а потому для всех $y(x)$ из (A)

$$\left| I[y'] - \int_0^1 \int_0^1 K_{\bar{n}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Пусть теперь $P_\nu(x, z)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ — такая последовательность многочленов, что $|P_\nu(x, z)| < \bar{n} + 1$ и $P_\nu(x, z)$ почти всюду сходятся при $\nu \to \infty$ к $K_{\bar{n}}(x, z)$ (см. Тонелли [3], стр. 19—20).

Тогда при любом ν и любой функции $y(x)$ из (A) имеем

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 K_{\bar{n}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz - \int_0^1 \int_0^1 P_\nu(x, z) y'(x), \ y'(z)\, dx\, dz \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\{ \int_0^1 \int_0^1 (K_{\bar{n}} - P_\nu)^2\, dx\, dz \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\bar{\nu}$ достаточно велико, то

$$\int_0^1 \int_0^1 (K_{\bar{n}} - P_{\bar{\nu}})^2\, dx\, dz \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{6}\right)^2,$$

а потому для *всех* $y(x)$ из (A)

$$\left| \int_0^1 \int_0^1 K_{\bar{n}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{6},$$

и, следовательно,

$$\left| I[y'] - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть теперь $y(x)$ и $y_0(x)$ — какие-либо две функции из (A), для которых в $[0, 1]$ всюду имеет место неравенство $|y(x) - y_0(x)| < \delta$. Тогда

$$\Delta = \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) y'(x) y'(z)\, dx\, dz - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) y_0'(x) y_0'(z)\, dx\, dz =$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) \{y'(x) y'(z) - y_0'(x) y'(z) + y_0'(x) y'(z) -$$
$$- y_0'(x) y_0'(z)\}\, dx\, dz = \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z) y'(z) \{y'(x) - y_0'(x)\}\, dx\, dz +$$

$$+\int_0^1\int_0^1 P_{\bar\nu}(x, z)\, y_0'(x)\,\{y'(z)-y_0'(z)\}\,dx\,dz=$$

$$=\int_0^1 y'(z)\,dz\int_0^1 P_{\bar\nu}(x, z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx+$$

$$+\int_0^1 y_0'(x)\,dx\int_0^1 P_{\bar\nu}(x, z)\,\{y'(z)-y_0'(z)\}\,dz.$$

Интегрируя по частям, получаем [1]), что

$$\int_0^1 P_{\bar\nu}(x, z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx=$$

$$=\{y(1)-y_0(1)\}\,P_{\bar\nu}(1, z)-\int_0^1\{y(x)-y_0(x)\}\,\frac{\partial}{\partial x}P_{\bar\nu}(x, z)\,dx,$$

$$\left|\int_0^1 P_{\bar\nu}(x, z)\,\{y'(x)-y_0'(x)\}\,dx\right|<\delta L,$$

где через $L/2$ обозначено положительное число, бо́льшее, чем все значения функций $|P_{\bar\nu}(x, y)|$, $\left|\frac{\partial}{\partial x}P_{\bar\nu}(x, y)\right|$, $\left|\frac{\partial}{\partial y}P_{\bar\nu}(x, y)\right|$ в Q. Отсюда следует, что

$$|\Delta|<\delta L\left\{\int_0^1|y'(z)|\,dz+\int_0^1|y_0'(x)|\,dx\right\}.$$

Но

$$\left\{\int_0^1|y'(z)|\,dz\right\}^2\leqslant\left\{\int_0^1 y'^2(z)\,dz\right\}\left\{\int_0^1 dz\right\}\leqslant 1,\quad \int_0^1|y_0'(x)|\,dx\leqslant 1$$

а, следовательно,

$$|\Delta|<2\delta L.$$

---

[1]) Напомним, что если $y(x)$ абсолютно непрерывна, то $\int_0^1 y'(x)\,dx=$ $=y(1)-y(0)$. [См. Натансон И. П. [2], стр. 223. — *Прим. ред.*]

Поэтому, если $\delta < \varepsilon/6L$, то

$$|I[y'] - I[y_0']| \leqslant \left| I(y') - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z)\, y'(x)\, y'(z)\, dx\, dz \right| +$$

$$+ \left| I(y_0') - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z)\, y_0'(x)\, y_0'(z)\, dx\, dz \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z)\, y'(x)\, y'(z)\, dx\, dz - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 \int_0^1 P_{\bar{\nu}}(x, z)\, y_0'(x)\, y_0'(z)\, dx\, dz \right| < \varepsilon.$$

в) Установив это, обозначим через M верхнюю грань значений $I[y']$ в классе (A). Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... — максимизирующая последовательность для $I[y']$ в (A), т. е. такая последовательность функций из (A), что верхняя грань последовательности $\{I[y_n']\}$ равна M.

Если E — совокупность непересекающихся отрезков $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_s, b_s]$ из $[0, 1]$, то

$$\Big[\sum_{r=1}^{s} |y(a_r) - y(b_r)|\Big]^2 \leqslant \Big[\int_E |y'(x)|\, dx\Big]^2 \leqslant \int_E dx \int_E y'^2\, dx \leqslant \operatorname{mes} E$$

($\operatorname{mes} E$ — мера множества E). Так как $y_n(0) = 0$, то из доказанного следует, что функции $y_n(x)$ равностепенно абсолютно непрерывны и равномерно ограничены в $[0; 1]$. Поэтому из последовательности функций $\{y_n(x)\}$ можно выбрать подпоследовательность (которую для простоты мы будем обозначать так же, как исходную последовательность), равномерно сходящуюся к такой абсолютно непрерывной функции $y_\infty(x)$, что $y_\infty(0) = 0$ [1]).

Из полунепрерывности снизу [2]) интеграла $\int_0^1 y'^2\, dx$ и из второго соотношения формулы (1) следует, что

$$\int_0^1 y_\infty'^2(x) \leqslant 1,$$

---

[1]) См. примечание [1]) на стр. 38.

[2]) Функция $f(x)$ называется полунепрерывной сверху (снизу) в точке a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что из $|x - a| < \delta$ следует неравенство $f(x) - f(a) < \varepsilon$ $(f(x) - f(a) > -\varepsilon)$. — *Прим. ред.*

а потому $y_\infty(x)$ принадлежит классу (A), и, по непрерывности $I[y']$ в (A), получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} I[y'_n]=M$,

$$I[y'_\infty]=M.$$

Поэтому $y'_\infty(x)$ дает абсолютный максимум для $I[y']$ в (A).

Предположим, что $M>0$ [1]), и докажем, что тогда $\int\limits_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx=1$.

В самом деле, равенство $\int\limits_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx=0$ не может иметь места, так как тогда почти всюду в $[0,\ 1]$ выполнялось бы равенство $y'_\infty(x)=0$, из которого следует, что $I[y'_\infty]=M=0$; если же выполнялось неравенство $\int\limits_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx<1$, то, полагая

$$c^2=1\Big/\int\limits_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx, \qquad c^2>1,$$

мы получили бы, что

$$I[cy'_\infty]=c^2I[y'_\infty]=c^2M>M,$$

а это невозможно, так как функция $cy'_\infty(x)$ принадлежит классу (A). Следовательно,

$$\int\limits_0^1 y'^2_\infty(x)\,dx=1,$$

и функция $y'_\infty(x)$ дает максимум для $I[\varphi]$ в классе $(\hat{L}_2)$, так как максимум $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$ не может превышать максимума $I[y']$ в (A). В самом деле, каждому элементу $\varphi(x)$ из $(\hat{L}_2)$ соответствует в (A) элемент

$$y(x)=\int\limits_0^x \varphi(x)\,dx.$$

Итак, *мы доказали существование абсолютного максимума* $I[\varphi]$ *в* $(\hat{L}_2)$, *при условии, что* $M>0$.

Поэтому, если верхняя грань значений $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$ положительна, то существование указанного максимума доказано. В частности, это

[1]) Можно доказать, что верхняя грань $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$ не может быть отрицательной (см. Тонелли [3], стр. 7).

существование имеет место, если ядро $K(x, z)$ *положительно определено*, а также если оно лишь *положительно полуопределено*.

Аналогичные заключения можно сделать об абсолютном минимуме, если нижняя грань значений $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$ отрицательна; поэтому если $I[\varphi]$ принимает в $(\hat{L}_2)$ как положительные, так и отрицательные значения, то $I[\varphi]$ имеет в $(\hat{L}_2)$ как максимум, так и минимум.

г) Предположим теперь, что ядро $K(x, z)$ *симметрично*, причем оно интегрируемо вместе со своим квадратом $K^2(x, z)$ и не эквивалентно функции, равной почти всюду нулю.

Допустим, что максимальное (или минимальное) значение $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$ принимается, если $\varphi = \varphi_0$, и что $M \neq 0$. Покажем, что в этом случае $\varphi_0(x)$ является собственной функцией для $K(x, z)$.

Пусть $g(x)$ — любая функция, интегрируемая вместе со своим квадратом в $[0, 1]$. Рассмотрим функцию $\varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g$, где η и ε — независимые от x параметры. Эта функция интегрируема вместе со своим квадратом. Определим η как функцию от ε, $\eta = \eta(\varepsilon)$, таким образом, что

$$\int_0^1 \{\varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g\}^2\, dx = 1,$$

причем $\eta(0) = 0$. Это возможно, так как

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^1 (\varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g)^2\, dx =$$

$$= 2\int_0^1 \varphi_0(\varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g)\, dx = 2\left\{1 + \eta + \varepsilon\int_0^1 \varphi_0 g\, dx\right\},$$

и, следовательно, производная равна $2\ (\neq 0)$ при $\varepsilon = 0$, $\eta = 0$. Таким образом, функцию $\eta(\varepsilon)$ можно единственным образом определить в окрестности точки $\varepsilon = 0$, причем она там непрерывна и дифференцируема. Кроме того,

$$\eta'(0) = -\left[2\int_0^1 g(\varphi_0 + \eta\varphi_0 + \varepsilon g)\, dx/2\left\{1 + \eta + \varepsilon\int_0^1 \varphi_0 g\, dx\right\}\right]_{\varepsilon=0,\ \eta=0} =$$

$$= -\int_0^1 g\varphi_0\, dx.$$

Так как функция $\varphi_0 + \eta(\varepsilon)\varphi_0 + \varepsilon g$ принадлежит к классу $(\hat{L}_2)$, когда ε находится в некоторой окрестности нуля, то по максимальному свойству функции φ_0 имеем

$$0=\left[\frac{\partial}{\partial\varepsilon}I[\varphi_0+\eta(\varepsilon)\varphi_0+\varepsilon g]\right]_{\varepsilon=0}=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)[\varphi_0(x)g(z)+\varphi_0(z)g(x)+2\varphi_0(x)\varphi_0(z)\eta'(0)]\,dx\,dz.$$

Но так как $K(x,\ z)=K(z,\ x)$, то

$$0=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)[\varphi_0(x)g(z)+\varphi_0(x)\varphi_0(z)\eta'(0)]\,dx\,dz=$$

$$=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(x)g(z)\,dx\,dz-$$

$$-\left\{\int_0^1 g(x)\varphi_0(x)\,dx\right\}\left\{\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(x)\varphi_0(z)\,dx\,dz\right\},$$

или, полагая

$$h=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(x)\varphi_0(z)\,dx\,dz\quad(=M),$$

$$0=\int_0^1\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(z)g(x)\,dx\,dz-h\int_0^1\varphi_0(x)g(x)dx\},$$

$$0=\int_0^1\left\{\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(z)\,dz-h\varphi_0(x)\right\}g(x)\,dx. \tag{2_1}$$

В силу произвольности $g(x)$, из последнего равенства следует, что почти всюду в $[0,\ 1]$ выполняется равенство

$$\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(z)\,dz-h\varphi_0(x)=0. \tag{2_2}$$

В самом деле, если бы на множестве E из $[0,\ 1]$, имеющем положительную меру, левая часть в (2_2) была положительной, то, полагая $g(x)$ равным этой левой части в E и равным нулю вне E, мы получили бы, что интеграл в (2_1) положителен, а не равен нулю; аналогичное рассуждение показывает, что левая часть в (2_2) не может быть отрицательной на множестве положительной меры из $[0,\ 1]$.

Если положить

$$\bar{\varphi}_0(x)=\frac{1}{h}\int_0^1 K(x,\ z)\varphi_0(z)\,dz,$$

то из (2_2) следует, что почти всюду $\overline{\varphi}_0(x) = \varphi_0(x)$, а потому для всех x из $[0, 1]$ имеем

$$\int_0^1 K(x, z)\overline{\varphi}_0(z)\,dz - h\overline{\varphi}_0(x) = 0.$$

В силу того, что $h = M \neq 0$, функция $\varphi_0(x)$ не может почти всюду равняться нулю, а потому и $\overline{\varphi}_0(x)$ не может почти всюду равняться нулю. Отсюда следует, что функция $\overline{\varphi}_0(x)$, доставляющая максимум интегралу $I[\varphi]$ в $(\hat{L}_2)$, является *собственной* функцией. Соответствующее собственное значение равно

$$\lambda_0 = \frac{1}{h} = \frac{1}{M}.$$

Но, если λ является собственным значением, а $\psi(x)$ — соответствующей собственной функцией, причем

$$\int_0^1 \psi^2(x)\,dx = 1,$$

то

$$\lambda \int_0^1 K(x, z)\psi(z)\,dz = \psi(x),$$

$$\lambda \int_0^1 \int_0^1 K(x, z)\psi(z)\psi(x)\,dx\,dz = \int_0^1 \psi^2(x)\,dx = 1,$$

и, предполагая $M > 0$, получаем, что

$$\lambda = 1 \Big/ \int_0^1 \int_0^1 K(x, z)\psi(z)\psi(x)\,dx\,dz \geqslant \frac{1}{M} = \frac{1}{h} = \lambda_0.$$

Поэтому, если $M > 0$, то λ_0 является наименьшим из собственных значений.

3. Экстремальное свойство собственных значений, выводимое из теории дифференциальных систем. Доказательство Пиконе. a) Как мы видели в предыдущем параграфе (п. 4 и 5), краевые задачи для дифференциальных систем можно изучать при помощи теории интегральных уравнений и, как было показано в п. 1 и 2 этого параграфа, эти задачи можно непосредственно связать с вариационным исчислением.

Первые приложения вариационного исчисления к граничным задачам для дифференциальных систем второго порядка были даны Мезоном [1]. Указания на позднейшие работы читатель может найти в недавней работе Рида [1], к которой приложена библиография по исследованиям о дифференциальных системах и вариационном исчислении; мы ограничимся указанием на то, что при помощи методов вариационного исчисления Блисс и Шенберг [1] распространили на линейные самосопряженные дифференциальные системы второго порядка теоремы отделения, сравнения и осцилляции.

Обратно, установлено, что из теорем существования для дифференциальных систем могут быть выведены теоремы вариационного исчисления; здесь мы, основываясь на результатах гл. IV, § 5 и следуя Пиконе [1]), непосредственно докажем экстремальное утверждение гильбертовского типа (см. п. 1) для собственных функций некоторой дифференциальной системы второго порядка.

б) *Пусть функции* $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $A(x)$ *непрерывны в* $[a, b]$, $\theta(x) > 0$, $A(x) > 0$, *и пусть* $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ — *последовательность собственных значений дифференциальной системы*

$$\frac{d}{dx}\left[\theta \frac{d\varphi_n}{dx}\right] + \lambda_n A \varphi_n = 0, \tag{3}$$

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0. \tag{4}$$

Так как элементы последовательности $\{\lambda_n\}$ положительны, то мы можем считать, что они расположены в порядке возрастания (см. гл. IV, § 6, п. 6) и что собственная функция $\varphi_n(x)$, соответствующая собственному значению λ_n, имеет в (a, b) n и только n нулей.

