

Интегрируя последовательно по частям и принимая во внимание периодичность  $y(\theta)$  и  $dy/d\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \sin x \sin \theta} [4h^2 \sin^2 x \cos^2 \theta - 2h \sin x \sin \theta] y(\theta) d\theta = \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} 2h \frac{d [\sin x \cos \theta e^{2h \sin x \sin \theta}]}{d\theta} y(\theta) d\theta = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \sin x \sin \theta} 2h \sin x \cos \theta \frac{dy}{d\theta} d\theta = \\ &= - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d}{d\theta} [e^{2h \sin x \sin \theta}] \frac{dy}{d\theta} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \sin x \sin \theta} \frac{d^2 y}{d\theta^2} d\theta \end{aligned}$$

и потому

$$\begin{aligned} Y'' + [l_1 - 4h^2 \cos^2 x] Y = \\ = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h \sin x \sin \theta} \left[ \frac{d^2 y}{d\theta^2} + (l_1 - 4h^2 \cos^2 \theta) y \right] d\theta = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, функция  $Y(x)$  удовлетворяет уравнению Маттье.

Функция  $Y(x)$  не обращается тождественно в нуль, когда  $x$  изменяется в  $[-\pi, \pi]$ . В самом деле,

$$e^{2h \sin x \sin \theta} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(2h)^v}{v!} \sin^v x \sin^v \theta.$$

Стоящий справа ряд равномерно сходится, когда  $\theta$  изменяется в  $[-\pi, \pi]$ , поэтому если бы  $Y(x)$  тождественно разнялось нулю в  $[-\pi, \pi]$ , то имело бы место равенство

$$0 = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(2h)^v}{v!} \sin^v x \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \sin^v \theta d\theta, \quad (-\pi \leq x \leq \pi).$$

Но так как справа стоит ряд, расположенный по степеням  $\sin x$ , то из этого равенства следовало бы, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \sin^v \theta d\theta = 0 \quad (v = 0, 1, 2, \dots),$$

и, по формулам Эйлера<sup>1)</sup>,

$$\begin{aligned} (-1)^r 2^{2r-1} \sin^{2r} \theta &= \binom{2r}{0} \cos 2r\theta - \binom{2r}{1} \cos (2r-2)\theta + \\ &\quad + \binom{2r}{2} \cos (2r-4)\theta - \dots + (-1)^r \frac{1}{2} \binom{2r}{r}, \\ (-1)^r 2^{2r} \sin^{2r+1} \theta &= \binom{2r+1}{0} \sin (2r+1)\theta - \\ &\quad - \binom{2r+1}{1} \sin (2r-1)\theta + \binom{2r+1}{2} \sin (2r-3)\theta - \dots + \\ &\quad + (-1)^r \binom{2r+1}{r} \sin \theta \end{aligned}$$

должны были бы выполняться равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \cos 2r\theta d\theta = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta) \sin (2r+1)\theta d\theta = 0$$

$$(r = 0, 1, 2, \dots).$$

Так как  $y(\theta)$  имеет, по предположению, тип  $C_0$  или  $S_1$ , то все его коэффициенты были бы равны нулю, а тогда и сама функция  $y(\theta)$  тождественно равнялась бы нулю, вопреки предположению.

Но тогда, по теореме Айнса (п. 3), функция  $Y(x)$  может отличаться от  $y(x)$  лишь постоянным множителем  $\lambda$ , а потому  $y(x) = \lambda Y(x)$  и уравнение (12) следует из формулы (13).

## § 5. Системы линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами

а) Укажем вкратце, как получить для систем однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами результаты, аналогичные полученным в § 1 для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть дана система

$$x'_i(t) = \sum_{l=1}^n a_{i,l}(t) x_l(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

коэффициенты которой  $a_{i,l}(t)$  определены в  $(-\infty, +\infty)$ , непрерывны и имеют один и тот же период  $\omega$  ( $\omega > 0$ ),

$$a_{i,l}(t+\omega) = a_{i,l}(\omega), \quad (i, l = 1, 2, \dots, n), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Эти формулы легко вывести, возведя известную формулу Эйлера  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  в степени  $2r+1$  и  $2r$  и раскрыв правую часть по биному Ньютона. — Прим. ред.

Пусть  $n$  решений системы (1)

$$x_{1,k}(t), x_{2,k}(t), \dots, x_{n,k}(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

образуют фундаментальную систему решений, и, следовательно,

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{2,1}(t) & \dots & x_{n,1}(t) \\ x_{1,2}(t) & x_{2,2}(t) & \dots & x_{n,2}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,n}(t) & x_{2,n}(t) & \dots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как известно, общее решение системы (1) имеет вид

$$x_i(t) = c_1 x_{i,1}(t) + c_2 x_{i,2}(t) + \dots + c_n x_{i,n}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (4)$$

Определим теперь постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$  так, чтобы существовала такая соответствующая им постоянная  $\rho$ , что

$$x_i(t + \omega) = \rho x_i(t) \quad [i = 1, 2, \dots, n; -\infty < t < +\infty]. \quad (5)$$

Из сделанных предположений следует, что  $n$  решений

$$x_{1,k}(t + \omega), x_{2,k}(t + \omega), \dots, x_{n,k}(t + \omega) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

также дают нам фундаментальную систему решений системы (1); в самом деле (гл. II, § 1, п. 2),

$$\begin{aligned} \Delta(t + \omega) &= \text{Det} \|x_{i,k}(t + \omega)\| = \\ &= \Delta(t) e^{\int_{t+\omega}^{t+\omega} \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) dt} = \Delta(t) e^{\int_0^\omega \left( \sum_{i=1}^n a_{i,i} \right) dt} \neq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Поэтому существуют  $n^2$  чисел  $\alpha_{l,k}$  ( $l, k = 1, 2, \dots, n$ ), таких, что

$$x_{i,k}(t + \omega) = \sum_{l=1}^n \alpha_{k,l} x_{i,l}(t) \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Из (4) следует, что

$$x_i(t + \omega) = \sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_k \alpha_{k,l} \right) x_{i,l}(t),$$

а потому для выполнения соотношений (5) необходимо и достаточно, чтобы постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$  были таковы, что

$$\sum_{l=1}^n \left( \sum_{k=1}^n c_k \alpha_{k,l} - \rho c_l \right) x_{i,l}(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Но  $\text{Det} \|x_{i,l}\| = \Delta(t) \neq 0$ , а потому должны иметь место равенства

$$\sum_{k=1}^n c_k \alpha_{k,l} - \rho c_l = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, n)$$

или

$$\alpha_{1,l}c_1 + \alpha_{2,l}c_2 + \dots + (\alpha_{l,l} - \rho)c_l + \dots + \alpha_{n,l}c_n \equiv 0. \quad (8)$$

Таким образом,  $\rho$  должно быть корнем характеристического уравнения

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - \rho & \alpha_{2,1} & \dots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - \rho & \dots & \alpha_{n,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \dots & \alpha_{n,n} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (9)$$

Итак, если  $\rho$  является корнем характеристического уравнения (9), то, выбирая постоянные  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , удовлетворяющие системе (8) при этом значении  $\rho$ , и строя по этим постоянным, согласно формуле (4), функции  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ , мы получаем решение, удовлетворяющее условию (5).

б) Из доказанного следует, что для того, чтобы система (1) обладала решением, имеющим период  $\omega$ , необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ей характеристическое уравнение (9) имело корень  $\rho = 1^1$ .

## § 6. Системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Периодические решения

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $t; x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda$  изменяются в области  $C_{n+2}$ , определенной неравенствами

$$-\infty < t < +\infty;$$

$$|x_i - x_i^0| \leq a \quad (a > 0; i = 1, 2, \dots, n); \quad \lambda^0 - c \leq \lambda \leq \lambda^0 + c \quad (c > 0).$$

Предположим, что задание при  $t = t^0$  системы начальных значений

$$x_1^0 + \alpha_1, x_2^0 + \alpha_2, \dots, x_n^0 + \alpha_n,$$

где  $|\alpha_i| \leq a$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и любого значения параметра  $\lambda$  из  $[\lambda^0 - c, \lambda^0 + c]$  однозначно определяет решение

$$x_i = \varphi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n, -\infty < t < +\infty), \quad (2)$$

1) Относительно распространения на линейные системы результатов из § 1, касающихся дифференциальных уравнений, см. Гурса [1], т. II, стр. 409—412, Моультон [1] стр. 317—348.

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i^0 + \alpha_i = \varphi_i(t^0; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Предположим также, что функции  $X_i$ , рассматриваемые как функции от  $t$ , имеют период  $\omega > 0$ ,

$$X_i(t + \omega; x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = X_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda), \\ -\infty < t < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

а также, что при  $\lambda = \lambda^0$  выполняются равенства

$$\varphi_i(t^0 + \omega; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0) = \varphi_i(t^0; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0) \quad (4) \\ (i = 1, 2, \dots, n),$$

т. е. что функции  $\varphi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda)$  принимают одинаковые значения при  $t = t^0$  и при  $t = t^0 + \omega$ , если

$$\lambda = \lambda^0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Если переменная  $t$  означает время, то можно интерпретировать уравнения (1) как уравнения движения точки  $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  в пространстве  $S_n$ . Тогда (4) эквивалентно предложению, что при движении, соответствующем значениям  $\lambda = \lambda^0, \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , точка  $P$  принимает одинаковые положения в моменты  $t^0$  и  $t^0 + \omega$ . Но из сделанных предположений следует, что, полагая в заданной системе  $\lambda = \lambda^0$ , мы получаем систему, не изменяющуюся при замене  $t$  на  $t + \omega$ , а потому функции  $\varphi_i(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) имеют период  $\omega$ , или, иными словами, при  $\lambda = \lambda^0$  решение системы (1)

$$x_i = \varphi_i(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i^0 = \varphi_i(t^0; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0),$$

периодично, равно как и движение точки  $P$ .

Для приложений важен следующий вопрос: существует ли такая окрестность  $(\lambda^0 - \delta, \lambda^0 + \delta)$  точки  $\lambda^0$ , что любому  $\lambda$ , принадлежащему этой окрестности, можно поставить в соответствие значения постоянных  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , которым соответствует решение

$$x_i = \varphi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

имеющее период  $\omega$ ?

Мы изучим этот вопрос в достаточно общем случае. Добавим к сделанным выше предположениям требование существования у функций  $X_i(t; x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda)$  непрерывных в  $C_{n+2}$  частных производных первого порядка по  $x_1, x_2, \dots, x_n; \lambda$ . Как указывалось в гл. I, § 5, п. 2, из этого требования вытекает существование и

непрерывность частных производных решений  $\varphi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda)$  по  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda$ .

Предположив выполнение этого требования, заметим сначала, что для периодичности решения (2) необходимо и достаточно, чтобы постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  удовлетворяли системе

$$\Phi_i = \varphi_i(t^0 + \omega; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n; \lambda) - \varphi_i(t^0; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0) - \alpha_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

При  $\lambda = \lambda^0$  эта система имеет решение  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ , и если ее якобиан

$$\frac{\partial [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n]}{\partial [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]}$$

отличен от нуля в некоторой окрестности точки  $(t^0, 0, 0, \dots, 0; \lambda^0)$ , то, в силу теоремы о неявных функциях, найдется настолько малое  $\delta$ , что при  $|\lambda - \lambda^0| \leq \delta$  можно найти систему функций  $\alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots, \alpha_n(\lambda)$ , удовлетворяющую системе (5), а тогда соответствующее решение

$$\varphi_i(t; \alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots, \alpha_n(\lambda); \lambda) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

имеет период  $\omega$ .

Если обозначить через  $\left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_k}\right)_0$  частную производную функции  $\Phi_i$  по  $\alpha_k$ , вычисленную в точке  $(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0)$ , и положить

$$V_{i,k} = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial \alpha_k}\right)_0, \quad X_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_k} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n),$$

то функции  $V_{i,k}$  будут решениями линейной системы уравнений в вариациях системы (1) (см. гл. I, § 5, п. 2; гл. VII, § 1, п. 2)

$$\frac{dV_{i,k}}{dt} = \sum_{l=1}^n X_{i,l}[t; \varphi_1(t, 0, 0, \dots, 0; \lambda^0), \dots, \varphi_n(t, 0, 0, \dots, 0; \lambda^0)] V_{l,k} \quad (i = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

удовлетворяющими начальным условием

$$V_{i,k}(t^0) = \delta_{i,k} [\delta_{i,i} = 1; \delta_{i,k} = 0 \text{ при } i \neq k; i, k = 1, 2, \dots, n].$$

Имеем

$$\left( \frac{\partial (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n)}{\partial (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \right)_0 =$$

$$= \begin{vmatrix} V_{1,1}(t^0 + \omega) - 1 & V_{1,2}(t^0 + \omega) \dots & V_{1,n}(t^0 + \omega) \\ V_{2,1}(t^0 + \omega) & V_{2,2}(t^0 + \omega) - 1 \dots & V_{2,n}(t^0 + \omega) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ V_{n,1}(t^0 + \omega) & V_{n,2}(t^0 + \omega) \dots & V_{n,n}(t^0 + \omega) - 1 \end{vmatrix}.$$

В силу сказанного в § 5 обращение в нуль этого определителя является необходимым и достаточным условием существования у системы уравнений в вариациях (6) решений, имеющих период  $\omega$ ; таким образом, мы доказали, что *при сделанных предположениях, если система в вариациях (6) системы (1), соответствующая известному решению*

$$\varphi_1(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0), \dots, \varphi_n(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0), \quad (7)$$

*имеющему период  $\omega$ , не имеет решений с периодом  $\omega$ , то существует такое положительное число  $\delta$ , что любому значению параметра  $\lambda$ , удовлетворяющему неравенству  $|\lambda - \lambda^0| \leq \delta$ , соответствует периодическое решение системы (1)*

$$\varphi_1[t; \alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_n(\lambda); \lambda], \dots, \varphi_n[t; \alpha_1(\lambda), \dots, \alpha_n(\lambda); \lambda] \quad (8)$$

*с периодом  $\omega$ .*

Более того, для любого положительного числа  $\sigma$  можно указать такое значение  $\delta$ , что при  $|\lambda - \lambda^0| \leq \delta$  и  $-\infty < t < +\infty$  выполняются неравенства

$$|\varphi_i(t; \alpha_1(\lambda), \alpha_2(\lambda), \dots, \alpha_n(\lambda); \lambda) - \varphi_i(t; 0, 0, \dots, 0; \lambda^0)| < \sigma \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

или, как говорится, *периодическое решение (7) системы (1) устойчиво относительно совокупности периодических решений (8)* (см. гл. VII, § 1, п. 1)<sup>1)</sup>.

