lambda_r J_0(\lambda_r\sqrt{\xi}),$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам (29), сходятся соответственно к $f(\xi)$ и $g(\xi)$, или, как говорится, к задаче о разложимости функций $f(\xi)$ и $g(\xi)$ в ряды Бесселя [1]).

---

[1]) Относительно критерия сходимости в данной точке см. Ватсон [1], стр. 591.

Глава IV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Задача о нахождении решения дифференциального уравнения n-го порядка, проходящего через n заданных точек

1. Случай, когда уравнение линейно. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=0, \tag{1}$$

коэффициенты которого $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x)$ являются непрерывными функциями от x на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Теорема существования и единственности (см. гл. II, § 1, п. 1 „в") гласит, что для данной точки x^0 из $[\alpha, \beta]$ и данных значений y^0, $y_1^0, \ldots, y_{n-1}^0$ *существует одно и только одно решение* $y(x)$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее начальным условиям*

$$y(x^0)=y^0,\ y'(x^0)=y_1^0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x^0)=y_{n-1}^0.$$

В некоторых задачах математической физики и прикладной математики возникает необходимость отыскания решения уравнения (1) в случае, когда не все начальные условия заданы в одной и той же точке x^0. Например, часто *требуется найти решение* $y(x)$ *уравнения* (1), *проходящее через* n *заданных точек*

$$P_1\equiv(a_1,\ A_1),\ P_2\equiv(a_2,\ A_2),\ \ldots,\ P_n\equiv(a_n,\ A_n),$$
$$\alpha\leqslant a_1<a_2<\ldots<a_n\leqslant\beta,$$

т. е. построить решение (1), удовлетворяющее условиям

$$y(a_k)=A_k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2}$$

Если функции $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ образуют фундаментальную систему решений для уравнения (1), то общее решение этого уравнения имеет вид $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, и наша задача равносильна задаче о нахождении $c_1, c_2, \ldots, c_n$ из линейной системы

$$\sum_{i=1}^{n}c_iy_i(a_k)=A_k\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Если при заданных $a_1, a_2, \ldots, a_n$ определитель матрицы $\Delta = \|y_i(a_k)\|$ отличен от нуля, то система (3) имеет одно и только одно решение, а потому задача однозначно определена, каковы бы ни были постоянные A_k. В этом случае два решения уравнения (1), имеющие n общих точек с абсциссами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, совпадают, и, в частности, так как $y(x) \equiv 0$ также является решением уравнения (1), то любое решение, обращающееся в нуль в n точках $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots, a_n$, тождественно равно нулю.

Обратно, если единственным решением уравнения (1), обращающимся в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$, является нулевое решение, то $\operatorname{Det}\Delta \neq 0$, а потому исследуемая задача однозначно определена для любых значений A_k. С другой стороны, если $\operatorname{Det}\Delta = 0$ и одновременно $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = 0$, то система (3) имеет ненулевое решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а потому существует не равное тождественно нулю решение уравнения (1), обращающееся в нуль в заданных n точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Если же $\operatorname{Det}\Delta = 0$, но не все постоянные $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равны нулю, то система (3) либо несовместна, либо имеет бесконечное множество решений, в зависимости от того, различны или совпадают ранги матриц Δ и Δ', где Δ' получается из Δ присоединением столбца $A_1, A_2, \ldots, A_n$. В случае, когда ранги матриц Δ и Δ' равны, существует бесконечное множество решений уравнения (1), проходящих через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$; общий вид этих решений получается, если прибавить к одному из них общее решение уравнения (1), обращающееся в нуль в n точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

2. Теорема существования и единственности Валле-Пуссена для линейного уравнения. а) Для приложений важно определение положительного числа h_0, обладающего следующим свойством: каковы бы ни были n точек

$$P_1 \equiv (a_1, A_1), \quad P_2 \equiv (a_2, A_2), \ldots, \quad P_n \equiv (a_n, A_n),$$

такие, что

$$\alpha \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant \beta, \quad a_n - a_1 \leqslant h_0,$$

существует одно и только одно решение уравнения (1), проходящее через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

Это число будет определено в „в".

б) Для упрощения вопроса докажем следующую лемму.

Если на отрезке $[a, b]$ длины $b - a = h$ функция $\varphi(x) \not\equiv 0$ и имеет по крайней мере n нулей, из которых хотя бы два различны, и если эта функция имеет в (a, b) непрерывную n-ю производную, не превосходящую по абсолютной величине числа μ, то имеет место неравенство

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx < \mu \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{4}$$

Пусть

$$\varphi(a_k)=0 \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а a_{n+1} — любая точка из $[a,\ b]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x)=\varphi(x)-\frac{(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)}{n!}A,$$

где

$$A=n!\,\varphi(a_{n+1})/(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n)\ ^{1)}.$$

Функция $\Phi(x)$ обращается в нуль в $n+1$ точке $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$, а потому существует точка ξ промежутка $(a,\ b)$, такая, что $\Phi^{(n)}(\xi)=0$, иными словами, такая, что $\varphi^{(n)}(\xi)-A=0$, следовательно,

$$\varphi(a_{n+1})=(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\ldots(a_{n+1}-a_n)\,\varphi^n(\xi)/n!\ ^{2)}.$$

Так как a_{n+1} — любая точка из $[a,\ b]$, то отсюда вытекает, что

$$|\varphi(x)|\leqslant\frac{\mu}{n!}|(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|,$$

а потому $\mu>0$ и

$$\int\limits_a^b|\varphi(x)|\,dx\leqslant\frac{\mu}{n!}\int\limits_a^b|(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|\,dx. \tag{5}$$

Если положить

$$\psi(x)=|(x-a_2)\ldots(x-a_n)|,$$

то имеем

$$\int\limits_a^b|(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|\,dx=$$

$$=\int\limits_a^{a_1}(a_1-x)\psi\,dx+\int\limits_{a_1}^b(x-a_1)\psi\,dx. \tag{6}$$

Производная правой части по a_1 равна

$$\int\limits_a^{a_1}\psi\,dx-\int\limits_{a_1}^b\psi\,dx$$

и потому возрастает от отрицательных значений до положительных, когда a_1 изменяется от a до b. Поэтому наибольшее значение интеграла, стоящего слева, может достигаться либо когда a_1 совпадает

---

1) Если $a_1=a_2$, то вместо $(x-a_1)(x-a_2)$ и $(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)$ берем, соответственно, $(x-a_1)^2$, $(a_{n+1}-a_1)^2$. Аналогично поступаем в случае совпадения трех или более точек.

2) Это соотношение непосредственно получается, если применить к функции $\varphi(x)$ *интерполяционную формулу* Ньютона, учитывая, что $\varphi(a_1)=\varphi(a_2)=\ldots=\varphi(a_n)=0$. [См., например, Гельфонд А. О. [1], стр. 24—27. — *Прим. ред.*]

с a, либо когда a_1 совпадает с b; повторяя это рассуждение для точек $a_2, \ldots, a_n$, убеждаемся, что наибольшее значение интеграла, стоящего слева в формуле (6), не превосходит наибольшего из чисел

$$I_p = \int_a^b (x-a)^p (b-x)^{n-p}\, dx \quad (p = 0,\ 1,\ \ldots,\ n).$$

С помощью подстановки $x = a + ht$ получаем [1])

$$I_p = h^{n+1} \int_0^1 t^p (1-t)^{n-p}\, dt = h^{n+1} \frac{p!\,(n-p)!}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{h^{n+1}}{n+1} \Big/ \binom{n}{p} \leqslant \frac{h^{n+1}}{n+1}.$$

Так как по условию среди точек $a_1, a_2, \ldots, a_n$ есть хотя бы две не совпадающие точки, то $p \neq 0$, $p \neq n$ и потому

$$\int_a^b |(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)|\, dx < h^{n+1}/(n+1),$$

а тогда из неравенства (5) следует неравенство (4).

в) Докажем теперь теорему Валле-Пуссена (см. Валле-Пуссен [2]). *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \quad (n \geqslant 2), \qquad (1)$$

коэффициенты которого $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ *являются непрерывными функциями от* x *на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *и пусть* $L_1, \ldots, L_{n-1}, L_n$ — *наибольшие значения модулей* $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x)$, $p_n(x)$ *в* $[\alpha, \beta]$; *тогда, если обозначить через* h_0 *положительный корень уравнения*

$$L_n \frac{h^n}{n!} + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + L_1 \frac{h}{1!} - 1 = 0, \text{[2])} \qquad (7)$$

то для любых n *точек* $P_1 \equiv (a_1, A_1)$, $P_2 \equiv (a_2, A_2), \ldots, P_n \equiv (a_n, A_n)$, *таких, что*

$$\alpha \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_n \leqslant \beta, \quad a_n - a_1 = h \leqslant h_0,$$

существует одно и только одно проходящее через них решение уравнения (1) [3]).

---

[1]) См. примечания на стр. 129 и 144.

[2]) Левая часть в (7) является возрастающей функцией от h, отрицательной при $h = 0$ и положительной при достаточно большом положительном значении h.

[3]) Мы исключаем из рассмотрения случай $L_1 = L_2 = \ldots = L_n = 0$, так как тогда общее решение уравнения (1) является многочленом $n-1$-й степени от x, и существует только один многочлен $y(x)$ $n-1$-й степени, удовлетворяющий условиям $y(a_k) = A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Проведем доказательство от противного. Предположим, что есть два различных решения уравнения (1), проходящих через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$, тогда существует решение $y(x)$ этого уравнения, не равное тождественно нулю и обращающееся в нуль в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$[1]; обозначим через μ наибольшее значение модуля $y^{(n-1)}(x)$ в $[\alpha, \beta]$ и заметим, что $y'(x)$ на $[a_1, a_n]$ обращается в нуль по меньшей мере $n-1$ раз, $y''(x)$ — по меньшей мере $n-2$ раза, ..., $y^{(n-2)}(x)$ — по меньшей мере два раза. По предыдущей лемме имеем тогда

$$\int_{a_1}^{a_n} |y^{(n-2)}(x)|\,dx < \mu\frac{h^2}{2!}, \quad \int_{a_1}^{a_n} |y^{(n-3)}(x)|\,dx < \mu\frac{h^3}{3!}, \ldots, \tag{8}$$

$$\int_{a_1}^{a_n} |y|\,dx < \mu\frac{h^n}{n!}.$$

Функция $y^{(n-1)}(x)$ обращается в нуль, по крайней мере, в одной точке отрезка $[a_1, a_n]$. Обозначим через ξ одну из таких точек, а через ξ_1 — одну из точек, в которых $y^{(n-1)}(x)$ принимает значение μ. Тогда

$$-\mu = -\int_{\xi}^{\xi_1} y^{(n)}\,dx = \int_{\xi}^{\xi_1} [p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y]\,dx,$$

откуда

$$\mu \leqslant \int_{a_1}^{a_n} [L_1|y^{(n-1)}| + \ldots + L_{n-1}|y'| + L_n|y|]\,dx,$$

и, так как $|y^{(n-1)}| \leqslant \mu$, получаем, пользуясь неравенствами (8),

$$\mu < \mu\left[L_1\frac{h}{1!} + \ldots + L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n\frac{h^n}{n!}\right],$$

$$1 < L_1\frac{h}{1!} + \ldots + L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n\frac{h^n}{n!},$$

что невозможно, так как при $0 < h \leqslant h_0$

$$L_1\frac{h}{1} + \ldots + L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + L_n\frac{h^n}{n!} \leqslant 1.$$

г) Следует заметить, что сделанный выше вывод сохраняет силу и в случае, когда ищется решение уравнения (1), удовлетворяющее в N заданных точках $a_1, a_2, \ldots, a_N$

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_N \quad (1 < N < n)$$

---

[1] В силу доказанного в п. 1, такое решение существует и в случае, когда уравнение (1) не имеет решения, проходящего через точки $P_1, P_2, \ldots, P_n$.

условиям

$$y(a_k)=A_{k,1},\ y'(a_k)=A_{k,2},\ \ldots,\ y^{(\alpha_k-1)}(a_k)=A_{k,\alpha_k} \tag{9}$$
$$(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N),\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_N=n,$$

иными словами, если $a_N-a_1\leqslant h_0$, то решение $y(x)$ уравнения (1) однозначно определяется условиями (9).

В самом деле, если существуют два различных решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ уравнения (1), удовлетворяющих условиям (9), то две кривые $y_1(x)$, $y_2(x)$ имеют в точках $(a_1,\ A_{1,1})$, $(a_2,\ A_{2,1})$, $\ldots$, $(a_N,\ A_{N,1})$ касание порядка α_1-1, α_2-1, $\ldots$, α_N-1, соответственно, а потому кривая y_1-y_2 имеет в точках a_1, a_2, $\ldots$, a_N касание с осью x порядка α_1-1, α_2-1, $\ldots$, α_N-1, соответственно, и в проведенных выше рассуждениях следует считать точки a_1, a_2, $\ldots$, a_N, соответственно, α_1, α_2, $\ldots$, α_N раз[1]).

3. Теорема Валле-Пуссена для случая дифференциального уравнения порядка n нормального вида. Докажем следующую теорему Валле-Пуссена (см. Валле-Пуссен [2], стр. 141—143), частично распространяющую доказанную в предыдущем пункте теорему на дифференциальные уравнения порядка n нормального вида.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка n

$$y^{(n)}=f(x;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}) \tag{10}$$

и предположим, что функция f непрерывна в прямоугольном параллелепипеде R с центром в точке $[\alpha;\ \beta_0,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_{n-1}]$, который определен неравенствами

$$-a\leqslant x-\alpha\leqslant a;\quad -b\leqslant y^{(i)}-\beta_i\leqslant b\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Кроме того, предположим, что функция f удовлетворяет условию Липшица по аргументам y, y', $\ldots$, $y^{(n-1)}$

$$|f(x;\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(n-1)})-f(x;\ y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(n-1)})|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}L_k|y_2^{(n-k)}-y_1^{(n-k)}|, \tag{11}$$

где через L_1, L_2, $\ldots$, L_{n-1}, L_n обозначены постоянные Липшица функции f относительно $y^{(n-1)}$, $y^{(n-2)}$, $\ldots$, y', y.

Мы уже знаем, что если обозначить через M наибольшее значение модуля $f(x;\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)})$ в R, а через δ — наименьшее из чисел a и b/M, то существует одно и только одно решение $y(x)$

[1]) Впервые этот вопрос изучался Николетти [2], см. также Галлико [1]. Более глубокое изучение уравнения $y''=f(x,\ y,\ y')$ см. у Пикара [2], стр. 1—14.

уравнения (10), определенное на $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ и удовлетворяющее условиям

$$y^{(i)}(\alpha)=\beta_i \quad (i=0, 1, \ldots, n-1)$$

(см. гл. I, § 3, п. 4 „в“).

Если мы зададим начальные условия в n точках из $[\alpha-a, \alpha+a]$, то нельзя будет гарантировать существование решения уравнения (10), удовлетворяющего этим условиям. Однако мы докажем сейчас, что существует число h_0, которому, как и в предыдущем пункте, соответствует некоторая теорема единственности. Точнее говоря, имеет место следующая теорема Валле-Пуссена: *обозначим через h_0 положительный корень уравнения*

$$L_n\frac{h^n}{n!}+L_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots+L_1\frac{h}{1!}-1=0,$$

где L_n, L_{n-1}, ..., L_1 — постоянные Липшица функции $f(x; y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ относительно $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, соответственно. Тогда два различных решения уравнения (10) (принадлежащих прямоугольному параллелепипеду R) могут иметь не более чем $n-1$ общих точек, абсциссы которых лежат между точками a' и a'' ($\alpha-a\leqslant a'<a''\leqslant\alpha+a$), если только разность $h=a''-a'$ не превосходит h_0[1]).