Рассмотрим теперь класс (C) функций $u(x)$ следующего вида: функции $u(x)$ *абсолютно непрерывны в* $[a, b]$, *обращаются в нуль в тех же точках, что и* $\varphi_n(x)$, *а производная этих функций* (существующая почти всюду) *имеет интегрируемый квадрат и существует в точках, где* $\varphi_n(x)$ *обращается в нуль. Положим для функций этого класса*

$$I_n[u] = \int_a^b \left[\theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda_n A u^2\right] dx. \tag{5}$$

Покажем, что $I_n[u] \geqslant 0$, *причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда* $u(x) = k\varphi_n(x)$, *где* k — *некоторое число.*

В самом деле, функции u/φ_n, u^2/φ_n конечны и непрерывны в $[a, b]$, причем

$$\frac{d}{dx}\frac{u^2}{\varphi_n} = 2\frac{u}{\varphi_n}\frac{du}{dx} - \frac{u^2}{\varphi_n^2}\frac{d\varphi_n}{dx},$$

а, в силу (3),

$$-\int_a^b \lambda_n A u^2\, dx = \int_a^b \frac{u^2}{\varphi_n}\frac{d}{dx}\left(\theta\frac{d\varphi_n}{dx}\right) dx.$$

[1]) Пиконе [2], [4]. Здесь мы использовали § 1, 2, 3 второго мемуара. Относительно минимального свойства собственных значений некоторых уравнений четвертого порядка см. Чиммино [1], стр. 52—58.

Интегрируя справа по частям, получаем, что

$$-\lambda_n \int_a^b Au^2\,dx = \left[\frac{u^2}{\varphi_n}\theta\frac{d\varphi_n}{dx}\right]_a^b - 2\int_a^b \theta\frac{u}{\varphi_n}\frac{du}{dx}\frac{d\varphi_n}{dx}\,dx + \int_a^b \theta\left[\frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}\right]^2 dx,$$

и так как первый член в правой части равен нулю, то

$$I_n[u] = \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n\int_a^b Au^2\,dx = \int_a^b \theta\left[\frac{du}{dx} - \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}\right]^2 dx, \tag{6}$$

а, следовательно,

$$I_n[u] = \int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n\int_a^b Au^2\,dx \geqslant 0. \tag{7}$$

Из (6) следует, что знак равенства в этой формуле может иметь место тогда и только тогда, когда почти всюду

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx} = 0. \tag{8}$$

Отсюда следует, что, каково бы ни было x,

$$u(x) - u(a) = \int_a^x \frac{du}{dx}\,dx = \int_a^x \frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}\,dx,$$

а потому, в силу непрерывности $\frac{u}{\varphi_n}\frac{d\varphi_n}{dx}$, формула (8) справедлива для всех точек из $[a, b]$. Но тогда в любом интервале, ограниченном двумя последовательными нулями функции φ_n, вронскиан функций u и φ_n равен нулю, а потому эти функции отличаются лишь постоянным множителем; так как в точках, где φ_n обращается в нуль, $\varphi_n' \neq 0$, то во всем отрезке $[a, b]$ должно иметь место равенство $u = k\varphi_n$, что и требовалось доказать.

в) Из доказанной в „б“ теоремы мы выведем вариационную характеристику собственных функций φ_n; для этого мы докажем предварительно следующую лемму.

Если $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,n}$ являются лежащими внутри (a, b) нулями функции $\varphi_n(x)$, то определитель

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_0(\alpha_{n,1}) & \varphi_0(\alpha_{n,2}) \ldots & \varphi_0(\alpha_{n,n}) \\ \varphi_1(\alpha_{n,1}) & \varphi_1(\alpha_{n,2}) \ldots & \varphi_1(\alpha_{n,n}) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n-1}(\alpha_{n,1}) & \varphi_{n-1}(\alpha_{n,2}) \ldots & \varphi_{n-1}(\alpha_{n,n}) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Пусть, в самом деле, $D=0$; тогда существует линейная комбинация

$$y=c_0\varphi_0+c_1\varphi_1+\ldots+c_{n-1}\varphi_{n-1},$$

хоть один коэффициент которой *отличен от нуля*, обращающаяся в нуль кроме точек a и b еще в n точках $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \ldots, \alpha_{n,n}$, а потому, в силу „б",

$$I[y]=\int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx-\lambda_n\int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2 dx\geqslant 0. \qquad (9)$$

Но при $h\neq k$ имеем (гл. IV, § 6, п. 7)

$$\int_a^b A\varphi_h\varphi_k\,dx=0,$$

$$\int_a^b \theta\frac{d\varphi_h}{dx}\frac{d\varphi_k}{dx}\,dx=\left[\varphi_k\theta\frac{d\varphi_h}{dx}\right]_a^b-\int_a^b\varphi_k\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{d\varphi_h}{dx}\right]dx=\lambda_h\int_a^b A\varphi_h\varphi_k\,dx=0,$$

$$\int_a^b \theta\left(\frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx=\lambda_h\int_a^b A\varphi_k^2(x)\,dx>0,$$

и потому из (9) получаем, что

$$I[y]=\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(\lambda_k-\lambda_n)\int_a^b A\varphi_k^2\,dx\geqslant 0.$$

Так как $\lambda_k-\lambda_n<0$, то $c_0=c_1=\ldots=c_{n-1}=0$, вопреки предположению.

Теперь мы можем доказать следующую теорему: *если функция $y(x)$ абсолютно непрерывна в $[a, b]$, обращается в нуль в точках a и b, имеет производную в точках, где $\varphi_n(x)$ обращается в нуль, причем производная этой функции* (существующая почти всюду) *имеет интегрируемый квадрат, то, при условии выполнения n равенств*

$$\int_a^b A\varphi_0 y\,dx=\int_a^b A\varphi_1 y\,dx=\ldots=\int_a^b A\varphi_{n-1}y\,dx=0, \qquad (10)$$

справедливо неравенство

$$I_n[y]=\int_a^b\left[\theta\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-\lambda_n Ay^2\right]dx\geqslant 0.$$

Знак равенства может иметь место в том и только в том случае, когда $y=k\varphi_n$, где k — некоторое число.

В самом деле, по доказанной только что лемме можно найти n чисел $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ так, чтобы функция

$$\eta = y + c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_{n-1}\varphi_{n-1}$$

обращалась на отрезке $[a, b]$ в нуль в тех точках, где обращается в нуль функция φ_n. Но тогда, в силу „б",

$$I_n[\eta] \geqslant 0. \tag{11}$$

Согласно (10)

$$I_n[\eta] = \int_a^b \left[\theta\left(\frac{dy}{dx} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 - \lambda_n A\left(y + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2\right] dx =$$

$$= I_n[y] + \int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2 dx +$$

$$+ 2\int_a^b \theta \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\frac{dy}{dx}\, dx. \tag{12}$$

Но

$$y\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{d\varphi_k}{dx}\right] + \lambda_k A\varphi_k y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

откуда, интегрируя от a до b и принимая во внимание (10), мы находим, что

$$0 = \int_a^b y\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{d\varphi_k}{dx}\right] dx = -\int_a^b \theta\frac{d\varphi_k}{dx}\frac{dy}{dx}\, dx,$$

а потому

$$\int_a^b \theta\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{d\varphi_k}{dx}\right)^2 dx - \lambda_n \int_a^b A\left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k\varphi_k\right)^2 dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(\lambda_k - \lambda_n)\int_a^b A\varphi_k^2\, dx \leqslant 0,$$

и, следовательно, из (12) получаем

$$I_n]\eta] \leqslant I_n[y].$$

Согласно „б", $I_n[\eta] \geqslant I_n[\varphi_n]$ и, таким образом, $I_n[y] \geqslant I_n[\varphi_n]$. Теорема доказана.

г) Для того, чтобы читателю стала ясна руководящая нить проведенных выше рассуждений, заметим, что уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[\theta\frac{du}{dx}\right] + \lambda Au = 0$$

является уравнением Эйлера экстремалей для интеграла $\int_a^b \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx$ при условиях $\int_a^b Au^2\,dx = 1$, $u(a) = u(b) = 0$. В самом деле, это уравнение для интеграла $\int_a^b F(x, u, u')\,dx$, где $F = \theta\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - \lambda A(x)u^2$, имеет вид

$$0 = \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx} F_{u'}' - F_u\right] = \frac{d}{dx}\left[\theta \frac{du}{dx}\right] + \lambda A u\ ^{1)}.$$

4. Одно интегральное неравенство. Применим доказанные выше утверждения для вывода одного важного интегрального неравенства, часто применяемого в анализе.

Если функция $y(x)$ абсолютно непрерывна в $[a, b]$, обращается в нуль в точках a и b и имеет производную с интегрируемым квадратом, то

$$\int_a^b y^2\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b y'^2\,dx, \tag{13}$$

причем равенство может иметь место лишь в случае, когда $y = c \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}$, где c — некоторое число (см., например, Харди, Литтлвуд, Полиа [1], стр. 219).

В самом деле, если положить в (3) $\theta \equiv 1$, $A \equiv 1$ и заметить, что наименьшее собственное значение дифференциальной системы, $y'' + \lambda u = 0$, $y(a) = y(b) = 0$, равно $\lambda_0 = \pi^2/(b-a)$, а соответствующей собственной функцией является $\varphi_0 = c \sin[\pi(x-a)/(b-a)]$, то результаты из п. 3„б" сразу приводят к неравенству (13).

§ 5. Существование бесконечного множества собственных значений для однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Рассмотрим, наконец, один класс несамосопряженных дифференциальных систем, для которых при помощи изучения общего решения можно непосредственно вывести существование бесконечного множества собственных значений. Докажем следующую теорему (см. Сансоне [2]).

---

[1]) Для вывода этого уравнения используется так называемое *изопериметрическое правило Эйлера*. [См., например, Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [1], стр. 133—146. — *Прим. перев.*]

Пусть дано однородное линейное дифференциальное уравнение порядка $n > 2$,

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \lambda p_2 y^{(n-2)} + \ldots + \lambda p_{n-1} y' + \lambda p_n y = 0, \qquad (1)$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ — *действительные числа,* $p_2 \neq 0$, $p_n \neq 0$, *и пусть выбраны* n *различных действительных чисел* $a_1, a_2, \ldots, \ldots, a_{n-1}, a_n$,

$$a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n,$$

таким образом, что единственным решением уравнения

$$p_2 y^{(n-2)} + p_3 y^{(n-3)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0, \qquad (2)$$

обращающимся в нуль в $n-2$ *точках* $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}$, *является нулевое решение, а уравнение*

$$p_2 \alpha^{n-2} + p_3 \alpha^{n-3} + \ldots + p_{n-1} \alpha + p_n = 0 \qquad (3)$$

не имеет кратных корней. Тогда существует бесконечное множество значений параметра λ (собственных значений), *для каждого из которых уравнение* (1) *имеет отличное от нулевого решение, обращающееся в нуль в заданных точках* $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$, *т. е. такое, что*

$$y(a_1) = y(a_2) = \ldots = y(a_{n-1}) = y(a_n) = 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение для (1) (см. гл. II, § 1, п. 6 „г“)

$$\alpha^n + p_1 \alpha^{n-1} + \lambda p_2 \alpha^{n-2} + \ldots + \lambda p_{n-1} \alpha + \lambda p_n = 0 \qquad (5)$$

и изучим поведение его корней $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \ldots, \alpha_n(\lambda)$, когда $\lambda \to +\infty$ или $\lambda \to -\infty$.

Уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{1}{\lambda} \alpha^n + \frac{p_1}{\lambda} \alpha^{n-1} + p_2 \alpha^{n-2} + \ldots + p_{n-1} \alpha + p_n = 0,$$

а потому при $\lambda \to \infty$ два корня $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda)$ уравнения (5) стремятся к бесконечности, а $n-2$ корней $\alpha_3(\lambda), \ldots, \alpha_n(\lambda)$ стремятся к $n-2$ (различным по условию) корням уравнения (3). Поэтому

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} [\alpha_3(\lambda) + \ldots + \alpha_n(\lambda)] = -p_3/p_2$$

и, в силу (5),

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} [\alpha_1(\lambda) + \alpha_2(\lambda)] = -p_1 + p_3/p_2.$$

Но

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \alpha_1(\lambda)\alpha_2(\lambda) = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{(-1)^n \lambda p_n}{\alpha_3(\lambda) \ldots \alpha_n(\lambda)} = \lim_{\lambda \to \pm\infty} \lambda p_2,$$

а потому, если $p_2>0$, то при $\lambda\to+\infty$ имеем

$$\alpha_1(\lambda)=\gamma_1(\lambda)+i\gamma_2(\lambda),\quad \alpha_2(\lambda)=\gamma_1(\lambda)-i\gamma_2(\lambda),$$

где

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_1(\lambda)=[-p_1+p_3/p_2]/2\qquad \lim_{\lambda\to+\infty}\gamma_2(\lambda)=+\infty, \tag{6}$$

а при $\lambda\to-\infty$ корни $\alpha_1(\lambda)$ и $\alpha_2(\lambda)$ действительны, причем

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\alpha_1(\lambda)=+\infty,\qquad \lim_{\lambda\to-\infty}\alpha_2(\lambda)=-\infty.$$

Положение дел меняется на обратное, если $p_2<0$.

Мы будет считать, что $p_2>0$; тогда, при достаточно большом положительном λ, уравнение (5) имеет два корня $\gamma_1(\lambda)\pm i\gamma_2(\lambda)$, для которых выполняется соотношение (6), и $n-2$ попарно различных корней, распадающихся на r действительных корней

$$\beta_1(\lambda),\ \beta_2(\lambda),\ \ldots,\ \beta_r(\lambda) \tag{7}$$

и $2s-2$ комплексных сопряженных корней

$$\gamma_3(\lambda)\pm i\gamma_4(\lambda),\ \ldots,\ \gamma_{2s-1}(\lambda)\pm i\,\gamma_{2s}(\lambda),\quad (r+2s=n),$$

а потому общее решение уравнения (I) имеет при достаточно большом положительном λ вид

$$y(x,\lambda)=c_1e^{\gamma_1(\lambda)x}\cos\gamma_2(\lambda)x+d_1e^{\gamma_1(\lambda)x}\sin\gamma_2(\lambda)x+$$
$$+\sum_{l=1}^{s}e^{\gamma_{2l-1}(\lambda)x}\{c_l\cos\gamma_{2l}(\lambda)x+d_l\sin\gamma_{2l}(\lambda)x\}+\sum_{l=1}^{r}b_le^{\beta_l(\lambda)x},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_s$; $d_1, d_2, \ldots, d_s$; $b_1, b_2, \ldots, b_r$ — произвольные постоянные.

Если потребовать, чтобы решение $y(x,\lambda)$ удовлетворяло условиям (4), т. е. обращалось в нуль в точках $x=a_1, a_2, \ldots, a_n$, то получится однородная линейная система уравнений относительно постоянных c, d, b, допускающая ненулевое решение тогда и только тогда, когда определитель $\Delta(\lambda)$ этой системы

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} e^{\gamma_1(\lambda)a_1}\cos\gamma_2(\lambda)a_1 & e^{\gamma_1(\lambda)a_1}\sin\gamma_2(\lambda)a_1 & \ldots\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\\ e^{\gamma_1(\lambda)a_n}\cos\gamma_2(\lambda)a_n & e^{\gamma_1(\lambda)a_n}\sin\gamma_2(\lambda)a_n & \ldots\end{vmatrix}$$

равен нулю.