## § 7. О периодических решениях дифференциального уравнения динамики точки, движущейся по заданной траектории

**1. Теорема Вейерштрасса.** Пусть материальная точка  $P$  постоянной массы  $m$  движется под действием силы  $F$ , зависящей от положения точки, по заданной траектории  $\Gamma$ .

Выберем в качестве параметра длину дуги  $s$  кривой  $\Gamma$ , а положительным направлением касательной будем считать направление, совпадающее с направлением возрастания  $s$ . Если обозначить через  $f(s)$  тангенциальную компоненту силы  $F$ , то уравнение движения имеет вид

$$ms'' = f(s) \quad \left[ s'' = \frac{d^2s}{dt^2}, \text{ где } t \text{ — время} \right]^2). \quad (1)$$

<sup>1)</sup> Более глубокое изложение этих вопросов, равно как и приложения развитой теории к знаменитой проблеме трех тел изложено в книге Пуанкаре [1], т. I, гл. III и IV; см. также Пикар [4], т. III, стр. 167—186.

О некоторых случаях устойчивости, зависящей от параметра линейной системы, см. Чезари [1].

<sup>2)</sup> См. Вейерштрасс [1], т. II, стр. 1—18; Леви-Чивита и Амальди [1], т. II, ч. I, стр. 19.

Мы будем считать, что функция  $f(s)$  непрерывно зависит от  $s$ . Положим

$$\int f(s) ds = U(s). \quad (2)$$

Умножая (1) на  $s'$ , получаем, что

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} ms'^2 \right] = \frac{d}{dt} U.$$

Интегрируя это равенство, получаем для кинетической энергии  $T (T = ms'^2/2)$  равенство

$$T - U = E \quad (E = \text{const}) \quad (3)$$

(интеграл энергии).

Положим

$$\frac{2}{m} [U(s) + E] = \Phi(s). \quad (4)$$

Тогда из (3) следует, что

$$\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 = \Phi(s). \quad (5)$$

Мы воспользуемся уравнением (5) для изучения поведения решений уравнения (1) в одном интересном частном случае.

Предположим, что функция  $\Phi(s)$  имеет при  $s = s_1$ ,  $s = s_2$ ,  $s_1 < s_2$  простые нули, т. е. пусть

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{s \rightarrow s_1} \Phi(s)/(s - s_1) = A_1 \neq 0, \\ \lim_{s \rightarrow s_2} \Phi(s)/(s_2 - s) = A_2 \neq 0, \end{array} \right\} \quad (6)$$

а при  $s_1 < s < s_2$  функция  $\Phi(s)$  сохраняет знак, например

$$\Phi(s) > 0 \quad \text{при } s_1 < s < s_2. \quad (7)$$

Мы можем положить при  $s_1 < s < s_2$

$$\Phi(s) = (s - s_1)(s_2 - s) \Phi_1(s), \quad (8_1)$$

$$\Phi_1(s_1) = A_1/(s_2 - s_1), \quad \Phi_1(s_2) = A_2/(s_2 - s_1). \quad (8_2)$$

Функция  $\Phi_1(x)$  непрерывна на отрезке  $[s_1, s_2]$ .

Предположим, что в момент  $t = 0$  движение начинается из положения  $s_0$ ,  $s_1 < s_0 < s_2$ , например в направлении от  $s_1$  к  $s_2$ . В силу (5) начальная скорость  $v_0$  выражается по величине и значению арифметическим значением корня

$$v_0 = \sqrt{(s_0 - s_1)(s_2 - s_0) \Phi_1(s_0)^{-1}}, \quad (9)$$

<sup>1)</sup> Наоборот, если движение начинается в направлении от  $s_2$  к  $s_1$ , то корень надо брать с отрицательным знаком.

и во время движения от  $s_0$  к  $s_2$  имеем

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}},$$

а потому при наших предположениях время  $t_1 = t(s_0, s_2)$ , в которое точка  $P$  пробегает дугу  $(s_0, s_2)$ , выражается сходящимся интегралом

$$t_1 = t(s_0, s_2) = \int_{s_0}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}. \quad (10_1)$$

В  $s_2$  скорость движения равна нулю, а так как тангенциальная сила

$$f(s_2) = \left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_2} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2} = -\frac{m}{2}(s_2-s_1)\Phi_1(s_2) < 0$$

отрицательна, то движение изменяет направление и точка начинает двигаться от  $s_2$  к  $s_1$ , а тогда

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}^1),$$

и потому за время  $t_2 = t(s_2, s_1)$ , выражаемое сходящимся интегралом

$$t_2 = t(s_2, s_1) = -\int_{s_2}^{s_1} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}, \quad (10_2)$$

точка  $P$  попадает в  $s_1$ ; здесь скорость обращается в нуль, а так как тангенциальная сила

$$f(s_1) = \left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_1} = \frac{m}{2} \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1} = \frac{m}{2}(s_2-s_1)\Phi_1(s_1) > 0$$

положительна, то движение изменяет свое направление и точка начинает двигаться от  $s_1$  к  $s_2$  и за время  $t_3$ , выражаемое сходящимся интегралом

$$t_3 = t(s_1, s_0) = \int_{s_1}^{s_0} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}, \quad (10_3)$$

возвращается в первоначальное положение  $s_0$ , имея скорость, равную по величине и по знаку выражению (9), т. е. начальную скорость, после чего движение полностью повторяется.

<sup>1)</sup> Независимо от механических соображений, мы имеем  $s'(t_1) = 0$ ,  $s''(t_1) = f(s_2)/m = -(s_2-s_1)\Phi_1(s_2)/2 < 0$ , а потому  $s(t)$  достигает в  $t_1$  максимума, и при достаточно малом положительном  $h > 0$  имеем  $s(t_1+h) < s(t_1)$ . Аналогичные рассуждения были проведены в гл. I, § 4, п. 2, 3.

Отсюда вытекает теорема Вейерштрасса:

*Если при сделанных предположениях  $s = s(t)$  является решением уравнения (1), определяемым начальными условиями*

$$s(0) = s_0, \quad v(0) = v_0,$$

где

$$s_1 < s_0 < s_2,$$

то  $s(t)$  имеет период  $2\tau [s(t+2\tau) = s(t)]$ , равный сумме  $t_1 + t_2 + t_3$ , т. е. в силу (10<sub>1</sub>), (10<sub>2</sub>), (10<sub>3</sub>) равный

$$2\tau = 2 \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{V(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}. \quad (11)$$

**2. Формула Леви-Чивита для вычисления периода в первом приближении.** а) Пусть функция  $\Phi(s)$  имеет вид

$$\varphi_0(s) = \omega^2(s - s_1)(s_2 - s) \quad (\omega = \text{const}, \omega \neq 0). \quad (12_1)$$

С помощью замены переменной

$$s = [(s_2 + s_1) - (s_2 - s_1)\cos\alpha]/2$$

мы получаем для соответствующего периода  $2\tau_0$  значение

$$2\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\Phi(s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = F(\varepsilon, s), \quad (12_2)$$

где функция  $\varphi_1(s)$  непрерывна вместе с первой и второй производными в  $[s_1, s_2]$ ,  $s_1 < s_1 < s_2 < s_2$ , и предположим, что можно пренебречь членами, содержащими  $\varepsilon^{3/2}$  или высшие степени  $\varepsilon$ . Выведем в этом случае красивую формулу Леви-Чивита (см. Леви-Чивита [1], а также Картович [1]) для вычисления периода  $2\tau$ .

Уравнение

$$F(\varepsilon, s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = 0 \quad (13)$$

удовлетворяется при значениях неизвестных  $\varepsilon = 0$ ,  $s = s_1$ , а так как

$$F_s(0, s_1) = \frac{d\varphi_0}{ds} \Big|_{s=s_1} = \omega^2(s_2 - s_1) \neq 0,$$

то уравнение (13) имеет при достаточно малом  $\varepsilon$  корень

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon \frac{F_\varepsilon(0, s_1)}{F_s(0, s_1)} + \varepsilon^2 O(1),$$

или

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon \frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon_2 O(1). \quad (14_1)$$

Аналогично показывается, что уравнение (13) имеет другой корень

$$s_2^* = s_2 + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1), \quad (14_2)$$

причем из формул (14<sub>1</sub>) и (14<sub>2</sub>) следует, что при достаточно малом  $\varepsilon$   $s_1^* < s_2^*$ .

Так как  $F(\varepsilon, s_1^*) = 0$ ,  $F(\varepsilon, s_2^*) = 0$ , то по интерполяционной формуле Ньютона, записанной с остаточным членом второго порядка, получаем, что

$$\begin{aligned} F(\varepsilon, s) = F(\varepsilon, s_1^*) + (s - s_1^*) \frac{F(\varepsilon, s_2^*) - F(\varepsilon, s_1^*)}{s_2^* - s_1^*} + \\ + \frac{1}{2}(s - s_1^*)(s - s_2^*) R(\varepsilon, s), \end{aligned}$$

где

$$R(\varepsilon, s) = \varphi_0''(\bar{s}) + \varepsilon \varphi_1''(\bar{s}) = -2\omega^2 + \varepsilon \varphi_1''(\bar{s}), \quad \bar{s}_1 < \bar{s} < \bar{s}_2,$$

а потому мы можем положить, что

$$F(\varepsilon, s) = \omega^2(s - s_1^*)(s_2^* - s) [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)], \quad (15)$$

где функция  $|r(\varepsilon, s)|$  равномерно ограничена при достаточно малом  $\varepsilon$  и  $\bar{s}_1 \leq s \leq \bar{s}_2$ .

Подставляя (14<sub>1</sub>), (14<sub>2</sub>) в (15) и принимая во внимание формулы (13) и (12<sub>1</sub>), получаем, что в  $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$

$$\begin{aligned} \omega^2(s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon \varphi_1(s) = \omega^2 \left[ (s - s_1) + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1) \right], \\ \left[ (s_2 - s_1) + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1) \right] \times [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)], \\ \omega^2(s - s_1)(s_2 - s) r(\varepsilon, s) = \varphi_1(s) - \frac{\varphi_1(s_1)}{s_2 - s_1} (s_2 - s) - \\ - \frac{\varphi_1(s_2)}{s_2 - s_1} (s - s_1) + \varepsilon \omega^2 h(\varepsilon, s), \end{aligned}$$

где  $h(\varepsilon, s)$  равномерно ограничено относительно  $\varepsilon$  и  $s$ .

Положим

$$\theta(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & s & 1 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (16_1)$$

$$H(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} s^2 & s & 1 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \quad (16_2)$$

и при  $s \neq s_1, s_2$  положим

$$\lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2} \frac{\theta(s, s_1, s_2)}{H(s, s_1, s_2)}. \quad (17)$$

Тогда

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon \frac{h(\varepsilon, s)}{(s - s_1)(s_2 - s)}. \quad (18)$$

Но

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow s_1} \lambda(s) &= -\frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \varphi'_1(s_1) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2s_1 & 1 & 0 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-1}{\omega^2 (s_2 - s_1)^2} \begin{vmatrix} \varphi'_1(s_1) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (19_1)$$

и, аналогично,

$$\lim_{s \rightarrow s_2} \lambda(s) = \frac{1}{\omega^2 (s_2 - s_1)^2} \begin{vmatrix} \varphi'_1(s_2) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}; \quad (19_2)$$

а потому функция  $\lambda(s)$  конечна и непрерывна в  $[s_1, s_2]$ , причем легко проверить, что она имеет в  $[s_1, s_2]$  непрерывную, а потому и ограниченную, производную.

В силу  $(14_1), (14_2), (18)$  получаем теперь, что

$$(s - s_1^*)(s_2^* - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] = (s - s_1)(s_2 - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] + \varepsilon O(1) = \varepsilon h(\varepsilon, s) + \varepsilon O(1) = \varepsilon k(\varepsilon, s),$$

где функция  $k(\varepsilon, s)$  равномерно ограничена относительно  $\varepsilon$  и  $s$ , а также, что

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon \frac{h(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что функция  $\varepsilon k(\varepsilon, s)/(s - s_1^*)(s_2^* - s)$  равномерно ограничена относительно  $\varepsilon$  и  $s$ .