В самом деле, если y_1 и y_2 — два решения уравнения (10), то, полагая $y_0=y_2-y_1$, получаем

$$y_0^{(n)}=f(x; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)})-f(x; y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}).$$

Поэтому, если ξ и ξ_1 — две различные точки отрезка $[a', a'']$, то, принимая во внимание (11), имеем

$$\int_\xi^{\xi_1} y_0^{(n)}(x)\,dx=\int_\xi^{\xi_1}[f(x; y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)})-f(x; y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)})]\,dx,$$

$$y_0^{(n-1)}(\xi_1)-y_0^{(n-1)}(\xi)\leqslant\int_{a'}^{a''}[L_1|y_0^{(n-1)}|+\ldots+L_{n-1}|y_0'|+L_n|y_0|]\,dx.$$

Но если y_1 и y_2 имеют n общих точек в $[a', a'']$, то их разность y_0 на этом отрезке n раз обращается в нуль, а потому для доказательства нашей теоремы достаточно повторить проведенные в предыдущем пункте рассуждения[2]).

[1]) В работе Чинквини [2] при некоторых условиях на $f(x; y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ доказан критерий существования уравнения (10), проходящего через n заданных точек.

[2]) В случае $L_1=L_2=\ldots=L_n=0$ достаточно заметить, что $y_0(x)$ является многочленом $n-1$-й степени (см. примечание [3]) на стр. 157).

§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка и теорема сравнения Штурма

1. Исследования Штурма об уравнениях второго порядка. В предыдущем параграфе мы рассмотрели одну частную краевую задачу для дифференциальных уравнений порядка n; во всей общности мы рассмотрим этот вопрос в гл. V, а в данной главе ограничимся рассмотрением уравнений второго порядка.

Изучение этих вопросов начинается с классического исследования Штурма [1]. Он заметил, что большая часть задач теории теплоты приводит к уравнениям второго порядка, для которых трудно вычислить значения решений в данной точке или выяснить для этих решений поведение нулей, полюсов, максимумов и минимумов даже в случае, когда решение получено в конечном виде или в виде ряда.

С помощью непосредственного изучения уравнений Штурм открыл, что их решения имеют большое сходство с тригонометрическими и показательными функциями, установил ряд чрезвычайно важных свойств нулей решений и указал способ приближенного вычисления решений с достаточной точностью.

Подробное изложение исследований Штурма и последовательное развитие теории уравнений второго порядка можно найти в работе Бохера [1], к которой мы и отсылаем читателя; здесь же, ради краткости, будут изложены лишь важнейшие моменты теории.

2. Общие замечания относительно уравнений второго порядка. а) Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0, \tag{1}$$

коэффициенты которого $p(x)$, $q(x)$ являются непрерывными функциями от x в $[a, b]$. Как уже напоминалось в предыдущем параграфе, теорема существования гласит, что какова бы ни была точка α из $[a, b]$ и каковы бы ни были значения y_0, y'_0, существует одно и только одно решение $y(x)$ уравнения (1), которое определено в $[a, b]$ и удовлетворяет в α начальным условиям

$$y(\alpha)=y_0, \quad y'(\alpha)=y'_0.$$

Отсюда следует, что если *решение уравнения* (1) *обращается в нуль в точке α из $[a, b]$ вместе со своей первой производной, то это решение тождественно равно нулю в* $[a, b]$; в самом деле, решение $y(x)\equiv 0$ удовлетворяет этим условиям, других решений нет в силу теоремы единственности [1]).

В дальнейшем под *решением уравнения вида* (1) *мы будем понимать лишь решение, не обращающееся тождественно в нуль.*

[1]) См. примечание [1]) на стр. 49.

Проведенные рассмотрения показывают, что *если решение* $y(x)$ *уравнения* (1) *обращается в нуль в точке* α *из* $[a, b]$, то его первая производная отлична от нуля в α, и потому $y(x)$ *меняет знак при переходе через* α.

Кроме того, *ни одно решение уравнения* (1) *не может иметь в* $[a, b]$ *бесконечного множества нулей*. В самом деле, если $y(x)$ обращается в нуль в бесконечном множестве точек отрезка $[a, b]$ и ξ — предельная точка этого множества, то $y(\xi)=y'(\xi)=0$, а потому $y(x)\equiv 0$ в $[a, b]$.

Отметим также, что если α *является нулем для* $y(x)$, *то порядок этого нуля равен единице*; в самом деле,

$$\lim_{x\to\alpha} y(x)/(x-\alpha)=y'(\alpha)\neq 0.$$

б) Напомним еще (см. гл. II, § 1, п. 2 „в"), что если вронскиан $y_1y_2'-y_2y_1'$ двух решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (1) обращается в нуль в точке α из (a, b), то он обращается в нуль во всем отрезке $[a, b]$, а решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно зависимы в $[a, b]$ (см. гл. II, § 1, п. 3 „б").

В частности, *два решения, обращающиеся в нуль в одной и той же точке из* $[a, b]$, *различаются лишь постоянным множителем*; *два решения, производные которых обращаются в нуль в одной и той же точке из* $[a, b]$, *отличаются друг от друга также лишь на постоянный множитель*.

в) Наконец, почти излишне отмечать, что *для любой точки* α *из* $[a, b]$ *существует*, в силу теоремы существования, *по крайней мере одно решение уравнения* (1), *обращающееся в этой точке в нуль, причем два таких решения отличаются друг от друга постоянным множителем*.

3. Сопряженные точки. а) Частное решение уравнения (1) может быть выделено путем задания в начальной точке α значений $y(\alpha)$, $y'(\alpha)$, что геометрически эквивалентно заданию точки на интегральной кривой и направления касательной в этой точке. Но, как уже говорилось в § 1, п. 1, в приложениях используются и другие способы выделения решений; например, ставится следующая задача: даны две точки (α, A), (β, B), $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$, требуется найти проходящее через эти точки решение уравнения (1). Для этой задачи особую важность представляют пары различных точек α, β, которым соответствуют решения, обращающиеся в нуль в α и β; если для данных двух точек α и β из $[a, b]$, $\alpha<\beta$, существует не обращающееся тождественно в нуль решение уравнения (1), которое равно нулю в этих точках, то точки α и β называются сопряженными точками, причем β называется сопряженной справа для α, а α — сопряженной слева для β.

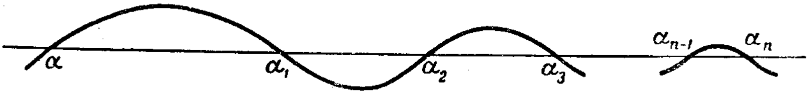
Точки, сопряженные с данной точкой α (справа или слева), не зависят от выбора решения, обращающегося в нуль в α, так как все остальные решения, обращающиеся в α в нуль, отличаются от выбранного лишь постоянным множителем.

Между точками, сопряженными с точкой α, различают *первую*, *вторую*, ... сопряженную справа (слева) с α, определяя их условиями

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots [\alpha > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots],$$
$$0 = y_1(\alpha) = y_1(\alpha_1) = y_1(\alpha_2) = \ldots$$

и требованием, что $y_1(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке промежутков (α, α_1), (α_1, α_2), ...

Заметим, что если точки $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ образуют последовательность сопряженных точек, то обращающееся в нуль в точке α



Фиг. 7.

а, следовательно, и в остальных точках) решение $y_1(x)$ имеет изображенный на фигуре (фиг. 7) вид; график этого решения *колеблется* около оси x и пересекает ее в точках $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

Пусть, в самом деле, $y_1'(\alpha) > 0$. Тогда $y^1(x)$ возрастает в точке α и потому положительно во всех точках промежутка (α, α_1); а так как в точке α_1, где решение $y_1(x)$ пересекает ось x, $y_1'(\alpha_1) \neq 0$, то это решение в точке α_1, убывая $[y_1'(\alpha_1) < 0]$ переходит от положительных значений к отрицательным и остается отрицательным в точках промежутка (α_1, α_2), пересекая снова ось x в точке α_2.

б) Рассмотрим уравнение

$$y'' + m^2 y = 0, \tag{2}$$

где m — положительное число; общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = c \sin m(x - \alpha),$$

где c и α — произвольные постоянные. Расстояние между двумя соседними нулями этого решения всегда равно π/m.

Поэтому если длина отрезка $[a, b]$ меньше, чем π/m, то этот отрезок не содержит пар сопряженных точек. Обозначим, вообще, для данной точки α из $[a, b]$ через k_1 и k_2 такие целые числа, что

$$\alpha - (k_1 + 1)\frac{\pi}{m} < a \leqslant \alpha - k_1 \frac{\pi}{m},$$
$$\alpha + k_2 \frac{\pi}{m} \leqslant b < \alpha + (k_2 + 1)\frac{\pi}{m}.$$

Тогда число точек отрезка $[a, b]$, сопряженных с α, равно $k_1 + k_2$.

Имеем

$$(k_1+k_2+2)\pi/m > b-a \geqslant (k_1+k_2)\pi/m,$$
$$k_1+k_2+2 > (b-a)\,m/\pi \geqslant k_1+k_2,$$

а потому *наибольшее* целое число, *содержащееся в* $(b-a)\,m/\pi$, равно

$$\left[(b-a)\,m/\pi\right] = k_1+k_2, \quad k_1+k_2+1\ ^{1)}.$$

Отсюда следует, что *число принадлежащих к* $[a,\ b]$ *сопряженных с* α *точек* равно $\left[(b-a)\,m/\pi\right]$ или $\left[(b-a)\,m/\pi\right]-1$.

4. Достаточное условие для несуществования сопряженных точек. а) Рассмотрим уравнение

$$y''-m^2y=0, \tag{3}$$

где m — положительное число. Его общее решение имеет вид $y=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные. Обращающееся в нуль в точке α решение имеет вид

$$y=2c\,\mathrm{sh}\,m(x-\alpha)=c\left[e^{m(x-\alpha)}-e^{-m(x-\alpha)}\right]$$

(c — постоянная). Это решение не обращается в нуль ни в одной точке, кроме точки α. Таким образом, *не существует ни одной пары точек, сопряженных относительно уравнения* (3).

б) Свойства решения уравнения (3) могут быть выведены из следующей теоремы. *Если в уравнении*

$$y''+p(x)\,y'+q(x)\,y=0 \tag{1}$$

функции $p(x)$ *и* $q(x)$ *непрерывны в* $[a,\ b]$, *причем*

$$q(x)<0 \quad \text{при} \quad a\leqslant x\leqslant b, \tag{4}$$

то, каковы бы ни были решение y *этого уравнения и точка* α *из* $[a,\ b]$, *произведение*

$$\nu(x)=e^{\int_\alpha^x p(x)\,dx}\,y\frac{dy}{dx}$$

возрастает в $[a,\ b]$.

В самом деле,

$$\frac{d\nu(x)}{dx}=e^{\int_\alpha^x p(x)\,dx}\,[pyy'+y'^2+yy'']=e^{\int_\alpha^x p(x)\,dx}\,[y'^2-qy^2].$$

Так как y и y' не могут одновременно обращаться в нуль, то $\nu'(x)>0$.

---

1) Символом $[x]$ мы обозначаем *наибольшее* целое число, *содержащееся в* x.

Из доказанной теоремы следует, что если решение $y(x)$ уравнения (1) удовлетворяет в точке α соотношению $y(\alpha)y'(\alpha) \geqslant 0$, то для любого значения $x > \alpha$ будет выполняться неравенство $y(x)y'(x) > 0$, а потому функции $y(x)$ и $y'(x)$, не обращающиеся справа от α в нуль, имеют все время одинаковые знаки. Поэтому, если функция $y(x)$ положительна при $x > \alpha$, то она возрастает при $x > \alpha$, а если она отрицательна при $x > \alpha$, то она убывает при $x > \alpha$. Отсюда следует, что *если коэффициент $q(x)$ уравнения (1) удовлетворяет неравенству $q(x) < 0$ и если какое-либо решение этого уравнения положительно (или равно нулю) и возрастает в точке α, то оно положительно и возрастает в любой точке $x > \alpha$; наоборот, если решение $y(x)$ отрицательно (или равно нулю) и убывает в точке α, то оно отрицательно и убывает в любой точке $x > \alpha$.*

При выполнении условия (4) на отрезке $[a, b]$ нет сопряженных пар точек.

В самом деле, если в некоторой точке α из $[a, b]$ имеем $y(\alpha) = 0$, а потому $y(\alpha)y'(\alpha) = 0$, то для любого $\beta > \alpha$ выполняется неравенство $y(\beta)y'(\beta) > 0$, а потому $y(\beta) \neq 0$.

Из этого замечания следуют утверждения, указанные в „а".

в) *Решение* дифференциального уравнения (1) называется *неколеблющимся* на отрезке $[\alpha, \beta]$, если оно не имеет нулей на $[\alpha, \beta]$ или имеет там лишь один нуль. Из доказанного выше следует, что при выполнении предположения (4) решения уравнения (1) не колеблются ни на каком отрезке $[\alpha, \beta]$.

Решение уравнения (1), имеющее на отрезке $[\alpha, \beta]$ более одного нуля, называется *колеблющимся* на этом отрезке. Например, решения уравнения (2) из п. 3 „б" колеблются на любом отрезке, длина которого не менее $2\pi/m$.

5. Тождество Пиконе. а) Пусть дано уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции от x в $[a, b]$. Если умножить это уравнение на $e^{\int_a^x p(x)\,dx}$, то оно получит *самосопряженную форму* (см. гл. II, § 5, п. 3 „б")

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int_a^x p\,dx}\frac{dy}{dx}\right] + qe^{\int_a^x q\,dx}y = 0.$$

Полагая

$$\theta(x) = e^{\int_a^x p\,dx}, \quad Q(x) = -q(x)e^{\int_a^x p\,dx}, \tag{5}$$

приводим это уравнение к виду

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)y(x) = 0, \tag{6}$$

где $\theta(x) > 0$ в $[a, b]$. Начиная отсюда, мы будем рассматривать уравнения второго порядка в виде (6).

б) Пусть *даны два уравнения*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)\,y(x) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right] - Q_1(x)\,z(x) = 0, \tag{7}$$

такие, что $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q_1(x)$ *являются непрерывными функциями от* x *в* $[a, b]$, $\theta(x) > 0$, $\theta_1(x) > 0$, *и пусть* $y(x)$, $z(x)$ — *два решения этих уравнений; если в точке* x *из* $[a, b]$ $z(x) \neq 0$, *то справедлива формула*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{z}(\theta y'z - \theta_1 yz')\right] = (Q - Q_1)\,y^2 + (\theta - \theta_1)\,y'^2 + \theta_1\left[y' - \frac{y}{z}z'\right]^2. \tag{I}$$

В самом деле, левую часть этой формулы можно записать в виде

$$y\frac{d}{dx}(\theta y') + \theta y'^2 - 2\theta_1 yy'\frac{z'}{z} + \theta_1\frac{y^2}{z^2}z'^2 - \frac{y^2}{z}\frac{d}{dx}(\theta_1 z') =$$
$$= Qy^2 + \theta y'^2 - 2\theta_1 yy'\frac{z'}{z} + \theta_1\frac{y^2}{z^2}z'^2 - Q_1 y^2,$$

откуда и следует равенство (I).

в) *Пусть функции* $y(x)$ *и* $z(x)$ *удовлетворяют на отрезке* $[\alpha, \beta]$, *соответственно, уравнениям* (6) и (7), *причем* $y(\alpha) = y(\beta) = 0$ и $z(x) \neq 0$ *при* $\alpha < x < \beta$. Так как $y^2(x)$ имеет в точках α и β нули второго порядка, а функция $z(x)$ имеет в этих точках нули не более, чем первого порядка (см. п. 2 „а“), то $\lim\limits_{x\to\alpha+0} y^2/z = 0$, $\lim\limits_{x\to\beta-0} y^2/z = 0$, а потому, интегрируя (I) от α до β, получаем важное *тождество Пиконе*

$$0 = \int_\alpha^\beta (Q - Q_1)\,y^2\,dx + \int_\alpha^\beta (\theta - \theta_1)\,y'^2\,dx + \int_\alpha^\beta \theta_1\left[y' - \frac{y}{z}z'\right]^2 dx \tag{II}$$

(см. Пиконе [2], стр. 20).

6. Теорема сравнения Штурма. а) Тождество (II) позволяет быстро вывести классическую *теорему сравнения Штурма* (см. Штурм [1], стр. 125).