Разлагая $\Delta(\lambda)$ по минорам второго порядка, содержащимся в первых двух столбцах, получаем, что

$$\Delta(\lambda)=\sum_{\substack{r,s=1\\ r>s}}^{n}P_{r,s}(\lambda)\sin(a_r-a_s)\gamma_2(\lambda),$$

где сумма распространена на все комбинации (r, s) чисел $1, 2, \ldots, n$, такие, что $r>s$, По известному свойству алгебраических функций, функции $P_{r,s}(\lambda)$ непрерывны и стремятся к конечным пределам, когда $\lambda \to +\infty$, функция же $\gamma_2(\lambda)$ непрерывна и, в силу второго из соотношений (6), стремится к $+\infty$, когда $\lambda \to +\infty$.

Положим $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P_{r,s}(\lambda) = P_{r,s}$; если заметить, что из равенства $P_{r,s}$ нулю следует существование решения дифференциального уравнения (2), обращающегося в нуль в $n-2$ точках

$$a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_{r-1}, a_{r+1}, \ldots a_n,$$

то из сделанного предположения о том, что уравнение (2) не имеет решения, обращающегося в нуль в точках $a_2, \ldots, a_{n-1}$, следует, что $P_{n,1} \neq 0$.

Запишем теперь, что

$$\Delta(\lambda) = \sum_{\substack{r,s=1 \\ r>s}}^{n} P_{r,s} \sin(a_r - a_s)\,\gamma_2(\lambda) + \\ + \sum_{\substack{r,s=1 \\ r>s}}^{n} [P_{r,s}(\lambda) - P_{r,s}] \sin(a_r - a_s)\,\gamma_2(\lambda),$$

и заметим, что вторая сумма в правой части стремится к нулю, когда $\lambda \to +\infty$. Поэтому для того чтобы доказать, что при стремлении λ к $+\infty$ $\Delta(\lambda)$ обращается в нуль бесконечное множество раз, достаточно показать, что, каковы бы ни были числа $P_{r,s}$, такие, что стоящее при наибольшей разности $a_n - a_1$ число $P_{n,1}$ отлично от нуля, наибольший из пределов функции от λ, $\sum\limits_{\substack{r,s=1 \\ r>s}}^{n} P_{r,s} \sin(a_r - a_s)\,\gamma_2(\lambda)$, положителен, а наименьший из ее пределов отрицателен.

Для этого заметим, что при $\lambda \to +\infty$ функция $\gamma_2(\lambda)$ стремится к $+\infty$, а потому нужное нам утверждение является следствием известной теоремы: функция $F(t) = A_1 \sin d_1 t + A_2 \sin d_2 t + \ldots + A_m \sin d_m t$, где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — отличные от нуля m чисел, а $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — положительные числа, $d_1 < d_2 < \ldots < d_m$, имеет, когда t изменяется в $(0, +\infty)$, положительный наибольший из пределов и отрицательный наименьший из пределов (см. Сансоне [4], стр. 36) [1]).

[1]) Ср. также Бор [1], стр. 40. — *Прим. ред.*

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Решения линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами

1. Примеры. Первая часть этой главы посвящена изучению решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений с периодическими коэффициентами; для первоначального выяснения вопроса мы предпошлем изложению разбор некоторых примеров, которые позволяют установить свойства решений таких уравнений и систем.

а) Пусть дано уравнение

$$x' + p(t)x = 0, \tag{1}$$

где функция $p(t)$ определена в $(-\infty, +\infty)$, непрерывна и имеет период $\omega > 0$,

$$p(t+\omega) = p(t).$$

Решая это уравнение, получаем

$$x(t) = ce^{-\int\limits_0^t p(t)\,dt}$$

(где c — постоянная), а потому

$$x(t+\omega) = e^{-\int\limits_0^\omega p(t)\,dt}\,x(t).$$

Таким образом, при увеличении аргумента t на ω, решение уравнения (1) умножается на $e^{-\int\limits_0^\omega p(t)\,dt}$.

Положим

$$\alpha = -\frac{1}{\omega}\int\limits_0^\omega p(t)\,dt.$$

Тогда

$$x(t+\omega)e^{-\alpha(t+\omega)} = x(t)e^{-\alpha t},$$

а потому *функция* $\varphi(t)$, определяемая формулой $\varphi(t)=x(t)e^{-\alpha t}$, *имеет период* ω. Решение уравнения (1) имеет вид

$$x(t)=e^{\alpha t}\varphi(t),$$

а потому периодично тогда и только тогда, когда $[\alpha=0]$

$$\int_0^{\omega} p(t)\,dt=0.$$

б) Рассмотрим уравнение второго порядка

$$x''+[2+\sin t]^{-1}(\sin t)\,x=0,$$

коэффициенты которого имеют период 2π; функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, определяемые равенствами

$$x_1(t)=(2+\sin t)\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(2+\sin t)^2},$$

$$x_2(t)=(2+\sin t)\int_0^{t}\frac{dt}{(2+\sin t)^2},$$

образуют фундаментальную систему решений; они удовлетворяют соотношениям

$$x_1(t+2\pi)=x_1(t),\quad x_2(t+2\pi)=x_1(t)+x_2(t),$$

а потому *первая из них имеет период* 2π, *а вторая не обнаруживает периодичности.*

в) Рассмотрим, наконец, уравнение

$$x''-p(t)\,x=0,$$

где функция $p(t)$ непрерывна в $(-\infty, +\infty)$ и имеет период ω; если на отрезке $[0, \omega]$ функция $p(t)$ положительна, то (см. гл. IV, § 2, п. 4„б") это уравнение *не имеет периодических решений.*

2. Характеристическое уравнение. а) Рассмотрим уравнение

$$p_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_{n-1}(t)\frac{dx}{dt}+p_n(t)\,x=0, \quad (2)$$

где функции $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_n(t)$ определены в $(-\infty, +\infty)$, непрерывны и имеют период ω $[\omega>0]$,

$$p_k(t+\omega)=p_k(t),\ (-\infty<t<+\infty;\ k=0,1,\ldots,n), \quad (3)$$

причем

$$p_0(t)>0,$$

Пусть функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2); так как уравнение (2) не меняется при замене переменной t на $t+\omega$, то функции $x_1(t+\omega)$, $x_2(t+\omega), \ldots, x_n(t+\omega)$ также образуют систему решений этого уравнения. Поэтому существуют n^2 чисел $a_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, таких, что

$$X_i = x_i(t+\omega) = a_{i,1}x_1(t) + a_{i,2}x_2(t) + \ldots + a_{i,n}x_n(t) \qquad (4)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Легко проверить, что вронскианы $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $W(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ связаны соотношением

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = HW(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где

$$H = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Но (см. гл. II, § 1, п. 2„в")

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = ce^{-\int\limits_0^t \frac{p_1}{p_0}dt},$$

а потому

$$W(X_1, X_2, \ldots, X_n) = ce^{-\int\limits_0^{t+\omega} \frac{p_1}{p_0}dt} = e^{-\int\limits_0^{\omega} \frac{p_1}{p_0}dt} W(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Следовательно, функции $x_1(t+\omega), x_2(t+\omega), \ldots, x_n(t+\omega)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (2).

Из доказательства следует, что

$$H = e^{-\int\limits_0^{\omega} \frac{p_1}{p_0}dt} \neq 0, \qquad (6)$$

причем, если $p_1(t) \equiv 0$, то имеет место формула Пуанкаре (см. Пуанкаре [3], стр. 202)

$$H = 1. \qquad (7)$$

б) На приведенных в п. 1 примерах мы уже видели, что дифференциальное уравнение с периодическими коэффициентами не всегда имеет периодические решения. По аналогии с примером из п. 1 „а" попытаемся найти (если они существуют) такие решения $x(t)$ уравнения (2), что

$$x(t+\omega) = \rho x(t), \quad (-\infty < t < +\infty)\ ^{1)}, \qquad (8)$$

1) Изучение решений, удовлетворяющих условию (8), было проведено Флоке в [1]. Теория, которую мы излагаем, называется теорией Флоке.

где ρ — некоторая *постоянная* величина, или, что то же самое, найти (если они существуют) такие постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, хотя бы одна из которых отлична от нуля, что решение уравнения (2)

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \ldots + c_nx_n(t) \tag{9}$$

удовлетворяет соотношению

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t+\omega) = \rho \sum_{k=1}^{n} c_k x_k(t).$$

Принимая во внимание (4), мы видим, что для этого должно выполняться равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\sum_{i=1}^{n} c_i a_{i,\,k} - \rho c_k\right] x_k(t) = 0.$$

В силу линейной независимости функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ это равенство приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned}(a_{1,\,k}c_1 + \ldots + a_{k-1,\,k}c_{k-1} + (a_{k,\,k} - \rho)c_k +\\ + a_{k+1,\,k}c_{k+1} + \ldots + a_{n,\,k}c_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned} \tag{10}$$

Эта система относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ρ равно корню уравнения, получающегося путем приравнивания нулю определителя так называемой *характеристической* (фундаментальной) *матрицы*

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,\,1}-\rho & a_{2,\,1} & \ldots & a_{n,\,1} \\ a_{1,\,2} & a_{2,\,2}-\rho & \ldots & a_{n,\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,\,n} & a_{2,\,n} & \ldots & a_{n,\,n}-\rho \end{matrix}\right\|,$$

т. е. корнем так называемого *характеристического* (фундаментального) *уравнения*

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{1,\,1}-\rho & a_{2,\,1} & \ldots & a_{n,\,1} \\ a_{1,\,2} & a_{2,\,2}-\rho & \ldots & a_{n,\,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,\,n} & a_{2,\,n} & \ldots & a_{n,\,n}-\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Так как $D(0) = H \neq 0$, то *все* корни уравнения (1) отличны от нуля, и для каждого корня этого уравнения и для каждой системы чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющей линейной системе (10), решение $x(t)$, определяемое формулой (9), удовлетворяет соотношению (8).

Изучение решений, удовлетворяющих соотношению (8), связано, таким образом, с изучением корней характеристического уравнения (11), которым мы и займемся в п. 3, 4, 5.

3. Элементарные делители матрицы. а) Пусть ρ — независимое переменное, и пусть $\{a_{i,k}\}$ $\{b_{i,k}\}$ $(i,\ k=1,\ 2, \ldots, n)$ — системы из n^2 элементов. Рассмотрим матрицу

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{1,1}\rho+b_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\rho+b_{1,n} \\ a_{2,1}\rho+b_{2,1} & \ldots & a_{2,n}\rho+b_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1}\rho+b_{n,1} & \ldots & a_{n,n}\rho+b_{n,n} \end{vmatrix}, \quad A=\operatorname{Det}\|a_{i,k}\|\neq 0,$$

определитель которой будем обозначать тем же символом $D(\rho)$.

Пусть ρ_0 — корень уравнения $D(\rho)=0$ кратности l_0 $(l_0\geqslant 1)$; назовем разность $\rho-\rho_0$ *линейным делителем* $D(\rho)$. Рассмотрим миноры определителя $D(\rho)$, имеющие порядок $n-k$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. Среди этих миноров, рассматриваемых как функции от ρ, хотя бы один не равен тождественно нулю, так как иначе мы имели бы $D(\rho)\equiv 0$, а потому $A=0$, вопреки предположению.

Обозначим через l_k показатель, с которым множитель $\rho-\rho_0$ входит в наибольший общий делитель миноров $(n-k)$-го порядка определителя $D(\rho)$, рассматриваемых как многочлены от ρ [1]). Покажем, что числа l_0, l_1, l_2, ... связаны неравенствами

$$l_0>l_1>l_2>\ldots.$$

В самом деле, хотя бы в один минор порядка $n-k$ делитель $\rho-\rho_0$ входит с показателем l_k. Но тогда производная этого минора по ρ делится лишь на $(\rho-\rho_0)^{l_k-1}$; так как эта производная выражается как сумма произведений элементов определителя $D(\rho)$ на миноры $(n-k-1)$-го порядка определителя $D(\rho)$, а в наибольший общий делитель этих миноров $\rho-\rho_0$ входит с показателем l_{k+1}, то $l_{k+1}\leqslant l_k-1$.

Пусть l_ν — последний отличный от нуля показатель. Тогда

$$l_0>l_1>l_2>\ldots>l_\nu,$$

и если положить

$$l_0-l_1=e_0,\ l_1-l_2=e_1,\ \ldots,\ l_{\nu-1}-l_\nu=e_{\nu-1},\ l_\nu=e_\nu,$$

то

$$l_0=e_0+e_1+\ldots+e_{\nu-1}+e_\nu.$$

Легко проверить, что

$$e_0\geqslant e_1.$$

В самом деле, если $\begin{vmatrix} L & M \\ N & P \end{vmatrix}$ — минор определителя, взаимного определителю $D(\rho)$, то имеет место тождество $LP-MN=D(\rho)C$ [2]),

---

[1]) Условимся, что если какой-нибудь минор порядка $n-k$ тождественно равен нулю, то он делится на $(\rho-\rho_0)^{n-k}$.

[2]) См. Сушкевич А. К. [1] стр. 69. — *Прим. перев.*

где C — соответствующий минор $n-2$-го порядка определителя $D(\rho)$; если выбрать в качестве C тот минор $n-2$-го порядка определителя $D(\rho)$, в который $\rho-\rho_0$ входит с показателем l_2, то в правую часть нашего тождества множитель $\rho-\rho_0$ входит с показателем l_0+l_2, а в левую часть — по меньшей мере с показателем $2l_1$, а потому $2l_1 \leqslant l_0+l_2$, $l_1-l_2 \leqslant l_0-l_1$ и $e_0 \geqslant e_1$.

Можно доказать, что, вообще,

$$e_0 \geqslant e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots \geqslant e_{\nu-1} \geqslant e_\nu$$

(см., например, Бохер [6], гл. XX, стр. 239—254).

б) Пусть $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ — m различных корней уравнения $D(\rho)=0$, имеющих соответственно кратность $l_0^{(1)}, l_0^{(2)}, \ldots, l_0^{(m)}$; тогда, согласно нашим обозначениям,

$$\begin{aligned} D(\rho) \equiv A(\rho-\rho_1)^{e_0^{(1)}}(\rho-\rho_1)^{e_1^{(1)}} \ldots (\rho-\rho_1)^{e_{\nu_1}^{(1)}} \times \\ \times (\rho-\rho_2)^{e_0^{(2)}}(\rho-\rho_2)^{e_1^{(2)}} \ldots (\rho-\rho_2)^{e_{\nu_2}^{(2)}} \times \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \times (\rho-\rho_m)^{e_0^{(m)}}(\rho-\rho_m)^{e_1^{(m)}} \ldots (\rho-\rho_m)^{e_{\nu_m}^{(m)}}, \end{aligned}$$

где

$$l_0^{(i)} = e_0^{(i)} + e_1^{(i)} + \ldots + e_{\nu_i}^{(i)} \qquad (i=1, 2, \ldots, m).$$

Множители $(\rho-\rho_i)^{e_j^{(i)}}$ $(i=1, 2, \ldots, m;\ j=0, 1, \ldots, \nu_i)$ называются *элементарными делителями матрицы* $D(\rho)$; между их показателями и степенью n многочлена $D(\rho)$ имеет место очевидное соотношение

$$n = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{\nu_i} e_j^{(i)}\ ^{1)}.$$

Излишне отмечать, что элементарные делители матрицы $D(\rho)$ не изменяются при перестановке двух строк или двух столбцов, а также при замене строк столбцами.