Из формул  $(11)$  и  $(15)$  получаем для периода  $2\tau$ , соответствующего функции  $\Phi(s)$ , определенной  $(12_2)$ , выражение

$$2\tau = \frac{2}{\omega} \int_{s_2^*}^{s_1^*} \frac{ds}{V(s - s_1^*)(s_2^* - s)[1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)]}.$$

С помощью замены переменной

$$s = \frac{s_1^* - s_2^*}{2} - \frac{s_2^* - s_1^*}{2} \cos \alpha \quad (21)$$

это выражение приводится к

$$2\tau = \frac{2}{\omega} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon r(\varepsilon, s)}} d\alpha,$$

но

$$[1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)]^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon r(\varepsilon, s) + \varepsilon^2 O(1),$$

а потому, учитывая (20), получаем, что

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \lambda(s) d\alpha + \varepsilon^2 \int_0^\pi \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha + \varepsilon^2 O(1), \quad (22)$$

где  $s$  выражается формулой (21).

Заметим, что

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^\pi \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha &= \int_0^{\varepsilon^{1/2}} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha + \\ &+ \int_{\pi - \varepsilon^{1/2}}^{\pi} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha + \varepsilon \int_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha, \end{aligned}$$

но

$$\int_0^{\varepsilon^{1/2}} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

$$\int_{\pi - \varepsilon^{1/2}}^{\pi} \frac{\varepsilon k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

$$\varepsilon \int_{-\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)} d\alpha = \varepsilon O(1) \int_{-\varepsilon^{1/2}}^{\pi - \varepsilon^{1/2}} \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha} = \varepsilon O(1) \operatorname{ctg} \varepsilon^{1/2} = \varepsilon^{1/2} O(1),$$

и потому из формулы (22) следует, что

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \lambda(s) d\alpha + \varepsilon^{3/2} O(1),$$

Принимая во внимание, что  $\lambda(s)$  имеет ограниченную производную в  $[s_1, s_2]$ , получаем из (21), (14<sub>1</sub>), (14<sub>2</sub>), что

$$\lambda(s) = \lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2} \cos \alpha\right] + \varepsilon O(1),$$

откуда и вытекает формула Леви-Чивита для периода  $2\tau^1)$

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2} \cos \alpha\right] d\alpha + \varepsilon^2 O(1). \quad (23)$$

б) Картович (см. Картович [1]) дал полезное преобразование формулы (23).

Положим

$$s = \frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2} \cos \alpha.$$

Из (16<sub>2</sub>) следует, что

$$H(s, s_1, s_2) = \frac{(s_2-s_1)^3}{4} \sin^2 \alpha,$$

а из (16<sub>1</sub>), что

$$\frac{d\theta}{ds} = -\varphi'_1(s)(s_2-s_1) + \varphi_1(s_2) - \varphi_1(s_1),$$

а потому

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\theta(s)}{\operatorname{tg} \alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\alpha} \cos^2 \alpha = \frac{s_2-s_1}{2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{d\theta}{ds} \sin \alpha = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \frac{\theta(s)}{\operatorname{tg} \alpha} = 0.$$

Но тогда, принимая во внимание формулу (17), получаем с помощью очевидных преобразований

$$\begin{aligned} - \int_0^\pi \lambda(s) d\alpha &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^\pi \frac{\theta(s)}{H(s)} d\alpha = \frac{4}{\omega^2 (s_2-s_1)^3} \int_0^\pi \frac{\theta(s)}{\sin^2 \alpha} d\alpha = \\ &= \frac{4}{\omega^2 (s_2-s_1)^2} \left[ -\theta(s) \operatorname{ctg} \alpha \right]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} + \frac{4}{\omega^2 (s_2-s_1)^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{d\alpha} \operatorname{ctg} \alpha d\alpha = \\ &= \frac{2}{\omega^2 (s_2-s_1)^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{ds} \cos \alpha d\alpha = -\frac{2}{\omega^2 (s_2-s_1)} \int_0^\pi \varphi'_1(s) d\sin \alpha = \\ &= \frac{1}{\omega^2} \int_0^\pi \varphi''_1(s) \sin^2 \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Уточнение члена  $\varepsilon^{3/2} O(1)$  дано автором книги (см. Сансоне [3]).

Замечая, наконец, что

$$\frac{4}{(s_2 - s_1)^2} \sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)} \, ds = \sin^2 \alpha \, d\alpha,$$

преобразуем формулу (23) к виду<sup>1)</sup>

$$2\tau = 2\tau_0 + \frac{4\varepsilon}{\omega^2 (s_2 - s_1)^2} \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{(s - s_1)(s_2 - s)} \varphi_1''(s) \, ds + \varepsilon O(1). \quad (24)$$

### § 8. Задача о периодических орбитах и вариационное исчисление

**1. Задача о периодических орбитах.** а) В некоторых вопросах существование периодических решений получается с помощью применения методов теории дифференциальных уравнений, причем приходится накладывать слишком жесткие требования на уравнения. Но иногда (например, в задачах динамики) исследуемые дифференциальные уравнения являются необходимыми условиями существования минимума некоторого заданного интеграла (интеграла действия). Если в этом случае с помощью *прямых методов* можно установить существование минимума, то тем самым одновременно доказывается существование искомых периодических решений.

Мы уже имели случай применения *прямого метода Тонелли* (см. гл. V, § 4, п. 2). Другие приложения прямых методов будут изложены в гл. XI, § 5, п. 3, в частности, для эффективного вычисления решений, соответствующих определенным краевым условиям. Здесь мы остановимся вкратце на упомянутой выше задаче о периодических орбитах и докажем, благодаря силе прямых методов, существование таких орбит при весьма общих предположениях<sup>2)</sup>.

1) Читатель может проверить формулу (24) на следующем примере. Пусть  $\varphi_1(s) = \varphi_0(s)$ ; тогда

$$2\tau = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{1+\varepsilon}} = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) + \varepsilon^2 O(1), \quad \varphi_1''(s) = -2\omega^2,$$

и второй член в правой части принимает вид

$$-\frac{2\varepsilon}{\omega} \int_0^\pi \sin^2 \alpha \, d\alpha = -\frac{\pi\varepsilon}{\omega}.$$

2) О приложениях вариационного исчисления к нахождению периодических решений нелинейных уравнений второго порядка см. Лихтенштейн [1], стр. 24—51. Относительно же применения вариационного исчисления к изучению так называемого обобщенного уравнения Штурма — Лиувилля

$$\frac{1}{2k} \left( F_y - \frac{d}{dx} F'_y \right) = \lambda y^{2k-1},$$

б) Обозначим через  $t$  время, через  $x$  и  $y$  — координаты точки  $P$ , движущейся под действием силы, обладающей потенциалом; пусть связи зависят от времени, и пусть  $x'$  и  $y'$  обозначают производные  $x$  и  $y$  по  $t$ . Уравнения движения в форме Лагранжа являются уравнениями второго порядка

$$\frac{d}{dt} L_{x'} - L_x = 0, \quad \frac{d}{dt} L_{y'} - L_y = 0, \quad (1)$$

где через  $L$  обозначено выражение

$$L = \frac{1}{2} [ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2] + \alpha x' + \beta y' + \gamma, \quad (2)$$

а  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_{x'}$ ,  $L_{y'}$  обозначают частные производные от  $L$  по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $x'$ ,  $y'$ <sup>1)</sup>.

Предположим, что коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  являются непрерывными функциями от  $x$  и  $y$ , равно как и их частные производные первого порядка, и что

$$\alpha > 0 \quad (c > 0), \quad ac - b^2 > 0. \quad (3)$$

Рассмотрим, может ли точка  $P$  описывать *периодическую орбиту*, т. е. замкнутую кривую без точек самопересечения и самокасания, иными словами, существует ли пара функций  $x(t)$ ,  $y(t)$ , удовлетворяющих в промежутках  $(t_0, t_1)$  системе (1), а на концах — периодическим условиям

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1); \quad x'(t_0) = x'(t_1), \quad y'(t_0) = y'(t_1),$$

и таких, что  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  являются в  $(t_0, t_1)$  уравнениями простой кривой.

Если  $x(t)$ ,  $y(t)$  являются решениями системы (1), то

$$\frac{d}{dt} [x'L_{x'} + y'L_{y'} - L] = 0,$$

а потому

$$x'L_{x'} + y'L_{y'} = L + k^2, \quad (4)$$

выражающего обращение в нуль первой вариации интеграла

$$\int_a^b F(x, y, y') dx$$

при условиях

$$\int_a^b y^{2k} dx = 1, \quad y(a) = y(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

[см. Люстерник Л. А. [1].]

<sup>1)</sup> См. Бухгольц Н. Н. [1], т. II, стр. 53. — Прим. перев.

<sup>2)</sup> Говорят, что (4) представляет собой *первый интеграл* системы (1) (см. примечание на стр. 90), называемый в нашем случае *первым интегралом энергии*.

где  $k$  — постоянная величина, а так как уравнение (1) остается неизменным при увеличении  $L$  на постоянную величину, то можно считать, что  $k = 0$ ,

$$x'L_{x'} + y'L_{y'} = L, \quad (5)$$

или, в силу (2), что

$$\frac{1}{2} [ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2] = \gamma. \quad (6)$$

Так как левая часть равенства (6) является положительно определенной формой от переменных  $x'$ ,  $y'$ , то должно выполняться неравенство  $\gamma(x, y) \geq 0$ , а потому, если  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  является решением системы (1), то оно должно принадлежать области, где  $\gamma(x, y) \geq 0$ .

Пусть даны две непрерывные замкнутые простые жордановы кривые  $\mathfrak{L}_1$  и  $\mathfrak{L}_2$ , первая из которых лежит целиком внутри второй, причем вдоль этих кривых и в заключенной между ними кольцеобразной области  $\mathfrak{Y}$  плоскости  $x$ ,  $y$  выполняется неравенство

$$\gamma(x, y) > 0.$$

Покажем, что тогда область  $\mathfrak{Y}$  принадлежит периодическая орбита, окружающая кривую  $\mathfrak{L}_1$ .

Уравнения (1) траектории точки  $P$  являются уравнениями Эйлера для *экстремали* интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t_1} L dt \text{ } ^1), \quad (7)$$

причем, в силу (2) и (6), такой интеграл можно записать в виде

$$J^* = \int_{t_0}^{t_1} [\sqrt{2\gamma} \sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} + \alpha x' + \beta y'] dt. \quad (8)$$

Имеем тождественно

$$J - J^* \equiv \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [\sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} - \sqrt{2\gamma}]^2 dt, \quad (9)$$

а потому, если вдоль некоторой кривой выполняется равенство (6), то  $J - J^*$  и  $\delta(J - J^*)$  обращаются в нуль, т. е. для первых вариаций  $J$  и  $J^*$  выполняется равенство

$$\delta J - \delta J^* = 0,$$

и  $\delta J^*$  должно обращаться в нуль при любых вариациях  $x$  и  $y$ , если исходная кривая в плоскости  $x$ ,  $y$  является орбитой системы (1), (6).

<sup>1)</sup> См. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [1], стр. 15, 185. — Прим. перев.

Подинтегральная функция интеграла  $J^*$  положительно однородна порядка 1 относительно  $x'$  и  $y'$ ; поэтому значение интеграла  $J^*$  вдоль некоторой дуги  $C$  зависит только от самой дуги, но не зависит от ее параметрического представления  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Но тогда можно считать, что параметр вдоль орбиты выбран так, чтобы выполнялось равенство (6)<sup>1)</sup>.

Если вдоль кривой  $\delta J^* = 0$  и если параметр  $t$  выбран так, чтобы выполнялось равенство (6), то вдоль этой кривой  $\delta J = \delta J^* = 0$ , а потому  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  представляет траекторию системы (1), (6).

Полагая

$$F = \sqrt{2\gamma} \sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2 + \alpha x' + \beta y'},$$

имеем

$$F_1 = \frac{F_{x', x'}}{y'^2} = \frac{\sqrt{2\gamma}(ac - b^2)}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

и по терминологии *вариационного исчисления* интеграл *положительно регулярен* (см. Тонелли [4]); поэтому задача о существовании периодических орбит эквивалентна изучению *замкнутых экстремалей* положительно регулярного интеграла

$$\int_C F(x, y, x', y') dt,$$

принадлежащих заданной кольцеобразной области  $\mathfrak{Y}$  и окружающих  $\mathfrak{X}_1$ . Существование таких замкнутых экстремалей следует из одной теоремы Тонелли, которую мы сформулируем в следующем номере.

**2. Теорема Тонелли о существовании периодических экстремалей.** а) Впервые существование периодических орбит в так называемом обратимом случае ( $\alpha_y - \beta_x \equiv 0$ ) было указано Уиттекером (см. Уиттекер [2]), но первое строгое доказательство было дано независимо друг от друга Синьорини и Тонелли (см. Синьорини [1], Тонелли [5]).

Позднее Биркгоф (см. Биркгоф [2]) рассмотрел необратимый случай ( $\alpha, \beta$  — любые) и доказал также существование замкнутых орбит. В 1923 г. Тонелли (см. Тонелли [6]) дал простое доказательство этого результата.

Критерий Биркгофа был обобщен Дамкёлером (см. Дамкёлер [1]) и упрощен и расширен Тонелли (см. Тонелли [7]). Изложим теперь формулировки некоторых результатов Тонелли, о которых мы уже упоминали в п. 1, отослав читателя за доказательствами к указанным выше мемуарам.

<sup>1)</sup> См. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [2], ч. II, стр. 190. — Прим. перев.

б) Обозначим через  $\mathfrak{Y}$  кольцеобразную область плоскости  $x, y$ , ограниченную непрерывными жордановыми замкнутыми кривыми  $\mathfrak{L}_1$  и  $\mathfrak{L}_2$ , не имеющими кратных точек, из которых первая целиком лежит внутри второй. Пусть функция  $F(x, y, x', y')$  определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка для любой точки  $(x, y)$  из  $\mathfrak{Y}$  и любой пары чисел  $(x', y')$ , не равных одновременно нулю.