Пусть даны два дифференциальных уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)\,y(x) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right] - Q_1(x)\,z(x) = 0, \tag{7}$$

где $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q_1(x)$ — *непрерывные функции от* x *в* $[a, b]$, $\theta(x)>0$, $\theta_1(x)>0$; *пусть, далее, ни на каком лежащем в* $[a, b]$ *отрезке функции* $Q(x)$ *и* $Q_1(x)$ *не обращаются одновременно тождественно в нуль и, кроме того, пусть*

$$\theta(x)\geqslant\theta_1(x), \qquad Q(x)\geqslant Q_1(x). \tag{8}$$

Докажем тогда, что если $y(x)$ *является решением уравнения* (6), *обращающимся в нуль в точках* α *и* β, *где* β — *первая сопряженная справа точка для* α, *то любое решение уравнения* (7) *имеет по меньшей мере один корень, лежащий в* (α, β), *за исключением случая, когда уравнения* (6) *и* (7) *совпадают в* $[\alpha, \beta]$, *а* $y(x)$ *и* $z(x)$ *отличаются постоянным множителем.*

Предположим, что $z(x)\neq 0$ при $\alpha<x<\beta$; тогда справедливо тождество Пиконе (II), из которого, в силу (8), следует, что

$$Q(x)\equiv Q_1(x), \tag{9$_1$}$$

$$(\theta-\theta_1)y'\equiv 0, \tag{9$_2$}$$

$$y'z-yz'=0. \tag{9$_3$}$$

Если на некоторой части отрезка $[\alpha, \beta]$ $\theta-\theta_1\neq 0$, то $y'\equiv 0$, а потому y постоянно на этой части. Но тогда, в силу (6) и (9$_1$), для этой части имеем тождественно $0\equiv Q(x)\equiv Q_1(x)$, вопреки предположению; таким образом, в $[\alpha, \beta]$ $Q(x)\equiv Q_1(x)$, $\theta(x)\equiv\theta_1(x)$ и, в силу (9$_3$), $y(x)=cz(x)$, где c — постоянная величина. Поэтому если уравнения (6) и (7) не совпадают, или же, если они совпадают, но отношение $y(x)$ и $z(x)$ не постоянно, то предположение, что $z(x)\neq 0$ при $\alpha<x<\beta$, приводит к противоречию.

б) Из доказанной теоремы следует, что *если решение уравнения* (6) *в* $[a, b]$ *имеет* n *последовательно идущих нулей* $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$, $a\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_n\leqslant b$, $(n>1)$, *то любое решение уравнения* (7)[1]) *имеет по меньшей мере* $n-1$ *нулей, лежащих в* (x_1, x_n).

7. Теорема о разделении нулей. а) Если положить в тождестве Пиконе $\theta_1=\theta$, $Q_1=Q$ и повторить проведенные в предыдущем номере рассуждения, то получим следующую теорему.

Пусть дано уравнение

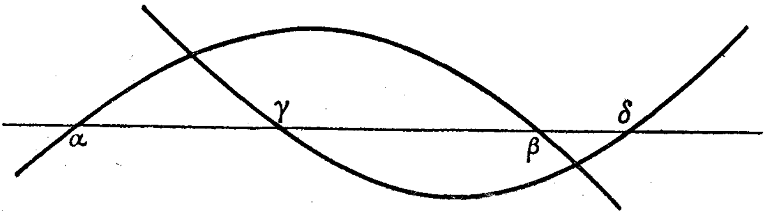
$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0, \tag{6}$$

где функции $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$, $\theta(x)>0$. *Тогда, если существует решение* $y(x)$ *этого уравнения, обращающееся в нуль в точках* α *и* β, *где* β — *первая сопряженная с* α

[1]) Если выполнены условия (8).

точка, то любое другое решение $z(x)$ *уравнения* (6), *линейно независимое от* $y(x)$, *имеет по меньшей мере один нуль в* (α, β).

Легко видеть, что $z(x)$ имеет в $[\alpha, \beta]$ единственный нуль; в самом деле, если бы $z(x)$ обращалось в нуль в точках γ и δ из $[\alpha, \beta]$, то $y(x)$ должно было бы обращаться в нуль в (γ, δ) и, тем самым,



Фиг. 8.

в (α, β) (фиг. 8), вопреки предположению. Отсюда следует так называемая *теорема о разделении корней. Пары* (α, β), (γ, δ) *последовательных сопряженных точек двух решений уравнения* (6) *либо совпадают, либо разделяют друг друга.*

б) Если в $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$ нет точек, сопряженных концу α, то в $[\alpha, \beta]$ не может быть и точек, сопряженных (слева) с β; в самом деле, если бы точка β_1 была сопряжена с β, $\alpha < \beta_1 < \beta$, то в $[\beta_1, \beta]$ должна была бы существовать хотя бы одна сопряженная с α точка, вопреки предположению. Тем же путем доказывается, что никакая внутренняя точка из $[\alpha, \beta]$ не имеет сопряженных в $[\alpha, \beta]$, а потому, *если один из двух концов* $[\alpha, \beta]$ *не имеет в* $[\alpha, \beta]$ *сопряженных точек, то на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *нет ни одной пары сопряженных точек.*

в) *Если на отрезке* $[\alpha, \beta]$ *из* (a, b) *нет сопряженных точек, то существует решение уравнения* (6), *положительное во всех точках* $[\alpha, \beta]$.

Пусть, в самом деле, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — решения уравнения (6), для которых $y_1(\alpha) = 0$, $y_2(\beta) = 0$; по предположению, тогда $y_1(\beta) \neq 0$, $y_2(\alpha) \neq 0$.

Каковы бы ни были положительные числа l и m, решение уравнения (6)

$$y(x) = \frac{m}{y_1(\beta)} y_1(x) + \frac{l}{y_2(\alpha)} y_2(x)$$

принимает в концах α и β отрезка $[\alpha, \beta]$, соответственно, положительные значения l и m, а потому не может обращаться в нуль в (α, β). В самом деле, если бы $y(x)$ обратилось в нуль в некоторой точке из (α, β), то в этой точке $y(x)$ пересекло бы ось x, а так как $y(x)$ имеет на концах отрезка $[\alpha, \beta]$ одинаковые знаки, то $y(x)$ должно было бы обратиться в нуль по меньшей мере два раза, чего не может быть; таким образом, $y(x)$ не обращается в нуль в $[\alpha, \beta]$ и, следовательно, сохраняет все время один и тот же знак (положительный — в силу положительности l и m).

8. Теорема сравнения для полуоткрытых отрезков. В § 3 нам понадобится *теорема сравнения для полуоткрытых отрезков* в форме Сегё (см. Сегё [3]). *Пусть даны два уравнения*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0, \qquad (10_1)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dz}{dx}\right]-Q_1(x)z(x)=0, \qquad (10_2)$$

где функции $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$ *непрерывны при* $a<x\leqslant b$ *и* $\theta(x)>0$, $Q(x)\geqslant Q_1(x)$ *при* $a<x\leqslant b$. *Пусть* $Q(x)$ *не равно тождественно* $Q_1(x)$ *на* (a, b) *и пусть, кроме того, существует определенное при* $a<x\leqslant b$ *решение* $y(x)$ *уравнения* (10_1), *такое, что*

$$y(x)>0 \text{ при } a<x<b; \quad y(b)=0. \qquad (11)$$

Тогда, *если* $z(x)$ *является решением уравнения* (10_2) (не равным тождественно нулю), *для которого справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to a+0}\theta(y'z-yz')=0, \qquad (12)$$

то $z(x)$ *имеет по меньшей мере один нуль внутри* (a, b).

Проведем доказательство от противного. Предположим, что $z(x)$ не обращается в нуль в промежутке (a, b), и пусть, например, $z(x)>0$ при $a<x<b$.

Умножая уравнение (10_1) на z, а (10_2) — на y и вычитая, получаем

$$\frac{d}{dx}[\theta(zy'-yz')]-(Q-Q_1)yz=0.$$

Интегрируя от $a+\varepsilon$ ($\varepsilon>0$) до b, выводим, что

$$\theta(b)z(b)y'(b)-\theta(a+\varepsilon)[z(a+\varepsilon)y'(a+\varepsilon)-y(a+\varepsilon)z'(a+\varepsilon)]=$$
$$=\int_{a+\varepsilon}^{b}(Q-Q_1)yz\,dx. \qquad (13)$$

По предположению $\theta(b)>0$, $z(b)\geqslant 0$; с другой стороны, $y'(b)\neq 0$, а так как $y(x)$ положительно слева от b, то $y'(b)<0$; отсюда следует, что когда $\varepsilon\to 0$, то предел левой части равенства (13) отрицателен или равен нулю, в то время как предел правой части положителен, что невозможно; полученное противоречие показывает, что $z(x)$ обращается в нуль в промежутке (a, b).

9. Выпуклость последовательности нулей решений одного дифференциального уравнения второго порядка частного вида.

Докажем для уравнения $y''-Q(x)y=0$, где $Q(x)$ — непрерывная возрастающая функция, красивую теорему Штурма[1]), которая иногда используется в приложениях.

Пусть дано уравнение

$$y''-Q(x)y=0, \tag{14}$$

где $Q(x)$ — непрерывная возрастающая функция от x при $a<x<b$, и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — последовательность нулей какого-либо его решения $y(x)$, расположенных в порядке возрастания

$$a<x_1<x_2<\ldots<x_n<\ldots<b.$$

Тогда последовательность $\{x_n\}$ выпукла, т. е.

$$0<x_2-x_1<x_3-x_2<\ldots. \tag{15}$$

Положим $x_2-x_1=d\,(>0)$; функция $z(x)=y(x-d)$ обращается в нуль последовательно в точках $x_2,\ x_2+d,\ x_3+d, \ldots$ и удовлетворяет уравнению

$$z''-Q(x-d)z=0. \tag{16}$$

Так как в (x_2, x_3) имеем $Q(x)>Q(x-d)$ и $y(x_2)=y(x_3)=0$, то, сравнивая уравнения (14) и (16), получаем по теореме Штурма, что

$$x_2+d<x_3$$

или $x_2-x_1=d<x_3-x_2$, откуда и следует (15).

§ 3. Применение теоремы сравнения для отделения нулей ультрасферических многочленов и бесселевых функций в главном случае

1. Нули ультрасферических многочленов. Ультрасферические многочлены $P_n^{(\lambda)}(x)$ (см. гл. III, § 5, п. 8 (43), и п. 1 „б", $\alpha=\beta=\lambda-1/2$) имеют по x степень n и удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2}-(2\lambda+1)x\frac{dP_n}{dx}+n(n+2\lambda)P_n=0.$$

Полагая

$$z=(\sin\varphi)^\lambda P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi), \qquad x=\cos\varphi,$$

находим для z уравнение

$$z''+\left[(n+\lambda)^2+\frac{\lambda(1-\lambda)}{\sin^2\varphi}\right]z=0. \tag{1}$$

Предположим, что $0<\lambda<1$, или, как говорят, рассмотрим *главный случай*.

1) Относительно доказательства см. Сегё [3].

Сравнивая уравнение (1) с уравнением

$$y'' + (n+\lambda)^2 y = 0,$$

решение которого имеет вид $y = \sin(n+\lambda)(\varphi - \varphi_0)$, получаем по теореме сравнения Штурма (см. § 2, п. 6), что в любом промежутке длины $\pi/(n+\lambda)$ содержится по меньшей мере один нуль функции $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$, а потому в каждом из $n-1$ промежутков

$$((\nu-1)\pi/(n+\lambda),\ \nu\pi/(n+\lambda)) \quad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

существует по меньшей мере один нуль функции z.

Так как $\lim\limits_{\varphi\to 0}\{y'z - yz'\} = 0$, то по приведенной в п. 8 предыдущего параграфа теореме Сегё $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ имеет нуль в промежутке $(0, \pi/(n+\lambda)$; но $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ имеет не более n нулей в $(0, \pi)$, а потому из проведенных рассуждений следует, что $P_n^{(\lambda)}(\cos\varphi)$ имеет n различных нулей $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, принадлежащих промежутку $(0, \pi)$, причем выполняются неравенства

$$\frac{\nu-1}{n+\lambda}\pi < \varphi_\nu < \frac{\nu}{n+\lambda}\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как $P_n^{(\lambda)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\lambda)}(x)$ [см. гл. III, § 5 (7), (43)], то

$$\varphi_\nu = \pi - \varphi_{n+1-\nu} > \pi - \frac{(n+1)-\nu}{n+\lambda}\pi = \frac{\nu-(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi,$$

и потому

$$\frac{\nu-(1-\lambda)}{n+\lambda}\pi < \varphi_\nu < \frac{\nu}{n+\lambda}\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

При $\lambda = 1/2$ (т. е. для случая *сферических функций*) эти неравенства называются *неравенствами Брунса* (см. Брунс [1]).

2. Нули бесселевых функций. Изучим теперь нули бесселевых функций *действительного порядка*.

а) Функция $J_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)z = 0, \tag{3}$$

а потому (см. § 2, п. 2 „а“), если $J_n(x) = 0$ и $x \neq 0$, то x является простым корнем для $J_n(x)$.

Легко проверить, что если $n > -1$, то *все корни уравнения*

$$J_n(x) = 0$$

действительны.

В самом деле, если бы это уравнение имело корень $a = \alpha + i\beta$, то, в силу формулы (11), из гл. III, § 6, п. 2, оно имело бы и сопряженный с ним корень $b = \alpha - i\beta$, а тогда для действительных x

мы имели бы равенство $J_n(ax) = P + iQ$, $J_n(bx) = P - iQ$, и по формуле (25) из гл. III, § 6, п. 7,

$$\int_0^1 x(P^2 + Q^2)\,dx = 0,$$

а потому $P \equiv 0$, $Q \equiv 0$. Но это невозможно, так как тогда целая трансцендентная функция $x^{-n} J_n(ax)$ обращалась бы в нуль на целом отрезке $[0, 1]$.

б) *Если n — действительное число*, $|n| < {}^1/_2$ (или, как говорят, *в главном случае*), то уравнение $J_n(x) = 0$ имеет *бесконечное множество* корней. Так как $x^{-n}J_n(x)$ является целой трансцендентной функцией, то эти корни не имеют предельных точек в конечной части плоскости.

Если x — отличный от нуля корень $J_n(x)$, то и $-x$ также является корнем, а потому достаточно рассмотреть положительные корни $x > 0$.

Предполагая поэтому, что $x > 0$, введем новую функцию

$$u = x^{1/2} J_n(x).$$

Тогда уравнение (3) преобразуется в уравнение

$$u'' + \left[1 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2}\right] u = 0. \tag{4}$$

Сравнивая по теореме Штурма (см. § 2, п. 6) это уравнение с уравнением $y'' + y = 0$, имеющим решение $y = \sin(x - x_0)$, убеждаемся, что $J_n(x)$ имеет по меньшей мере один нуль в каждом промежутке длины π. Обозначая через $j_{n,\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ положительные нули $J_n(x)$, расположенные в возрастающем порядке, и полагая $j_{n,0} = 0$

$$0 = j_{n,0} < j_{n,1} < j_{n,2} < \ldots,$$

получаем, что

$$j_{n,\nu} - j_{n,\nu-1} < \pi, \quad j_{n,\nu} < \nu\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда следует, что $j_{n,\nu} - \nu\pi$ убывает с возрастанием индекса ν, а потому

$$j_{n,\nu} \leqslant j_{n,1} + (\nu - 1)\pi \quad (\nu = 1, 2, \ldots). \tag{5}$$

Если заменить в уравнении (1) из п. 1 n на m, а λ на $n + {}^1/_2$, то получим уравнение

$$z'' + \left[\left(m + n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\frac{1}{4} - n^2}{\sin^2\varphi}\right] z = 0, \tag{6}$$

имеющее решение $z=(\sin\varphi)^{n+1/2}P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$; делая в (4) замену независимой переменной $x=(m+n+{}^1/_2)\varphi$, получаем уравнение

$$u''+\left[(m+n+{}^1/_2)^2+\frac{\frac{1}{4}-n^2}{\varphi^2}\right]u=0. \tag{7}$$

Из того, что выполнено условие (12)

$$\lim_{x\to+0}[z'u-zu']=0,$$

приведенное в § 2, п. 8, следует, что это уравнение можно сравнивать с уравнением (6) в промежутке, прилегающем справа к нулю.

