Интегрируя последовательно по частям и принимая во внимание периодичность $y(\theta)$ и $dy/d\theta$, получаем

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}[4h^2\sin^2 x\cos^2\theta - 2h\sin x\sin\theta]\,y(\theta)\,d\theta =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2h\frac{d[\sin x\cos\theta e^{2h\sin x\sin\theta}]}{d\theta}\,y(\theta)\,d\theta =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}2h\sin x\cos\theta\,\frac{dy}{d\theta}\,d\theta =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d}{d\theta}[e^{2h\sin x\sin\theta}]\frac{dy}{d\theta}\,d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}\frac{d^2y}{d\theta^2}\,d\theta$$

и потому

$$Y'' + [l_1 - 4h^2\cos^2 x]\,Y =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{2h\sin x\sin\theta}\left[\frac{d^2y}{d\theta^2} + (l_1 - 4h^2\cos^2\theta)\,y\,d\theta\right] = 0.$$

Таким образом, функция $Y(x)$ удовлетворяет уравнению Матье.

Функция $Y(x)$ не обращается тождественно в нуль, когда x изменяется в $[-\pi, \pi]$. В самом деле,

$$e^{2h\sin x\sin\theta} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2h)^\nu}{\nu!}\sin^\nu x\sin^\nu\theta.$$

Стоящий справа ряд равномерно сходится, когда θ изменяется в $[-\pi, \pi]$, поэтому если бы $Y(x)$ тождественно равнялось нулю в $[-\pi, \pi]$, то имело бы место равенство

$$0 = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(2h)^\nu}{\nu!}\sin^\nu x\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\sin^\nu\theta\,d\theta,\quad (-\pi \leqslant x \leqslant \pi).$$

Но так как справа стоит ряд, расположенный по степеням $\sin x$, то из этого равенства следовало бы, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\sin^\nu\theta\,d\theta = 0\quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

и, по формулам Эйлера [1]),

$$(-1)^r 2^{2r-1}\sin^{2r}\theta=\binom{2r}{0}\cos 2r\theta-\binom{2r}{1}\cos(2r-2)\theta+$$
$$+\binom{2r}{2}\cos(2r-4)\theta-\ldots+(-1)^r\frac{1}{2}\binom{2r}{r},$$
$$(-1)^r 2^{2r}\sin^{2r+1}\theta=\binom{2r+1}{0}\sin(2r+1)\theta-$$
$$-\binom{2r+1}{1}\sin(2r-1)\theta+\binom{2r+1}{2}\sin(2r-3)\theta-\ldots+$$
$$+(-1)^r\binom{2r+1}{r}\sin\theta$$

должны были бы выполняться равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\cos 2r\theta\,d\theta=0,\qquad \int_{-\pi}^{\pi} y(\theta)\sin(2r+1)\theta\,d\theta=0$$
$$(r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как $y(\theta)$ имеет, по предположению, тип C_0 или S_1, то все его коэффициенты были бы равны нулю, а тогда и сама функция $y(\theta)$ тождественно равнялась бы нулю, вопреки предположению.

Но тогда, по теореме Айнса (п. 3), функция $Y(x)$ может отличаться от $y(x)$ лишь постоянным множителем λ, а потому $y(x)=\lambda Y(x)$ и уравнение (12) следует из формулы (13).

§ 5. Системы линейных однородных уравнений с периодическими коэффициентами

а) Укажем вкратце, как получить для систем однородных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами результаты, аналогичные полученным в § 1 для линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами.