Пусть  $F(x, y, x', y')$  является положительно однородной функцией первого порядка относительно  $x'$  и  $y'$ , т. е. пусть для любого  $k > 0$

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y').$$

Назовем комплексом  $\mathfrak{C}$  совокупность *любого конечного числа* (которое может равняться единице и не обязательно одинаково для всех комплексов) непрерывных замкнутых спрямляемых жордановых кривых без кратных точек, на каждой из которых указано направление,  $C_1, C_2, \dots, C_m$ , принадлежащих кольцеобразной области  $\mathfrak{Y}$  и удовлетворяющих следующим условиям:

1. Любая кривая  $C_r$  из  $\mathfrak{C}$  не может одновременно иметь как точек, лежащих внутри другой кривой того же комплекса, так и точек, лежащих вне этой кривой.

2. Две кривые  $C_r$  и  $C_s$  не могут состоять из одних и тех же точек, даже в том случае, когда они ориентированы различным образом.

3. Если кривая  $C_r$  из  $\mathfrak{C}$  не имеет точек, лежащих внутри какой-либо другой кривой этого комплекса, то она ориентируется положительно (т. е. так, чтобы при обходе внутренняя область оставалась слева); другие кривые  $C_s$  из  $\mathfrak{C}$  ориентируются *положительно* или *отрицательно*, в зависимости от того, четно или нечетно число кривых из  $\mathfrak{C}$ , содержащих *внутри себя* точки кривой  $C_s$ .

4. Среди кривых  $C_r$  из  $\mathfrak{C}$  всегда есть *нечетное число* кривых, окружающих полностью кривую  $\mathfrak{L}_1$ , а потому всегда существует по крайней мере одна кривая, полностью окружающая кривую  $\mathfrak{L}_1$  и положительно ориентированная.

Положим

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} = \sum_{r=1}^m \int_{C_r} F(x, y, x', y') ds = \sum_{r=1}^m J_{C_r},$$

где  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$ ,  $x' = dx/ds$ ,  $y' = dy/ds$  и  $ds$  обозначает дифференциал длины дуги кривой  $C_r$ .

Пусть в области  $\mathfrak{Y}^*$ , для которой все точки кольцеобразной области  $\mathfrak{Y}$  являются внутренними точками, *интеграл  $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$  регулярен* (т. е. либо всегда  $F_1(x, y, x', y') > 0$ , либо всегда  $F_1(x, y, x', y') < 0$ , где  $F_1 = F_{x'x'}/y'^2 = -F_{x'y'}/x'y' = F_{y'y'}/x'^2$ ) или *нормально квазирегулярен* (т. е. всегда  $F_1(x, y, x', y') \geq 0$  или  $F_1(x, y, x', y') \leq 0$ ,

причем значения  $\theta$ , для которых  $F_1(x, y, \cos \theta, \sin \theta) = 0$ , не заполняют никакого промежутка, лежащего в  $[0, 2\pi]$ ). Пусть, далее, область  $\mathfrak{A}$  выпукла в малом в положительном направлении относительно функции  $F(x, y, x', y')$  (т. е. пусть существует такое число  $r > 0$ , что все экстремали, соединяющие концы любой дуги  $\cup P_1P_2$  кривой  $\mathfrak{L}_1$  или  $\mathfrak{L}_2$  и лежащие вместе с этой дугой в круге с центром в  $P_1$  и радиусом  $r$ , положительное направление которых совпадает с положительным направлением дуги  $\cup P_1P_2$ , целиком принадлежат области  $\mathfrak{A}$ ); тогда существует, по крайней мере, одна периодическая (замкнутая) экстремаль относительно  $F(x, y, x', y')$ , не имеющая кратных точек, окружающая  $\mathfrak{L}_1$  и имеющая положительное направление.

Если при тех же предположениях  $F_1(x, y, x', y') \geq 0$ , то в множестве всех комплексов  $\mathfrak{C}$ , на которых  $\Im$  достигает абсолютного минимума, существует, по крайней мере, один комплекс, составленный из конечного числа попарно непересекающихся замкнутых экстремалей.

### § 9. Почти периодические функции и почти периодические решения дифференциальных уравнений

**1. Почти периодические функции. Первые свойства.** а) В последние десятилетия Бор, Вейль, Валле-Пуссен, Боннер, Фавар, Винер с большим успехом изучали так называемые *почти периодические функции*, а Биркгоф и Н. М. Крылов указали важные приложения этих функций к динамике и математической физике. Здесь мы не можем изложить доказательства результатов этих ученых, а потому, чтобы ориентировать читателя в этом круге вопросов, изложим здесь лишь формулировки основных свойств этого класса функций и укажем приложения этих функций к изучению одного частного вида неоднородных линейных дифференциальных уравнений<sup>1)</sup>.

б) Действительная или комплексная функция  $f(x)$  действительной переменной  $x$

$f(x) = u(x) + iv(x)$  ( $i$  — мнимая единица;  $u(x)$  и  $v(x)$  действительны), конечная и непрерывная при  $-\infty < x < +\infty$ , называется *почти периодической*, если для любого положительного числа  $\varepsilon$  можно найти такое число  $l$

$$l = l(f, \varepsilon) > 0,$$

что каково бы ни было действительное число  $\alpha$ , в полуотрезке  $[\alpha, \alpha + l)$  существует по крайней мере одно число  $\tau$

$$\alpha \leq \tau < \alpha + l,$$

<sup>1)</sup> Относительно библиографии см. Бор [1], Безикович А. С. [1], Фавар [1]. [См. также Левитан Б. М. [1]; мы будем делать ссылки на эту работу.—*Прим. перев.*]

называемое *почти периодом* функции  $f(x)$  относительно  $\epsilon$ , для которого при любом  $x$  выполняется неравенство

$$|f(x + \tau) - f(x)| < \epsilon.$$

Очевидно, что всякая непрерывная периодическая функция почти периодична.

в) Почти периодические функции обладают следующими свойствами:

1. Если функция  $f(x)$  почти периодична, а  $a$  — некоторое число, то функции  $f(x + a)$  и  $f(ax)$  почти периодичны.

2. Почти периодические функции ограничены в  $(-\infty, +\infty)$ .

3. Если функция  $f(x)$  почти периодична, а  $k$  — некоторое действительное или комплексное число, то и функции  $f(x) + k$  и  $kf(x)$  почти периодичны.

4. Если функция  $f(x) = u(x) + iv(x)$  почти периодична, то и функции  $f_0(x) = u(x) - iv(x)$  и  $|f(x)|$  почти периодичны.

г) Почти периодические функции равномерно непрерывны в  $(-\infty, +\infty)$ , т. е. для любого положительного числа  $\epsilon$  можно найти такое положительное число  $\delta$ , что для любых двух действительных чисел  $x_1$  и  $x_2$ , удовлетворяющих неравенству  $|x_2 - x_1| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x_2) - f(x_1)| < \epsilon$ .

д) Если функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  почти периодичны, то и функция  $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$  почти периодична.

е) Если функции  $f_n(x)$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) почти периодичны и последовательность  $\{f_n(x)\}$  равномерно сходится в  $(-\infty, +\infty)$  к функции  $f(x)$ , то и функция  $f(x)$  почти периодична.

ж) Если  $\{a_n\}$  — последовательность действительных или комплексных чисел, а  $\lambda_n$  — последовательность действительных чисел и если ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$  равномерно сходится в  $(-\infty, +\infty)$ , то его сумма является почти периодической функцией.

з) Если производная почти периодической функции  $f'(x)$  равномерно непрерывна, то она также почти периодична.

и) Если функции  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  почти периодичны, то их произведение  $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x)$  почти периодично.

**2. Теорема о среднем.** Для почти периодических функций справедлива так называемая *теорема о среднем*.

Если функция  $f(x)$  почти периодична, то существует конечный предел

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

Этот предел называется *средним значением функции*  $f(x)$  и обозначается  $M\{f(x)\}$ ;

$$M\{f(x)\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x) dx.$$

**3. Ряды Фурье почти периодических функций.** а) Справедлива теорема:

*Действительные числа  $\Delta_n$ , для которых  $M\{f(x)e^{-i\Delta_n x}\}$  отлично от нуля, образуют конечное или счетное множество.*

Положим

$$A_n = M\{f(x)e^{-i\Delta_n x}\} \quad (n = 1, 2, \dots);$$

тогда  $\{\Delta_n\}$  называется *последовательностью показателей Фурье* функции  $f(x)$ ,  $\{A_n\}$  — *последовательностью коэффициентов Фурье* этой функции, а ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Delta_n x}$  — *ее рядом Фурье*, обозначение:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Delta_n x}. \quad (1)$$

б) Если функция  $f(x)$  периодическая, то определенный сейчас ряд совпадает с обычным рядом Фурье функции  $f(x)$ , т. е. если функция  $f(x)$  периодична и имеет период  $p$ , то ряд (1) принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inx}, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) e^{-inx} dx,$$

где  $2\pi/p = k$ .

в) Имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$$

и, вообще,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x) - \sum_{n=1}^N A_n e^{i\Delta_n x}|^2\}.$$

Так как  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{N+1}^{\infty} |A_n|^2 = 0$ , то ряд Фурье почти периодической функции  $f(x)$  сходится к ней в среднем в  $(-\infty, +\infty)$  в смысле Бора.

г) Различным почти периодическим функциям соответствуют различные ряды Фурье.

д) Если функция  $f(x)$  почти периодическая, причем для нее имеет место разложение (1), и если интеграл  $\int_0^{\infty} f(\xi) d\xi$  ограничен при

$-\infty < x < +\infty$ , то он почти периодичен, причем

$$\int_0^x f(\xi) d\xi \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n} e^{i\Lambda_n x} (c = \text{const}),$$

т. е. ряд Фурье для  $\int_0^x f(\xi) d\xi$  получается почленным интегрированием ряда (1) (см. Бор [1], стр. 68—73).

е) Пусть почти периодическая функция имеет представление (1), тогда:

1. Если все  $A_n$  положительны, то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  сходится, и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

2. Если все показатели  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n, \dots$  линейно независимы, т. е. ни для какой совокупности показателей  $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_n$  нельзя найти таких рациональных чисел  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , не равных одновременно нулю, что  $r_1\Lambda_1 + r_2\Lambda_2 + \dots + r_n\Lambda_n = 0$ , то ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$  сходится и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}$$

(см. Бор [1], стр. 104—116).

#### 4. Теорема об аппроксимации. Многочлен вида

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n x},$$

где  $a_n$  — любые числа, а  $\lambda_n$  — действительные числа, называется *показательным многочленом*.

Показательные многочлены почти периодичны (см. п. 1 „д“).

Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

*Если функция  $f(x)$  почти периодична, то можно построить последовательность показательных многочленов*

$$P_{N_1}(x), P_{N_2}(x), \dots, P_{N_k}(x) \dots; \quad N_1 < N_2 < \dots < N_k < \dots,$$

равномерно сходящуюся в  $(-\infty, +\infty)$  к  $f(x)$ .

**5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Теорема Бора и Нейгебауера.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + c_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + c_n y = f(x), \quad (2)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — действительные числа, а  $f(x)$  — почти периодическая функция, и докажем теорему Бора и Нейгебауера (см. Бор и Нейгебауэр [1]).

*Любое ограниченное решение уравнения (2) является почти периодической функцией.*

Пусть  $\rho$  — корень характеристического уравнения для уравнения (2) (см. гл. II, § 1, п. 6 „ $\Gamma$ “)

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \dots + c_{n-1} r + c_n = 0.$$

Тогда тождественно

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \dots + c_{n-1} r + c_n = (r + \rho)(r^{n-1} + \gamma_1 r^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1}),$$

и потому уравнение (2) можно заменить системой уравнений

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \gamma_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + \gamma_{n-1}y = Y, \quad (3)$$

$$Y' + \rho Y = f(x). \quad (4)$$

Если функция  $y(x)$  является ограниченным в  $(-\infty, +\infty)$  решением уравнения (2), то по теореме Эсклангона (см. Эсклангон [1], стр. 192, а также Ландау [1]) функции  $y'$ ,  $y''$ , ...,  $y^{(n-1)}$  также ограничены в  $(-\infty, +\infty)$ , а тогда тем же свойством обладает и функция  $Y$  [см. формулу (3)]; таким образом, достаточно доказать, что любое ограниченное решение уравнения (4) почти периодично, чтобы можно было вывести по индукции сформулированную выше теорему.

Пусть

$$\rho = r + i\lambda \quad (r, \lambda \text{ действительны}, i \text{ — мнимая единица}).$$

Рассмотрим отдельно случаи  $r > 0$ ,  $r < 0$ ,  $r = 0$ .

Если  $r > 0$ , то общее решение уравнения (4) имеет вид

$$Y(x) = e^{-\rho x} \left[ \int_{-\infty}^x e^{\rho \xi} f(\xi) d\xi + c \right] \quad (c = \text{const}),$$

и если  $|f(x)| \leq B$ , то

$$\left| e^{-\rho x} \int_{-\infty}^x e^{\rho \xi} f(\xi) d\xi \right| \leq B \left| e^{-\rho x} \frac{e^{\rho x}}{\rho} \right| = \frac{B}{|\rho|},$$

а потому (4) имеет единственное ограниченное в  $(-\infty, +\infty)$  решение

$$Y(x) = e^{-\rho x} \int_{-\infty}^x e^{\rho \xi} f(\xi) d\xi.$$

Зададим некоторое  $\varepsilon > 0$ . Пусть  $\tau$  — почти период функции  $f(x)$  относительно  $\varepsilon$ ; тогда

$$\begin{aligned} |Y(x + \tau) - Y(x)| &= \left| e^{-\rho(x+\tau)} \int_{-\infty}^{x+\tau} e^{\rho\xi} f(\xi) d\xi - e^{-\rho x} \int_{-\infty}^x e^{\rho\xi} f(\xi) d\xi \right| = \\ &= \left| e^{-\rho(x+\tau)} \int_{-\infty}^x e^{\rho(\xi+\tau)} f(\xi + \tau) d\xi - e^{-\rho x} \int_{-\infty}^x e^{\rho\xi} f(\xi) d\xi \right| = \\ &= \left| e^{-\rho x} \int_0^x e^{\rho\xi} [f(\xi + \tau) - f(\xi)] d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{|\rho|}, \end{aligned}$$

а потому функция  $Y(x)$  почти периодична.