Поэтому в каждом из m промежутков

$$\left(j_{n,\,\nu-1}/\left(m+n+\frac{1}{2}\right),\quad j_{n,\,\nu}/\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\right)\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,m)$$

содержится по меньшей мере один нуль $P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$. Но $j_{n,\,m}/(m+n+{}^1/_2)<\pi$, а потому *$m$ нулей $\varphi_1,\,\varphi_2,\,\ldots,\,\varphi_m$ функции $P_m^{(n+1/2)}(\cos\varphi)$, содержащихся в $(0,\,\pi)$, разделяются неравенствами*

$$\frac{j_{n,\,\nu-1}}{m+n+\frac{1}{2}}<\varphi_\nu<\frac{j_{n,\,\nu}}{m+n+\frac{1}{2}}\quad (\nu=1,\,2,\,\ldots,\,m). \tag{8}$$

Пусть теперь ν любое положительное целое число и $m=2\nu-1$. Тогда $\varphi_\nu=\pi/2$ $(P_{2\nu-1}^{(n+1/2)}(0)=0)$, а потому, в силу только что доказанного, $\frac{\pi}{2}<j_{n,\,\nu}/(n+2\nu-{}^1/_2)$. Принимая во внимание неравенство (5), получаем для чисел $j_{n,\,\nu}$ неравенства

$$\left(\nu+\frac{n}{2}-\frac{1}{4}\right)\pi<j_{n,\,\nu}\leqslant j_{n,\,1}+(\nu-1)\pi\quad (<\nu\pi) \tag{9}$$
$$(\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots).$$

Так как по условию $|n|<{}^1/_2$, то $\nu\pi<(\nu+1+{}^n/_2-{}^1/_4)\pi$, а потому *выведенные неравенства позволяют отделить нули функции $J_n(x)$.*

Вспоминая, наконец, что $J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}$, $J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\times\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, получаем, что нули функции $J_{-1/2}(x)$ имеют вид $(\nu+{}^1/_2)\pi$, а нули функции $J_{1/2}(x)$ — вид $\nu\pi$, где ν — любое целое число.

в) Докажем, что если n — действительное число, то *функция $J_n(x)$ имеет бесконечное множество действительных нулей, и что действительные нули функций $J_n(x)$ и $J_{n+1}(x)$ перемежаются.*

В самом деле, в гл. III, § 6, п. 6 „б“ было показано, что

$$\frac{d}{dx}[x^{-n}J_n(x)]=-x^{-n}J_{n+1}(x),\quad \frac{d}{dx}[x^{n+1}J_{n+1}(x)]=x^{n+1}J_n(x), \tag{10}$$

а потому из теоремы Ролля следует, что между двумя соседними нулями функции $J_n(x)$ лежит по меньшей мере один нуль функции $J_{n+1}(x)$, а между двумя соседними нулями функции $J_{n+1}(x)$ лежит по меньшей мере один нуль функции $J_n(x)$. Но так как при $|n| \leqslant 1/2$ функция $J_n(x)$ имеет бесконечное множество нулей, то и при любом действительном n функция $J_n(x)$ имеет бесконечное множество нулей.

Если заметить еще, что все положительные нули функции $J_n(x)$ простые, из (10) следует отсутствие общих нулей у функций $J_n(x)$ и $J_{n+1}(x)$. Поэтому нули этих функций взаимно разделяют друг друга.

г) Пусть $0 < j_{n,1} < j_{n,2} < \ldots < j_{n,\nu} < \ldots$ — последовательность положительных нулей функций $J_n(x)$. Докажем, что *при* $n > -1$ *имеем*

$$0 < j_{n,1} < j_{n+1,1} < j_{n,2} < j_{n+1,2} < \ldots \quad (n > -1). \tag{11}$$

Для этого достаточно показать, что $j_{n,1} < j_{n+1,1}$; но это следует из того, что при $n > -1$ функция $x^{n+1}J_{n+1}(x)$ имеет два соседних нуля, 0 и $j_{n+1,1}$, а потому, в силу второго из равенств (10), первый положительный нуль $j_{n,1}$ функции $J_n(x)$ меньше, чем $j_{n+1,1}$[1].

§ 4. Осцилляционная теорема

1. Осцилляционная теорема. а) Рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)y = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого зависят от переменной x и от параметра λ, *и предположим, что для любого значения* λ, *принадлежащего данному промежутку* (Δ_1, Δ_2) (возможно, простирающемуся в бесконечность в одну или обе стороны), *функции* $\theta(x, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *непрерывны по* x *в* $[a, b]$ *и, кроме того, что* $\theta(x, \lambda) > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$ *и* λ *из* (Δ_1, Δ_2). *Обозначим для любого* λ *через* $\max\theta$ $(\max Q)$ *наибольшее значение* $\theta(x, \lambda)\,(Q(x, \lambda))$ *в* $[a, b]$, *и пусть*

$$\lim_{\lambda \to \Delta_2} \frac{-\max Q}{\max\theta} = +\infty \quad (\max\theta > 0)^{2)}. \tag{2}$$

Докажем тогда, что для любого положительного целого числа ν *найдется такое значение* λ_ν *числа* λ, *что как для* λ_ν, *так и для всех заключенных между* λ_ν *и* Δ_2 *значений* λ, *любое решение* $y(x, \lambda)$ *уравнения* (1) *имеет в* $[a, b]$ *не менее* ν *нулей.*

---

[1]) Читатель, желающий более глубоко ознакомиться с изложенными вопросами, может изучить гл. XV книги Ватсона [1].

[2]) Не исключено, что $\Delta_1 > \Delta_2$.

Из (2) следует существование такого λ', что для всех значений λ, заключенных между λ' и Δ_2 $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda) < 0$; будем рассматривать лишь такие значения λ.

Положим $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} \theta(x, \lambda) = M(\lambda)$, $-\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda) = m(\lambda)$ и сравним уравнение (1) с уравнением

$$\frac{d}{dx}\left[M(\lambda)\frac{du}{dx}\right] + m(\lambda)u = 0,$$

которое можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{m(\lambda)}{M(\lambda)}u = 0.$$

В § 2, п. 3, мы видели, что любое решение этого уравнения имеет в $[a, b]$ не менее чем

$$\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{m(\lambda)}{M(\lambda)}}\right]$$

нулей; но для данного ν можно, в силу (2), найти такое λ_ν, что для всех значений λ, заключенных между λ_ν и Δ_2, имеем

$$\left[\frac{b-a}{\pi}\sqrt{\frac{m(\lambda)}{M(\lambda)}}\right] \geqslant \nu + 1,$$

а тогда по теореме сравнения Штурма (см. § 2, п. 6 „б") для рассматриваемых значений λ любое решение уравнения (1) имеет в $[a, b]$ не менее чем ν нулей, т. е. не менее, чем ν *раз меняет знак.*

Отсюда следует, что когда λ изменяется в (Δ_1, Δ_2), число колебаний решения $y(x, \lambda)$ в $[a, b]$ стремится к бесконечности; поэтому доказанная теорема называется *осцилляционной теоремой.*

б) Пусть для любого отрезка $[a_1, b_1]$, лежащего в $[a, b]$, имеем

$$\lim_{\lambda\to\Delta_2} \frac{-\max\limits_{a_1\leqslant x\leqslant b_1} Q(x, \lambda)}{\max\limits_{a_1\leqslant x\leqslant b_1} \theta(x, \lambda)} = +\infty.$$

Тогда существует такое λ_{a_1, b_1}, что для всех значений λ, заключенных между λ_{a_1, b_1} и Δ_2, выполнено неравенство

$$\left[\frac{b_1-a_1}{\pi}\sqrt{\frac{m_1(\lambda)}{M_1(\lambda)}}\right] \geqslant 2,$$

где

$$m_1(\lambda) = -\max_{a_1\leqslant x\leqslant b_1} Q(x, \lambda),\quad M_1(\lambda) = \max_{a_1\leqslant x\leqslant b_1} \theta(x, \lambda).$$

Поэтому для таких значений λ любое решение $y(x, \lambda)$ уравнения (1) имеет по меньшей мере один нуль в $[a_1, b_1]$, а потому, когда $\lambda\to\Delta_2$, не только число нулей решения $y(x, \lambda)$ стремится к бесконечности, но эти нули равномерно распределены в $[a, b]$.

2. Осцилляционная теорема для уравнения $(\theta y')' + [\lambda A - B] y = 0$. Предположим, что $\theta(x, \lambda)$ не зависит от λ, а $Q(x, \lambda)$ зависит от λ линейно, т. е. рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) - B(x)] y = 0,$$

где функции $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ непрерывны в $[a, b]$, $\theta(x) > 0$ и $A(x)$ не обращается тождественно в нуль.

Пусть на отрезке $[\alpha, \beta]$, лежащем в $[a, b]$, функция $A(x)$ положительна (отрицательна), и пусть r и s —, соответственно, наименьшие значения $A(x)$ и $-B(x)$ в $[\alpha; \beta]$ (r — наибольшее значение $A(x)$, и s — наименьшее значение $-B(x)$ в $[\alpha, \beta]$).

Для положительных (отрицательных) значений λ имеем в $[\alpha, \beta]$

$$\lambda A(x) - B(x) \geqslant \lambda r + s; \quad -\max[-\lambda A(x) + B(x)] \geqslant \lambda r + s,$$

и из осцилляционной теоремы получаем, что *если среди значений функции $A(x)$ в $[a, b]$ есть положительные (отрицательные) значения, то при стремлении параметра λ к ∞ [к $-\infty$) число нулей любого решения $y(x, \lambda)$ уравнения* (5), *содержащихся в $[a_1 b]$, стремится к бесконечности, в то время как расстояние между двумя соседними нулями $y(x, \lambda)$, содержащимися в интервале, на котором $A(x)$ остается положительным (отрицательным), стремится к нулю.*

§ 5. Решения, обращающиеся в нуль в двух заданных точках. Собственные значения и собственные функции

1. Постановка задачи. Пусть дано уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda) \frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda) y = 0, \tag{1}$$

коэффициенты которого $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ удовлетворяют указанным в предыдущем параграфе условиям. Из осцилляционной теоремы следует, что число нулей решения $y(x, \lambda)$ уравнения (1), удовлетворяющего условию $y(a, \lambda) = 0$ (такие решения определены с точностью до постоянного множителя), при стремлении λ к Λ_2 становится больше любого наперед заданного числа; поэтому встает вопрос о существовании таких значений λ, для которых соответствующие решения обращаются в нуль в b, т. е. таких не обращающихся тождественно в нуль решений уравнения (1), что

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0. \tag{2}$$

Если такие значения λ существуют, то они называются *особыми значениями параметра, характеристическими значениями параметра, фундаментальными числами*, чаще же всего их называют *собственными значениями*. Соответствующие им решения называются *особыми функциями, характеристическими функциями, фундаментальными функциями* и чаще всего — *собственными функциями* [1]).

В следующем параграфе мы изучим системы Штурма и докажем существование собственных значений для уравнения (1) при условиях более общих, чем условия (2). Тем не менее не лишено интереса изучение системы (1), (2) способом, предложенным Маммана, так как этот способ позволяет записать в явной форме решения уравнения (1) (см. Маммана [2], а также [3], стр. 190 и сл.).

2. Разложение оператора второго порядка в произведение операторов первого порядка. а) Обозначим символом

$$O^{(n)}=p\left(\frac{d}{dx}\right)=\left[\frac{d^n}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{d}{dx}+p_n(x)\right],$$

где функции $p_i(x)$ непрерывны в $[a, b]$, оператор, результатом применения которого к n раз дифференцируемой функции $f(x)$ является функция

$$L(f)=\frac{d^nf}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(x)\frac{df}{dx}+p_n(x)f.$$

Иными словами, положим, по определению, $O^{(n)}f=L(f)$.

Оператор $O^{(n)}$ называется *дифференциальным оператором порядка n*; оператор первого порядка имеет поэтому вид

$$O^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+p_1\right).$$

Операторы первого порядка, как и все операторы, можно умножать друг на друга. Назовем *произведением двух операторов* $O_1^{(1)}$, $O_2^{(1)}$ и обозначим символом $O_1^{(1)}O_2^{(1)}$ оператор, получающийся, если применить сначала оператор $O_2^{(1)}$, а потом оператор $O_1^{(1)}$. Предположим, что $O_1^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+\alpha\right)$, $O_2^{(1)}\equiv\left(\frac{d}{dx}+\beta\right)$. Тогда

$$O_1^{(1)}O_2^{(1)}f=O_1^{(1)}[O_2^{(1)}f]=O_1^{(1)}\left[\frac{df}{dx}+\beta f\right]=$$
$$=\frac{d^2f}{dx^2}+\beta\frac{df}{dx}+\beta' f+\alpha\frac{df}{dx}+\alpha\beta f,$$

а потому

$$O_1^{(1)}O_2^{(1)}\equiv\left[\frac{d^2}{dx^2}+\{\alpha+\beta\}\frac{d}{dx}+\{\beta'+\beta\alpha\}\right]. \qquad (3)$$

Отсюда следует, что два оператора перестановочны в случае, когда $\alpha'=\beta'$ [2]).

[1]) Название собственные значения, собственные функции были применены впервые Буницким в [1], стр. 65—125, 84.

[2]) К свойствам дифференциальных операторов мы вернемся в гл. X.

б) Рассмотрим теперь следующую проблему (см., например, Кели [1]): *разложить данный дифференциальный оператор второго порядка*

$$O^{(2)} \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q\right], \tag{4}$$

где p и q — непрерывные функции от x на отрезке $[a, b]$, в произведение двух операторов первого порядка, т. е. найти такие два оператора первого порядка

$$O_1^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \alpha\right], \quad O_2^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \beta\right],$$

что

$$O^{(2)}(z) = O_1^{(1)}[O_2^{(1)}(z)]. \tag{5}$$

Сравнение формул (3) и (5) показывает, что задача сводится к разысканию, если это возможно, таких двух функций α и β, что

$$\alpha + \beta = p, \quad \beta' + \alpha\beta = q. \tag{6}$$

Докажем, что *для того, чтобы существовало искомое разложение с действительными символическими множителями, необходимо и достаточно, чтобы существовало решение уравнения*

$$z'' + pz' + qz = 0, \tag{7}$$

не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$, или, что то же самое, чтобы на отрезке $[a, b]$ не было пар точек, сопряженных относительно уравнения (7) (см. § 2, п. 7„в“).

Условие *необходимо*. В самом деле, если существуют две функции α и β, удовлетворяющие условиям (6), то (7) можно записать в виде

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right)z \equiv \left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{dz}{dx} + \beta z\right) \equiv$$
$$\equiv \frac{d}{dx}\left(\frac{dz}{dx} + \beta z\right) + \alpha\left(\frac{dz}{dx} + \beta z\right) = 0,$$

а потому

$$\frac{dz}{dx} + \beta z = e^{-\int \alpha\, dx}$$

и, следовательно,

$$z = ce^{-\int\limits_a^x \beta\, dx}\left[\int\limits_a^x e^{\int\limits_a^x (\beta - \alpha)\, dx} dx + c_1\right],$$

где c и c_1 — произвольные постоянные; такое решение может обратиться в $[a, b]$ в нуль не более одного раза, а потому на $[a, b]$ нет пар сопряженных точек.

Условие *достаточно*. Заметим сначала, что система (6) эквивалентна системе

$$\alpha = p - \beta, \qquad \beta' = \beta^2 - p\beta + q. \tag{8}$$

Пару функций, удовлетворяющих этой системе, можно построить следующим образом. Так как на отрезке $[a, b]$ нет пар сопряженных точек, то существует решение z уравнения (7), не обращающееся в нуль ни в одной точке отрезка $[a, b]$ (см. § 2, п. 7„в"). Функция $\beta = -z'/z$ (см. гл. II, § 3, п. 2) удовлетворяет второму из уравнений (8) и потому $\alpha = p + z'/z$.