Пусть дана система

$$x_i'(t)=\sum_{l=1}^{n} a_{i,l}(t)\,x_l(t)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\tag{1}$$

коэффициенты которой $a_{i,l}(t)$ определены в $(-\infty,\ +\infty)$, непрерывны и имеют один и тот же период ω $(\omega>0)$,

$$a_{i,l}(t+\omega)=a_{i,l}(\omega),\quad (i,\ l=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\quad -\infty<t<+\infty.\tag{2}$$

[1]) Эти формулы легко вывести, возведя известную формулу Эйлера $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ в степени $2r+1$ и $2r$ и раскрыв правую часть по биному Ньютона. — *Прим. ред.*

Пусть n решений системы (1)

$$x_{1,k}(t),\ x_{2,k}(t),\ \ldots,\ x_{n,k}(t)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{3}$$

образуют фундаментальную систему решений, и, следовательно,

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} x_{1,1}(t) & x_{2,1}(t) & \ldots & x_{n,1}(t) \\ x_{1,2}(t) & x_{2,2}(t) & \ldots & x_{n,2}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1,n}(t) & x_{2,n}(t) & \ldots & x_{n,n}(t) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Как известно, общее решение системы (1) имеет вид

$$x_i(t)=c_1x_{i,1}(t)+c_2x_{i,2}(t)+\ldots+c_nx_{i,n}(t) \tag{4}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Определим теперь постоянные $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ так, чтобы существовала такая соответствующая им постоянная ρ, что

$$x_i(t+\omega)=\rho x_i(t)\quad [i=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ -\infty<t<+\infty]. \tag{5}$$

Из сделанных предположений следует, что n решений

$$x_{1,k}(t+\omega),\ x_{2,k}(t+\omega),\ \ldots,\ x_{n,k}(t+\omega)\ (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

также дают нам фундаментальную систему решений системы (1); в самом деле (гл. II, § 1, п. 2),

$$\Delta(t+\omega)=\operatorname{Det}\|x_{i,k}(t+\omega)\|=$$
$$=\Delta(t)\,e^{\int\limits_t^{t+\omega}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,i}\right)dt}=\Delta(t)e^{\int\limits_0^{\omega}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i,i}\right)dt}\neq 0. \tag{6}$$

Поэтому существуют n^2 чисел $\alpha_{l,k}$ $(l,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, таких, что

$$x_{i,k}(t+\omega)=\sum_{l=1}^{n}\alpha_{k,l}x_{i,l}(t)\quad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{7}$$

Из (4) следует, что

$$x_i(t+\omega)=\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_{k,l}\Big)x_{i,l}(t),$$

а потому для выполнения соотношений (5) необходимо и достаточно, чтобы постоянные $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ были таковы, что

$$\sum_{l=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_{k,l}-\rho c_l\Big)x_{i,l}(t)=0\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но $\operatorname{Det} \| x_{i,l} \| = \Delta(t) \neq 0$, а потому должны иметь место равенства

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \alpha_{k,l} - \rho c_l = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, n)$$

или

$$\alpha_{1,l} c_1 + \alpha_{2,l} c_2 + \ldots + (\alpha_{l,l} - \rho) c_l + \ldots + \alpha_{n,l} c_n \equiv 0. \tag{8}$$

Таким образом, ρ должно быть корнем характеристического уравнения

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} - \rho & \alpha_{2,1} & \ldots & \alpha_{n,1} \\ \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} - \rho & \ldots & \alpha_{n,2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{1,n} & \alpha_{2,n} & \ldots & \alpha_{n,n} - \rho \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Итак, *если* ρ *является корнем характеристического уравнения* (9), *то, выбирая постоянные* $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *удовлетворяющие системе* (8) *при этом значении* ρ, *и строя по этим постоянным, согласно формуле* (4), *функции* $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, *мы получаем решение, удовлетворяющее условию* (5).

б) Из доказанного следует, что *для того, чтобы система* (1) *обладала решением, имеющим период* ω, *необходимо и достаточно, чтобы соответствующее ей характеристическое уравнение* (9) *имело корень* $\rho = 1$[1]).