Аналогично рассматривается случай  $r < 0$ .

Пусть  $r = 0$ , тогда решения уравнения (4) имеют вид

$$Y(x) = e^{-i\lambda x} \left[ \int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi + c \right], \quad (5)$$

и потому функция  $Y(x)$  ограничена в  $(-\infty, +\infty)$  лишь в случае, когда интеграл  $\int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$  ограничен при изменении  $x$  в  $(-\infty, +\infty)$ .

Но функция  $e^{i\lambda x} f(x)$  почти периодична, и потому, если интеграл

$$\int_0^x e^{i\lambda\xi} f(\xi) d\xi$$

ограничен при изменении  $x$  в  $(-\infty, +\infty)$ , то он почти периодичен (п. 3 „д“), чем и доказана почти периодичность  $Y(x)$ .

## ЛИТЕРАТУРА

### Айнс (Ince E. L.)

- [1] Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.
- [2] A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu functions, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., **21** (1922), 117—120.

### Арцела (Arzelà C.)

- [1] Sull' integralità delle equazioni differenziali ordinarie, Mem. R. Acc. Sc. dell' Ist. di Bologna (5), V (1895), 257—270.
- [2] Sull' esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Mem. R. Acc. Sc. dell'Ist. di Bologna (5), VI (1896), 131—140.

### Ахиезер Н. И.

- [1] Элементы теории эллиптических функций, М.—Л., 1948.

### Безикович (Besicovich A. S.)

- [1] Almost periodic functions, Cambridge, 1932, p. 180.

### Бекер (Baker H. F.)

- [1] On the Integration of linear differential equations, Proc. of the London Math. Soc. (1) **35** (1903), 333—378.
- [2] Note on the Integration of linear differential equations, Proc. of the London Math. Soc. (2) (1905), 293—296.

### Бернуlli Д. (Bernoulli D.)

- [1] Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaler suspensae, Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop., VI (1732—1733). Опубликовано в 1738 г.

### Бертини (Bertini E.)

- [1] Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Pisa, 1907.

### Бессель (Bessel F. W.)

- [1] Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht, Berl. Abh. (1824).

### Бианки (Bianchi L.)

- [1] Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformazioni, Pisa, 1918.

### Биркгофф (Birkhoff G. D.)

- [1] Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans. of the Am. Math. Soc., **9** (1908), 373—395.
- [2] Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. of the Am. Math. Soc., **18** (1917), 199—300.

### Бласс (Bliss G. A.)

- [1] Solutions of differential equations as functions of the constants of integration, Bull. of the Am. Math. Soc., **XXV** (1918—1919), 15—26.

### Бласс и Шенберг (Bliss G. A., Schoenberg I. J.)

- [1] On separation, comparison and oscillation theorema for self-adjoint systems of linear second order differential equations, Am. Journ. of Math., **53** (1931), 781—800.

### Боль (Bohl P.)

- [1] Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Journ. für die reine und ang. Math., **131** (1906), 268—321.

### Бомпани (Bompiani E.)

- [1] Forme normali delle equazioni differenziali lineari e loro significato

- geometrico, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, XXIII (1937), 75—105.
- Б о р (Bohr H.)**
- [1] Почти периодические функции, М.—Л., 1934.
- Б о р и Н е й г е б а у е р (Bohr H., Neugebauer O.)**
- [1] Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1926), 8—22.
- Б о р е л ъ (Borel E.)**
- [1] Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (3), IX (1892), 63—90.
  - [2] Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1928.
- Б о х е р (Böcher M.)**
- [1] Boundary problems in one dimension, Proceedings of the fifth. Int Congress of Math. (Cambridge, 1913), I, 163—195.
  - [2] Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris, 1917, p. 118.
  - [3] Applications and generalizations of the conception of adjoint systems, Trans. of the Am. Math. Soc., 14 (1913), 403—420.
  - [4] Green's functions in space of one dimension, Bull. of the Am. Math. Soc. (2), 7 (1901), 297—299.
  - [5] Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations. Ann. of Math. (2), 13 (1911), 71—78.
  - [6] Введение в высшую алгебру, М.—Л., 1933.
- Б р у н с (Brunn H.)**
- [1] Zur Theorie der Kugelfunktionen, Journ. für die reine und angew. Math., 90 (1881), 322—328.
- Б у н и ц к и й (Bouinitsky E.)**
- [1] Sur la fonction de Green des équations différentielles linéaires ordinaires, Journ. de Math. pur. et appl. (6), 5 (1909), 65—125.
- Б у р к х а р д т (Burkhardt H.)**
- [1] Sur le fonctions de Green relatives à une domaine d'une dimension, Bull. Soc. Math. de France, XXII (1894), 71—75.
- Б у х г о л ѿ ц Н. Н.**
- [1] Основной курс теоретической механики, ч. II, М.—Л. 1945.
- В а л л е - П у с с е н (de la Vallée Poussin Ch. J.)**
- [1] Курс анализа бесконечных малых, М.—Л., 1933, т. II, 205—217.
  - [2] Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordren, Journ. de Math. pur. et appl. (9), 8 (1929), 125—144.
- В а т с о н**
- [1] Теория бесселевых функций, М., 1949.
- В е й е р ш т р а с с (Weierstrass K.)**
- [1] Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Math. Werke II (Berlin, 1895), 19—44.
  - [2] Ueber eine Gattung reel periodischer Funktionen, Math. Werke II (Berlin, 1895), 1—18.
- В и л ь ч и н с к и й (Wilczynski E. J.)**
- [1] Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leipzig, 1906.
- В и н т н е р (Wintner A.)**
- [1] On the exact value of the bound for the regularity of solutions of ordinary differential equations, Am. Journ. of Math., 57 (1935), 539—540.
- В о л т е р р а (Volterra V.)**
- [1] Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Memorie della Società Ital. delle Scienze (3), VI (22/VI—37), 1—107.
  - [2] Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Memorie della Società Ital. delle Scienze (3), XII (1902), 1—68.

**Галлико (Gallico V.)**

- [1] Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Giorn. di Mat. di Battaglini, 55 (1917), 165—230.

**Галлина (Gallina A.)**

- [1] Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee autoaggiunte, Rendiconti. R. Ist. Lombardo Sc. e. Lett. (2) 68 (1930), 272—282.

**Гамбургер (Hamburger M.)**

- [1] Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, Journ. für die reine und angew. Math., 76 (1873), 113—125.

**Гантмахер Ф. Р.**

- [1] Теория матриц, М.—Л., 1953.

**Гаусс (Gauss C. F.)**

- [1] Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$$

Comm. Soc. R. Sc. Göttingensis II (1812). См также

- [2] Gauss Werke, Bd. 3, Göttingen, 1866.

**Гельфонд А. О.**

- [1] Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952.

**Гильберт (Hilbert D.)**

- [1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1—6 Note, 1904.

**Гобсон (Hobson E. W.)**

- [1] On a general convergence theorem and the theory of the representation of a function by series of normal functions, Proc. of the London Math. Soc. (2), 6 (1908), 349—395.

**Голубев В. В.**

- [1] Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2-е изд., М.—Л., 1950.

**Грей и Метьюз**

- [1] Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М., 1953.

**Гронвальл (Gronwall T. H.)**

- [1] Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math. (2), 20 (1919), 292—296.

**Гумберт (Humbert P.)**

- [1] Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu, Paris, 1926, p. 1—55.

**Гурвиц**

- [1] Теория аналитических и эллиптических функций, М.—Л., 1933.

**Гурсат (Goursat É.)**

- [1] Курс математического анализа, 3-е изд., М.—Л., 1936.

**Дамкелер (Dankeler W.)**

- [1] Periodische Extremalen vom minimum Typ in Ringbereichen, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), V (1936), 127—140.

**Дарбу (Darboux G.)**

- [1] Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces, vol. I, II, 2-ème éd., Paris, 1914—1915.

- [2] Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, Journ. de Math. pur. et appl. (3), 4, (1878), 5—56, 377—416.

**Джексон (Jackson D.)**

- [1] Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948.

- [2] Algebraic properties of self-adjoint system, Trans. of the Am. Math. Soc., 17 (1916), 418—424.

**Джулиано (Guilliano L.)**

- [1] Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano, Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 1 (1946), 1264—1271.

## Дини (Dini U.)

- [1] Studi sulle equazioni differenziali lineari, Ann. di Mat. pura e appl., (3), II (1898), 297—324; III (1899), 125—183.
- [2] Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa, 1880.
- [3] Sulli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo, Pisa, 1911, p. 377.

## Дюбуа-Реймон (du Bois-Reymond P.)

- [1] Bemerkungen über  $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ , Journ. für die reine und angew. Math. v. Crelle, 103 (1888), 204—229.

## Жюлиа (Julia G.)

- [1] Introduction mathématique aux théories quantiques, t. I, Paris, 1936.

## Зигмунд

- [1] Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939.

## Иглиш (Iglish R.)

- [1] Ueber den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., 17 (1937), 249—258.

## Казорати (Casorati F.)

- [1] Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéaires en sous-groupes, C. Rendus, Ac. Sci., XCII (1881), 175—178, 238—241.

## Камке (Kamke E.)

- [1] Differentialgleichungen Reeller Funktionen, Leipzig, 1930.
- [2] Ueber die Existenz von Eigenwerten bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., 44 (1938), 619—634.
- [3] Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., 44 (1938), 635—658.

## Кампэ де Ферье (Kampé de Fériet J.)

- [1] La fonction hypergéométrique, Mémorial des Sciences Mathém., 85 (1937), Paris.

## ван Кампен и Винтнер (van Kampen E. R., Wintner A.)

- [1] On an absolute constant in the theory of variational stability, Am. Journ. of Math., 59 (1937), 270—274.

## Каратедори (Carathéodory C.)

- [1] Vorlesungen über Reeller Funktionen, 2-e Aufl., Leipzig.

## Картович (Cartovitsh N.)

- [1] Sul calcolo effettivo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), 27 (1938), 65—70

## Кели (Caley A.)

- [1] On linear differential equations (The Theory of Decomposition), Quarterly Journ. of Math., 21 (1886), 331—335.

## Керубино (Cherubino S.)

- [1] Applicazioni delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6), 25 (1937), 541—547, 686—690.

## Кнезер (Knöser A.)

- [1] Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig, 1911, S. 243.
- [2] Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, Math. Ann., 58 (1904), 81—147.
- [3] Beiträge zur Theorie der Sturm—Liouvillischen Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Ann., 60 (1905), 402—423.

## Коттон (Cotton É.)

- [1] Approximation successives et équations différentielles, Memorial des Sciences Math., 28 (1928), Paris.

- Коши (Cauchy A. L.)  
 [1] *Oeuvres Complètes*, 1897—1898.
- Кузьмин Р. О.  
 [1] Бесселевы функции, М.—Л., 1935.
- Куммер (Киммер Е.)  
 [1] *Ueber die hypergeometrische Reihe, Journ. für die reine und angew. Math.*, 15 (1836), 39—83, 127—172.
- Курант и Гильберт  
 [1] Методы математической физики, М.—Л., т. 1 и 2, 1951.
- Курош А. Г.  
 [1] Курс высшей алгебры, М.—Л., 1952.
- Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А.  
 [1] Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1950.  
 [2] Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, М.—Л., 1935.
- Лагранж (Lagrange G.)  
 [1] *Oeuvres*, Paris, 1869.
- Ландau (Landau E.)  
 [1] *Ueber einen Satz von Herrn Esclangon*, *Math. Ann.*, 102 (1929), 177—188.
- Лаппо-Данилевский И. А.  
 [1] Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений, М.—Л., 1934.  
 [2] *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, I, II, III, Труды Физико-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, VI—VIII, 1934—1936.
- Леви-Чивита (Levi-Civita T.)  
 [1] *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione*, *Revista de Ciencias* (Lima, Peru), 38, № 421 (1937), 71—78.
- Леви-Чивита и Амальди  
 [1] Курс теоретической механики, М., 1951.
- Левитан Б. М.  
 [1] Некоторые вопросы теории почти периодических функций. I. Успехи матем. наук, II, вып. 5 (1947), 132—192. II. Успехи матем. наук, II, вып. 6 (1947), 174—214.
- Лейбниц (Leibniz G. W.)  
 [1] *Die Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, Berlin, 1899.
- Летшоу (Latshaw V. B.)  
 [1] *The algebra of self-adjoint boundary-value problems*, *Bull. of the Am. Math. Soc.*, 39 (1933), 969—978.
- Ли (Lie S.)  
 [1] *Geometrie der Berührungstransformationen*, Leipzig, 1896.
- Линдэльф (Lindelöf E.)  
 [1] *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles*, *Journ. de Math. pur. et appl.*, (5), 6 (1900), 423—441.
- Липшиц (Lipschitz R.)  
 [1] *Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie*, *Ann. di Mat. pura et appl.* (2), 2 (1868—69), 288—302. Перепечатано в *Bull. des Sciences Mathém. et Astronomiques*, X (1876), 149—159.
- Лиувилль (Liouville J.)  
 [1] *Note sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires*, *Journal de math. pur. et appl.* (1), 3 (1838), 342—349.  
 [2] *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable*, *Journal de math. pur. et appl.*, I (1836), 253—265; II (1837), 16—35, 418—436.