в) Докажем теперь следующую общую теорему: *данный оператор*

$$O^{(2)}(z) \equiv \left[\frac{d^2}{dx^2} + p\frac{d}{dx} + q\right] z,$$

где функции p и q непрерывны в $[a, b]$, всегда можно разложить, и притом бесконечным множеством способов, в произведение двух, вообще говоря, комплексных, символических множителей первого порядка.

В самом деле, для того, чтобы выполнялось равенство

$$O^{(2)} = O_1^{(1)} O_2^{(1)}, \qquad \text{где} \quad O_1^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \alpha\right], \qquad O_2^{(1)} \equiv \left[\frac{d}{dx} + \beta\right],$$

необходимо и достаточно, чтобы функции α и β удовлетворяли системе (8).

Для определения β достаточно выбрать два линейно независимых действительных решения z_1 и z_2 уравнения (7) и положить

$$\beta = -(z_1' + iz_2')/(z_1 + iz_2) \tag{8'}$$

(i — мнимая единица). Тогда функция β будет конечна во всем отрезке $[a, b]$, так как функции z_1 и z_2 не могут на нем одновременно обратиться в нуль (см. § 2, п. 2„б"), а в силу того, что $z_1'z_2 - z_2'z_1 \neq 0$ в $[a, b]$, коэффициент при мнимой части в β отличен в $[a, b]$ от нуля.

3. Выражение для решения на отрезке, содержащем сопряженные точки. Определим *вид решения уравнения*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{9}$$

где функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны в $[a, b]$, при условии, что на отрезке $[a, b]$ есть хотя бы одна пара точек, сопряженных относительно этого уравнения.

Уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$\left(\frac{d}{dx} + \alpha\right)\left(\frac{d}{dx} + \beta\right) y = 0,$$

где, в силу показанного выше, функции α и β *не принимают действительных значений* и удовлетворяют соотношениям

$$\alpha+\beta=p, \qquad \beta'+\alpha\beta=q \tag{10}$$

(см. п. 2„б“). Пусть z_1 и z_2 — линейно независимые решения уравнения (9) в $[a, b]$; из (8') имеем

$$\beta=u+ih \qquad (u(x),\ h(x) \text{ действительны в } [a, b]),$$

а потому

$$\alpha=p-u-ih=\nu-ih \qquad [\nu=p-u].$$

Второе из соотношений (10) принимает тогда вид

$$\beta'+\alpha\beta=u'+ih'+u\nu+h^2+i(h\nu-hu)=q,$$

а потому $h'+h(\nu-u)=0$, откуда

$$h=ce^{-\int\limits_a^x(\nu-u)\,dx} \qquad (c=\text{const}),$$

или, полагая

$$\rho(x)=e^{-\int\limits_a^x(\nu-u)\,dx}>0 \qquad [h=c\rho(x)], \tag{11}$$

получаем, что

$$\alpha=\nu-ic\rho(x), \qquad \beta=u+ic\rho(x), \tag{12}$$

причем, в силу того, что

$$c=h(a)=-\operatorname{Im}[z_1'(a)+iz_2'(a)]/[z_1(a)+iz_2(a)]\neq 0\ ^{1)},$$

постоянная c отлична от нуля.

Решение уравнения (9), которое получается путем решения линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx}+\beta y=0,$$

имеет вид

$$y=le^{-\int\limits_a^x\beta\,dx}=le^{-\int\limits_a^x u\,dx}e^{-ic\int\limits_a^x\rho(x)\,dx},$$

где l — произвольное действительное число, т. е., если мы положим

$$-\int\limits_a^x u\,dx=\eta(x), \qquad \int\limits_a^x\rho\,dx=\xi(x), \tag{13}$$

то будем иметь

$$y=le^{\eta(x)}[\cos c\xi(x)-i\sin c\xi(x)].$$

---

[1]) Символом $\operatorname{Im}\alpha$ мы обозначаем „мнимую часть α“, и если $\alpha=a+ib$, a и b действительны, то $\operatorname{Im}\alpha=b$.

Отсюда следует, что $e^{\eta(x)}\cos c\xi(x)$ и $e^{\eta(x)}\sin c\xi(x)$ являются двумя линейно независимыми решениями уравнения (9), а потому общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = e^{\eta(x)}[c_1 \cos c\xi(x) + c_2 \sin c\xi(x)], \tag{14}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Пользуясь тем, что $c \neq 0$, обозначим через γ такой угол, что

$$\cos(-c\gamma) = c_2/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \qquad \sin(-c\gamma) = c_1/\sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

и положим $k = (c_1^2 + c_2^2)^{1/2}$. Тогда k и γ можно рассматривать как *произвольные постоянные*, вводимые вместо c_1 и c_2, и равенство (14) принимает вид

$$y = ke^{\eta(x)} \sin c[\xi(x) - \gamma], \tag{15}$$

в котором, изменяя, если это необходимо, знак k, мы можем считать, что $c > 0$.

Формула (15) дает вид общего решения уравнения (9) при условии, что в $[a, b]$ есть хотя бы одна пара сопряженных точек. Этот вид аналогичен виду общего решения

$$y = k \sin c(x - \gamma)$$

уравнения $y'' + c^2 y = 0$.

Следует заметить еще, что в силу (13) и (11) $\xi'(x) = \rho(x) > 0$, а потому *функция* $\xi(x)$ *возрастает в* $[a, b]$ (и удовлетворяет условию $\xi(a) = 0$). Таким образом, *аргумент* $c[\xi(x) - \gamma]$ *в формуле* (15) *является возрастающей функцией от* x *в* $[a, b]$ [1]).

4. Теорема существования собственных значений. Доказательство Маммана. а) Формула (15) позволяет нам ответить на поставленный в п. 1 вопрос.

Итак, пусть дано уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)\, y = 0, \tag{16}$$

коэффициенты $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ которого удовлетворяют следующим требованиям:

1. *Функции* $\theta(x, \lambda)$, $\frac{\partial}{\partial x}\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *являются непрерывными функциями от* x *и* λ, *когда* x *изменяется в* $[a, b]$, *а* λ — *в промежутке* (Λ_1, Λ_2), *причем* $\theta(x, \lambda) > 0$, *когда* $a \leqslant x \leqslant b$ *и* λ *принадлежит* (Λ_1, Λ_2) [2]).

2. $$\lim_{\lambda \to \Lambda_2} \frac{-\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} Q(x, \lambda)}{\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} \theta(x, \lambda)} = +\infty.$$

---

[1]) Относительно выражения решения уравнения (9) в виде (15) см. также Боль [1], стр. 302.

[2]) Как указывалось в § 4, п. 1, при этом не исключено, что $\Lambda_1 > \Lambda_2$ и что промежуток (Λ_1, Λ_2) бесконечен в одну или обе стороны.

Тогда *существует бесконечное множество значений параметра* λ (*собственных значений*), *которым соответствуют решения* $y(x, \lambda)$ *уравнения* (16), *удовлетворяющие условиям*

$$y(a, \lambda)=0, \quad y(b, \lambda)=0, \tag{17}$$

причем число нулей решения $y(x, \lambda)$, *соответствующего собственному значению* λ, *стремится к бесконечности, когда* $\lambda \to \Delta_2$.

Из наших предположений следует, в силу осцилляционной теоремы (§ 4, п. 1), существование такого значения $\overline{\lambda}$ параметра λ, что для всех значений λ, содержащихся между $\overline{\lambda}$ и Δ_2 на отрезке $[a, b]$, есть пара точек, сопряженных относительно уравнения (16). Но тогда, как было выше показано, решение уравнения (16) имеет вид

$$y(x, \lambda)=ke^{\eta(x, \lambda)} \sin c(\lambda)[\xi(x, \lambda)-\gamma],$$

причем, если оно обращается в нуль в точке a, то

$$y(x, \lambda)=ke^{\eta(x, \lambda)} \sin c(\lambda) \xi(x, \lambda) \quad [y(a, \lambda)=0],$$

а потому в точке b это решение принимает значение

$$y(b, \lambda)=ke^{\eta(b, \lambda)} \sin c(\lambda) \xi(b, \lambda).$$

Пусть $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$, $a_3(\lambda)$, $a_4(\lambda)$ — непрерывные в (Δ_1, Δ_2) функции от λ, такие, что $a_1(\lambda) a_4(\lambda)-a_2(\lambda) a_3(\lambda) \neq 0$. Рассмотрим два линейно независимых решения $z_1(x, \lambda)$, $z_2(x, \lambda)$ уравнения (16), определенных начальными условиями

$$z_1(a, \lambda)=a_1(\lambda), \quad \left.\frac{\partial z_1(x, \lambda)}{\partial x}\right|_{x=a}=a_2(\lambda),$$
$$z_2(a, \lambda)=a_3(\lambda), \quad \left.\frac{\partial z_2(x, \lambda)}{\partial x}\right|_{x=a}=a_4(\lambda).$$

По результатам, полученным в гл. I, § 5, п. 2, решения $z_1(x, \lambda)$, $z_2(x, \lambda)$ и их первые производные по x являются непрерывными функциями от λ. Но $u+ih=-(z_1'+iz_2')/(z_1+iz_2)$, а потому u и h, а вместе с ними и $\nu=\frac{1}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial x}-u$, являются непрерывными функциями от λ. Так как

$$c(\lambda)=-\operatorname{Im}\{[a_2(\lambda)+ia_4(\lambda)]./[a_1(\lambda)+ia_3(\lambda)]\},$$

то и c — непрерывная функция от λ. Принимая, наконец, во внимание формулы (11) и (13), убеждаемся, что в (18) $\eta(x, \lambda)$, $\xi(x, \lambda)$, $c(\lambda)$ — непрерывные функции от λ в (Δ_1, Δ_2).

Так как при стремлении λ к Δ_2 число нулей решения $y(x, \lambda)$ стремится к бесконечности, то из того, что функция $c(\lambda) \xi(x, \lambda)$ возрастает по x, когда x изменяется в $[a, b]$, следует соотношение

$$\lim_{\lambda \to \Delta_2} c(\lambda) \xi(b, \lambda)=+\infty. \tag{19}$$

Из того, что $c(\lambda)\xi(b, \lambda)$ является непрерывной функцией от λ в (Δ_1, Δ_2), вытекает, что когда $\lambda \to \Delta_2$, функция $c(\lambda)\xi(b, \lambda)$ принимает бесконечное множество раз значения вида $l\pi$, где l — целое число. Но для таких значений λ имеем

$$y(b, \lambda) = ke^{\eta(b, \lambda)} \sin l\pi = 0.$$

Тем самым доказано, что существует бесконечное множество собственных значений параметра λ, т. е. значений λ, для которых соответствующие им решения уравнения (16) удовлетворяют условиям (17).

б) В § 6 мы докажем, при несколько более жестких требованиях, что собственные значения образуют последовательность, для которой Δ_2 является единственной предельной точкой.

5. Собственные значения для уравнения $(\theta y')' + (\lambda A - B) y = 0$. а) Рассмотрим теперь частный случай уравнения вида

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) - B(x)]\, y(x) = 0, \tag{20}$$

где функции $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ непрерывны в $[a, b]$, $\theta(x) > 0$ и $A(x)$ не обращается тождественно в нуль. Учитывая доказанную в § 4, п. 2 теорему, получаем, что *если среди значений $A(x)$ в $[a, b]$ есть положительные* (отрицательные) *значения, то, при стремлении λ к положительной* (отрицательной) *бесконечности, λ бесконечное множество раз принимает собственные значения, которым соответствуют решения уравнения* (20), *обращающиеся в нуль в точках a и b, т. е. такие, что*

$$y(a, \lambda) = y(b, \lambda) = 0.$$

б) В прежних доказательствах этой теоремы налагались более ограничительные требования. Например, требовалось постоянство знака $A(x)$ в $[a, b]$, причем $B(x)$ могла быть любой функцией, или же требовалась непрерывность $A(x)$ и неотрицательность $B(x)$ в $[a, b]$. Метод Маммана позволяет доказать эту теорему во всей ее общности. Некоторые уточнения этой теоремы читатель найдет в § 6, п. 6.

§ 6. Системы Штурма. Собственные значения. Собственные функции

1. Задача о распространении тепла в тонкой проволоке и системы Штурма. а) Пусть бесконечно тонкая прямолинейная проволока постоянного сечения помещена в среду, температура которой равна нулю. Обозначим через $\theta(x)$ коэффициент внутренней теплопроводности, через $g(x)$ — удельную теплоемкость, через $l(x)$ — коэффициент внешней теплопроводности для точек сечения с абсциссой x, а через σ и ε — соответственно, площадь и длину контура сечения проволоки, Пусть температура проволоки в точках сечения с абсциссой x равна $V(x, t)$ в момент времени t. Мы хотим определить связь между функциями $\theta(x)$, $g(x)$, $l(x)$, $V(x, t)$.

Рассмотрим два находящихся на расстоянии d друг от друга сечения проволоки $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$, температура которых равна, соответственно, V_1 и V_2, $V_2 > V_1$, причем d настолько мало, что можно считать коэффициент внутренней теплопроводности постоянным на участке между $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$. Из экспериментальной физики известно, что количество тепла, проходящего за единицу времени через единицу площади сечения от сечения с температурой V_2 к сечению с температурой V_1, равно $\theta(x)\ (V_2 - V_1)/d$; отсюда следует, что количество тепла, проходящего за единицу времени через сечение с абсциссой x, равно $-\theta(x)\dfrac{\partial V}{\partial x}\sigma$, а потому количество тепла, проходящего за единицу времени через сечения с абсциссами $x + dx/2$ и $x - dx/2$, соответственно, равны

$$-\theta\left(x+\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial V\left(x+\frac{dx}{2}, t\right)}{\partial x}\sigma = \tag{1}$$
$$= -\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma - \frac{1}{2}\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma\,dx - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma\,dx - \ldots,$$

$$-\theta\left(x-\frac{dx}{2}\right)\frac{\partial V\left(x-\frac{dx}{2}, t\right)}{\partial x}\sigma = \tag{2}$$
$$= -\theta(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma + \frac{1}{2}\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma\,dx + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma\,dx + \ldots.$$

Поэтому, если пренебречь теплообменом с внешней средой, то количество тепла, приобретаемого за единицу времени элементом dx, равно разности выражений (2) и (1), т. е. с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\theta'(x)\frac{\partial V}{\partial x}\sigma\,dx + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\theta(x)\sigma\,dx = \frac{\partial}{\partial x}\left[\theta\frac{\partial V}{\partial x}\right]\sigma\,dx.$$

Принимая во внимание, что рассматриваемый элемент излучает в единицу времени количество тепла, равное $l(x)\,V\varepsilon\,dx$, получаем, что приобретенное за единицу времени элементом dx количество тепла равно

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta\frac{\partial V}{\partial x}\right]\sigma\,dx - l(x)\,V\varepsilon\,dx.$$

Обозначим через $\rho(x)$ плотность элемента dx с центром в точке x. Тогда масса этого элемента равна $\rho\sigma\,dx$, а так как удельная теплоемкость этого элемента равна $g(x)$, то в момент t он содержит количество тепла, равное $\rho(x)\,g(x)\ V(x, t)\,\sigma\,dx$. Отсюда следует, что скорость изменения количества тепла в этом элементе за единицу времени равна $\rho(x)\,g(x)\,\dfrac{\partial V}{\partial t}\,\sigma\,dx$, откуда вытекает *уравнение распространения тепла в проволоке* (см. Пуассон [1], стр. 233 и след.)

$$\rho(x)\,g(x)\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\theta(x)\,\frac{\partial V}{\partial x}\right]-\frac{\varepsilon}{\sigma}\,l(x)\,V. \tag{3}$$

Обозначим через σ_1 и σ_2 крайние сечения проволоки, имеющие, соответственно, абсциссы a и b, и рассмотрим наше явление в момент, когда можно принять изменение температуры на концах равным нулю. Тогда, если обозначить через l_1 и l_2 коэффициент внешней теплопроводности в сечениях σ_1 и σ_2, то

$$-\theta(a)\,V_x(a,\ t)\,\sigma_1+\sigma_1 l_1 V(a,\ t)=0,$$
$$\theta(b)\,V_x(b,\ t)\,\sigma_2+\sigma_2 l_2 V(b,\ t)=0$$

или

$$\theta(a)\,V_x(a,\ t)-l_1V(a,\ t)=0,\ \ \theta(b)\,V_x(b,\ t)+l_2V(b,\ t)=0. \tag{4}$$

Предположим теперь, что нам известно *начальное распределение* температуры в момент времени $t=0$; тогда нам известно значение функции $V(x,\ t)$ при $t=0$, т. е. имеем

$$V(x,\ 0)=f(x), \tag{5}$$

где $f(x)$ — *известная функция, определенная в* $(a,\ b)$. Таким образом, задача об определении функции $V(x,\ t)$ сводится к *разысканию решения уравнения* (3), *удовлетворяющего условиям* (4) *и* (5) *в области* Δ, *определенной неравенствами*

$$a\leqslant x\leqslant b,\qquad t\geqslant 0.$$

Следуя классическому методу математической физики, постараемся построить *элементарное решение* уравнения (3), т. е. решение вида

$$cU(x)\,e^{-\lambda t},$$

где c и λ — постоянные, которое удовлетворяло бы граничным условиям (4). Тогда должны выполняться равенства

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\,\frac{dU}{dx}\right]+\left[\lambda\rho(x)\,g(x)-\frac{\varepsilon}{\sigma}\,l(x)\right]U=0, \tag{3'}$$

$$\theta(a)\,U'(a)-l_1U(a)=0,\ \ \theta(b)\,U'(b)+l_2U(b)=0. \tag{4'}$$

Предположим, что уже доказано существование последовательности положительных значений λ_n параметра λ, которым соответствуют функции $U_n(x)$, удовлетворяющие соотношениям (3′) и (4′) [1]; в силу линейности уравнения (3), какова бы ни была последовательность чисел $\{c_n\}$, функция $\sum c_nU_n(x)\,e^{-\lambda_n t}$ также является решением

---

[1]) См. относительно этого § 6, п. 6.