§ 6. Системы дифференциальных уравнений, зависящих от параметра. Периодические решения

Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(t; x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где t; $x_1, x_2, \ldots, x_n$; λ изменяются в области C_{n+2}, определенной неравенствами

$$-\infty < t < +\infty;$$

$$|x_i - x_i^0| \leqslant a \quad (a > 0;\ i = 1, 2, \ldots, n);\ \lambda^0 - c \leqslant \lambda \leqslant \lambda^0 + c \ (c > 0).$$

Предположим, что задание при $t = t^0$ системы начальных значений

$$x_1^0 + \alpha_1,\ x_2^0 + \alpha_2,\ \ldots,\ x_n^0 + \alpha_n,$$

где $|\alpha_i| \leqslant a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и любого значения параметра λ из $[\lambda^0 - c, \lambda^0 + c]$ однозначно определяет решение

$$x_i = \varphi_i(t; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n; \lambda) \ (i = 1, 2, \ldots, n, \ -\infty < t < +\infty), \tag{2}$$

---

[1]) Относительно распространения на линейные системы результатов из § 1, касающихся дифференциальных уравнений, см. Гурса [1], т. II, стр. 409—412, Моультон [1] стр. 317—348.

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i^0+\alpha_i=\varphi_i(t^0;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda)\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{3}$$

Предположим также, что *функции* X_i, *рассматриваемые как функции от* t, *имеют период* $\omega>0$,

$$X_i(t+\omega;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda)=X_i(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda),$$
$$-\infty<t<+\infty\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

а также, что при $\lambda=\lambda^0$ *выполняются равенства*

$$\varphi_i(t^0+\omega;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0)=\varphi_i(t^0;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0) \tag{4}$$
$$(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

т. е. что функции $\varphi_i(t;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda)$ принимают одинаковые значения при $t=t^0$ и при $t=t^0+\omega$, если

$$\lambda=\lambda^0,\ \alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0.$$

Если переменная t означает время, то можно интерпретировать уравнения (1) как уравнения движения точки $P\equiv(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ в пространстве S_n. Тогда (4) эквивалентно предположению, что при движении, соответствующем значениям $\lambda=\lambda^0$, $\alpha_1=\alpha_2\ldots=\alpha_n=0$, *точка* P *принимает одинаковые положения в моменты* t^0 *и* $t^0+\omega$. Но из сделанных предположений следует, что, полагая в заданной системе $\lambda=\lambda^0$, мы получаем систему, не изменяющуюся при замене t на $t+\omega$, а потому *функции* $\varphi_i(t;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ *имеют период* ω, *или, иными словами, при* $\lambda=\lambda^0$ *решение системы* (1)

$$x_i=\varphi_i(t;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i^0=\varphi_i(t^0;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0),$$

периодично, равно как и движение точки P.

Для приложений важен следующий вопрос: *существует ли такая окрестность* $(\lambda^0-\delta,\ \lambda^0+\delta)$ *точки* λ^0, *что любому* λ, *принадлежащему этой окрестности, можно поставить в соответствие значения постоянных* $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$, *которым соответствует решение*

$$x_i=\varphi_i(t;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda)\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

имеющее период ω?

Мы изучим этот вопрос в достаточно общем случае. Добавим к сделанным выше предположениям требование существования у функций $X_i(t;\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda)$ непрерывных в C_{n+2} частных производных первого порядка по $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n;\ \lambda$. Как указывалось в гл. I, § 5, п. 2, из этого требования вытекает существование и непрерывность частных производных решений $\varphi_i(t;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda)$ по $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda$.

Предположив выполнение этого требования, заметим сначала, что для периодичности решения (2) необходимо и достаточно, чтобы постоянные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ удовлетворяли системе

$$\Phi_i = \varphi_i(t^0+\omega;\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\ \lambda) - \varphi_i(t^0;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0) - \alpha_i = 0$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{5}$$

При $\lambda = \lambda^0$ эта система имеет решение $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$, и если ее якобиан

$$\frac{\partial\,[\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_n]}{\partial\,[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n]}$$

отличен от нуля в некоторой окрестности точки $(t^0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda_0)$, то, в силу теоремы о неявных функциях, найдется настолько малое δ, что при $|\lambda - \lambda^0| \leqslant \delta$ можно найти систему функций $\alpha_1(\lambda),\ \alpha_2(\lambda),\ \ldots,\ \alpha_n(\lambda)$, удовлетворяющую системе (5), а тогда соответствующее решение

$$\varphi_i(t;\ \alpha_1(\lambda),\ \alpha_2(\lambda),\ \ldots,\ \alpha_n(\lambda);\ \lambda) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

имеет период ω.