- [3] Sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développement de Fonctions en séries, Journ. de Math. pur. et appl., 3 (1838), 561—614.

**Лихтенштейн (Lichtenstein L.)**

- [1] Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösungen als Funktionen der Randwerte und der Parameter, Rend. Circ. Mat. Palermo, 28 (1909), 267—306.  
[2] Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung, Journ. für die reine und angew. Math., 145 (1914), 24—85.

**Люстерник Л. А.**

- [1] Обобщение уравнения типа Штурма — Лиувилля, ДАН СССР, XV (1937), 235—238.

**Ляпунов А. М.**

- [1] Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, C. Rend. Ac. Sci., 123 (1896), 1248—1252.  
[2] Sur une équation différentielle linéaire du second ordre, C. Rend. Ac. Sci., 128 (1899), 910—923.  
[3] Sur une équation transcendente et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques, C. Rend. Ac. Sci., 128 (1899), 1085—1088.  
[4] Общая задача об устойчивости движения, М.—Л., 1935.

**Маммана (Mammanna G.)**

- [1] L'equazione del terzo ordine lineare omogenea, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. et Lett. (2), 63 (1930), 272—289.  
[2] Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschr., 25 (1926), 734—748.  
[3] Sistemi differenziali. Autovalori e Autofunzioni, Napoli, 1938, p. 1—207.

**Маркушевич А. И.**

- [1] Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

**Матье (Mathieu E.)**

- [1] Théorie de l'elasticité des corps solides, pt. I, Paris, 1890.

**Маултон (Moulton F. R.)**

- [1] Differential equations, New York, 1930.

**Мэсон (Mason M.)**

- [1] On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order, Trans. of the Am. Math. Soc., 7 (1906), 337—366.

**Мили Томсон (Milne Thomson L. M.)**

- [1] Die elliptischen Funktionen von Jacobi, Berlin, 1931, S. 69.

**Моаньо (Moigno F. N. M.)**

- [1] Leçons de calcul différentiel et de calcul intégral, Paris, 1844.

**Натансон И. П.**

- [1] Конструктивная теория функций, М.—Л., 1949.

- [2] Теория функций вещественной переменной, М.—Л., 1950.

**Николетти (Nicoletti O.)**

- [1] Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (5), IV<sub>2</sub> (1895), 316—324.  
[2] Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Atti della R. Acc. Sc. Torino, 33 (1897—1898), 746—759.

**Паперитц (Papperitz E.)**

- [1] Ueber verwandte s-Funktionen, Math. Ann., 25 (1885), 212—221.

**Пeanо (Peano G.)**

- [1] Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, Atti della R. Acc. Sc. Torino, 22 (1887), 293—302. Перепечатана с небольшими изменениями в Math. Ann., 32 (1888), 450—456.  
[2] Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires, Nouvelles Annales de Math., XI (1892), 79—82.

[3] Sull' integralità delle equazioni differenziali del primo ordine, Atti della R. Acc. Sc. Torino, XXI (1885—1886), 437—445.

[4] Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann., 37 (1890), 182—228.

Петровский И. Г.

[1] Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М.—Л., 1952.

[2] Лекции по теории интегральных уравнений, М.—Л., 1948.

Пиккард (Picard E.)

[1] Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, Journ. de Math. pur. et appl., (4), 6 (1890), 145—210.

[2] Leçons sur quelques problèmes aux limites de la Théorie des équations différentielles, Paris, 1930.

[3] Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Circ. Mat. Palermo, 29 (1910), 79—97.

[4] Traité d'Analyse, t. III, 3-ème éd., Paris, 1928.

Пиконе (Picone M.)

[1] Corso di Analisi Superiore. Equazioni differenziali, Catania, 1923.

[2] Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare del secondo ordine Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (1), XI, 1—141.

[3] Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), XV (1932), 942—948.

[4] Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie autoaggiunte, Math. Zeitschr., 28 (1928), 519—555.

Привалов И. И.

[1] Введение в теорию функций комплексного переменного, М.—Л., 1945.

[2] Интегральные уравнения, М.—Л., 1935.

Пуанкаре (Poincaré H.)

[1] Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Paris, 1892.

[2] Sur les Équations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Différences finies, Am. Journ. of Math., VII (1885), 203—258.

[3] Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math., IV (1884), 201—311.

Пуассон (Poisson S. D.)

[1] Théorie de la Chaleur, Paris 1835.

Пуль (Poole E. G. C.)

[1] On certain classes of Mathieu functions, Proc. of the London Math. Soc., (2), 20 (1921), 374—388.

Рид (Reid W. T.)

[1] Boundary value problems of the calculus of variations, Bull. of the Am. Math. Soc., 43 (1937), 633—666.

Риккати (Riccati J. F.)

[1] Acta Eruditorum, t. 8, fasc. 2, 1723.

Риман

[1] Сочинения, М.—Л., 1948.

Рисс (Riesz F.)

[1] Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913

Ритт (Ritt J. F.)

[1] On the differentiability of the solution of a differential equation with respect to a parameter, Ann. of Math. (2), 20 (1919), 289—291.

Сансоне (Sansone G.)

[1] Sviluppo in serie e valutazione asintotica del rapporto fra due polinomi consecutivi di Jacobi, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), 16 (1937), 39—48.

- [2] Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **LV** (1931), 168—176.
- [3] Valutazione dell' errore nel calcolo effettivo del periodo de moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione, *Boll. Un. Mat. It.*, (2), **1** (1939), 422—426.
- [4] Sviluppi in serie di funzioni ortogonali, *Bologna* (1935), 36.

Северини (Severini G.)

- [1] Sull'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, *Rend. R. Ist. Lombardo Sc. e Lett.*, **31** (1898), 657—667.
- [2] Sull'integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del prima ordine, *Rend. R. Ist. Lombardo Sc. et Lett.*, **31** (1898), 950—959.

Сеге (Segé G.)

- [1] Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynomen, *Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft*, **10** (1933), 35—112.
- [2] Orthogonal Polynomials, *Am. Math. Soc. Coll.*, **23**, New York, 1939.
- [3] Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions, *Trans. of the Am. Math. Soc.*, **39** (1936), 1—17.

Синьорини (Signorini A.)

- [1] Sul teorema di Wittaker, *Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei*, (5), **21** (1912), 36—39.
- [2] Esistenza di un estremale chiuso dentro un controno di Wittaker, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, **XXXIII** (1912), 187—193.

Скорца (Scorza G.)

- [1] Corpi numerici e algebre, *Messina*, 1921.

Соболев С. Л.

- [1] Уравнения математической функции, *М.—Л.*, 1950.

Соваж (Sauvage L.)

- [1] Théorie des diviseurs élémentaires et applications, *Ann. Sci. de l'Éc. Norm. Sup.*, (3), **VIII** (1891), 285—350.

Сонин Н. Я.

- [1] Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries, *Math. Ann.*, **16** (1880), 1—80.

Стеклов В. А.

- [1] Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня, *Сообщ. Харьк. Матем. Об-ва*, (1896), 136—181.
- [2] Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynômes Tchébycheff et, en particulier, suivant les polynômes de Jacobi, *Journ. für reine und angew. Math.*, **125** (1903), 207—236.

Степанов В. В.

- [1] Курс дифференциальных уравнений, *М.—Л.*, 1950.

Стретт

- [1] Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, *Харьков*, 1935.

Сушкевич А. К.

- [1] Основы высшей алгебры, *М.—Л.*, 1937.

Тамм И. Е.

- [1] Основы теории электричества, *М.—Л.*, 1949.

Толстов Г. П.

- [1] Ряды Фурье, *М.—Л.*, 1951.

Тонелли (Tonelli L.)

- [1] Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra, *Bull. of the Calcutta Math. Soc.*, **20** (1928), 31—48.
- [2] Su alcuni funzionali, *Ann. di Mat. pura ed appl.*, (4), **18** (1939), 1—21.
- [3] Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali, *Rend. Circ. Mat. di Palermo*, **XXIX** (1910), 1—36.
- [4] Fondamenti di Calcolo delle Variazioni, vol. 2, *Bologna*, 1923.
- [5] Sulle orbite periodiche, *Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei*, **XXI** (1912), 251—258, 332—334.

[6] Sulle orbite periodiche irreversibili, Mem. R. Acc. Sc. dell' Inst. di Bologna (Classe di Sc. Fis.) (VIII), I (1923—24), 21—25.

[7] Sulle estremali complete, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), V (1936), 159—168.

### Трикоми (Tricomi F.)

[1] Sulla funzione di Green di un'equazione differenziale decomposta in fattori simbolici, Atti Acc. delle Sc. di Torino, 80 (1944—45), 159—183.

### Уиттакер (Whittaker E. T.)

[1] On the functions associated with the elliptic cylinder in harmonic analysis, Intern. Congr. of Math. (Cambridge, 1912), I (1912), 366—371.

[2] On periodic orbits, Monthly Notices of the Royal Astronomic Soc. (London), LXII (1902), 186—196.

### Уиттакер и Ватсон

[1] Курс современного анализа, т. I, II, М.—Л., 1933.

### Ундервуд (Underwood F.)

[1] Note on the periodic solutions of linear differential equations, Ann. of Math., (2), 31 (1930), 655—656.

[2] An integral condition associated with linear differential equations having simply-periodic coefficients, Tôhoku Math. Journ., 36 (1933), 269—274.

[3] A classification of certain ordinary linear differential equations having simply periodic coefficients, Tôhoku Math. Journ., 36 (1933), 275—302.

### Уолш (Walsh J. L.)

[1] On the convergence of the Sturm—Liouville Series, Ann. of Math. (2), 24 (1923), 109—120.

### Фавар (Favard J.)

[1] Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, p. 181.

### Файт (Fite W. B.)

[1] Periodic solutions of linear differential equations, Ann. of Math. (2), 281 (1927), 59—64.

### Фихтенгольц Г. М.

[1] Курс дифференциального и интегрального исчислений, М.—Л., 1948—1949.

### Флоке (Floquet G.)

[1] Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. (2), XII (1883), 47—89.

### Форсайт (Forsyth R.)

[1] Theory of differential equations, Cambridge, 1902.

### Фрезер, Дункан, Келлар

[1] Теория матриц и ее приложения, М., 1950.

### Фробениус (Frobenius G.)

[1] Ueber der Rang einer Matrix, Sitzungber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. zu Berlin (1911), S. 20—29, 128—129.

### Фукс Б. А.

[1] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М.—Л., 1948.

### Фукс (Fuchs L.)

[1] Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, Journ. für die reine und angew. Math., 66 (1866), 121—160.

[2] Ueber Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden, Journ. für die reine und angew. Math., 76 (1873), 177—213.

### Фурье (Fourier J. B.)

[1] Théorie Analytique de la Chaleur, Paris, 1822.

### Хаар (Haar A.)

[1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., 69 (1910), 331—371; 71 (1912), 38—62.

## Харди

[1] Расходящиеся ряды, М., 1951.

## Харди, Литтльвуд, Полиа

[1] Неравенства, М., 1948.

## Хаупт (Нашт О.)

[1] Ueber eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen, Math. Ann., **76** (1915), 67—104.

## Хилл (Hill G. H.)

[1] On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, Cambridge. Ms. U. S. A., 1877. Опубликовано с добавлениями в Acta Math., **VIII** (1888), 1—36.

## Цвирнер (Zwirner G.)

[1] La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari, Rend. Sem. Padova, **7** (1936), 55—109.

## Чеботарев Н. Г.

[1] Теория групп Ли, М.—Л., 1940.

## Чебышев П. Л.

[1] Полное собрание сочинений, М., 1947.

## Чезари (Cesari L.)

[1] Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali a coefficienti periodici, Mem. della R. Acc. d'Italia (6), **11** (1940), 633—695.

## Чимминьо (Cimmino G.)

[1] Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore, Math. Zeitschr., **32** (1930), 1—58.

## Чинквини (Cinquini S.)

[1] Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6), **XVII** (1933), 616—621.

[2] Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine  $n$ , Annali della R. Sc. Norm. Sup. un di Pisa (2), **9** (1940), 61—77.

## Шлезингер (Schlesinger L.)

[1] Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen, Berlin, 1922.

## Штакель (Stäckel P.)

[1] Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles, C. Rend. Ac. Sci. Paris, **126** (1898), 203—205.

## Штурм (Sturm C.)

[1] Sur les équations différentielles linéaires du second ordre, Journ. de Math. pur. et appl., **1** (1836), 106—186.

## Эйлер (Euler L.)

[1] Institutiones Calculi Integralis, Petropoli, 1769.

[2] Specimen Transformationis Singularis Serierum, Nova Acta Ac. Sc. Petr., **12** (1794), опубликовано в 1801, см. также Opera, Ser. I, **XVI**, 41—55.

## Эльсгольц Л. Э.

[1] Вариационное исчисление, М.—Л., 1952.

## Эсклангон (Esclangon E.)

[1] Nouvelle recherches sur les fonctions quasi-périodiques, Ann. Obs. Bordeaux, **16** (1917), 51—226.

## Эттлингер (Ettlinger H. J.)

[1] Existence theorems for the general real, self-adjoint linear system of the second order, Trans. of the Am. Math. Soc., **19** (1918), 79—96.

[2] Oscillation theorems for the real, self-adjoint linear system of the second order, Trans. of the Am. Math. Soc., **22** (1921), 136—143.