уравнения (3). Таким образом, мы приходим к задаче: *найти, если это возможно, такую последовательность* $\{c_n\}$, *что*

$$V(x,\ t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)\, e^{-\lambda_n t}. \tag{6}$$

Полагая в этом представлении $t=0$, получаем, в силу (5), что должно выполняться равенство $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$. В § 8, п. 4 „б" мы увидим, что если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема, то числа c_n однозначно определяются последним равенством, а потому вопрос сводится к проверке, удовлетворяет ли определенная равенством (6) функция $V(x,\ t)$ всем условиям задачи.

б) Изучение системы (3′), (4′) является частным случаем изучения следующей задачи. *Дано уравнение*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x,\ \lambda)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x,\ \lambda)\, y = 0. \tag{7}$$

Найти значения параметра λ, *которым соответствуют не обращающиеся тождественно в нуль решения этого уравнения, удовлетворяющие краевым условиям*

$$\alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta y'(b) = 0, \tag{7′}$$

где α, α_1, β, β_1 *не зависят от* x, $\alpha^2 + \alpha_1^2 \neq 0$, $\beta^2 + \beta_1^2 \neq 0$.

В случае, когда $\alpha = \beta = 0$, мы получаем рассмотренный в § 5 случай. Здесь мы изучим общий случай систем, состоящих из равенств (7) и (7′), или, как говорят, *дифференциальных систем* Штурма, или, проще, *систем* Штурма. Для этой цели полезно будет указать некоторые дополнения к теореме сравнения и осцилляционной теореме.

2. Дополнения к теореме сравнения. а) *Пусть даны два уравнения*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] - Q(x)\, y = 0, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right] - Q_1(x)\, z = 0, \tag{9}$$

где функции $\theta'(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q(x)$, $Q_1(x)$ *непрерывны*, $\theta(x) > 0$, $\theta_1(x) > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$,

$$\theta(x) \geqslant \theta_1(x), \quad Q(x) \geqslant Q_1(x), \tag{10}$$

причем ни в какой части отрезка $[a,\ b]$ *не выполняются одновременно равенства*

$$\theta(x) \equiv \theta_1(x), \quad Q(x) \equiv Q_1(x),$$

а также не выполняется равенство

$$Q(x) \equiv Q_1(x) \equiv 0.$$

Пусть $y(x)$, $z(x)$ *являются, соответственно, решениями уравнений* (8) *и* (9), *определенными при* $a \leqslant x \leqslant b$. *Предположим, что если* $y(a) \neq 0$, *то*

$$\frac{\theta(a)\, y'(a)}{y(a)} \geqslant \frac{\theta_1(a)\, z'(a)}{z(a)} \tag{11}$$

(а потому $z(a) \neq 0$), *если же* $y(a) = 0$, *то на* $z(a)$ *не накладывается никаких условий.*

Докажем в этом случае, что если $y(x)$ *имеет в полуоткрытом промежутке* $a < x \leqslant b$ m *нулей, то* $z(x)$ *имеет в этом промежутке не меньше* m *нулей, из которых, по крайней мере, один меньше первого нуля* $y(x)$ [1].

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ суть m нулей решения $y(x)$, расположенных в порядке возрастания,

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b.$$

Из теоремы Штурма (§ 2, п. 6) вытекает, что в каждом из $m-1$ промежутков (x_1, x_2), (x_2, x_3), $\ldots$, (x_{m-1}, x_m), функция $z(x)$ имеет по меньшей мере один нуль. Поэтому достаточно показать, что $z(x)$ имеет еще один нуль в промежутке (a, x_1). Если $y(a) = 0$, то это вытекает из теоремы Штурма. Если же $y(a) \neq 0$, то имеет место соотношение (11). Если бы $z(x)$ не обращалось в нуль в промежутке $a < x < x_1$, то, интегрируя от a до x_1 тождество (I) из § 2, п. 5, мы получили бы, что

$$-y^2(a)\left[\theta(a)\frac{y'(a)}{y(a)} - \theta_1(a)\frac{z'(a)}{z(a)}\right] =$$
$$= \int_a^{x_1} (Q - Q_1)\, y^2\, dx + \int_a^{x_1} (\theta - \theta_1)\, y'^2\, dx + \int_a^{x_1} \theta_1 \left(y' - \frac{y}{z} z'\right)^2 dx,$$

чего не может быть, так как левая часть отрицательна или равна нулю, а правая положительна. Отсюда и следует, что $z(x)$ имеет в (a, x_1), по крайней мере, один нуль.

б) Пусть коэффициенты уравнений (8) и (9) и их решения $y(x)$ и $z(x)$ удовлетворяют сделанным в „а“ предположениям и пусть в некоторой точке c промежутка (a, b) выполняются неравенства $y(c) \neq 0$, $z(c) \neq 0$. Из доказанной только что теоремы следует, что в промежутке (a, c) не меньше нулей функции $z(x)$, чем нулей функции $y(x)$; докажем, что *если функции* $y(x)$ *и* $z(x)$ *имеют одинаковое число нулей в* (a, c), *то*

$$\frac{\theta(c)\, y'(c)}{y(c)} > \frac{\theta_1(c)\, z'(c)}{z(c)}. \tag{12}$$

[1] Говорят, что нуль функции $z(x)$ меньше нуля функции $y(x)$, если абсцисса первого нуля меньше абсциссы второго.

Если в (a, c) функции $y(x)$ и $z(x)$ не имеют нулей, то, интегрируя от a до c упомянутую выше формулу (I) из § 2, п. 5, получаем, что

$$\left[y^2\left(\theta\frac{y'}{y}-\theta_1\frac{z'}{z}\right)\right]_a^c>0,$$

откуда при сделанных предположениях и следует неравенство (12); если же функция $y(x)$ обращается в нуль в промежутке (a, c) и x_i — ближайший к c нуль, то, согласно „а", между x_i и c нет нулей функции $z(x)$, а потому формулу (I) можно проинтегрировать от x_i до c, получив неравенство

$$\left[y^2\left(\theta\frac{y'}{y}-\theta_1\frac{z'}{z}\right)\right]_{x_i}^c>0,$$

из которого, в силу того, что стоящее в квадратных скобках выражение обращается в нуль при $x=x_i$, следует неравенство (12).

3. Добавления к осцилляционной теореме. а) *Рассмотрим уравнение*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x, \lambda)y=0, \tag{13}$$

где $\theta(x, \lambda)$ и $Q(x, \lambda)$ зависят от параметра λ, изменяющегося в промежутке (Λ_1, Λ_2), $\Lambda_1<\Lambda_2$ [1]*. Предположим, что функции*

$$\theta(x, \lambda)>0,\ \frac{\partial\theta(x, \lambda)}{\partial x},\ Q(x, \lambda)$$

непрерывны как функции (x, λ) когда $a\leqslant x\leqslant b$ и λ лежит в (Λ_1, Λ_2). Предположим также, что при любом фиксированном x из $[a, b]$ функции $\theta(x, \lambda)$ и $Q(x, \lambda)$ являются непрерывными невозрастающими функциями от λ когда λ изменяется между Λ_1 и Λ_2, и что $Q(x, \lambda)$ не обращается тождественно в нуль в одной и той же части $[a, b]$ для двух различных значений λ.

Пусть, далее, *ни в какой части отрезка $[a, b]$ не выполняются для двух различных значений λ_1 и λ_2 параметра λ оба равенства*

$$\theta(x, \lambda_1)\equiv\theta(x, \lambda_2),\ Q(x, \lambda_1)\equiv Q(x, \lambda_2).$$

Наконец, пусть даны две постоянные α и α_1 или же две функции $\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$ параметра λ, непрерывные в (Λ_1, Λ_2) и не обращающиеся одновременно в нуль, причем либо $\alpha(\lambda)=0$ при всех значениях λ, либо $\alpha(\lambda)\neq 0$ при всех значениях λ, а $\theta(a,\lambda)\times\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$ является невозрастающей функцией от λ.

Рассмотрим решение $y(x, \lambda)$ уравнения (13), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(a, \lambda)=\alpha(\lambda),\ y'(a, \lambda)=\alpha_1(\lambda) \tag{14}$$

[1]) Промежуток (Λ_1, Λ_2) может быть бесконечным в одну или обе стороны.

(или же решение, отличающееся от этого постоянным множителем).

В силу наших предположений применима теорема из п. 2 „а“, а потому, если для некоторого значения $\bar{\lambda}$ из (Δ_1, Δ_2) решение $y(x, \bar{\lambda})$ имеет m нулей, бо́льших чем a и не превосходящих b, то при изменении λ между $\bar{\lambda}$ и Δ_2 решения $y(x, \lambda)$ имеют по меньшей мере m нулей, и до тех пор, пока число нулей остается равным m, они согласованно движутся от b к a и потому остаются в промежутке (a, b).

б) Предположим, что при некотором значении $\bar{\lambda}$ параметра λ решение $y(x, \bar{\lambda})$ имеет ровно m нулей $x_1, x_2, \ldots, x_m$, бо́льших чем a и не превосходящих b, $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m \leqslant b$. Покажем, что *если $x_m = b$, т. е. если $y(b, \bar{\lambda}) = 0$, то можно найти такое положительное число ρ, что для всех значений λ, принадлежащих промежутку $\bar{\lambda} < \lambda \leqslant \bar{\lambda} + \rho$, решение уравнения* (13), *удовлетворяющее условиям* (14), *имеет в (a, b) ровно m нулей, причем все эти нули больше a, а потому, в силу „а“, все лежат в (a, b).*

В самом деле, имеем

$$\left.\frac{dy(x, \bar{\lambda})}{dx}\right|_{x=x_i} = y'(x_i, \bar{\lambda}) \neq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{15}$$

Рассмотрим сначала случай, когда $y(a, \bar{\lambda}) = \alpha(\bar{\lambda}) = 0$ [а потому $\alpha(\lambda) = 0$ в (Δ_1, Δ_2)]. В этом случае

$$\left.\frac{dy(x, \bar{\lambda})}{dx}\right|_{x=a} = y'_x(a, \bar{\lambda}) \neq 0. \tag{16}$$

В силу непрерывности $y'_x(x, \lambda)$ по x и λ (см. гл. I, § 5, п. 1 „б“), можно найти такие положительные числа ρ и ε, что из неравенств

$$0 \leqslant \lambda - \bar{\lambda} \leqslant \rho, \tag{17}$$

$$0 \leqslant x - a \leqslant \varepsilon; \ |x - x_i| \leqslant \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots; m-1) \tag{18}$$

$$0 \leqslant x_m - x \leqslant \varepsilon$$

вытекает неравенство

$$y'_x(x, \lambda) \neq 0. \tag{19}$$

В m отрезках

$$[a + \varepsilon, x_1 - \varepsilon], \ [x_1 + \varepsilon, x_2 - \varepsilon], \ \ldots, \ [x_{m-1} + \varepsilon, x_m - \varepsilon] \tag{20}$$

решение $y(x, \bar{\lambda})$ не обращается в нуль. Обозначим через d наименьшее значение $|y(x, \bar{\lambda})|$ в этих отрезках.

Пусть σ — положительное число, меньшее d. Уменьшим, если это необходимо, число ρ настолько, что при $0 < \lambda - \bar{\lambda} \leqslant \rho$ в отрезке $[a, b]$

выполнялось неравенство

$$|y(x, \lambda)-y(x, \bar{\lambda})| \leqslant \sigma.$$

Предположим, что функция $y(x, \bar{\lambda})$ положительна в $[a+\varepsilon, x_1-\varepsilon]$ (рассуждения не изменились бы, если бы она была там отрицательна). Тогда она отрицательна в $(x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon)$ и положительна в $[x_2+\varepsilon, x_3-\varepsilon]$, а потому, когда x принадлежит $[a+\varepsilon, x_1-\varepsilon]$, то

$$y(x, \lambda) \geqslant y(x, \bar{\lambda})-\sigma \geqslant d-\sigma>0,$$

а когда x принадлежит $[x_1+\varepsilon, x_2-\varepsilon]$, то

$$y(x, \lambda) \leqslant y(x, \bar{\lambda})+\sigma \leqslant -d+\sigma<0.$$

Таким образом, функция $y(x, \lambda)$ при всех значениях λ, принадлежащих $[\bar{\lambda}, \bar{\lambda}+\rho]$, не обращается в нуль ни в одном из m отрезков (20) и принимает в них попеременно положительные и отрицательные значения. Отсюда следует, что функция $y(x, \lambda)$ должна обращаться в нуль по меньшей мере один раз в каждом из $m-1$ промежутков $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon), (x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon), \ldots, (x_{m-1}-\varepsilon, x_{m-1}+\varepsilon)$, причем из (19) следует, что она обращается в нуль в этих промежутках только по одному разу. С другой стороны, так как по предположению $y(a, \lambda)=\alpha(\lambda)=0$, а по формуле (19) $y'_x(x, \lambda) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$, то $y(x, \lambda)$ имеет в $[a, a+\varepsilon]$ только один нуль, находящийся в точке a. Таким образом, $y(x, \lambda)$ имеет только $m-1$ нулей, бо́льших чем a и не превосходящих $x_m-\varepsilon$. Но так как мы предположили, что существует m нулей, больших чем a, то $y(x, \lambda)$ должно иметь по меньшей мере один нуль в $[x_m-\varepsilon, x_m]$ и по (19) только один. Этот нуль, в силу доказанного в „а“, находится в промежутке $(x_m-\varepsilon, x_m)$; итак, мы доказали, что при всех значениях λ, $\bar{\lambda}<\lambda \leqslant \bar{\lambda}+\rho$, $y(x, \lambda)$ имеет в (a, b) ровно m нулей, причем все эти нули больше, чем a, и меньше, чем b.

В случае, когда $\alpha(\bar{\lambda}) \neq 0$, то $y(a, \bar{\lambda}) \neq 0$, и можно найти такие положительные числа ρ и ε, что из неравенств

$$0 \leqslant \lambda-\bar{\lambda} \leqslant \rho, \quad a \leqslant x \leqslant a+\varepsilon$$

следует $y(x, \lambda) \neq 0$, после чего достаточно провести те же рассуждения, что и выше.