в) Пусть

$$P = \begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,n} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n,1} & p_{n,2} & \cdots & p_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

---

1) Теория элементарных делителей была построена Вейерштрассом [1], т. II, стр. 21. Относительно геометрической интерпретации теории элементарных делителей см. Бертини [1], гл. IV, стр. 63—100.

Выполним над переменными $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ линейное преобразование

$$a'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n} a_{i,s}p_{s,k}, \qquad b'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n} b_{i,s}p_{s,k}, \tag{12}$$

которое равносильно умножению матриц $\|a_{i,k}\|$ и $\|b_{i,k}\|$ на матрицу $\|p_{i,k}\|$ *справа*. Покажем, что тогда матрицы $D(\rho)$ и $D'(\rho)$, где

$$D'(\rho)=\begin{Vmatrix} a'_{1,1}\rho+b'_{1,1} & \dots & a'_{1,n}\rho+b'_{1,n} \\ a'_{2,1}\rho+b'_{2,1} & \dots & a'_{2,n}\rho+b'_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n,1}\rho+b'_{n,1} & \dots & a'_{n,n}\rho+b'_{n,n} \end{Vmatrix}$$

имеют одинаковые элементарные делители, или, иными словами, что *корни уравнения $D(\rho)=0$ и элементарные делители остаются инвариантными, если над $a_{i,k}$* и *$b_{i,k}$ выполняется одно и то же линейное преобразование с определителем, отличным от нуля.*

Так как

$$\rho a'_{i,k}+b'_{i,k}=\sum_{s=1}^{n}(a_{i,s}\rho+b_{i,s})p_{s,k} \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

то любой минор $n-k$-го порядка матрицы $D'(\rho)$, например

$$\begin{Vmatrix} a'_{1,1}\rho+b'_{1,1} & \dots & a'_{1,n-k}\rho+b'_{1,n-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{n-k,1}\rho+b'_{n-k,1} & \dots & a'_{n-k,n-k}\rho+b'_{n-k,n-k} \end{Vmatrix},$$

равен произведению по строкам матриц

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}\rho+b_{1,1} & a_{1,2}\rho+b_{1,2} & \dots & a_{1,n}\rho+b_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1}\rho+b_{i,1} & a_{i,2}\rho+b_{i,2} & \dots & a_{i,n}\rho+b_{i,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-k,1}\rho+b_{n-k,1} & a_{n-k,2}\rho+b_{n-k,2} & \dots & a_{n-k,n}\rho+b_{n-k,n} \end{Vmatrix}$$

и

$$\begin{Vmatrix} p_{1,1} & p_{2,1} & \dots & p_{n,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1,k} & p_{2,k} & \dots & p_{n,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{1,n-k} & p_{2,n-k} & \dots & p_{n,n-k} \end{Vmatrix},$$

а потому может быть выражен как линейная комбинация миноров $n-k$-го порядка матрицы $D(\rho)$. Поэтому множитель $\rho-\rho_0$ входит в каждый минор $n-k$-го порядка из $D'(\rho)$ по меньшей мере с показателем l_k, а, следовательно, l_k не превосходит показателя l'_k, с которым $\rho-\rho_0$ входит в наибольший общий делитель миноров $(n-k)$-го порядка из $D'(\rho)$. Выражая из (12) $a_{i,s}$ и $b_{i,s}$ через $a'_{i,k}$ и $b'_{i,k}$ и повторяя проведенные рассуждения, убеждаемся, что $l_k=l'_k$. Теорема доказана.

Аналогичные выводы имеют место, если сделать над $a_{i,k}$ и $b_{i,k}$ линейное преобразование, соответствующее умножению на матрицу $\|p_{i,k}\|$ *слева*.

г) Применим доказанную теорему к изучению решений дифференциального уравнения (2). Назовем матрицу

$$D(\rho)=\begin{Vmatrix} a_{1,1}-\rho & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2}-\rho & \ldots & a_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n}-\rho \end{Vmatrix}$$

характеристической матрицей дифференциального уравнения (2) и докажем, что *корни и элементарные делители этой матрицы не зависят от выбора фундаментальной системы решений, служащей для ее построения.*

В самом деле, общим видом фундаментальных систем решений этого уравнения $\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t), \ldots, \bar{x}_n(t)$ является

$$\bar{x}_i(t)=c_{i,1}x_1(t)+c_{i,2}x_2(t)+\ldots+c_{i,n}x_n(t) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где $c_{i,k}$ — произвольные n^2 чисел, таких, что $C=\operatorname{Det}\|c_{i,n}\|\neq 0$.

Если обозначить через $\gamma_{i,k}$ приведенное алгебраическое дополнение элемента $c_{i,k}$ в определителе C (т. е. отношение алгебраического дополнения $C_{i,k}$ этого элемента в C к определителю C), то

$$x_l(t)=\gamma_{1,l}\bar{x}_1(t)+\gamma_{2,l}\bar{x}_2(t)+\ldots+\gamma_{n,l}\bar{x}_n(t) \quad (l=1, 2, \ldots, n),$$

и, принимая во внимание (4), получаем, что

$$\bar{x}_i(t+\omega)=\sum_{r=1}^{n}c_{i,r}x_r(t+\omega)=\sum_{r,l=1}^{n}c_{i,r}a_{r,l}x_l(t)=$$

$$=\sum_{r,l,k=1}^{n}c_{i,r}a_{r,l}\gamma_{k,l}\bar{x}_k(t)=\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{r,l=1}^{n}c_{i,r}a_{r,l}\gamma_{k,l}\Big]\bar{x}_k(t),$$

а потому

$$\bar{x}_i(t+\omega)=\sum_{k=1}^{n}a'_{i,k}\bar{x}_k(t) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

где

$$a'_{i,k}=\sum_{r,l=1}^{n}c_{i,r}a_{r,l}\gamma_{k,l}.$$

Так как характеристическая матрица

$$\begin{Vmatrix} a'_{1,1}-1\rho & a'_{1,2}-0\rho & \ldots & a'_{1,n}-0\rho \\ a'_{2,1}-0\rho & a'_{2,2}-1\rho & \ldots & a'_{2,n}-0\rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a'_{n,1}-0\rho & a'_{n,2}-0\rho & \ldots & a'_{n,n}-1\rho \end{Vmatrix}$$

относительно новой фундаментальной системы (мы сделали столбцы строками, и наоборот) получается из матрицы

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1}-1\rho & a_{1,2}-0\rho & \ldots & a_{1,n}-0\rho \\ a_{2,1}-0\rho & a_{2,2}-1\rho & \ldots & a_{2,n}-0\rho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1}-0\rho & a_{n,2}-0\rho & \ldots & a_{n,n}-1\rho \end{Vmatrix}$$

путем умножения матриц

$$\begin{Vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{Vmatrix} -1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & -1 \end{Vmatrix}$$

сначала *справа* на

$$\begin{Vmatrix} \gamma_{1,1} & \gamma_{2,1} & \ldots & \gamma_{n,1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{1,n} & \gamma_{2,n} & \ldots & \gamma_{n,n} \end{Vmatrix}$$

а потом *слева* на

$$\begin{Vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{Vmatrix},$$

то наше утверждение следует из предыдущей теоремы.

д) Сумма корней характеристического уравнения равна $a_{1,1}+a_{2,2}+$ $+\ldots+a_{n,n}$, а потому *сумма* $a_{1,1}+a_{2,2}+\ldots+a_{n,n}$ *не зависит от выбора фундаментальной системы, служащей для построения характеристического уравнения.*

4. Решения в случае, когда показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы равны единице. Характеристические показатели и числа. а) Как мы уже видели, характер решений уравнения (2) тесно связан с корнями характеристического уравнения (11) и, как вскоре будет показано, с элементарными делителями характеристической матрицы $D(\rho)$.

Предположим, что *для любого корня* ρ_i $(i=1, 2, \ldots, m)$ *характеристического уравнения* $D(\rho)=0$, *имеющего кратность* ν_i, *ранг* *матрицы* $D(\rho_i)$ *равен* $n-\nu_i$; тогда, применяя обозначения из п. 3, мы видим, что

$$l_0^{(i)}=\nu_i;\quad l_1^{(i)}\geqslant 1,\quad l_2^{(i)}\geqslant 1,\ \ldots,\ l_{\nu_i-1}^{(i)}\geqslant 1;\quad l_{\nu_i}^{(i)}=0,$$

а так как $\nu_i=l_0^{(i)}>l_1^{(i)}>\ldots>l_{\nu_i-1}^{(i)}$, то

$$l_0^{(i)}=\nu_i,\quad l_1^{(i)}=\nu_i-1,\quad l_2^{(i)}=\nu_i-2,\ \ldots,\ l_{\nu_i-1}^{(i)}=1,\quad l_{\nu_i}^{(i)}=0,$$

$$e_0^{(i)}=1,\quad e_1^{(i)}=1,\ \ldots,\ e_{\nu_i-1}^{(i)}=1,$$

т. е. *показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы равны единице.*

Обратно, если показатели элементарных делителей, соответствующих корню ρ_i, равны единице, а число этих элементарных делителей равно ν_i, то при $\rho=\rho_i$ как сам характеристический определитель $D(\rho)$, так и все его миноры от $n-1$-го до $n-\nu_i+1$-го порядка включительно обращаются в нуль, в то время как хоть один минор $n-\nu_i$-го порядка не равен нулю, а потому ранг матрицы $D(\rho_i)$ равен $n-\nu_i$.

Итак, пусть $\rho_1,\ \rho_2,\ \ldots,\ \rho_m$ — различные корни характеристического уравнения, имеющие, соответственно, кратности $\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_m$,

$$n=\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_m,$$

и пусть для каждого корня ρ_i ранг матрицы $D(\rho_i)$ равен $n-\nu_i$; если положить в однородной системе (10) $\rho=\rho_i$, то ранг матрицы коэффициентов будет равен $n-\nu_i$, а потому значения ν_i из неизвестных $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ можно выбрать произвольно, в то время как значения остальных $n-\nu_i$ неизвестных определяются тем самым однозначным образом; следовательно, корню ρ_i соответствуют ν_i линейно независимых решений, которые мы обозначим через

$$x_{1,i},\ x_{2,i},\ \ldots,\ x_{\nu_i,i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \tag{13}$$

для каждого из которых справедливо равенство

$$x_{\lambda,i}(t+\omega)=\rho_i x_{\lambda,i}(t)\qquad (\lambda=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu_i;\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

Легко видеть, что полученные таким образом n решений линейно независимы; в самом деле, в противном случае существовало бы линейное соотношение с постоянными коэффициентами $c_{\lambda,i}$, из которых хоть один отличен от нуля, имеющее вид

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_1} c_{\lambda,1}x_{\lambda,1}(t)+\sum_{\lambda=1}^{\nu_2} c_{\lambda,2}x_{\lambda,2}(t)+\ldots+\sum_{\lambda=1}^{\nu_m} c_{\lambda,m}x_{\lambda,m}(t)\equiv 0.$$

Заменяя в нем t на $t+k\omega$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m-1)$, мы получили бы еще соотношения

$$\rho_1^k\Big[\sum_{\lambda=1}^{\nu_1} c_{\lambda,1}x_{\lambda,1}(t)\Big]+\rho_2^k\Big[\sum_{\lambda=1}^{\nu_2} c_{\lambda,2}x_{\lambda,2}(t)\Big]+\ldots+\rho_m^k\Big[\sum_{\lambda=1}^{\nu_m} c_{\lambda,m}x_{\lambda,m}(t)\Big]=0.$$

Но определитель этой линейной системы отличен от нуля, так как является определителем Вандермонда для m различных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$, а потому должны иметь место тождества

$$\sum_{\lambda=1}^{\nu_i} c_{\lambda, i} x_{\lambda, i}(t) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В силу линейной независимости решений (13) отсюда следует, что

$$c_{\lambda, i} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m),$$

вопреки предположению об отличии от нуля хотя бы одного $c_{\lambda, i}$.

Таким образом мы доказали следующую теорему.

Если показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы $D(\rho)$ равны единице, то каждому корню ρ_i характеристического уравнения $D(\rho)=0$, имеющему кратность ν_i, соответствуют ν_i линейно независимых решений

$$x_{1, i}(t), \quad x_{2, i}(t), \quad \ldots, \quad x_{\nu_i, i}(t),$$

таких, что

$$x_{\lambda, i}(t+\omega) = \rho_i x_{\lambda, i}(t) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \nu_i; \quad i = 1, 2, \ldots, m),$$

причем совокупность всех решений, соответствующих различным корням характеристического уравнения, образует фундаментальную систему решений.

б) Обозначим через θ_k главное значение аргумента для корня ρ_k и через $x_k(t)$ — соответствующее решение; тогда

$$\rho_k = |\rho_k| e^{i\theta_k}, \qquad -\pi < \theta_k \leqslant \pi$$

(i — мнимая единица). Положим

$$\alpha_k = \frac{1}{\omega}[\ln|\rho_k| + i\theta_k] = \frac{\ln \rho_k}{\omega}$$

($\ln \rho_k$ — *главное значение* логарифма от ρ_k) и назовем α_k *характеристическим показателем*, а $\omega^{-1}\ln|\rho_k|$ — *характеристическим числом*.

Положим $\varphi_k(t) = x_k(t) e^{-\alpha_k t}$; тогда

$$\varphi_k(t+\omega) = x_k(t+\omega) e^{-\alpha_k(t+\omega)} = |\rho_k| e^{i\theta_k} x_k(t) e^{-\alpha_k t} e^{-[\ln|\rho_k| + i\theta_k]} =$$

$$= x_k(t) e^{-\alpha_k t} = \varphi_k(t),$$

а потому φ_k имеет период ω. Следовательно, *если для любого корня ρ_i характеристического уравнения, имеющего кратность ν_i, ранг матрицы $D(\rho)$ равен $n-\nu_i$ при $\rho=\rho_i$, то существует фундаментальная система решений вида*

$$e^{\alpha_1 t}\varphi_1(t), \quad e^{\alpha_2 t}\varphi_2(t), \quad \ldots, \quad e^{\alpha_n t}\varphi_n(t),$$

где функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ *имеют период* ω, *а показатели* α_k (*характеристические показатели*) *равны* $\omega^{-1}\ln\rho_k$.

в) Желая оставаться в действительной области, изучим отдельно случаи $\rho_k > 0$, $\rho_k < 0$, ρ_k комплексно.

Если $\rho_k > 0$, то соответствующие решения c_1, c_2, ..., c_n системы (10) действительны, $x_k(t)$ действительно, равно как и $\alpha_k = \omega^{-1}\ln\rho_k$, а потому $\varphi_k(t)$ тоже действительно.

В случае, когда $\rho_k < 0$, заметим, что

$$x_k(t+2\omega) = \rho_k^2 x_k(t),$$

а потому

$$x_k(t) = e^{\omega^{-1} t \ln|\rho_k|}\varphi_k(t),$$

где $\varphi_k(t)$ — *действительная функция, имеющая период* 2ω.