## Якоби (Jacobi C. G.)

[1] Gesammelte Werke, Berlin, 1886.

## Яничевский С. А.

[1] Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order, Ann. of Math., **29** (1927), 521—542.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Аналитическое продолжение решений нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 18  
Асколи теорема 38
- Бекера и Пеано метод интегрирования системы линейных дифференциальных уравнений 77  
Бесселя функции, см. функции Бесселя  
Бета-функция 129  
Билинейная форма 222  
— канонический вид 223  
Бора и Нейгебауера теорема о почти периодичности 323  
Бореля метод суммирования, применение к интегрированию дифференциальных уравнений 107  
Бохера теорема о существовании собственных значений 191  
— о существовании собственных функций с заданным числом нулей 193  
Брунса неравенства для сферических функций 171
- Вейерштрасса теорема о периодическом решении дифференциального уравнения движения точки по заданной траектории 307  
Вронскиан 50
- Гамбургера подгруппы для линейных однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами 278  
Гамма-функция 129, 144  
Гаусса гипергеометрический ряд 125, 126  
Гильберта—Шмидта теорема о разложении в ряды по собственным функциям 247  
Гипергеометрические многочлены Якоби 129
- Гипергеометрический интеграл Эйлера 128  
— ряд Гаусса 125  
Гипергеометрическое уравнение Гаусса 124  
Грина функция, см. функция Грина  
Гронуолла лемма 29  
Гурса доказательство единственности решений нормальной системы дифференциальных уравнений 16
- Дини—Гобсона теорема о равносходимости рядов Штурма—Лиувилля и тригонометрических рядов Фурье 209, 216, 219
- Дифференциальное уравнение второго порядка в действительной области и теорема сравнения Штурма 161  
— комплексной области 115  
— гипергеометрическое Гаусса 124  
— линейное неоднородное 59  
— — дополнительная функция 60  
— — — решение методом вариации произвольных постоянных 58  
— — — с периодическими коэффициентами 279  
— — линейное однородное 47  
— — — вронскиан фундаментальной системы 50  
— — — с постоянными коэффициентами 65, 262  
— — — формула Лиувилля 50  
— — — фундаментальная система 54  
— — — преобразование в интегральное уравнение 98  
— — Матье 294  
— — — интегральное уравнение Уиттекера для функций Матье 300  
— — — решения типа  $C_1, C_0$  297  
— — — теорема Айнса 298  
— — — фундаментальная система 296

- Дифференциальное уравнение линейное, функции Маттье первого вида 297  
 — с периодическими коэффициентами 267  
 — — — вычисление характеристических показателей 282  
 — — — исследования Ляпунова А. М. 284  
 — — — метод Хилла вычисление характеристических показателей 287  
 — — — необходимое и достаточное условие существования периодического решения 278  
 — — — подгруппы Гамбургера 278  
 — — — формула Пуанкаре 268  
 — — — характеристическая матрица 269  
 — — — характеристические показатели и характеристические числа 276
- Дифференциальные системы, индекс совместности 225  
 — линейные, зависящие от параметра 241  
 — несовместность 225  
 — однородные 225  
 — преобразование в интегральные уравнения Фредгольма второго рода 233  
 — самосопряженные 230, 233, 245  
 — — — с периодическими краевыми условиями 290  
 — — — четного порядка 245  
 — — — сопряженные 226  
 — — — уравнения, определяющие эллиптические функции Якоби 21
- Дифференцируемость по начальному значению независимой переменной 32  
 — начальным значениям решений 32  
 — параметру 30
- Задача Д. Бернулли о колебаниях нити 141  
 — о разложении по функциям Штурма—Лиувилля 209  
 — распространении тепла в тонкой проволоке 185
- Интегральное уравнение Уиттекера для функций Маттье 300
- Каноническая нормализация Лагерра—Форсайта 85, 86  
 Кааратедори критерий непрерывности решений от начальных значений 44  
 Колебания малые нити и уравнение Бесселя 141  
 — эллиптической мембранны 294  
 Конгруэнция интегральных кривых 36  
 Коши задача для системы дифференциальных уравнений 11  
 Коши—Липшица доказательство теоремы существования 34  
 Коэффициенты Фурье 135, 209
- Лагранжа метод вариации произвольных постоянных 57  
 Леви—Чивита формула для вычисления периода в движении точки по заданной траектории 310  
 Лемма Громулла 29  
 Линейное дифференциальное уравнение второго порядка 161, 162  
 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка, аналитическая теория 115  
 — — — и уравнение Риккати 78  
 Линейный элемент 35  
 Ляпунов А. М., исследования об уравнениях второго порядка 284
- Матрица вырожденная 66  
 — диагональная 67  
 — единичная 67  
 — нерегулярная 66  
 — нулевая 67  
 — обратная 70  
 — расстояние между двумя подобными матрицами 71  
 — регулярная 66  
 — сингулярная 66  
 Матрицант квадратной матрицы 75  
 Матричное исчисление 65  
 Маттье дифференциальное уравнение, см. дифференциальное уравнение Маттье  
 Метод вариации произвольных постоянных 58  
 — интегрирования Пеано—Бекера системы линейных дифференциальных уравнений 77  
 — мажорант 101, 102  
 — — — доказательство теоремы существования 103  
 — последовательных приближений, доказательство теоремы существования и единственности 108

- Метод последовательных приближений Пикара—Пеано для интегрирования системы дифференциальных уравнений 9  
 — суммирования Бореля 107  
 — усиливающих (мажорантных) функций Коши 117  
 — Эйлера интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов 101  
 Многочлены Чебышева 141  
 — сферические 139  
 — ультрасферические 139, 170  
 — Якоби 129, ортогональность 133  
 — рекуррентные формулы 132  
 Модуль эллиптических функций Якоби 24
- Независимые решения** 51  
**Непрерывность решений относительно начальных значений** 27, 44  
 — — — параметров 28  
**Неравенства Брунса** 171  
**Неравенство произведения** 71  
 — треугольника 71  
**Нормализация относительная и каноническая линейных однородных дифференциальных уравнений** 79  
**Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений** 5, 7  
 — — линейных дифференциальных уравнений 47  
 — — однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 60
- Общее решение системы дифференциальных уравнений** 33  
**Определяющее уравнение** 115  
**Особые точки линейных дифференциальных уравнений второго порядка** 115, 121  
**Осцилляционная теорема** 174, 188, 293
- Паперица** уравнение 121, 122  
**Пеано и Бекер, метод интегрирования системы линейных однородных дифференциальных уравнений** 77  
 — — Пикар, метод последовательных приближений для интегрирования нормальной системы дифференциальных уравнений 9  
 — — теорема существования для системы дифференциальных уравнений 36  
**Периодические орбиты** 315, 318  
 — — теорема Тонелли о существовании 318
- Последовательные решения** 278, 279  
 — — — дифференциального уравнения движения точки по заданной траектории 307  
 — — — системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра 304  
**Периоды эллиптических функций Якоби** 24  
**Пиконе доказательство экстремального свойства собственных значений** 257  
 — тождество 165  
**Порядок системы дифференциальных уравнений** 6  
**Постоянные Липшица** 10  
**Почти периодические функции** 320  
 — — — первые свойства 320  
 — — — равенство Парсевала 322  
 — — — ряды Фурье 322  
 — — — теорема об аппроксимации при помощи показательных многочленов 323  
 — — — о среднем 321  
**Произведение двух операторов** 177  
 — — — первого порядка 178  
 — — матриц 67  
**Производящая функция для многочленов Якоби** 130
- Резольвента интегрального уравнения Вольтерра второго рода** 100  
**Резонанс** 280, 281  
**Решение системы дифференциальных уравнений** 5  
**Решения дифференциальных систем как решения интегральных уравнений** Фредгольма второго рода 241  
 — — — уравнений как функции начальных значений 27  
**Риккати уравнение** 78  
**Ряд Фурье** 209, 210  
 — — Фурье относительно ортогональной системы 135  
**Ряды по многочленам Якоби в комплексной области** 138
- Самосопряженные дифференциальные многочлены** 94  
 — — — системы 230  
 — — — уравнения Лагранжа 94  
 — — — системы второго порядка с периодическими краевыми условиями 296  
 — — — Штурма—Лиувилля 232  
**Система дифференциальных уравнений, зависящая от параметров** 304  
 — — дифференциальных уравнений, самосопряженная 56

- Системы линейных однородных уравнений 51  
 — Штурма 183, 186, 191, 193  
 — Штурма—Лиувилля, типичная форма 202  
 Собственные значения 176, 183  
 — — для однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами 262  
 — — и собственные функции 176  
 — — — асимптотические выражения 204  
 — — — системы Штурма—Лиувилля 197, 204  
 — — — — действительные 199, 200  
 — — — — уравнение 203, 204  
 — — — теорема существования 181, 191  
 — — — экстремальное свойство 247, 257  
 — — — функции 176, 183, 193  
 — — — их асимптотические выражения 207  
 — — — системы Штурма—Лиувилля, ортогональность 198  
 Сопряженная система дифференциальных уравнений 55  
 Сопряженное уравнение Лагранжа 89, 90  
 Сопряженные дифференциальные системы 226, 228  
 Сопряженный многочлен 90  
 Спектр матрицы 70  
 — оператора 221
- Теорема Айнса 298  
 — Асколи 38  
 — Бора и Нейгебауэра 323  
 — Бахера о существовании собственных значений 191  
 — — — — функций 193  
 — Гильберта—Шмидта 247  
 — единственности, доказательство Гурса 16  
 — единственности Хаара 220  
 — о разделении нулей 167  
 — сравнения Штурма 166, 186  
 — существования, доказательство Коши—Липшица 34  
 — — — Пикаро—Пеано 9, 11  
 — — и единственности Валле-Пуссена 155, 159  
 — — собственных значений 181  
 — Тонелли о существовании периодических экстремалей 318  
 — Уолша о равносходимости для рядов по ортогональным функциям 214
- Теорема Штекеля—Ли 81  
 Тождество Пиконе 165
- Уравнение Бесселя 141  
 — Паперица 121, 122
- Уравнения класса Фукса 115  
 — линейные с периодическими коэффициентами 266  
 — — однородные с периодическими коэффициентами 302  
 — — — с тремя правильными особыми точками 121
- Условие существования периодического решения 278, 280
- Формула Лиувилля 50  
 — Родрига 130  
 — Якоби 50
- Формулы Лиувилля—Якоби 49
- Фундаментальная система 53  
 — — решений уравнения 54  
 — — — системы линейных дифференциальных уравнений 112
- Функции Бесселя, нули 171  
 — — первого рода 145  
 — Матье 296  
 — — интегральное уравнение Уиттакера 300  
 — — первого вида 297  
 — Штурма—Лиувилля, асимптотические разложения 202
- Функция Грина для дифференциальных систем 235  
 — — — самосопряженной системы второго порядка частного вида 233  
 — полунепрерывная 253  
 — Римана 121
- Характеристические показатели 116, 276  
 — — вычисление 282  
 — — уравнения системы 61  
 — — числа 276  
 — — — матрицы 70
- Характеристическое уравнение 267, 269
- Хилла метод вычисления характеристических показателей 287
- Частный интеграл 5
- Эйлера гипергеометрический интеграл 128
- Элементарные делители 270
- Якоби гипергеометрические многочлены 129

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

### Глава I

#### НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ НИХ

§ 1. Нормальные системы . . . . .	5
1. Определения . . . . .	5
2. Порядок системы дифференциальных уравнений . . . . .	6
3. Нормальные системы . . . . .	7
§ 2. Получение систем обыкновенных дифференциальных уравнений путем исключения произвольных постоянных . . . . .	8
1. Системы дифференциальных уравнений, полученные путем исключения произвольных постоянных . . . . .	8
2. Обратная задача . . . . .	9
§ 3. Доказательство основной теоремы существования и единственности по методу последовательных приближений Пикара — Пеано	
1. Формулировка теоремы существования . . . . .	9
2. Доказательство теоремы существования по методу последо- вательных приближений Пикара — Пеано . . . . .	11
3. Доказательство Гурса теоремы единственности . . . . .	16
4. Дополнения к формулировке теоремы существования . . . . .	17
§ 4. Аналитическое продолжение решений. Примеры . . . . .	18
1. Аналитическое продолжение решений . . . . .	18
2. Система дифференциальных уравнений, определяющая тригоно- метрические функции . . . . .	19
3. Система дифференциальных уравнений, определяющая эллип- тические функции Якоби . . . . .	21
§ 5. Решения дифференциальных уравнений как функции начальных значений . . . . .	27
1. Непрерывность . . . . .	27
2. Дифференцируемость . . . . .	28
3. Лемма Гронодла . . . . .	29
4. Дифференцируемость по параметру . . . . .	30
5. Дифференцируемость по начальным значениям решений . . . . .	32
6. Дифференцируемость по начальному значению независимой переменной . . . . .	32
7. Общее решение системы дифференциальных уравнений . . . . .	33