в) *Обозначим через λ^* верхнюю грань значений λ, для которых решения $y(x, \lambda)$ уравнения* (13), *удовлетворяющие начальным условиям* (14), *имеют ровно m нулей, бо́льших чем a и не превосходящих b. Докажем, что если $\Delta_1<\lambda^*<\Delta_2$, то решение $y(x, \lambda^*)$ имеет $m+1$ нулей, бо́льших a, из которых один находится в b, а остальные m лежат внутри (a, b).*

Заметим сначала, что если $p > 0$, то решение $y(x, \lambda^*)$ (имеющее по меньшей мере m нулей, бо́льших a), не может иметь $m+p$ нулей в (a, b). В самом деле, если бы это было так, то, рассуждая так же, как и в „б“, мы могли бы найти такое положительное число ρ, что при всех значениях λ, лежащих в $(\lambda^*-\rho, \lambda^*)$, решение $y(x, \lambda)$ имело бы по меньшей мере $m+p$ нулей в (a, b), в то время как мы предположили, что таких нулей не может быть больше m. Отсюда следует, что $y(x, \lambda^*)$ имеет в (a, b) $m-1$ или m нулей. Если бы число этих нулей равнялось $m-1$, то b должно было бы быть также нулем, и, в силу доказанного в „б“, можно было бы найти такое положительное число ρ, что для всех значений λ, заключенных между λ^* и $\lambda^*+\rho$, решение $y(x, \lambda)$ имеет только m нулей в $[a, b]$, превосходящих a. Но тогда λ^* не имело бы указанного экстремального свойства. Таким образом, $y(x, \lambda^*)$ имеет в (a, b) m нулей. Осталось доказать, что $y(b, \lambda^*)=0$. Если бы $y(b, \lambda^*)$ было отлично от нуля, то, повторяя обычные рассуждения, можно было бы найти такое положительное число ρ, что при $\lambda^* \leqslant \lambda \leqslant \lambda^*+\rho$ решение $y(x, \lambda)$ имело бы в (a, b) только m нулей, бо́льших чем a.

Из доказанного следует, что *если выполнены сделанные предположения, то при изменении λ от Δ_1 до Δ_2 увеличение числа нулей решения $y(x, \lambda)$ на единицу происходит тогда, когда один из нулей совпадает с b.*

г) Наши выводы о решениях уравнения (13) сохраняют силу и в случае, когда начальные условия (14) заменяются начальными условиями

$$y(a, \lambda)=c\alpha(\lambda), \quad y'(a, \lambda)=c\alpha_1(\lambda), \tag{14'}$$

где c — отличная от нуля произвольная постоянная; для доказательства достаточно заметить, что решением уравнения (13), соответствующим начальным условиям (14′), является функция $cy(x, \lambda)$, имеющая те же нули, что и $y(x, \lambda)$; поэтому *полученные в „в“ выводы сохраняют силу и для решений уравнения* (13), *удовлетворяющих начальному условию*

$$\alpha_1(\lambda)y(a, \lambda)-\alpha(\lambda)\ y'(a, \lambda)=0. \tag{14''}$$

4. Системы Штурма. Существование собственных значений. Теорема Бохера. *Пусть дано уравнение*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x, \lambda)y=0, \tag{13}$$

коэффициенты которого $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ удовлетворяют условиям, указанным в п. 3„а“. *Пусть, далее, даны α, α_1, β, β_1, которые являются либо такими числами, что $|\alpha|+|\alpha_1| \neq 0$ и $|\beta|+|\beta_1| \neq 0$, либо такими непрерывными в (Δ_1, Δ_2) функциями параметра λ [$\alpha(\lambda)$, $\alpha_1(\lambda)$; $\beta(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$ не обращаются одновременно* *в нуль*], *что или* $\alpha(\lambda)=0$ *для всех значений* λ, *или* $\alpha(\lambda)\neq 0$ *и одновременно с этим* $\theta(a, \lambda)\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$ *является невозрастающей в* (Λ_1, Λ_2) *функцией* λ; *и, аналогично, или* $\beta(\alpha)=0$, *или* $\beta(\lambda)$ *не обращается в нуль ни для одного значения* λ *из* (Λ_1, Λ_2) *и одновременно с этим* $\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ *является невозрастающей функцией от* λ *в* (Λ_1, Λ_2). *Предположим, наконец, что*

$$\lim_{\lambda\to\Lambda_2} -\max_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda)/\max_{a\leqslant x\leqslant b}\theta(x, \lambda)=+\infty, \tag{21}$$

и докажем, что тогда существует бесконечное множество значений параметра λ (собственных значений), *которым соответствуют решения уравнения* (13), *удовлетворяющие краевым условиям*

$$\alpha_1(\lambda)y(a, \lambda)-\alpha(\lambda)\ y'(a, \lambda)=0, \tag{22}$$

$$\beta_1(\lambda)y(b, \lambda)+\beta(\lambda)\ y'(b, \lambda)=0 \tag{23}$$

(см. Бохер [2], стр. 63, Айнс [1], стр. 313).

Из (21) следует существование такого числа λ', что для всех значений λ, заключенных между λ' и Λ_2, $\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda)<0$. Мы будем рассматривать лишь такие значения λ. Когда λ изменяется между λ' и Λ_2, то по теореме из § 4, п. 1, число нулей решений уравнения (13), заключенных в (a, b), становится больше любого наперед заданного числа ν. Пусть при некотором значении параметра λ, которое мы обозначим через μ_ν, решение уравнения (13), удовлетворяющее условию (22), имеет ν нулей в промежутке (a, b). Обозначим через $\mu_{\nu+1}$ верхнюю грань тех значений λ, которым соответствуют решения системы (13), (22), имеющие ν нулей в промежутке (a, b). Тогда, в силу теоремы, доказанной п. 3 „г“, при $\lambda=\mu_{\nu+1}$ система (13), (22) имеет решение, у которого ν нулей лежат в (a, b), а один совпадает с b. Рассуждая относительно $\mu_{\nu+1}$ так же, как мы рассуждали относительно μ_ν, и повторяя это рассуждение далее, мы получим монотонно возрастающую бесконечную последовательность чисел

$$\mu_{\nu+1},\ \mu_{\nu+2},\ \ldots,\ \mu_{\nu+p},\ \ldots, \tag{24}$$

имеющую единственной предельной точкой Λ_2 (см. п. 3„б“), причем имеют место следующие свойства:

1. Решение $y(x, \mu_{\nu+p})$ уравнения (13), удовлетворяющее условию (22), имеет $\nu+p-1$ нулей в (a, b) и один нуль, совпадающий с b.

2. Если λ лежит между $\mu_{\nu+p}$ и $\mu_{\nu+p+1}$, то решение уравнения (13), удовлетворяющее условию (22), имеет ровно $\nu+p$ нулей, и все эти нули лежат в (a, b).

Отсюда следует, что если $\beta(\lambda)\equiv 0$ $(\beta_1(\lambda)\neq 0)$, то наша теорема доказана, и искомыми собственными значениями являются числа последовательности (24). Рассмотрим теперь случай, когда в (Λ_1, Λ_2) $\beta(\lambda)\neq 0$.

Заметим, что когда λ изменяется между $\mu_{\nu+p}$ и $\mu_{\nu+p+1}$, то, по теореме из п. 2„б“, $\theta(b, \lambda) y'(b, \lambda) / y(b, \lambda)$ является *убывающей* функцией от λ. Но $y(b, \mu_{\nu+p}) = y(b, \mu_{\nu+p+1}) = 0$, $y'(b, \mu_{\nu+1}) \neq 0$, $y'(b, \mu_{\nu+p+1}) \neq 0$, а потому, когда λ изменяется от $\mu_{\nu+p}$ до $\mu_{\nu+p+1}$, функция $\theta(b, \lambda) y'(b, \lambda) / y(b, \lambda)$ убывает от ∞ до $-\infty$. По предположению, функция $-\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ не убывает, а потому найдется одно и только одно значение $\lambda_{\nu+p}$ параметра λ, лежащее в $(\mu_{\nu+p}, \mu_{\nu+p+1})$ (фиг. 9), такое, что

$$\frac{\theta(b, \lambda_{\nu+p}) y'(b, \lambda_{\nu+p})}{y(b, \lambda_{\nu+p})} = -\frac{\theta(b, \lambda_{\nu+p})\beta_1(\lambda_{\nu+p})}{\beta(\lambda_{\nu+p})}$$

и следовательно

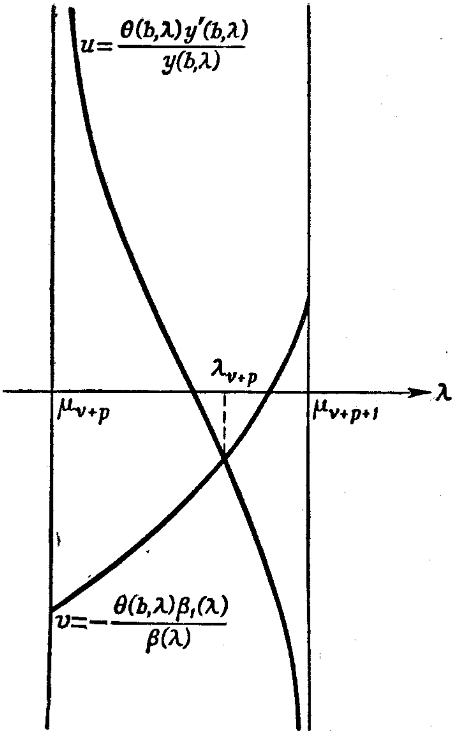
$$\beta_1(\lambda_{\nu+p}) y(b, \lambda_{\nu+p}) + \beta(\lambda_{\nu+p}) y'(b, \lambda_{\nu+p}) = 0.$$

При этом значении λ решение уравнения (13) удовлетворяет краевым условиям (22), (23), а потому является решением *системы Штурма* (13), (22), (23).

Таким образом доказана теорема Бохера:

При сделанных нами предположениях существует бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_{\nu+1}, \lambda_{\nu+2}, \ldots, \lambda_{\nu+p}, \ldots; \quad \lambda_{\nu+p} < \lambda_{\nu+p+1}, \qquad (25)$$



Фиг. 9.

причем для любого целого числа $\nu+p$ $(p>0)$ *существует одно и только одно значение* λ, $\lambda=\lambda_{\nu+p}$, *которому соответствует решение* $y(x, \lambda_{\nu+p})$ *системы Штурма* (13), (22), (23), *имеющее ровно* $\nu+p$ *нулей в промежутке* (a, b).

5. Системы Штурма. Существование собственных функций с заданным числом нулей. Теоремы Бохера. а) Из доказанной теоремы следует существование собственных значений $\lambda_{\nu+p}$ при достаточно большом ν; покажем, что *при добавочных предположениях*

$$\lim_{\lambda\to\Delta_1} \min_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda) = +\infty \qquad (26)$$

$$\theta(x, \lambda) \geqslant \tau > 0 \text{ при } a\leqslant x\leqslant b, \ \Delta_1<\lambda<\Delta_2 \qquad (27)$$

система Штурма (13), (22), (23) *имеет бесконечное множество собственных значений*

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots; \quad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+p}$$

таких, что соответствующие собственные функции $y(x, \lambda_\nu)$ *имеют ровно* ν *нулей, лежащих в* (a, b) (см. Бохер [2], стр. 65—66).

Из (26) следует, что когда λ близко к Λ_1, $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda) > 0$, а потому $Q(x, \lambda) > 0$ в $[a, b]$, и по результатам из § 2, п. 4„б" для таких значений λ любое решение уравнения (13) имеет в (a, b) не более одного нуля; поэтому в последовательности (25) либо $\nu = 0$, либо $\nu = 1$.

Покажем теперь, что $\nu = 0$. В самом деле, рассмотрим уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\{\min_{a\leqslant x\leqslant b} \theta(x, \lambda)\}\frac{du}{dx}\right] - [\min_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda)]\, u = 0. \tag{28}$$

Если положить

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \lambda) / \min_{a\leqslant x\leqslant b} \theta(x, \lambda) = m^2, \quad m > 0,$$

то это уравнение можно записать в виде

$$\frac{d^2u}{dx^2} - m^2u = 0.$$

Пусть μ_ν имеет то же значение, что и в п. 4, и пусть $\bar\lambda$ — заключенное между μ_ν и Λ_2 значение λ. Тогда легко проверить, что функция [1])

$$u(x) = \frac{[\min\theta(x, \lambda)]\,\alpha(\bar\lambda) m + [\min\theta(x, \bar\lambda)]\,\alpha_1(\bar\lambda)}{2m} e^{m(x-a)} +$$
$$+ \frac{[\min\theta(x, \lambda)]\,\alpha(\bar\lambda)\, m - [\min\theta(x, \bar\lambda)]\,\alpha_1(\bar\lambda)}{2m} e^{-m(x-a)} \tag{29}$$

удовлетворяет уравнению (28), а кроме того краевым условиям

$$[\min\theta(x, \bar\lambda)]\,\alpha_1(\bar\lambda)\, u(a) - [\min\theta(x, \lambda)]\,\alpha(\bar\lambda)\, u'(a) = 0. \tag{29'}$$

При $\alpha(\bar\lambda) = 0$ функция $u(x)$ равна

$$\min\theta(x, \bar\lambda)\,\alpha_1(\bar\lambda)\,[e^{m(x-a)} - e^{-m(x-a)}]/2m$$

и не обращается в нуль при $a < x \leqslant b$. Если же $\alpha(\bar\lambda) \neq 0$ в $[a, b]$, то

$$u(x) = \frac{\alpha(\bar\lambda)\, e^{m(x-a)}\,[\min\theta(x, \lambda)]}{2}\left[1 + e^{-2m(x-a)} + \right.$$
$$\left. + \frac{[\min\theta(x, \bar\lambda)]\,\alpha_1(\bar\lambda)}{m\,[\min\theta(x, \lambda)]\,\alpha(\bar\lambda)}\{1 - e^{-2m(x-a)}\}\right].$$

---

[1]) По типографским соображениям мы опускаем здесь и в дальнейшем обозначение $a \leqslant x \leqslant b$ под знаком „min".

Так как при $\lambda \to \Delta_1$ m стремится к $+\infty$, то и в этом случае $u(x) \neq 0$ при $a < x \leqslant b$; таким образом, в обоих случаях существуют значения λ, меньшие чем μ_ν, для которых $u(x)$ не имеет нулей при $a < x \leqslant b$.

Так как

$$\theta(x, \lambda) \geqslant \min \theta(x, \lambda), \quad Q(x, \lambda) \geqslant \min Q(x, \lambda)$$

и при $\alpha(\lambda) \neq 0$ имеем

$$\frac{\theta(a, \lambda)\, y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} = \frac{\theta(a, \lambda)\, \alpha_1(\lambda)}{\alpha(\lambda)} \geqslant \frac{\theta(a, \overline{\lambda})\, \alpha_1(\overline{\lambda})}{\alpha(\overline{\lambda})} \geqslant$$

$$\geqslant [\min \theta(x, \lambda)] \frac{[\min \theta(x, \overline{\lambda})]\, \alpha_1(\overline{\lambda})}{[\min \theta(x, \lambda)]\, \alpha(\overline{\lambda})}, \quad \frac{\theta(a, \lambda)\, y'(a, \lambda)}{y(a, \lambda)} \geqslant \min \theta(x, \lambda) \frac{u'(a)}{u(a)},$$

то, сравнивая по теореме из п. 2„а“ удовлетворяющее краевому условию (22) решение уравнения (13) с $y(x, \lambda)$, заключаем, что при рассматриваемых значениях λ функция $y(x, \lambda)$ не имеет нулей в $(a, b]$; поэтому $\nu = 0$, и, следовательно, система Штурма (13), (22), (23) имеет собственное значение λ_1, которому соответствует собственная функция, имеющая один и только один нуль внутри (a, b).

Нам осталось доказать существование λ_0.