Если обозначить через $\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_k}\right)_0$ частную производную функции Φ_i по α_k, вычисленную в точке $(t;\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0)$, и положить

$$V_{i,k} = \left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial\alpha_k}\right)_0, \quad X_{i,k} = \frac{\partial X_i}{\partial\alpha_k} \quad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то функции $V_{i,k}$ *будут решениями линейной системы уравнений в вариациях системы* (1) (см. гл. I, § 5, п. 2; гл. VII, § 1, п. 2)

$$\frac{dV_{i,k}}{dt} = \sum_{l=1}^{n} X_{i,l}\,[t;\ \varphi_1(t,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0;\ \lambda^0),\ \ldots,\ \varphi_n(t,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0;\ \lambda^0)]\ V_{l,k}$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{6}$$

удовлетворяющими начальным условиям

$$V_{i,k}(t^0) = \delta_{i,k}\ [\delta_{i,i} = 1;\quad \delta_{i,k} = 0 \ \text{ при } \ i \neq k;\quad i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n].$$

Имеем

$$\left(\frac{\partial\,(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_n)}{\partial\,(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)}\right)_0 =$$
$$= \begin{vmatrix} V_{1,1}(t^0+\omega) - 1 & V_{1,2}(t^0+\omega) & \ldots & V_{1,n}(t^0+\omega) \\ V_{2,1}(t^0+\omega) & V_{2,2}(t^0+\omega) - 1 & \ldots & V_{2,n}(t^0+\omega) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ V_{n,1}(t^0+\omega) & V_{n,2}(t^0+\omega) & \ldots & V_{n,n}(t^0+\omega) - 1 \end{vmatrix}.$$

В силу сказанного в § 5 обращение в нуль этого определителя является необходимым и достаточным условием существования у системы уравнений в вариациях (6) решений, имеющих период ω; таким образом, мы доказали, что *при сделанных предположениях, если система в вариациях* (6) *системы* (1), *соответствующая известному решению*

$$\varphi_1(t;\ 0,\ 0, \ldots,\ 0;\ \lambda^0), \ldots,\ \varphi_n(t;\ 0,\ 0, \ldots,\ 0;\ \lambda^0), \tag{7}$$

имеющему период ω, *не имеет решений с периодом* ω, *то существует такое положительное число* δ, *что любому значению параметра* λ, *удовлетворяющему неравенству* $|\lambda - \lambda^0| \leqslant \delta$, *соответствует периодическое решение системы* (1)

$$\varphi_1[t;\ \alpha_1(\lambda), \ldots,\ \alpha_n(\lambda);\ \lambda], \ldots,\ \varphi_n[t;\ \alpha_1(\lambda), \ldots,\ \alpha_n(\lambda);\ \lambda] \tag{8}$$

с периодом ω.

Более того, для любого положительного числа σ можно указать такое значение δ, что при $|\lambda - \lambda^0| \leqslant \delta$ и $-\infty < t < +\infty$ выполняются неравенства

$$|\varphi_i(t;\ \alpha_1(\lambda),\ \alpha_2(\lambda), \ldots,\ \alpha_n(\lambda);\ \lambda) - \varphi_i(t;\ 0,\ 0, \ldots,\ 0;\ \lambda^0)| < \sigma$$
$$(i = 1,\ 2, \ldots,\ n),$$

или, как говорится, *периодическое решение* (7) *системы* (1) *устойчиво относительно совокупности периодических решений* (8) (см. гл. VII, § 1, п. 1)[1]).

§ 7. О периодических решениях дифференциального уравнения динамики точки, движущейся по заданной траектории

1. Теорема Вейерштрасса. Пусть материальная точка P постоянной массы m движется под действием силы F, зависящей от положения точки, по заданной траектории Γ.