Если же

$$\rho_k = |\rho_k| e^{i\theta_k}, \quad \text{где} \quad \theta_k \neq 0, \qquad -\pi < \theta_k < \pi,$$

т. е. если корень ρ_k комплексный, то характеристическое уравнение имеет и сопряженный с ним корень $|\rho_k| e^{-i\theta_k}$. Этим корням соответствуют сопряженные решения $x_k(t)$, $\bar{x}_k(t)$, причем соответствующие характеристические показатели также сопряжены. Но тогда и функции $\varphi_k(t)$, $\bar{\varphi}_k(t)$ сопряжены и имеют период ω, а потому

$$x_k(t) = e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega} + i\sin\frac{\theta_k t}{\omega}\right][\psi_1(t) + i\psi_2(t)],$$

$$\bar{x}_k(t) = e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega} - i\sin\frac{\theta_k t}{\omega}\right][\psi_1(t) - i\psi_2(t)],$$

где функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ действительны и имеют период ω. Складывая и вычитая эти формулы, получаем, что данное уравнение имеет два линейно независимых действительных решения

$$e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega}\psi_1(t) - \sin\frac{\theta_k t}{\omega}\psi_2(t)\right],$$

$$e^{t\omega^{-1}\ln|\rho_k|}\left[\cos\frac{\theta_k t}{\omega}\psi_2(t) + \sin\frac{\theta_k t}{\omega}\psi_1(t)\right].$$

г) Изучим теперь поведение решений уравнения (2) при стремлении t к $+\infty$, или, как говорят, *асимптотическое поведение решений уравнения* (2).

Из изложенного следует, что *если показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы равны единице, то для стремления к нулю при* $t \to +\infty$ *всех решений уравнения* (2) *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства* $\ln|\rho_k| < 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$; *т. е. чтобы все характеристические числа были отрицательны* (*или, иными словами, чтобы модули всех корней характеристического уравнения были меньше единицы*).

5. Решения в общем случае. Подгруппы Гамбургера. В случае, когда не все показатели элементарных делителей равны единице, имеет место следующая теорема, доказательство которой мы опускаем.

Если ρ_0 — *корень характеристического уравнения* $D(\rho)=0$ *кратности* l_0 *и если этому корню соответствуют элементарные делители* $(\rho-\rho_0)^{l_0}, (\rho-\rho_0)^{l_1}, \ldots, (\rho-\rho_0)^{l_\nu}$, *то* ρ_0 *соответствуют* l_0 *линейно независимых решений, которые можно разбить на* $\nu+1$ *подгрупп решений (подгруппы Гамбургера), причем решения* $x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \ldots, x_{l_s}^{(s)}$, *принадлежащие подгруппе, соответствующей элементарному делителю* $(\rho-\rho_0)^{l_s}$ $(s=0, 1, \ldots, \nu)$, *характеризуются тем, что*

$$\begin{aligned}
&x_1^{(s)}(t+\omega)=\rho_0 x_1^{(s)}(t),\\
&x_2^{(s)}(t+\omega)=\rho_0 x_2^{(s)}(t)+x_1^{(s)}(t),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_{l_s}^{(s)}(t+\omega)=\rho_0 x_{l_s}^{(s)}(t)+x_{l_s-1}^{(s)}(t) \qquad (s=0, 1, \ldots, \nu)
\end{aligned}$$ [1].

6. Необходимое и достаточное условие существования периодического решения. а) Результаты предыдущего номера позволяют сразу сформулировать необходимое и достаточное условие для существования периодического решения уравнения (2); именно, имеет место следующая теорема: *для того чтобы уравнение* (2) *имело решение с периодом* ω, *необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из корней характеристического уравнения* (11) *равнялся единице. Кроме того, число линейно независимых решений уравнения* (2), *имеющих период* ω, *равно числу элементарных делителей матрицы*

$$\left\|\begin{matrix} a_{1,1}-\rho & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2}-\rho & \ldots & a_{n,2}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n}-\rho \end{matrix}\right\|,$$

содержащих множитель $\rho-1$.

б) Вообще, если один из корней характеристического уравнения (11) является корнем k-й степени из единицы (k — целое положительное число), то ему соответствует решение, имеющее период $k\omega$.

Справедливо и обратное утверждение. Пусть, в самом деле, решение $x(t)$ уравнения (2) имеет период $k\omega$ (k — целое положительное);

[1]) Впервые решения, соответствующие кратному корню характеристического уравнения, изучались Фуксом [1], стр. 136. Распределение решений по подгруппам было установлено Гамбургером [1], стр. 121; связь подгрупп Гамбургера и элементарных делителей матрицы $D(\rho)$ указана Казорати [1]. Относительно доказательства сформулированной теоремы см. Форсайт [1], т. IV, стр. 60 и 416, и Соваж [1], стр. 326.

выразим тогда $x(t)$ в виде линейной комбинации решений, принадлежащих различным подгруппам Гамбургера; отождествляя $x(t+k\omega)$ с $x(t)$, мы получаем, что хотя бы один из корней уравнения $D(\rho)=0$ должен быть корнем k-й степени из единицы.

7. Периодические решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

а) Пусть дано уравнение

$$p_0(t)\frac{d^n x}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n(t)x=f(t), \qquad (14)$$

где функции $p_0(t)$, $p_1(t)$, $\ldots$, $p_n(t)$, $f(t)$ определены в $(-\infty, +\infty)$, непрерывны и имеют период ω $[\omega>0]$,

$$p_0(t)>0,$$

$$p_k(t+\omega)=p_k(t) \quad (k=0,\ 1,\ \ldots,\ n); \quad f(t+\omega)=f(t).$$

Выясним, имеет ли это уравнение решения с периодом ω.

Пусть $\varphi_0(t)$ — частное решение уравнения (14), а $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ — фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения (2); общее решение уравнения (14) имеет тогда вид

$$\varphi(t)=c_1x_1(t)+c_2x_2(t)+\ldots+c_nx_n(t)+\varphi_0(t), \qquad (15)$$

где c_1, c_2, $\ldots$, c_n — произвольные постоянные.

Так как $\varphi_0(t+\omega)$ также является решением уравнения (14), то существуют такие числа β_1, β_2, $\ldots$, β_n, что

$$\varphi_0(t+\omega)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k x_k(t)+\varphi_0(t),$$

и если все числа β_k равны нулю, то $\varphi_0(t)$ является периодическим решением уравнения (14).

В общем случае, выражая по формуле (4) $x_1(t+\omega)$, $x_2(t+\omega)$, ..., $x_n(t+\omega)$ через $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, получаем, что

$$\varphi(t+\omega)=\sum_{i=1}^{n}c_ix_i(t+\omega)+\varphi_0(t+\omega)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\Big[\sum_{i=1}^{n}c_ia_{i,k}+\beta_k\Big]x_k(t)+\varphi_0(t),$$

а потому решение $\varphi(t)$ периодично тогда и только тогда, когда можно выбрать числа c_1, c_2, $\ldots$, c_n таким образом, что

$$\sum_{i=1}^{n}c_ia_{i,k}+\beta_k=c_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

т. е. числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ должны быть решениями системы

$$\left.\begin{array}{llll} (a_{1,1}-1)c_1+a_{2,1}c_2 & +\ldots+a_{n,1}c_n & =-\beta_1, \\ a_{1,2}c_1+(a_{2,2}-1)c_2 & +\ldots+a_{n,2}c_n & =-\beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{1,n}c_1+a_{2,n}c_2 & +\ldots+(a_{n,n}-1)c_n & =-\beta_n. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Определитель этой системы отличен от нуля, если ни один из корней характеристического уравнения однородного уравнения

$$p_0\frac{d^nx}{dt^n}+p_1\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_nx=0 \qquad (2)$$

не равен единице, т. е. если однородное уравнение не имеет решений с периодом ω (п. 6„а"). Итак, мы доказали, что *если однородное уравнение* (2) *не имеет решений с периодом* ω, *то уравнение* (14) *имеет одно и только одно решение с периодом* ω.

б) Наоборот, если уравнение (2) имеет решение с периодом ω, то либо уравнение (14) не имеет периодических решений, либо оно имеет бесконечное множество таких решений, в зависимости от того, является ли система (16) несовместной или же она имеет бесконечное множество решений. Говорят, что как в том, так и в другом случае имеет место так называемое *явление резонанса* [1]).

в) Проиллюстрируем изложенное следующим примером (см. Иглиш [1]).

Пусть дано уравнение

$$x''(t)+\lambda^2x(t)=f(t), \qquad (17)$$

где функция $f(t)$ имеет период ω, а параметр λ^2 отличен от нуля.

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$x''+\lambda^2x=0 \qquad (18)$$

имеет вид $c_1\cos\lambda t+c_2\sin\lambda t$, где c_1 и c_2 — произвольные постоянные; поэтому, если $\varphi_0(t)$ является частным решением уравнения (17), то общее решение уравнения (17) имеет вид $x(t)=c_1\cos\lambda t+c_2\sin\lambda t+\varphi_0(t)$. Это решение имеет период ω, если $x(0)=x(\omega)$, $x'(0)=x'(\omega)$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы c_1 и c_2 удовлетворяли системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} -c_1[1-\cos\lambda\omega]+c_2\sin\lambda\omega=\varphi_0(0)-\varphi_0(\omega); \\ \lambda c_1[-\sin\lambda\omega]-\lambda c_2[1-\cos\lambda\omega]=\varphi_0'(0)-\varphi_0'(\omega). \end{array}\right\} \qquad (19)$$

Определитель этой системы равен $4\lambda\sin^2(\lambda\omega/2)$, а потому уравнение (17) имеет одно и только одно периодическое решение, когда

---

[1]) Относительно более глубокого изучения этого случая см. Файт [1]; Ундервуд [1], [2], [3].

$\omega \neq 2\pi k/\lambda$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т. е. когда ω не является целым кратным периода решений однородного уравнения (18).

Если же $\omega = 2\pi k/\lambda$, $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, т. е. *если имеет место случай резонанса*, то система (19) принимает вид

$$\varphi_0(0) - \varphi_0(\omega) = 0, \qquad \varphi_0'(0) - \varphi_0'(\omega) = 0,$$

а потому, если $\varphi_0(t)$ имеет период ω, то любое решение уравнения (17) имеет период ω и, следовательно, *в случае резонанса либо все решения уравнения* (17) *имеют период* ω, *либо ни одно решение не имеет такого периода.*

Это свойство выводится также и из выражения общего решения уравнения (17). По методу из гл. II, § 1, п. 5„в“, получаем для общего решения уравнения (17) выражение

$$\varphi(t) = -\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\int_0^t f(u)\sin\lambda u\,du + \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\int_0^t f(u)\cos\lambda u\,du + \\ + c_1\cos\lambda t + c_2\sin\lambda t.$$

Если $\omega = 2\pi k/\lambda$ $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$, то это решение имеет период ω (каковы бы ни были c_1 и c_2) тогда и только тогда, когда имеют место равенства

$$A_1 = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(u)\cos\lambda u\,du = 0, \qquad A_2 = \frac{2}{\omega}\int_0^\omega f(u)\sin\lambda u\,du = 0.$$

Наоборот, если хотя бы одна из постоянных A_1, A_2 отлична от нуля, то, полагая

$$f_1(t) = f(t) - A_1\cos\lambda t - A_2\sin\lambda t,$$

получаем, что

$$\varphi(t) = \Big[-\frac{\cos\lambda t}{\lambda}\int_0^t f_1(u)\sin\lambda u\,du + \\ + \frac{\sin\lambda t}{\lambda}\int_0^t f_1(u)\cos\lambda u\,du + c_1\cos\lambda t + \\ + \Big(c_2 + \frac{A_2}{2\lambda^2}\Big)\sin\lambda t\Big] + \frac{t}{2\lambda}\,[A_1\sin\lambda t - A_2\cos\lambda t].$$

Первый член в правой части имеет период ω $[\omega = 2k\pi/\lambda]$, в то время как значения второго члена в точках t, $t+\omega$, $t+2\omega$, ... образуют арифметическую прогрессию.

§ 2. Вычисление характеристических показателей

1. Исследование характеристических показателей. Из результатов предыдущего параграфа следует, что для исследования поведения решений уравнения

$$p_0(t)\frac{d^nx}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\ldots+p_n(t)x=0, \qquad (1)$$

где функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ определены в $(-\infty, +\infty)$, непрерывны и имеют период $\omega>0$,

$$p_i(t+\omega)=p_i(t)\,(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n;\ -\infty<t<+\infty),\ p_0(t)>0,$$

необходимо знание характеристических показателей, что в свою очередь требует решения характеристического уравнения, для составления которого нужно предварительно вычислить входящие в (4) из § 1 коэффициенты $a_{i,\,k}$.

Вычисление этих коэффициентов может быть проведено следующим образом. Построим n частных решений $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, удовлетворяющих начальным условиям

$$x_i(t_0)=\delta_{1,\,i};\quad x_i'(t_0)=\delta_{2,\,i},\ \ldots,\ x_i^{(n-1)}(t_0)=\delta_{n,\,i} \qquad (2)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $\delta_{k,\,i}=0$, если $k\neq i$, и $\delta_{k,\,k}=1$.

Эти решения образуют фундаментальную систему, и, в обозначениях из § 1, п. 2 [ср. (4)], имеем

$$x_i(t+\omega)=a_{i,\,1}x_1(t)+a_{i,\,2}x_2(t)+\ldots+a_{i,\,n}x_n(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_i^{(r)}(t+\omega)=a_{i,\,1}x_1^{(r)}(t)+a_{i,\,2}x_2^{(r)}(t)+\ldots+a_{i,\,n}x_n^{(r)}(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

При $t=t_0$, принимая во внимание (2), получаем, что

$$x_i(t_0+\omega)=a_{i,\,1},\ x_i'(t_0+\omega)=a_{i,\,2},\ \ldots,\ x_i^{(n-1)}(t_0+\omega)=a_{i,\,n} \qquad (3)$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а потому вычисление коэффициентов $a_{i,\,1}, a_{i,\,2}, \ldots, a_{i,\,n}$ сводится к вычислению значений $x_i(t), x_i'(t), \ldots, x_i^{(n)}(t)$ при $t=t_0+\omega$.