Так как $y(x, \lambda)$ и $u(x)$ не имеют нулей в $(a, b]$, когда λ достаточно близко к Δ_1, то по теореме из п. 2„б“ имеем

$$\frac{\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)}{y(b, \lambda)} > \frac{[\min \theta(x, \lambda)]\, u'(b)}{u(b)}. \tag{30}$$

Но из (29) следует, что

$$\lim_{\lambda \to \Delta_1} \frac{\min \theta(x, \lambda)\, u'(b)}{u(b)} = +\infty,$$

и потому $\lim\limits_{\lambda \to \Delta_1} \theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda) = +\infty$.

Пусть μ_0 — верхняя грань значений λ, которым соответствуют решения $y(x, \lambda)$ уравнения (13), удовлетворяющие условию (22) и не имеющие нулей в (a, b); повторяя проведенные в предыдущем номере рассуждения, получаем, что когда λ изменяется от Δ_1 до μ_0 функция $\theta(b, \lambda)\, y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ убывает от $+\infty$ до $-\infty$, откуда легко следует существование собственного значения λ_0.

б) Весьма интересна другая теорема существования собственных функций с заданным числом нулей в (a, b), получающаяся при иных дополнительных предположениях, чем предположения (26), (27).

Пусть коэффициенты $\theta(x, \lambda)$, $Q(x, \lambda)$ *уравнения*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \lambda) \frac{dy}{dx}\right] - Q(x, \lambda)\, y = 0 \tag{13}$$

удовлетворяют условиям, указанным в п. 3„а“, *и, кроме того, условиям из* п. 4, *т. е.*

$$\lim_{\lambda\to\Lambda_2} -\max Q(x, \lambda)/\max \theta(x, \lambda) = +\infty,$$

и $\theta(a, \lambda)\alpha_1(\lambda)/\alpha(\lambda)$, $\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ *являются невозрастающими функциями, когда* λ *изменяется в полуоткрытом промежутке* $[\Delta_1, \Delta_2)$. *Кроме того, предположим, что выполняются неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &\min_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \Delta_1)\geqslant 0, \quad \alpha(\Delta_1)\alpha_1(\Delta_1)\geqslant 0, \quad \beta(\Delta_1)\beta_1(\Delta_1)\geqslant 0,\\ &|\alpha(\Delta_1)|+|\alpha_1(\Delta_1)|\neq 0, \quad |\beta(\Delta_1)|+|\beta_1(\Delta_1)|\neq 0. \end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

Докажем, что тогда существует бесконечное множество собственных значений

$$\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_\nu, \ldots; \quad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1}$$

системы Штурма (13), (22), (23) *таких, что соответствующая собственному значению* λ_ν *собственная функция* $y(x, \lambda_\nu)$ *имеет ровно* ν *нулей в* (a, b) (см. Бохер [2], стр. 69).

Рассмотрим решение $u(x)$ системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\Big[\min_{a\leqslant x\leqslant b}\theta(x, \Delta_1)\Big]\frac{du}{dx}\Big]-\Big[\min_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \Delta_1)\Big]u=0,\\ &\alpha_1(\Delta_1)u(a)-\alpha(\Delta_1)u'(a)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

Предположим сначала, что $\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \Delta_1)>0$; полагая

$$\frac{\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b} Q(x, \Delta_1)}{\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\theta(x, \Delta_1)}=m^2, \quad m>0,$$

получаем

$$u(x)=\alpha(\Delta_1)\operatorname{ch} m(x-a)+\frac{\alpha_1(\Delta_1)}{m}\operatorname{sh} m(x-a),$$

и так как без потери общности можно считать, что $\alpha(\Delta_1)\geqslant 0$, $\alpha_1(\Delta_1)\geqslant 0$, то $u(x)\geqslant 0$ в $[a, b]$; но $\alpha(\Delta_1)$ и $\alpha_1(\Delta_1)$ не равны одновременно нулю, а потому $u(x)>0$ при $a<x\leqslant b$.

Обозначим через $y(x, \Delta_1)$ решение системы

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\theta(x, \Delta_1)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x, \Delta_1)y=0,\\ &\alpha_1(\Delta_1)y(a)-\alpha(\Delta_1)y'(a)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (33)$$

Так как $u(x)$ не имеет в $[a, b]$ нулей, бо̀льших чем a, то тем более по теореме из п. 2„а“ $y(x, \Delta_1)$ не имеет нулей, бо̀льших a и не превосходящих b; с другой стороны, $[\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\theta(x, \Delta_1)]\,u'(b)/u(b)>0$, и по теореме из п. 2„б“ имеем, что

$$\theta(b, \Delta_1)y'(b, \Delta_1)/y(b, \Delta_1)>0.$$

Рассуждая так же, как в п. 4, убеждаемся в существовании такой последовательности чисел $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_\nu, \ldots, \Delta_1 < \mu_0$, что решение $y(x, \mu_\nu)$ уравнения (13), удовлетворяющее условию (22), обращается в нуль в точке b и имеет ровно ν нулей в (a, b). Поэтому, если $\beta(\lambda) \equiv 0$ в $[\Delta_1, \Delta_2)$, то теорема доказана; если же $\beta(\lambda) \neq 0$, то при возрастании λ от Δ_1 до μ_0, функция $-\theta(b, \lambda)\beta_1(\lambda)/\beta(\lambda)$ возрастает от *отрицательного значения до нуля*, в то время как функция $\theta(b, \lambda)y'(b, \lambda)/y(b, \lambda)$ убывает от *положительного значения до* $-\infty$, а потому существует такое значение λ_0 в (Δ_1, μ_0), что

$$\frac{\theta(b, \lambda_0)\,y'(b, \lambda_0)}{y(b, \lambda_0)} = -\frac{\theta(b, \lambda_0)\,\beta_1(\lambda_0)}{\beta(\lambda_0)},$$

и соответствующее решение $y(x, \lambda_0)$ удовлетворяет системе Штурма (13), (22), (23) и не имеет нулей в (a, b).

Предположим, наконец, что $\min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} Q(x, \Delta_1) = 0$; тогда система (32) имеет решение

$$u(x) = \alpha_1(\Delta_1)(x-a) + \alpha(\Delta_1),$$

а потому, предполагая, как и ранее, что $\alpha(\Delta_1) \geqslant 0$, $\alpha_1(\Delta_1) \geqslant 0$, получаем, что $u(x) > 0$ при $a < x \leqslant b$ и

$$[\min \theta(x, \Delta_1)]\,u'(b)/u(b) = [\min \theta(x, \Delta_1)]\,\alpha_1(\Delta_1)/u(b) \geqslant 0.$$

Рассуждая относительно систем (33) и (32) так же, как и в п. 2„б", получаем, что

$$\theta(b, \Delta_1)\,y'(b, \Delta_1)/y(b, \Delta_1) \geqslant [\min \theta(x, \Delta_1)]\,u'(b)/u(b),$$

а потому $\theta(b, \Delta_1)\,y'(b, \Delta_1)/y(b, \Delta_1) = 0$ только тогда, когда $Q(x, \Delta_1) \equiv 0$, $\alpha_1(\Delta_1) = 0$, $\beta_1(\Delta_1) = 0$. Отсюда следует существование собственного значения λ_0, которое больше, чем Δ_1 и может совпасть с Δ_1 лишь в случае, когда $Q(x, \Delta_1) \equiv 0$, $\alpha_1(\Delta_1) = 0$, $\beta_1(\Delta_1) = 0$.

6. Системы Штурма — Лиувилля. Существование собственных значений. а) Мы видели в п. 1 этого параграфа, что некоторые дифференциальные системы, весьма важные для математической физики, имеют вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right] + [\lambda A(x) - B(x)]\,y = 0, \\ &\alpha_1 y(a) - \alpha y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta y'(b) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

где *функции* $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$, $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$ и α, α_1, β, β_1 *являются постоянными*, такими, что $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$. Такие системы называются в анализе системами Штурма — Лиувилля.

Согласно обозначениям, которые мы ранее употребляли, $Q(x, \lambda) = B(x) - \lambda A(x)$, $\Delta_1 = -\infty$, $\Delta_2 = +\infty$. Нетрудно видеть, что соотношения (21), (26) и (27) выполнены, а потому в силу теоремы из п. 5„а" получаем:

Для данной системы Штурма — Лиувилля (34) *существует бесконечное множество действительных собственных значений*

$$\lambda_0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_\nu,\ \ldots;\quad \lambda_\nu < \lambda_{\nu+1},$$

для которых единственной предельной точкой служит $+\infty$, *причем собственная функция* $y(x, \lambda_\nu)$, *соответствующая собственному значению* λ_ν, *обращается ровно* ν *раз в нуль в промежутке* (a, b)[1]).

б) Предположим, что *в системе* (34) *функции* $\theta'(x)$, $A(x)$, $B(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$; $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$, $B(x) \geqslant 0$, $\alpha\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta\beta_1 \geqslant 0$, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$.

Тогда мы можем положить $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = +\infty$ и, применяя теорему из п. 5„б", вывести, что *все собственные значения системы* (34) *положительны, за исключением случая, когда* $B(x) \equiv 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, *в котором* $\lambda_0 = 0$.

в) Предположим, что $\theta(x) > 0$, $B(x) \geqslant 0$, $\alpha\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta\beta_1 \geqslant 0$, $|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0$; $|\beta| + |\beta_1| \neq 0$ и что функция $A(x)$ меняет знак в $[a, b]$. Тогда существуют две последовательности действительных собственных значений

$$\lambda_0^+,\ \lambda_1^+,\ \ldots,\ \lambda_\nu^+,\ \ldots;\quad \lambda_\nu^+ < \lambda_{\nu+1}^+,$$

$$\lambda_0^-,\ \lambda_1^-,\ \ldots,\ \lambda_\nu^-,\ \ldots;\quad \lambda_\nu^- > \lambda_{\nu+1}^-,$$

принимающих соответственно положительные и отрицательные значения, имеющих единственными предельными точками $+\infty$ и $-\infty$, и таких, что соответствующие собственные функции

$$y_0^+,\ y_1^+,\ \ldots,\ y_\nu^+,\ \ldots$$

$$y_0^-,\ y_1^-,\ \ldots,\ y_\nu^-,\ \ldots$$

имеют в (a, b) столько нулей, каков их индекс.

Относительно доказательства этой теоремы мы отсылаем читателя к цитированной выше работе Пиконе [2] и книгам Айнса [1] и Бохера [2].

7. Ортогональность собственных функций системы Штурма — Лиувилля. а) Докажем ортогональность собственных функций системы Штурма — Лиувилля (34) (мы вернемся к этому вопросу в более общей постановке в гл. V, § 2, п. 6, и § 3, п. 6).

Пусть λ_r и λ_s — два различных собственных значения системы (34), и $y_r(x)$, $y_s(x)$ — соответствующие собственные функции. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy_r}{dx}\right] + [\lambda_r A - B]\,y_r = 0,\qquad \frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dy_s}{dx}\right] + [\lambda_s A - B]\,y_s = 0.$$

[1]) Заметим, что если $A(x) < 0$ в (a, b), то достаточно заменить λ на $-\lambda$, чтобы получить изучаемый случай.

Умножая первое равенство на y_s, а второе — на y_r и вычитая, получаем

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\left(y_s\frac{dy_r}{dx}-y_r\frac{dy_s}{dx}\right)\right]+(\lambda_r-\lambda_s)Ay_ry_s=0.$$

Отсюда, интегрируя от a до b, выводим, что

$$\left[\theta\left(y_s\frac{dy_r}{dx}-y_r\frac{dy_s}{dx}\right)\right]_{x=a}^{x=b}+(\lambda_r-\lambda_s)\int_a^b Ay_ry_s\,dx=0. \tag{35}$$

В силу того, что $\alpha_1 y_r(a)-\alpha y_r'(a)=0$, $\alpha_1 y_s(a)-\alpha y_s'(a)=0$, в то время как $|\alpha|+|\alpha_1|\neq 0$, получаем, что $y_s(a)y_r'(a)-y_r(a)y_s'(a)=0$, аналогично, $y_s(b)y_r'(b)-y_r(b)y_s'(b)=0$, а потому из (35) следует, что

$$(\lambda_r-\lambda_s)\int_a^b Ay_ry_s\,dx=0, \tag{36}$$

и так как $\lambda_r\neq\lambda_s$, то

$$\int_a^b Ay_ry_s\,dx=0.$$

Таким образом, собственные функции $\{y_r(x)\}$ системы Штурма — Лиувилля (34) образуют *ортогональную систему относительно веса* $A(x)$ [1]).

б) *Предположим теперь, что в* (a, b) *функция* $A(x)$ неотрицательна и не обращается тождественно в нуль. Если $y_r(x)$ — собственная функция, то

$$\int_a^b Ay_r^2(x)\,dx>0.$$

Умножая собственные функции на постоянные $\left(\int_a^b Ay_r^2\,dx\right)^{-\frac{1}{2}}$, *можно добиться того, чтобы* $\int_a^b [A^{1/2}y_r(x)]^2\,dx=1$, *а тогда система* $\{A^{1/2}(x)y_r(x)\}$ *будет ортогональной и нормированной в* $[a, b]$.

8. Достаточные условия действительности всех собственных значений системы Штурма — Лиувилля. а) Интересно отметить два случая, в которых все собственные значения системы (34) действительны. *Предположим, что* $A(x)\geqslant 0$, *причем* $A(x)$ не обращается тождественно в нуль ни в какой части $[a, b]$; докажем, что тогда *все собственные значения системы* (34) *действительны.*

---

[1]) См., например, Джексон [1], стр. 170. — *Прим. перев.*

В самом деле, если бы $\lambda = \sigma + i\tau$ было собственным значением, которому соответствует собственная функция $s + it$, то и $\sigma - i\tau$ было бы собственным значением с соответствующей собственной функцией $s - it$. В силу (36) мы имели бы тогда

$$2i\tau \int\limits_a^b A(s^2 + t^2)\, dx = 0.$$

Так как функции s и t не могут одновременно тождественно равняться нулю во всем отрезке $[a, b]$, то $\tau = 0$.

б) Предположим теперь, что $A(x)$ *меняет знак в* $[a, b]$ *и что*

$$\left.\begin{aligned} &\theta(x) > 0, \quad B \geqslant 0, \quad \alpha\alpha_1 \geqslant 0, \quad \beta\beta_1 \geqslant 0, \\ &|\alpha| + |\alpha_1| \neq 0, \qquad |\beta| + |\beta_1| \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

и докажем, что и в этом случае все собственные значения системы (34) *действительны.*

В самом деле, если $\lambda = \sigma + i\tau$ является собственным значением, $\tau \neq 0$, а $s + it$ — соответствующей собственной функцией, то из дифференциального уравнения системы (34) вытекает тождество

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\left(\frac{ds}{dx} + i\frac{dt}{dx}\right)\right] + [(\sigma + i\tau)A - B](s + it) \equiv 0, \tag{34'}$$

а потому

$$S \equiv \frac{d}{dx}\left[\theta\frac{ds}{dx}\right] + (\sigma A - B)s - \tau A t \equiv 0,$$

$$T \equiv \frac{d}{dx}\left[\theta\frac{dt}{dx}\right] + \tau A s + (\sigma A - B)t \equiv 0.$$

Отсюда следует, что $\int\limits_a^b (sS + tT)\, dx = 0$, и, интегрируя по частям это равенство, получаем, что

$$[\theta(ss' + tt')]_{x=a}^{x=b} - \int\limits_a^b \theta(s'^2 + t'^2)\, dx + \sigma\int\limits_a^b A(s^2 + t^2)\, dx - \\ - \int\limits_a^b B(s^2 + t^2)\, dx = 0. \tag{38}$$

В силу того, что $\alpha\alpha_1 \geqslant 0$, $\beta\beta_1 \geqslant 0$, из краевых условий системы (34) вытекают неравенства

$$s(a)s'(a) \geqslant 0, \quad t(a)t'(a) \geqslant 0, \quad s(b)s'(b) \leqslant 0, \quad t(b)t'(b) \leqslant 0,$$

а потому

$$[\theta(ss' + tt')]_{x=a}^{x=b} \leqslant 0.$$