Выберем в качестве параметра длину дуги s кривой Γ, а положительным направлением касательной будем считать направление, совпадающее с направлением возрастания s. Если обозначить через $f(s)$ тангенциальную компоненту силы F, то уравнение движения имеет вид

$$ms'' = f(s) \quad \left[s'' = \frac{d^2s}{dt^2},\ \text{где } t - \text{время}\right]^{2)}. \tag{1}$$

[1]) Более глубокое изложение этих вопросов, равно как и приложения развитой теории к знаменитой проблеме трех тел изложено в книге Пуанкаре [1], т. I, гл. III и IV; см. также Пикар [4], т. III, стр. 167—186.

О некоторых случаях устойчивости, зависящей от параметра линейной системы, см. Чезари [1].

[2]) См. Вейерштрасс [1], т. II, стр. 1—18; Леви-Чивита и Амальди [1], т. II, ч. I, стр. 19.

Мы будем считать, что функция $f(s)$ непрерывно зависит от s. Положим

$$\int f(s)\,ds = U(s). \tag{2}$$

Умножая (1) на s', получаем, что

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}ms'^2\right] = \frac{d}{dt}U.$$

Интегрируя это равенство, получаем для кинетической энергии $T\,(T = ms'^2/2)$ равенство

$$T - U = E \quad (E = \text{const}) \tag{3}$$

(интеграл энергии).

Положим

$$\frac{2}{m}[U(s) + E] = \Phi(s). \tag{4}$$

Тогда из (3) следует, что

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \Phi(s). \tag{5}$$

Мы воспользуемся уравнением (5) для изучения поведения решений уравнения (1) в одном интересном частном случае.

Предположим, что функция $\Phi(s)$ *имеет при* $s = s_1$, $s = s_2$, $s_1 < s_2$ *простые нули, т. е. пусть*

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{s\to s_1} \Phi(s)/(s - s_1) = A_1 \neq 0, \\ &\lim_{s\to s_2} \Phi(s)/(s_2 - s) = A_2 \neq 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

а при $s_1 < s < s_2$ *функция* $\Phi(s)$ *сохраняет знак, например*

$$\Phi(s) > 0 \quad \textit{при} \quad s_1 < s < s_2. \tag{7}$$

Мы можем положить при $s_1 < s < s_2$

$$\Phi(s) = (s - s_1)(s_2 - s)\,\Phi_1(s), \tag{8_1}$$

$$\Phi_1(s_1) = A_1/(s_2 - s_1), \quad \Phi_1(s_2) = A_2/(s_2 - s_1). \tag{8_2}$$

Функция $\Phi_1(x)$ *непрерывна на отрезке* $[s_1, s_2]$.

Предположим, что в момент $t = 0$ движение начинается из положения s_0, $s_1 < s_0 < s_2$, например в направлении от s_1 к s_2. В силу (5) начальная скорость v_0 выражается по величине и значению арифметическим значением корня

$$v_0 = \sqrt{(s_0 - s_1)(s_2 - s_0)\,\Phi_1(s_0)}\,{}^{1)}, \tag{9}$$

[1]) Наоборот, если движение начинается в направлении от s_2 к s_1, то корень надо брать с отрицательным знаком.

и во время движения от s_0 к s_2 имеем

$$\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}},$$

а потому при наших предположениях время $t_1=t(s_0, s_2)$, в которое точка P пробегает дугу (s_0, s_2), выражается сходящимся интегралом

$$t_1=t(s_0, s_2)=\int_{s_0}^{s_2}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}. \qquad (10_1)$$

В s_2 скорость движения равна нулю, а так как тангенциальная сила

$$f(s_2)=\left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_2}=\frac{m}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_2}=-\frac{m}{2}(s_2-s_1)\Phi_1(s_2)<0$$

отрицательна, то движение изменяет направление и точка начинает двигаться от s_2 к s_1, а тогда

$$\frac{dt}{ds}=-\frac{1}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}\,^{1)},$$

и потому за время $t_2=t(s_2, s_1)$, выражаемое сходящимся интегралом

$$t_2=t(s_2, s_1)=-\int_{s_2}^{s_1}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}, \qquad (10_2)$$

точка P попадает в s_1; здесь скорость обращается в нуль, а так как тангенциальная сила

$$f(s_1)=\left(\frac{dU}{ds}\right)_{s=s_1}=\frac{m}{2}\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{s=s_1}=\frac{m}{2}(s_2-s_1)\Phi_1(s_1)>0$$

положительна, то движение изменяет свое направление и точка начинает двигаться от s_1 к s_2 и за время t_3, выражаемое сходящимся интегралом

$$t_3=t(s_1, s_0)=\int_{s_1}^{s_0}\frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}, \qquad (10_3)$$

возвращается в первоначальное положение s_0, имея скорость, равную по величине и по знаку выражению (9), т. е. начальную скорость, после чего движение полностью повторяется.