Вычисление этих значений проводится следующим образом. Рассмотрим вместо (1) другое уравнение

$$L[x(t)]\equiv p_0\frac{d^nx}{dx^n}+\lambda p_1\frac{d^{n-1}x}{dx^{n-1}}+\ldots+\lambda p_{n-1}\frac{dx}{dt}+\lambda p_nx=0, \qquad (4)$$

где λ — параметр, и построим по методу последовательных приближений решения этого уравнения, удовлетворяющие начальным условиям (2). В качестве первого приближения для $x_i(t)$ выберем многочлен $(n-1)$-й степени от t $(i=1, 2, \ldots, n)$,

$$f_{0,i}(t)=\delta_{1,i}+\frac{t-t_0}{1!}\delta_{2,i}+\frac{(t-t_0)^2}{2!}\delta_{3,i}+\ldots+\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!}\delta_{n,i}. \quad (5)$$

Тогда решение $x_i(t)$ имеет вид (см. гл. I, § 3, п. 4„а“),

$$x_i(t)=f_{0,i}(t)+\lambda f_{1,i}(t)+\ldots+\lambda^s f_{s,i}(t)+\ldots \quad (i=1, 2, \ldots, n), \quad (6)$$

а потому функция $x_i(t)$ и ее производные до n-го порядка включительно являются целыми трансцендентными функциями от λ. Выражение для $x_i^{(r)}(t)$ получается путем почленного дифференцирования r раз ряда, стоящего справа[1]), а потому

$$x_i^{(r)}(t)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s f_{s,i}^{(r)}(t) \quad (r=1, 2, \ldots, n). \quad (6')$$

Следовательно, каково бы ни было λ, при $t=t_0$ имеем

$$\delta_{r+1,i}=x_i^{(r)}(t_0)=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s f_{s,i}^{(r)}(t_0) \quad [f^0=f],$$

и потому

$$f_{0,i}^{(r)}(t_0)=\delta_{r+1,i}; \quad f_{s,i}^{(r)}(t_0)=0 \quad (7)$$

$$(r=0, 1, 2, \ldots, n; \quad s=1, 2, \ldots; \quad i=1, 2, \ldots, n).$$

Но

$$0\equiv L[x_i(t)]\equiv p_0x_i^{(n)}(t)+\lambda\sum_{r=0}^{n-1}p_{n-r}x_i^{(r)}(t)\equiv$$

$$\equiv\sum_{s=0}^{\infty}\lambda^s p_0 f_{s,i}^{(n)}(t)+\sum_{s=0}^{\infty}\Big[\sum_{r=0}^{n-1}p_{n-r}f_{s,i}^{(r)}(t)\Big]\lambda^{s+1},$$

а потому при $s=0, 1, 2, \ldots$

$$p_0f_{s+1,i}^{(n)}(t)+\sum_{r=0}^{n-1}p_{n-r}f_{s,i}^{(r)}(t)=0,$$

---

[1]) Обозначая для большей ясности $x_k(t)$ через $x_k(t, \lambda)$, получаем, что

$$x_k'(t, \lambda)=\varphi_{0,k}(t)+\lambda\varphi_{1,k}(t)+\ldots+\lambda^s\varphi_{s,k}(t)+\ldots;$$

но по интегральной формуле Коши $\varphi_{s,k}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{x_k'(t,\lambda)}{\lambda^{s+1}}d\lambda$, $f_{s,k}(t)=$ $=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{x_k(t,\lambda)}{\lambda^{s+1}}d\lambda$, а потому, принимая во внимание теорему о дифференцировании под знаком интеграла, выводим, что $f_{s,k}'(t)=\varphi_{s,k}(t)$.

откуда, принимая во внимание (7), получаем рекуррентную формулу

$$f_{s+1,i}(t)=-\frac{1}{(n-1)!}\int_{t_0}^{t}(t-u)^{n-1}\frac{1}{p_0(u)}\sum_{r=0}^{n-1}p_{n-r}(u)f_{s,i}^{(r)}(u)\,du. \quad (8)$$

Если положить в формулах (6), (6′) $\lambda=1$ и $t=t_0+\omega$ и принять во внимание равенства (3), то для коэффициентов $a_{i,r}$ получаются выражения

$$a_{i,r+1}=\sum_{s=0}^{\infty}f_{s,i}^{(r)}(t_0+\omega),\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

2. Исследования А. М. Ляпунова об уравнениях второго порядка. а) Рассмотрим в качестве приложения изложенных выше результатов уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p(t)\,x=0, \quad (9)$$

где функция $p(t)$ определена в $(-\infty,+\infty)$, непрерывна и имеет период $\omega>0$, и напомним некоторые результаты А. М. Ляпунова[1]).

Обозначим через $f(t)$ и $\varphi(t)$ решения уравнения (9), удовлетворяющие начальным условиям

$$f(0)=1,\ f'(0)=0;\quad \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1\ ^{2)}. \quad (10)$$

Тогда

$$f(t+\omega)=a_{1,1}f(t)+a_{1,2}\varphi(t),\quad \varphi(t+\omega)=a_{2,1}f(t)+a_{2,2}\varphi(t) \quad (11)$$

и характеристическое уравнение (§ 1, п. 2„б“) можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\rho & a_{2,1}\\ a_{1,2} & a_{2,2}-\rho\end{vmatrix}=\rho^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\rho+(a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1})=0.$$

Но по теореме Пуанкаре (§ 1, п. 2„а“) $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}=1$, а потому характеристическое уравнение приводится к виду

$$\rho^2-(a_{1,1}+a_{2,2})\rho+1=0.$$

Согласно (10) и (11), имеем $f(\omega)=a_{1,1}$, $\varphi'(\omega)=a_{2,2}$, а потому полагая

$$2A=f(\omega)+\varphi'(\omega), \quad (12)$$

получаем для характеристического уравнения следующее выражение

$$\rho^2-2A\rho+1=0. \quad (13)$$

---

1) См. Ляпунов А. М. [1], [2], [3], [4].

Относительно изучения периодических решений приведенного в тексте уравнения (9) см. Пикар [2], [3].

2) В обозначениях п. 1 имеем $f=x_1(t)$, $\varphi=x_2(t)$.

По результатам из п. 1 имеем [1])

$$f(t)=f_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n f_n(t),\quad \varphi(t)=\varphi_0+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\varphi_n(t),$$

где

$$\left.\begin{aligned} &f_0=1,\ f_{s+1}(t)=-\int_0^t (t-u)\,p(u)\,f_s(u)\,du,\\ &\varphi_0=t,\ \varphi_{s+1}(t)=-\int_0^t (t-u)\,p(u)\,\varphi_s(u)\,du\ (s=0,1,\ldots),\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

а потому

$$2A=2+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n[f_n(\omega)+\varphi_n'(\omega)],$$

или, полагая

$$(-1)^n 2A_n=f_n(\omega)+\varphi_n'(\omega),\tag{15}$$

$$A=1-\lambda A_1+\lambda^2 A_2-\lambda^3 A_3+\ldots .\tag{16}$$

Из (14) и (15) имеем

$$2A_1=\int_0^{\omega}(\omega-u)\,p(u)\,f_0(u)\,du+\int_0^{\omega}p(u)\,\varphi_0(u)\,du=\omega\int_0^{\omega}p(u)\,du,$$

т. е.

$$2A_1=\omega\int_0^{\omega}p(u)\,du.$$

Если положить

$$\int_0^t p(u)\,du=P(t),\quad P(\omega)=\Omega,$$

то по индукции доказывается, что

$$2A_n=\int_0^{\omega}du_1\int_0^{u_1}du_2\ldots\int_0^{u_{n-1}}\Theta\,du_n,$$

где

$$\Theta=[\Omega-P(u_1)+P(u_2)]\,[P(u_1)-P(u_2)]\ldots[P(u_{n-1})-P(u_n)].$$

б) Если предположить, что $p(t)<0$, то $f_n(\omega)>0$, $\varphi_n'(\omega)>0$, *постоянные* A_n *имеют знак* $(-1)^n$, а потому из (16) следует, что при $\lambda>0$ постоянная A больше единицы. Следовательно, в этом случае характеристическое уравнение имеет два действительных корня

[1]) В обозначениях п. 1 имеем $f_{n,1}=f_n$, $f_{n,2}=\varphi_n$.

ρ_1 и ρ_2, причем $\rho_1 > 1$ и $0 < \rho_2 < 1$. Соответствующие характеристические показатели α_1 и α_2 таковы, что

$$\alpha_1 = (\ln \rho_1)/\omega > 0, \quad \alpha_2 = (\ln \rho_2)/\omega < 0,$$

и общее решение уравнения (1) имеет вид

$$c_1 e^{\alpha_1 t}\sigma_1(t) + c_2 e^{\alpha_2 t}\sigma_2(t),$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а $\sigma_1(t)$ и $\sigma_2(t)$ — функции, имеющие период ω. Отсюда выводится асимптотическое поведение решений этого уравнения при $t \to \infty$ (см. § 1, п. 4„г").

в) Если $p(t) > 0$ $(-\infty < t < +\infty)$, то все A_n положительны. В этом случае справедливы следующие результаты А. М. Ляпунова, которые мы дадим без доказательства:

1. $$0 < A_{m+n} < \frac{m!\,n!}{(m+n)!} A_m A_n.$$

2. Для всех положительных значений λ, таких, что

$$0 < \frac{\omega\lambda}{2} \int_0^{\omega} p(u)\,du \leqslant 2, \tag{17}$$

имеет место неравенство $A^2 < 1$. Поэтому, *если* $p(t) > 0$ *и выполняется неравенство* (17), то корни характеристического уравнения (13) имеют вид $\rho = A \pm i\sqrt{1 - A^2}$, $\rho_1 = e^{i\theta}$, $\rho_2 = e^{-i\theta}$, а потому общее решение уравнения (9) имеет вид (§ 1, п. 4„в")

$$x(t) = c_1\sigma_1(t) + c_2\sigma_2(t),$$

$$\sigma_1(t) = \cos\frac{\theta t}{\omega}\psi_1(t) - \sin\frac{\theta t}{\omega}\psi_2(t),$$

$$\sigma_2(t) = \cos\frac{\theta t}{\omega}\psi_2(t) + \sin\frac{\theta t}{\omega}\psi_1(t_1),$$

где $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ — функции, имеющие период ω, а c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

При наших предположениях из найденного для $x(t)$ выражения легко вывести, что если $x(t)$ является решением уравнения (9), удовлетворяющим начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x'_0$, то для любого положительного числа ε можно найти такое δ, что для всех решений $\bar{x}(t)$ уравнения (9), удовлетворяющих начальным условиям

$$\bar{x}(t_0) = x_0 + \delta_1, \quad \bar{x}'(t_0) = x'_0 + \delta_2,$$

где $|\delta_1| < \delta$, $|\delta_2| < \delta$, и для всех t $(-\infty, +\infty)$ имеет место неравенство

$$|\bar{x}(t) - x(t)| < \varepsilon.$$

Иными словами, в этом случае *решения уравнения* (9) *устойчивы* (см. гл. VII, § 1, п. 1).

Недавно ван Кампен и Уинтнер [1] показали, что условие (17) не может быть улучшено, т. е. что из условий $p(t)>0$ и

$$0<\frac{\lambda\omega}{2}\int\limits_0^\omega p(u)\,du\leqslant 2+\varepsilon \quad (\varepsilon>0)$$

нельзя вывести устойчивость всех решений уравнения (9).

3. Метод Хилла вычисления характеристических показателей при помощи бесконечных определителей. а) Мы хотим закончить этот параграф изложением метода бесконечных определителей, примененного астрономом Хиллом для нахождения характеристических показателей [1]).

Пусть надо изучить решения уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+A(t)\,x=0, \tag{18}$$

где $A(t)$ — непрерывная четная функция $[A(-t)=A(t)]$, имеющая период π, $[A(t+\pi)=A(t)]$, и пусть разложение $A(t)$ в тригонометрический ряд Фурье

$$A(t)=\theta_0+2\theta_1\cos 2t+2\theta_2\cos 4t+\ldots+2\theta_n\cos 2nt+\ldots \tag{19}$$

таково, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\theta_n| \tag{20}$$

сходится [2]).

Предположим, что уравнение (18) имеет решение вида $e^{\mu t}\varphi(t)$ (μ — характеристический показатель), где функция $\varphi(t)$ периодична с периодом π (§ 1, п. 4„б“); разлагая $\varphi(t)$ в ряд Фурье и выражая синусы и косинусы через показательную функцию, получаем, что

$$x=e^{\mu t}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{2int}, \tag{21}$$

причем, из того, что функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную вторую производную, следует, что $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}|b_n|<+\infty$.

Положим

$$\theta_{-n}=\theta_n \tag{22}$$

---

[1]) Хилл [1]. С этого классического мемуара начинается изучение дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

[2]) Это имеет место, например, если функция $A(t)$ имеет в $[0,\pi]$ производную, удовлетворяющую условию Липшица порядка $\alpha>0$, $|A'(t_1)-A'(t_2)|\leqslant L\,|t_1-t_2|^\alpha$ (см. Натансон И. П. [1], стр. 188).

и подставим (21) в (18); допуская законность почленного дифференцирования, получаем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\mu+2in)^2 b_n e^{(\mu+2in)t} + \Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \theta_n e^{2int}\Big)\Big(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n e^{(\mu+2in)t}\Big) = 0.$$

Отсюда следует, что числа

$$\ldots,\ b_{-2},\ b_{-1},\ b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots$$

должны удовлетворять бесконечной системе однородных линейных уравнений с бесконечным множеством неизвестных, имеющих следующий вид

$$(\mu+2in)^2 b_n + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \theta_m b_{n-m} = 0. \tag{23}$$

Предполагая, что $\theta_0 \neq (2n)^2$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), умножим уравнение (23) на $-1/[(2n)^2-\theta_0]$. Мы получим тогда другую систему

$$-\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta_0} b_{n-m} + \frac{(i\mu-2n)^2-\theta_0}{(2n)^2-\theta_0} b_n - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\theta_m}{(2n)^2-\theta_0} b_{n+m} = 0 \tag{24}$$

$$(n=\ldots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

определитель которой обозначим через $\Delta(i\mu)$, иными словами,

$$\Delta(i\mu) = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \ldots & \frac{(i\mu+4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0}, & \ldots \\ \ldots & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu+2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0}, & \ldots \\ \ldots & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu)^2-\theta_0}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{0^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{0^2-\theta_0}, & \ldots \\ \ldots & -\frac{\theta_3}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu-2)^2-\theta_0}{2^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{2^2-\theta_0}, & \ldots \\ \ldots & -\frac{\theta_4}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_3}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_2}{4^2-\theta_0}, & -\frac{\theta_1}{4^2-\theta_0}, & \frac{(i\mu-4)^2-\theta_0}{4^2-\theta_0}, & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Определитель $\Delta(i\mu)$ называется *определителем Хилла* системы (24).

Предположим еще, что $\theta_0-(i\mu-2n)^2 \neq 0$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); если заменить уравнение (23) уравнением, получающимся из него делением на $\theta_0-(i\mu-2n)^2$, то получится новая система относительно неизвестных b_n, определитель $\Delta_1(i\mu)$ которой имеет вид $\Delta_1(i\mu) = \|a_{n,m}\|$, ($n, m = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$), где

$$a_{n,n}=1, \quad a_{n,m} = -\theta_{n-m}/[(2n-i\mu)^2-\theta_0] \quad (n \neq m).$$

Непосредственно доказывается, что определитель $\Delta_1(i\mu)$ *нормален* (см. Рисс Ф. [1], стр. 24); в самом деле, полагая $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\theta_n| = L$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\neq n}}^{\infty} \frac{|\theta_{n-m}|}{|(2n-i\mu)^2-\theta_0|} = \frac{L}{|\mu^2+\theta_0|} + L \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{|(2n-i\mu)^2-\theta_0|} < +\infty.$$

Так как числа $|b_n|$ ограничены в совокупности, то по известным результатам теории бесконечных определителей из существования ненулевого решения нашей системы вытекает равенство нулю определителя $\Delta_1(i\mu)$ (см. Рисс Ф. [1], стр. 29). Но

$$\Delta(i\mu) = \Delta_1(i\mu) \prod_{n=-\infty}^{+\infty} [\theta_0 - (i\mu - 2n)^2]/[\theta_0 - 4n^2],$$

и так как по известной формуле Эйлера [1]) имеем

$$\frac{\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu - \sqrt{\theta_0}) \sin\frac{1}{2}\pi(i\mu + \sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)} = \frac{(i\mu)^2-\theta_0}{\theta_0} \times$$

$$\times \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - \frac{(i\mu - \sqrt{\theta_0})^2}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{(i\mu + \sqrt{\theta_0})^2}{4n^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{4}\frac{\theta_0}{n^2}\right)^2},$$

то

$$\Delta(i\mu) = -\Delta_1(i\mu) \frac{\sin\frac{1}{2}\pi(i\mu - \sqrt{\theta_0}) \sin\frac{1}{2}\pi(i\mu + \sqrt{\theta_0})}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right)},$$

и, следовательно, *характеристический показатель* μ *решения* $e^{\mu t}\varphi(t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta(i\mu) = 0.$$

б) Можно доказать, что

$$\Delta(i\mu) = \Delta(0) - \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right) \Big/ \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right),$$

а потому *характеристический показатель* μ *удовлетворяет уравнению*

$$\Delta(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\sqrt{\theta_0}\right) = \sin^2\left(\frac{1}{2}\pi i\mu\right)$$

(см. Уиттекер и Ватсон [1], ч. 2, стр. 241).