§ 6. Доказательство теоремы существования по методу Коши — Липшица . . . . .	34
1. Геометрические рассмотрения . . . . .	34
2. Теорема существования в формулировке Пеано. Доказательство Арцела . . . . .	36
3. Доказательство Тонелли теоремы существования в формулировке Пеано . . . . .	42
 Глава II	
<b>НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ</b>	
§ 1. Нормальные системы линейных дифференциальных уравнений . . . . .	47
1. Нормальные системы однородных линейных дифференциальных уравнений и линейные дифференциальные уравнения . . . . .	47
2. Формулы Лиувилля и Якоби . . . . .	49
3. Независимые решения. Фундаментальные системы. Понижение порядка системы линейных однородных уравнений . . . . .	51
4. Сопряженная система дифференциальных уравнений . . . . .	55
5. Неоднородные линейные системы. Метод Лагранжа . . . . .	57
6. Нормальные системы однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	60
§ 2. Применение матричного исчисления к определению решений системы линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами . . . . .	65
1. Сведения по матричному исчислению . . . . .	65
2. Матрицант квадратной матрицы . . . . .	75
3. Метод Пеано — Бекера . . . . .	77
§ 3. Частные преобразования линейных однородных дифференциальных уравнений . . . . .	78
1. Преобразование линейного однородного уравнения порядка $n$ в уравнение порядка $n - 1$ . . . . .	78
2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка и уравнение Риккати . . . . .	78
3. Линейные дифференциальные уравнения, у которых коэффициент при $y^{(n-1)}$ равен производной коэффициента при $y^{(n)}$ . . . . .	79
§ 4. Относительная нормализация и каноническая нормализация линейных однородных дифференциальных уравнений . . . . .	79
1. Относительная нормализация и дифференциальные семиинварианты . . . . .	79
2. Замена независимой переменной . . . . .	81
3. Каноническая нормализация Лагерра — Форсайта . . . . .	85
4. Преобразования уравнений второго и третьего порядка . . . . .	87
§ 5. Сопряженное уравнение Лагранжа . . . . .	89
1. Сопряженные дифференциальные многочлены и уравнения . . . . .	89
2. Соотношения между фундаментальными системами решений сопряженных дифференциальных уравнений . . . . .	92
3. Самосопряженные дифференциальные уравнения и многочлены . . . . .	94

4. Первый интеграл самосопряженного уравнения нечетного порядка . . . . .	97
5. Самосопряженные уравнения третьего порядка . . . . .	97
§ 6. Преобразование линейного дифференциального уравнения с начальными данными в интегральное уравнение Вольтерра второго рода	98

### Глаза III

#### АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Метод мажорант (исчисление пределов Коши) . . . . .	101
1. Метод Эйлера интегрирования дифференциальных уравнений при помощи рядов . . . . .	101
2. Основной принцип метода мажорант Коши . . . . .	102
3. Доказательство теоремы существования методом мажорант . . . . .	103
4. Теорема существования в общем случае . . . . .	105
5. Метод суммирования Бореля и дифференциальные уравнения	107
§ 2. Доказательство теоремы существования и единственности с помощью метода последовательных приближений . . . . .	108
1. Теорема существования и единственности . . . . .	108
2. Замечание Уинтнера относительно области существования голоморфного решения . . . . .	111
3. Применение матричного исчисления для определения фундаментальной системы решений системы линейных дифференциальных уравнений . . . . .	112
§ 3. Аналитическая теория линейных дифференциальных уравнений второго порядка . . . . .	115
1. Правильные и неправильные особые точки для дифференциального уравнения второго порядка . . . . .	115
2. Правильные точки. Определяющее уравнение . . . . .	115
3. Сходимость рядов в случае, когда разность характеристических показателей не является целым числом . . . . .	117
4. Построение второго решения в случае, когда характеристические показатели совпадают или отличаются на целое число . . . . .	119
5. Правильные особые точки в бесконечности . . . . .	121
§ 4. Линейные дифференциальные уравнения с тремя правильными особыми точками. Гипергеометрическое уравнение . . . . .	121
1. Уравнение Паперица и функция $P$ Римана . . . . .	121
2. Преобразования Римана для функции $P$ . . . . .	123
3. Гипергеометрическое уравнение Гаусса . . . . .	124
4. Гипергеометрический ряд . . . . .	126
5. Гипергеометрический интеграл Эйлера . . . . .	128
§ 5. Гипергеометрические многочлены Якоби . . . . .	129
1. Многочлены Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}$ . . . . .	129
2. Формула Родрига. Производящая функция многочленов $P_n^{(\alpha, \beta)}$ . . . . .	130
3. Значения $P_n(\pm 1)$ . . . . .	131
4. Рекуррентные формулы . . . . .	132
5. Ортогональность многочленов $P_n$ в $[-1, 1]$ . . . . .	133
6. Теорема Пуанкаре и $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{n+1}(x)/P_n(x)$ . . . . .	136
7. Ряды по многочленам Якоби в комплексной области . . . . .	138
8. Ультрасферические многочлены и их производящая функция	139

§ 6. Уравнение Бесселя . . . . .	141
1. Задача Д. Бернулли о малых колебаниях подвешенной нити и уравнение Бесселя . . . . .	141
2. Функции Бесселя (цилиндрические функции) первого рода . . . . .	143
3. Функции $J_{1/2}(x), J_{-1/2}(x)$ . . . . .	146
4. Интегральные представления бесселевых функций первого рода . . . . .	146
5. Другие интегральные представления . . . . .	148
6. Рекуррентные соотношения между $J_n(x)$ . . . . .	149
7. Интеграл $\int_0^{\infty} x J_n(ax) J_n(bx) dx$ . . . . .	150
8. Задача о разложении в ряды по бесселевым функциям . . . . .	152
<i>Глава IV</i>	
<b>КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА</b>	
§ 1. Задача о нахождении решения дифференциального уравнения $n$ -го порядка, проходящего через $n$ заданных точек . . . . .	154
1. Случай, когда уравнение линейно . . . . .	154
2. Теорема существования и единственности Валле-Пуссена для линейного уравнения . . . . .	155
3. Теорема Валле-Пуссена для случая дифференциального уравнения порядка $n$ нормального вида . . . . .	159
§ 2. Дифференциальные уравнения второго порядка и теорема сравнения Штурма . . . . .	161
1. Исследования Штурма об уравнениях второго порядка . . . . .	161
2. Общие замечания относительно уравнений второго порядка . . . . .	161
3. Сопряженные точки . . . . .	162
4. Достаточное условие для несуществования сопряженных точек . . . . .	164
5. Тождество Пиконе . . . . .	165
6. Теорема сравнения Штурма . . . . .	166
7. Теорема о разделении нулей . . . . .	167
8. Теорема сравнения для полуоткрытых отрезков . . . . .	169
9. Выпуклость последовательности нулей решений одного дифференциального уравнения второго порядка частного вида . . . . .	169
§ 3. Применение теоремы сравнения для отделения нулей ультрасферических многочленов и бесселевых функций в главном случае . . . . .	170
1. Нули ультрасферических многочленов . . . . .	170
2. Нули бесселевых функций . . . . .	171
§ 4. Осцилляционная теорема . . . . .	174
1. Осцилляционная теорема . . . . .	174
2. Осцилляционная теорема для уравнения $(\theta y')' + [\lambda A - B]y = 0$ . . . . .	176
§ 5. Решения, обращающиеся в нуль в двух заданных точках. Собственные значения и собственные функции . . . . .	176
1. Постановка задачи . . . . .	176
2. Разложение оператора второго порядка в произведение операторов первого порядка . . . . .	177
3. Выражение для решения на отрезке, содержащем сопряженные точки . . . . .	179

4. Теорема существования собственных значений. Доказательство Маммана . . . . .	181
5. Собственные значения для уравнения $(By')' + (\lambda A - B)y = 0$ . . . . .	183
<b>§ 6. Системы Штурма. Собственные значения. Собственные функции . . . . .</b>	<b>183</b>
1. Задача о распределении тепла в тонкой проволоке и системы Штурма . . . . .	183
2. Дополнения к теореме сравнения . . . . .	186
3. Добавления к осцилляционной теореме . . . . .	188
4. Системы Штурма. Существование собственных значений. Теоремы Бехера . . . . .	191
5. Системы Штурма. Существование собственных функций с заданным числом нулей. Теоремы Бехера . . . . .	193
6. Система Штурма — Лиувилля. Существование собственных значений . . . . .	197
7. Ортогональность собственных функций системы Штурма — Лиувилля . . . . .	198
8. Достаточные условия действительности всех собственных значений системы Штурма — Лиувилля . . . . .	199
<b>§ 7. Асимптотические разложения функций Штурма — Лиувилля . . . . .</b>	<b>202</b>
1. Типичная форма систем Штурма — Лиувилля . . . . .	202
2. Уравнение для собственных значений . . . . .	203
3. Асимптотические выражения для собственных значений и собственных функций . . . . .	204
4. Собственные функции, обращающиеся в нуль в двух заданных точках, и их асимптотические выражения . . . . .	207
<b>§ 8. Теорема Дири — Гобсона о равносходимости ряда Штурма — Лиувилля и тригонометрического ряда Фурье . . . . .</b>	<b>209</b>
1. Задача о разложении по функциям Штурма — Лиувилля . . . . .	209
2. Предварительные леммы . . . . .	210
3. Теорема Уолша о равносходимости для рядов по ортогональным функциям . . . . .	214
4. Теорема о равносходимости рядов Штурма — Лиувилля и тригонометрических рядов Фурье . . . . .	216

*Глава V***КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  $n$ -ГО ПОРЯДКА ( $n > 2$ )**

<b>§ 1. Билинейные формы. Канонический вид . . . . .</b>	<b>222</b>
<b>§ 2. Сопряженные и самосопряженные дифференциальные системы . . . . .</b>	<b>225</b>
1. Дифференциальные системы. Индекс совместности . . . . .	225
2. Сопряженные дифференциальные системы . . . . .	226
3. Индексы совместности для сопряженных систем . . . . .	228
4. Самосопряженные линейные системы . . . . .	230
5. Самосопряженные системы второго порядка . . . . .	230
6. Самосопряженные системы Штурма — Лиувилля . . . . .	232
7. Самосопряженные системы четвертого порядка . . . . .	233
<b>§ 3. Функция Грина и преобразование дифференциальных систем в интегральные уравнения Фредгольма второго рода . . . . .</b>	<b>233</b>
1. Функция Грина для самосопряженной системы второго порядка частного вида . . . . .	233
2. Функция Грина для дифференциальных систем . . . . .	235

3. Запись в виде интеграла решения неоднородной дифференциальной системы, имеющей единственное решение . . . . .	238
4. Решения дифференциальных систем как решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода . . . . .	241
5. Линейные системы, зависящие от параметра. Собственные значения и собственные функции . . . . .	241
6. Линейные самосопряженные системы четного порядка. Разложения в ряды по собственным функциям и теорема Гильберта — Шмидта . . . . .	245
§ 4. Краевые задачи для самосопряженных систем четного порядка и вариационное исчисление . . . . .	247
1. Экстремальное свойство собственных значений, вытекающее из теории интегральных уравнений . . . . .	249
2. Доказательство Тонелли существования собственных значений с помощью прямых методов вариационного исчисления . . . . .	257
3. Экстремальное свойство собственных значений, выводимое из теории дифференциальных систем. Доказательство Пиконе . . . . .	262
4. Одно интегральное неравенство . . . . .	262
§ 5. Существование бесконечного множества собственных значений для однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами . . . . .	262

*Глава VI***ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

§ 1. Решения линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами . . . . .	266
1. Примеры . . . . .	266
2. Характеристическое уравнение . . . . .	267
3. Элементарные делители матрицы . . . . .	270
4. Решения в случае, когда показатели всех элементарных делителей характеристической матрицы равны единице. Характеристические показатели и числа . . . . .	274
5. Решения в общем случае. Подгруппы Гамбургера . . . . .	278
6. Необходимое и достаточное условие существования периодического решения . . . . .	278
7. Периодические решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами . . . . .	279
§ 2. Вычисление характеристических показателей . . . . .	282
1. Исследование характеристических показателей . . . . .	282
2. Исследования А. М. Ляпунова об уравнениях второго порядка . . . . .	284
3. Метод Хилла вычисления характеристических показателей при помощи бесконечных определителей . . . . .	287
§ 3. Самосопряженные системы второго порядка с периодическими краевыми условиями . . . . .	290
1. Существование собственных значений . . . . .	290
2. Осцилляционная теорема . . . . .	293
§ 4. Дифференциальное уравнение Маттье и функции, связанные с эллиптическим цилиндром . . . . .	294
1. Элементарные решения уравнения колебаний эллиптической мембрани и уравнение Маттье . . . . .	294

---

2. Функции Маттье и их классификация по типам . . . . .	296
3. Отсутствие линейно независимых периодических решений, соответствующих одному и тому же собственному значению. Теорема Айнса . . . . .	298
4. Интегральное уравнение Уиттекера для функций Маттье . . . . .	300
<b>§ 5. Системы линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами . . . . .</b>	<b>302</b>
<b>§ 6. Системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра.</b> Периодические решения . . . . .	<b>304</b>
<b>§ 7. О периодических решениях дифференциального уравнения динамики точки, движущейся по заданной траектории . . . . .</b>	<b>307</b>
1. Теорема Вейерштрасса . . . . .	307
2. Формула Леви-Чивита для вычисления периода в первом приближении . . . . .	310
<b>§ 8. Задача о периодических орбитах и вариационное исчисление . . . . .</b>	<b>315</b>
1. Задача о периодических орбитах . . . . .	315
2. Теорема Тонелли о существовании периодических экстремалей . . . . .	318
<b>§ 9. Почти периодические функции и почти периодические решения дифференциальных уравнений . . . . .</b>	<b>320</b>
1. Почти периодические функции. Первые свойства . . . . .	320
2. Теорема о среднем . . . . .	321
3. Ряды Фурье почти периодических функций . . . . .	322
4. Теорема об аппроксимации . . . . .	323
5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Теорема Бора и Нейгебауера . . . . .	323
<b>Л и т е р а т у р а . . . . .</b>	<b>326</b>
<b>Предметный указатель . . . . .</b>	<b>336</b>