---

[1]) Независимо от механических соображений, мы имеем $s'(t_1)=0$, $s''(t_1)=f(s_2)/m=-(s_2-s_1)\Phi_1(s_2)/2<0$, а потому $s(t)$ достигает в t_1 максимума, и при достаточно малом положительном $h>0$ имеем $s(t_1+h)<s(t_1)$. Аналогичные рассуждения были проведены в гл. I, § 4, п. 2, 3.

Отсюда вытекает теорема Вейерштрасса:

Если при сделанных предположениях $s = s(t)$ *является решением уравнения* (1), *определяемым начальными условиями*

$$s(0) = s_0, \quad v(0) = v_0,$$

где

$$s_1 < s_0 < s_2,$$

то $s(t)$ *имеет период* 2τ $[s(t+2\tau) = s(t)]$, *равный сумме* $t_1+t_2+t_3$, *т. е. в силу* (10_1), (10_2), (10_3) *равный*

$$2\tau = 2\int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)\Phi_1(s)}}. \tag{11}$$

2. Формула Леви-Чивита для вычисления периода в первом приближении. а) Пусть функция $\Phi(s)$ имеет вид

$$\varphi_0(s) = \omega^2(s-s_1)(s_2-s) \quad (\omega = \mathrm{const}, \ \omega \neq 0). \tag{12_1}$$

С помощью замены переменной

$$s = [(s_2+s_1)-(s_2-s_1)\cos\alpha]/2$$

мы получаем для соответствующего периода $2\tau_0$ значение

$$2\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда

$$\Phi(s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = F(\varepsilon, s), \tag{12_2}$$

где функция $\varphi_1(s)$ *непрерывна вместе с первой и второй производными в* $[\bar{s}_1, \bar{s}_2]$, $\bar{s}_1 < s_1 < s_2 < \bar{s}_2$, *и предположим, что можно пренебречь членами, содержащими* $\varepsilon^{3/2}$ *или высшие степени* ε. Выведем в этом случае красивую формулу Леви-Чивита (см. Леви-Чивита [1], а также Картович [1]) для вычисления периода 2τ.

Уравнение

$$F(\varepsilon, s) = \varphi_0(s) + \varepsilon\varphi_1(s) = 0 \tag{13}$$

удовлетворяется при значениях неизвестных $\varepsilon = 0$, $s = s_1$, а так как

$$F_s(0, s_1) = \left.\frac{d\varphi_0}{ds}\right|_{s=s_1} = \omega^2(s_2-s_1) \neq 0,$$

то уравнение (13) имеет при достаточно малом ε корень

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon\frac{F_\varepsilon(0, s_1)}{F_s(0, s_1)} + \varepsilon^2 O(1),$$

или

$$s_1^* = s_1 - \varepsilon\frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2-s_1)} + \varepsilon_2 O(1). \tag{14_1}$$

Аналогично показывается, что уравнение (13) имеет другой корень

$$s_2^* = s_2 + \varepsilon \frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1), \tag{14_2}$$

причем из формул (14_1) и (14_2) следует, что при достаточно малом ε $s_1^* < s_2^*$.