---

[1]) См. Привалов И. И. [1], стр. 254. — *Прим. перев.*

§ 3. Самосопряженные системы второго порядка с периодическими краевыми условиями

1. Существование собственных значений. Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t, \lambda)\frac{dx}{dt}\right] - Q(t, \lambda)x = 0, \quad \theta(t, \lambda) > 0, \tag{1}$$

$$x(a, \lambda) - x(b, \lambda) = 0, \tag{2}$$

$$x'(a, \lambda) - x'(b, \lambda) = 0, \tag{3}$$

где функции $\theta(t, \lambda)$, $Q(t, \lambda)$ зависят от изменяющегося в промежутке (Δ_1, Δ_2), $(\Delta_1 < \Delta_2)$ параметра λ, и предположим, что:

а) Функции $\theta(t, \lambda)$, $\frac{\partial\theta(t, \lambda)}{\partial t}$, $Q(t, \lambda)$ являются непрерывными функциями от t и λ при $a \leqslant t \leqslant b$ и $\Delta_1 < \lambda < \Delta_2$, причем, если придать переменной t любое значение из $[a, b]$, то функции $\theta(t, \lambda)$ и $Q(t, \lambda)$ станут непрерывными невозрастающими функциями от λ, $\Delta_1 < \lambda < \Delta_2$.

б) Ни в одной части отрезка $[a, b]$ функция $Q(t, \lambda)$ не обращается тождественно в нуль при двух различных значениях λ.

в) Ни в одной части отрезка $[a, b]$ не выполняются одновременно равенства $\theta(t, \lambda_1) = \theta(t, \lambda_2)$, $Q(t, \lambda_1) = Q(t, \lambda_2)$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Мы видели, что эта система самосопряжена, если выполняется условие (гл. V, § 2, п. 6)

$$\theta(a, \lambda) \equiv \theta(b, \lambda). \tag{4}$$

Изучим, существуют ли при сделанных нами предположениях значения параметра λ (собственные значения), которым соответствуют не равные тождественно нулю решения системы (1), (2), (3).

Если кроме условия (4) выполняются условия $\theta'_t(a, \lambda) \equiv \theta'_t(b, \lambda)$, $Q(a, \lambda) \equiv Q(b, \lambda)$, то уравнение (1) можно рассматривать как уравнение с периодическими коэффициентами, определив функции $\theta(t, \lambda)$, $Q(t, \lambda)$ при $-\infty < t < +\infty$ соотношениями $\theta[t + (b-a), \lambda] \equiv \theta(t, \lambda)$, $Q[t + (b-a), \lambda] \equiv Q(t, \lambda)$, $-\infty < t < +\infty$. В этом случае коэффициенты имеют период $b-a$, а рассматриваемая задача сводится к задаче о нахождении решений уравнения (1), имеющих период $b-a$; по этой причине система (1), (2), (3) называется *дифференциальной системой с периодическими краевыми условиями.*

Допустим, что кроме предположений „а", „б", „в" и (4) коэффициенты $Q(t, \lambda)$, $\theta(t, \lambda)$ удовлетворяют одному из следующих двух условий:

г$_1$)
$$\lim_{\lambda\to\Delta_2} -\max_{a\leqslant t\leqslant b} Q(t, \lambda) / \max_{a\leqslant t\leqslant b} \theta(t, \lambda) = +\infty,$$
$$\lim_{\lambda\to\Delta_1} \min_{a\leqslant t\leqslant b} Q(t, \lambda) = +\infty, \tag{5$_1$}$$
$$\theta(t, \lambda) \geqslant \tau > 0, \quad \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant b \quad \text{и} \quad \Delta_1 < \lambda < \Delta_2.$$

г$_2$) $[\Lambda_1, \Lambda_2)$ является полуоткрытым промежутком, причем

$$\lim_{\lambda\to\Lambda_2} - \max_{a\leqslant t\leqslant b} Q(t, \lambda)/\max_{a\leqslant t\leqslant b} \theta(t, \lambda) = +\infty, \tag{5_2}$$

$$\min_{a\leqslant t\leqslant b} Q(t, \Lambda_1) \geqslant 0.$$

Покажем, что при *выполнении условий* „а“, „б“, „в“, „г$_1$“ *и* (4) *или* „а“, „б“, „в“, „г$_2$“ *и* (4) существует бесконечное множество *собственных значений дифференциальной системы* (1), (2), (3)[1].

Обозначим через $x_1(t, \lambda)$, $x_2(t, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения (1), определяемую начальными условиями

$$x_1(a, \lambda) = 1, \quad x_1'(a, \lambda) = 0, \quad x_2(a, \lambda) = 0, \quad x_2'(a, \lambda) = 1.$$

Тогда (гл. II, § 1, п. 2„в“)

$$\begin{vmatrix} x_1(t, \lambda) & x_2(t, \lambda) \\ x_1'(t, \lambda) & x_2'(t, \lambda) \end{vmatrix} = \frac{\theta(a, \lambda)}{\theta(t, \lambda)}$$

и при $t = b$

$$x_1(b, \lambda)\, x_2'(b, \lambda) - x_2(b, \lambda)\, x_1'(b, \lambda) = 1. \tag{6}$$

Если $c_1 x_1(t, \lambda) + c_2 x_2(t, \lambda)$ является решением, удовлетворяющим периодическим краевым условиям (2) и (3), то должны выполняться равенства

$$c_1[1 - x_1(b, \lambda)] - c_2 x_2(b, \lambda) = 0, \quad -c_1 x_1'(b, \lambda) + c_2[1 - x_2'(b, \lambda)] = 0.$$

Эта система уравнений относительно c_1 и c_2 имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения, получающегося приравниванием нулю определителя матрицы

$$\begin{Vmatrix} 1 - x_1(b, \lambda) & -x_2(b, \lambda) \\ -x_1'(b, \lambda) & 1 - x_2'(b, \lambda) \end{Vmatrix}. \tag{7}$$

В силу (6), это уравнение можно записать в виде

$$F(\lambda) = -2 + x_1(b, \lambda) + x_2'(b, \lambda) = 0. \tag{8}$$

Таким образом, *собственные значения λ совпадают с корнями уравнения* (8).

Заметим, что если для собственного значения λ ранг матрицы (7) равен единице, то ему соответствует только одна собственная функция, если же при этом значении λ все члены матрицы (7) обращаются в нуль, то ему соответствуют две линейно независимые собственные функции, удовлетворяющие системе (1), (2), (3), и в этом случае λ называется *двойным собственным значением*.

[1]) См. Бохер [2], стр. 78 и 83, а также Хаупт [1], Эттлингер [1], [2], Камке [3].

Рассмотрим одновременно с системой (1), (2), (3) систему

$$\frac{d}{dt}\left[\theta(t, \lambda)\frac{dx}{dt}\right]-Q(t, \lambda)\,x=0, \tag{9}$$

$$x(a, \lambda)=0, \tag{10}$$

$$x(b, \lambda)=0, \tag{11}$$

которая, в силу сделанных предположений, имеет такую последовательность собственных значений

$$\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots, (\mu_i<\mu_{i+1}),$$

что собственная функция $x(t, \mu_i)$, соответствующая собственному значению μ_i, имеет в промежутке (a, b) ровно i нулей (см. гл. IV, § 6, п. 5).

Так как $x_2(b, \mu_i)=0$ [1]), то, полагая $\lambda=\mu_i$, выводим из (6), что

$$x_1(b, \mu_i)\, x_2'(b, \mu_i)=1, \tag{12}$$

а потому $x_1(b, \mu_i)$ и $x_2'(b, \mu_i)$ имеют одинаковые знаки. Но тогда из (8) следует, что

$$F(\mu_i)=\varepsilon\left[\sqrt{|x_1(b, \mu_i)|}-\varepsilon\sqrt{|x_2'(b, \mu_i)|}\right]^2,$$

где $\varepsilon=+1$, если $x_2'(b, \mu_i)>0$ и $\varepsilon=-1$, если $x_2'(b, \mu_i)<0$.

Так как $x_2'(a, \mu_0)=1$ и $x_2(t, \mu_0)$ положительно в (a, b), то $x_2'(b, \mu_0)<0$; аналогично, из того, что $x_2'(a, \mu_1)=1$, а $x_2(t, \mu_1)$ имеет ровно один нуль в промежутке (a, b), следует, что $x_2'(b, \mu_1)>0$. Продолжая это рассуждение, получаем, что

$$F(\mu_0)\leqslant 0,\ F(\mu_1)\geqslant 0,\ F(\mu_2)\leqslant 0,\ F(\mu_3)\geqslant 0, \ldots.$$

Но $F(\lambda)$ является непрерывной функцией параметра λ, а потому уравнение $F(\lambda)=0$ имеет по крайней мере один корень в каждом из отрезков $[\mu_0, \mu_1]$, $[\mu_1, \mu_2]$, ...

Легко проверить, что

$$F(\mu_0)<0,\ F(\mu_2)<0, \ldots, F(\mu_{2p})<0, \ldots.$$

В самом деле, собственная функция системы (9), (10), (11), соответствующая собственному значению μ_{2p}, имеет в (a, b) ровно $2p$ нулей, и, в силу теоремы о разделении нулей (см. гл. IV, § 2, п. 7), любое другое решение уравнения (9) (соответствующее значению $\lambda=\mu_{2p}$), линейно независимое с этой собственной функцией, имеет на отрезке $[a, b]$ $2p+1$ нулей (*нечетное* число). Поэтому такое решение не может принимать одинаковые значения в концах отрезка $[a, b]$, что имело бы место, в силу (2), если бы $F(\mu_{2p})$ равнялось нулю.

---

[1]) Очевидно, что $x(b, \mu_i)=x_2(b, \mu_i)$. — *Прим. перев.*

Таким образом, *уравнение* $F(\lambda)=0$ *имеет в каждом из промежутков* (μ_0, μ_2), (μ_2, μ_4), ... *по крайней мере одну пару корней* (возможно совпадающих), чем и доказано существование бесконечного множества собственных значений для дифференциальной системы (1), (2), (3).

2. Осцилляционная теорема. а) Пусть $\bar{\lambda}$ — заключенное в промежутке (μ_{2p}, μ_{2p+2}) собственное значение для системы (1), (2), (3); так как собственная функция $y(x, \mu_{2p})$ для системы (9), (10), (11) имеет в промежутке (a, b) ровно $2p$ нулей, а предположения „а", „б", „в" позволяют применить теорему сравнения (см. гл. IV, § 6, п. 3„а"), то собственная функция $x(t, \bar{\lambda})$ системы (1), (2), (3) имеет в (a, b) по крайней мере $2p+1$ нулей. Отсюда следует, что *число нулей собственных функций системы* (1), (2), (3) *стремится к бесконечности при возрастании* $\bar{\lambda}$. Естественно поэтому поставить вопрос о существовании зависимости между индексами собственных значений, расположенных в виде неубывающей последовательности, и числом нулей соответствующих собственных функций.

б) Имеет место следующая теорема, приводимая нами без доказательства.

Если дифференциальная система (1), (2), (3) *удовлетворяет условиям* „а", „б", „в", „$г_1$" *и* (4) *или же условиям* „а", „б", „в", „$г_2$" *и* (4), *то ее собственные значения можно так расположить в виде неубывающей последовательности*

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots \quad (\lambda_i \leqslant \lambda_{i+1}),$$

что собственная функция, соответствующая собственному значению λ_i, *имеет в* $[a, b)$ i *нулей, если* i *четно, и* $i+1$ *нулей, если* i *нечетно* (см. Бохер [2], стр. 89).

Например, если рассматривается уравнение $x''+\lambda x=0$ и ищутся его решения, удовлетворяющие периодическим краевым условиям

$$x(0)=x(2\pi), \quad x'(0)=x'(2\pi),$$

то собственные значения в этом случае равны

$$\lambda=0^2, 1^2, \ldots, i^2, \ldots,$$

причем все собственные значения, за исключением $\lambda=0$, — двойные, и собственному значению $\lambda=i^2$ соответствуют собственные функции $\sin it$, $\cos it$; первая из них имеет в $0 \leqslant t < 2\pi$ $2i$ нулей, находящихся в точках $0, 1\frac{\pi}{i}, 2\frac{\pi}{i}, \ldots, (2i-1)\frac{\pi}{i}$, а вторая также имеет $2i$ нулей, находящихся в точках

$$1\frac{\pi}{2i}, 3\frac{\pi}{2i}, \ldots, (4i-1)\frac{\pi}{2i}.$$

§ 4. Дифференциальное уравнение Матье и функции, связанные с эллиптическим цилиндром

1. Элементарные решения уравнения колебаний эллиптической мембраны и уравнение Матье. а) Рассмотрим плоскую однородную мембрану, имеющую эллиптическую форму, равномерно натянутую во всех направлениях и закрепленную вдоль контура.

Выберем в качестве осей координат главные оси эллипса и рассмотрим задачу об определении смещения $w(x, y, t)$ точки (x, y) эллипса в момент времени t, когда мембрана выведена вначале из положения равновесия.

Хорошо известно, что если обозначить через m^2 отношение натяжения и плотности мембраны, то $w(x, y, t)$ является решением уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = m^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

обращающимся в нуль на контуре мембраны [1]).

К уравнению (1) приводят также и другие задачи математической физики. Рассмотрим распространение электромагнитных волн; напряжение электрического поля **E** будем считать параллельным оси z, тогда компоненты напряжения магнитного поля **H** будут $(H_x, H_y, 0)$. Уравнения Максвелла записываются в этом случае в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = c\frac{\partial H_y}{\partial x} - c\frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -c\frac{\partial E}{\partial y}, \quad \frac{\partial H_y}{\partial t} = c\frac{\partial E}{\partial x},$$

где через c обозначена скорость света. [См. Тамм И. Е. [1], стр. 423. — *Прим. перев.*]

Но тогда

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_y}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 H_x}{\partial y\,\partial t}, \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} \tag{1*}$$

и если волны падают на проводник, имеющий форму эллиптического цилиндра, главные оси сечения которого плоскостью $z=0$ совпадают с осями x и y, то вектор **E** должен обращаться в нуль на поверхности этого цилиндра, а потому мы получаем для (1*) ту же граничную задачу, что и для (1).

Будем искать решения, имеющие *постоянную частоту* p и вид $w = u(x, y)\cos(pt + \varepsilon)$. Тогда $u(x, y)$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{p^2}{m^2}u = 0. \tag{2}$$

---

[1]) См. Матье [1], стр. 197. [См. также Соболев С. Л. [1], стр. 13—16. — *Прим. перев.*]

Пусть фокусы эллипса имеют координаты $(\pm c, 0)$. Сделаем замену независимых переменных по формулам

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \quad y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta \tag{3}$$

(ξ, η — *эллиптические координаты*); при этой замене координатными линиями $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ будут соответственно софокусные эллипсы и гиперболы, имеющие фокусы в точках $(-c, 0)$, $(+c, 0)$.

Все точки мембраны получаются при $\xi \geqslant 0$ и $-\pi \leqslant \eta \leqslant \pi$. Простое вычисление показывает, что при замене переменных (3) уравнение (2) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{c^2 p^2}{m^2} (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) \, u = 0. \tag{4}$$

Найдем теперь *элементарное решение* получившегося уравнения, имеющее вид

$$u = F(\xi) \, G(\eta).$$

Подставляя это выражение в (4), получаем уравнение

$$\left[\frac{F''(\xi)}{F(\xi)} + \frac{c^2 p^2}{m^2} \operatorname{ch}^2 \xi\right] = -\left[\frac{G''(\eta)}{G(\eta)} - \frac{c^2 p^2}{m^2} \cos^2 \eta\right].$$

Так как левая часть этого уравнения является функцией от ξ, а правая — от η, то обе эти части должны равняться постоянной величине A, а потому

$$F''(\xi) + \left(\frac{c^2 p^2}{m^2} \operatorname{ch}^2 \xi - A\right) F(\xi) = 0, \tag{5}$$

$$G''(\eta) - \left(\frac{c^2 p^2}{m^2} \cos^2 \eta - A\right) G(\eta) = 0. \tag{6}$$

Укажем теперь в явном виде условия, которые надо наложить на функции F и G для того, чтобы получилось решение, удовлетворяющее граничным условиям нашей задачи.

Из непрерывности решения следует, что

$$G(-\pi) = G(\pi), \quad G'(-\pi) = G'(\pi),$$

а потому функция *G должна иметь период* 2π, или, иными словами, постоянная величина A в (6) (собственное значение) должна быть выбрана таким образом, чтобы это уравнение имело решение с периодом 2π.

Если обозначить через a большую полуось эллипса и если ξ_0 таково, что $c \operatorname{ch} \xi_0 = a$, то должно иметь место равенство $F(\xi_0) = 0$. В силу (5), это условие определяет функцию $F(\xi)$ при заданном собственном значении A с точностью до постоянного множителя.

б) Если положить в (6)

$$l = A - \frac{c^2 p^2}{2m^2}, \quad h^2 = \frac{c^2 p^2}{4m^2},$$

то оно примет вид

$$G''(\eta)+(l-2h^2\cos 2\eta)\,G=0.$$

Это уравнение называется уравнением Матье. Уравнение Матье является частным случаем уравнения Хилла (§ 2, п. 3) [1]).

2. Функции Матье и их классификация по типам. а) Рассмотрим уравнение Матье

$$y''+[l-2h^2\cos 2x]\,y=0 \tag{7}$$

и заметим, что в силу результатов из гл. III, § 2, п. 1 любое решение этого уравнения является целой функцией как относительно x, так и относительно l.

Если $y(x, l)$ является одним из решений уравнения (7), то и $y(-x, l)$ будет его решением, а потому решениями уравнения (7) будут также функции $[y(x, l)+y(-x, l)]/2$, $[y(x, l)-y(-x, l)]/2$, из которых первая четна, а вторая нечетна. Поэтому нам достаточно ограничиться рассмотрением четных и нечетных решений уравнения (7).

При фиксированном значении l уравнение (7) не может иметь двух линейно независимых решений одинаковой четности; в самом деле, производная целой четной функции обращается в нуль при $x=0$ (нечетная целая функция обращается в нуль при $x=0$), в то время как уравнение (7) имеет решение, удовлетворяющее условию $y'(0)=1$ ($y(0)=1$). Таким образом, *фундаментальная система решений уравнения* (7) *может быть составлена из четного и нечетного решения.*

Заметим теперь, что, заменяя в уравнении (1) из § 3, п. 1, t на x, λ на l и полагая $\theta=1$, $Q(x, l)=2h^2\cos 2x-l$, мы получаем уравнение (7). При этом, если положить $\Delta_1=-2h^2$, $[Q(x,-2h^2)=2h^2\cos 2x+2h^2\geqslant 0]$, $\Delta_2=+\infty$, то в $[-\pi, \pi]$ выполняются предположения „а", „б", „в", „$г_2$" и (4) из § 3, п. 1, а следовательно, *существует неубывающая последовательность собственных значений* $\{l_m\}$, *стремящаяся к* $+\infty$, *которой соответствует последовательность собственных функций* $\{y(x, l_m)\}$, *имеющих период* 2π,

$$y(-\pi, l_m)=y(\pi, l_m);\quad y'(-\pi, l_m)=y'(\pi, l_m),$$

причем $y(x, l_m)$ *характеризуется тем, что при четном* m *имеет в* $[-\pi, \pi]$ m *нулей, а при нечетном* m *имеет в* $[-\pi, \pi]$ $m+1$ *нулей.*

б) Рассмотрим *четное* решение уравнения (7), имеющее период 2π; его можно разложить в равномерно сходящийся ряд косинусов [2]),

[1]) Относительно изучения уравнения Матье и полной библиографии отсылаем читателя к следующим трудам: Уиттекер и Ватсон [1], ч. 2, стр. 229—258, Гумберт [1], Стретт [1].

[2]) См., например, Толстов Г. П. [1], стр. 39, 108. — *Прим. перев.*

Если $y(x)$ является решением уравнения (7), то и $y(x+\pi)$ также является решением этого уравнения. Но уравнение не может иметь линейно независимых четных решений, а потому $y(x+\pi)$ должно отличаться от $y(x)$ лишь постоянным множителем, откуда следует, что разложение $y(x)$ в ряд косинусов может иметь один из следующих видов

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x, \quad \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2rx.$$

Аналогично нечетные решения должны иметь вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r' \sin(2r+1)x, \quad \sum_{r=1}^{\infty} c_r' \sin 2rx\,^{1)}.$$

Назовем эти *решения* соответственно решениями *типа* C_1, C_0, S_1, S_0.

Принимая во внимание, что при $h=0$ уравнение (7) принимает вид $y''+ly=0$, а это уравнение имеет собственные значения $l=m^2$ $(m=0, 1, 2, \ldots)$ и соответствующие им собственные функции $\cos mx$, $\sin mx$, условимся называть *функциями* Матье *первого вида* периодические решения уравнения (7), приводящиеся при $h\to 0$ (с точностью до постоянного множителя) к $\cos mx$, $\sin mx$. Они обозначаются соответственно символами

$$ce_{2n+1}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m+1}\cos(2m+1)x \quad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ A_{n,\,2n+1}=1),$$

$$ce_{2n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,\,2m}\cos 2mx \quad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ A_{n,\,2n}=1),$$

$$se_{2n+1}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} B_{n,\,2m+1}\sin(2m+1)x \quad (n=0,\ 1,\ \ldots,\ B_{n,\,2n+1}=1),$$

$$se_{2n}(x)=\sum_{m=0}^{\infty} B_{n,\,2m}\sin 2mx \quad (n=1,\ 2,\ \ldots,\ B_{n,\,2n}=1).$$

в) Если известно собственное значение l, то с помощью рекуррентного процесса можно найти соответствующую собственную функцию.

Пусть, например, требуется найти решение типа C_1; имеем

$$C_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x, \tag{8}$$

и так как разложение $C_1''(x)$ в ряд получается двукратным почленным дифференцированием ряда (8), то

$$C_1''(x)=-\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)^2 c_r \cos(2r+1)x.$$

---

[1]) См. сноску [2]) на стр. 296.

Подставляя в (7), получаем, что

$$\sum_{r=0}^{\infty}(2r+1)^2 c_r \cos(2r+1)x - l\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x +$$
$$+ h^2 \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+3)x + h^2 \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r-1)x = 0,$$

откуда вытекают рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &(l-1-h^2)c_0 - h^2c_1 = 0,\\ &[(2r+1)^2 - l]\,c_r + h^2(c_{r-1}+c_{r+1}) = 0 \ (r=1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (9_1)$$

Аналогично для решения типа C_0, $C_0(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos 2rx$, получаем рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &-lc_0 + h^2c_1 = 0,\ [2^2-l]\,c_1 + h^2(2c_0+c_2) = 0,\\ &[(2r)^2-l]\,c_r + h^2(c_{r-1}+c_{r+1}) = 0 \ (r=2,3,\ldots), \end{aligned}\right\} \quad (9_2)$$

и таким же путем для решений

$$S_1 = \sum_{r=0}^{\infty} c'_r \sin(2r+1)x, \quad S_0 = \sum_{r=1}^{\infty} c'_r \sin 2rx$$

имеют место рекуррентные соотношения

$$\left.\begin{aligned} &(l-1+h^2)c'_0 - h^2c'_1 = 0,\\ &[(2r+1)^2-l]\,c'_r + h^2(c'_{r-1}+c'_{r+1}) = 0 \ (r=1,\ 2,\ \ldots), \end{aligned}\right\} \quad (9_3)$$

$$\left.\begin{aligned} &(l-2^2)c'_1 - h^2c'_2 = 0,\\ &[(2r)^2-l]\,c'_r + h^2(c'_{r-1}+c'_{r+1}) = 0 \ (r=2,\ 3,\ \ldots). \end{aligned}\right\} \quad (9_4)$$

3. Отсутствие линейно независимых периодических решений, соответствующих одному и тому же собственному значению. Теорема Айнса. а) Формулы (9_1), (9_2), (9_3), (9_4) предыдущего номера позволяют нам доказать следующую теорему Айнса.

Если $h \neq 0$, *то любому собственному значению* l *уравнения* (7) *соответствует одна и только одна собственная функция* (см. Айнс [2]).

Предположим, что собственному значению l соответствуют две линейно независимые собственные функции y_1 и y_2; в силу изложенного в предыдущем номере мы можем считать, что одна из них четна, а другая нечетна, и потому мы можем предположить, что y_1 имеет тип C_0 или C_1, а y_2 — тип S_0 или S_1.

Имеем

$$y''_1 + [l - 2h^2\cos 2x]\,y_1 = 0, \quad y''_2 + [l - 2h^2\cos 2x]\,y_2 = 0.$$

Умножая первое равенство на y_2, а второе на y_1 и вычитая, получаем, что $[y_2 y_1' - y_1 y_2']' = 0$, а потому $y_2 y_1' - y_1 y_2' = \text{const}$. Отсюда следует, что если y_1 имеет тип $C_1 (C_0)$, то y_2 имеет тип $S_1 (S_0)$; в самом деле, если бы y_1 имело тип C_1, а y_2 — тип S_0, то при замене x на $x+\pi$ выражение $y_2 y_1' - y_1 y_2'$ должно было бы менять знак, а потому оно равнялось бы нулю, и функции y_1 и y_2 были бы линейно зависимы.

Пусть теперь функции y_1 и y_2 имеют, соответственно, типы C_1 и S_1 [1]; тогда в силу (9_1), (9_3)

$$(l-1-h^2)c_0 - h^2 c_1 = 0, \quad (l-1+h^2)c_0' - h^2 c_1' = 0, \tag{10_1}$$

$$\left.\begin{aligned} [(2r+1)^2 - l]\,c_r + h^2(c_{r+1}+c_{r-1}) = 0,\\ [(2r+1)^2 - l]\,c_r' + h^2(c_{r+1}'+c_{r-1}') = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10_2}$$

Так как $h \neq 0$, то, исключая l из (10_1) и (10_2), получаем, что

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_0' & c_1' \end{vmatrix} = 2c_0 c_0', \quad \begin{vmatrix} c_r & c_{r+1} \\ c_r' & c_{r+1}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{r-1} & c_r \\ c_{r-1}' & c_r' \end{vmatrix},$$

и, следовательно,

$$\begin{vmatrix} c_r & c_{r+1} \\ c_r' & c_{r+1}' \end{vmatrix} = 2c_0 c_0' \quad (r = 0, 1, \ldots). \tag{11}$$

Но тригонометрические ряды

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r \cos(2r+1)x, \quad \sum_{r=0}^{\infty} c_r' \sin(2r+1)x$$

являются рядами Фурье, а потому

$$\lim_{r\to\infty} c_r = \lim_{r\to\infty} c_r' = 0 \text{ [2]},$$

и, следовательно, в силу (11) $c_0 c_0' = 0$. Но $h \neq 0$, и из формул (10_1), (10_2) следует, что по крайней мере одна из последовательностей $\{c_r\}$, $\{c_r'\}$ состоит из нулей, а потому либо $y_1 \equiv 0$, либо $y_2 \equiv 0$, чего не может быть.

б) Из доказанной теоремы следует, что любая собственная функция уравнения Матье должна быть либо четной, либо нечетной; в самом деле, если $y(x, l)$ является собственной функцией, имеющей период 2π, то $y(-x, l)$ также является собственной функцией того же периода, принадлежащей тому же собственному значению, и по

---

[1] Аналогично проводится рассуждение в случае, когда y_1 и y_2 имеют, соответственно, типы C_0 и S_0.

[2] См., например, Фихтенгольц Г. М. [1], т. III, стр. 519. — *Прим. перев.*

доказанной теореме эти два решения могут различаться лишь постоянным множителем [1]).

4. Интегральное уравнение Уиттекера для функций Матье. Отметим, наконец, одно из весьма важных интегральных уравнений Уиттекера, которым удовлетворяют функции Матье; с этими уравнениями связан ряд исследований английской школы, посвященных этому важному классу функций (см. Уиттекер [1], а также Пуль [1]).

Докажем, что если $y(x)$ является решением уравнения Матье, имеющим период 2π, типа C_0 или S_1, то оно удовлетворяет интегральному уравнению Уиттекера с симметрическим ядром

$$y(x)=\lambda\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}y(\theta)\,d\theta. \tag{12}$$

Заметим, что (7) можно записать в виде

$$y''+(l_1-4h^2\cos^2 x)\,y=0.$$

Предполагая, что l_1 — собственное значение, а $y(x)$ — соответствующая собственная функция, имеющая период 2π, рассмотрим функцию

$$Y(x)=\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}y(\theta)\,d\theta, \tag{13}$$

которая также имеет период 2π.

Легко установить, что

$$\begin{aligned}Y''+(l_1-4h^2\cos^2 x)\,Y&=\\ =\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}\,[4h^2\cos^2 x\sin^2\theta&-2h\sin x\sin\theta+\\ &+(l_1-4h^2\cos^2 x)]\,y(\theta)\,d\theta,\end{aligned}$$

но

$$\begin{aligned}4h^2\cos^2 x\sin^2\theta-4h^2\cos^2 x&=\\ =4h^2\,[(1-\sin^2 x)(1-\cos^2\theta)&-\cos^2 x]=\\ &=4h^2\,[\sin^2 x\cos^2\theta-\cos^2\theta],\end{aligned}$$

а потому

$$\begin{aligned}Y''+(l_1-4h^2\cos^2 x)\,Y&=\\ =\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}\,[4h^2\sin^2 x\cos^2\theta&-2h\sin x\sin\theta+\\ &+(l_1-4h^2\cos^2\theta)]\,y(\theta)\,d\theta.\end{aligned}$$

---

[1]) Этот множитель может равняться или 1, или -1. — *Прим. перев.*