Так как $F(\varepsilon, s_1^*) = 0$, $F(\varepsilon, s_2^*) = 0$, то по интерполяционной формуле Ньютона, записанной с остаточным членом второго порядка, получаем, что

$$F(\varepsilon, s) = F(\varepsilon, s_1^*) + (s - s_1^*)\frac{F(\varepsilon, s_2^*) - F(\varepsilon, s_1^*)}{s_2^* - s_1^*} + \\ + \frac{1}{2}(s - s_1^*)(s - s_2^*) R(\varepsilon, s),$$

где

$$R(\varepsilon, s) = \varphi_0''(\bar{s}) + \varepsilon\varphi_1''(\bar{s}) = -2\omega^2 + \varepsilon\varphi_1''(\bar{s}), \quad \bar{s}_1 < \bar{s} < \bar{s}_2,$$

а потому мы можем положить, что

$$F(\varepsilon, s) = \omega^2(s - s_1^*)(s_2^* - s)\ [1 + \varepsilon r(\varepsilon, r)], \tag{15}$$

где функция $|r(\varepsilon, s)|$ равномерно ограничена при достаточно малом ε и $\bar{s}_1 \leqslant s \leqslant \bar{s}_2$.

Подставляя (14_1), (14_2) в (15) и принимая во внимание формулы (13) и (12_1), получаем, что в $(\bar{s}_1, \bar{s}_2)$

$$\omega^2(s - s_1)(s_2 - s) + \varepsilon\varphi_1(s) = \omega^2\left[(s - s_1) + \varepsilon\frac{\varphi_1(s_1)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right], \\ \left[(s_2 - s_1) + \varepsilon\frac{\varphi_1(s_2)}{\omega^2(s_2 - s_1)} + \varepsilon^2 O(1)\right] \times [1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)],$$

$$\omega^2(s - s_1)(s_2 - s)\, r(\varepsilon, s) = \varphi_1(s) - \frac{\varphi_1(s_1)}{s_2 - s_1}(s_2 - s) - \\ - \frac{\varphi_1(s_2)}{s_2 - s_1}(s - s_1) + \varepsilon\omega^2 h(\varepsilon, s),$$

где $h(\varepsilon, s)$ равномерно ограничено относительно ε и s.

Положим

$$\theta(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & s & 1 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_3) & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \tag{16_1}$$

$$H(s, s_1, s_2) = \begin{vmatrix} s^2 & s & 1 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \tag{16_2}$$

и при $s \neq s_1$, s_2 положим

$$\lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\theta(s, s_1, s_2)}{H(s, s_1, s_2)}. \tag{17}$$

Тогда

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon\frac{h(\varepsilon, s)}{(s - s_1)(s_2 - s)}. \tag{18}$$

Но

$$\lim_{s \to s_1} \lambda(s) = -\frac{1}{\omega^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_1) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2s_1 & 1 & 0 \\ s_1^2 & s_1 & 1 \\ s_2^2 & s_2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{\omega^2(s_2 - s_1)^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_1) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}, \tag{19$_1$}$$

и, аналогично,

$$\lim_{s \to s_2} \lambda(s) = \frac{1}{\omega^2(s_2 - s_1)^2}\begin{vmatrix} \varphi_1'(s_2) & 1 & 0 \\ \varphi_1(s_1) & s_1 & 1 \\ \varphi_1(s_2) & s_2 & 1 \end{vmatrix}; \tag{19$_2$}$$

а потому функция $\lambda(s)$ конечна и непрерывна в $[\bar{s}_1, \bar{s}_2]$, причем легко проверить, что она имеет в $[\bar{s}_1, \bar{s}_2]$ непрерывную, а потому и ограниченную, производную.

В силу (14_1), (14_2), (18) получаем теперь, что

$$(s - s_1^*)(s_2^* - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] = (s - s_1)(s_2 - s)[r(\varepsilon, s) - \lambda(s)] +$$
$$+ \varepsilon O(1) = \varepsilon h(\varepsilon, s) + \varepsilon O(1) = \varepsilon k(\varepsilon, s),$$

где функция $k(\varepsilon, s)$ равномерно ограничена относительно ε и s, а также, что

$$r(\varepsilon, s) = \lambda(s) + \varepsilon\frac{k(\varepsilon, s)}{(s - s_1^*)(s_2^* - s)}. \tag{20}$$

Отсюда следует, что функция $\varepsilon k(\varepsilon, s)/(s - s_1^*)(s_2^* - s)$ равномерно ограничена относительно ε и s.

Из формул (11) и (15) получаем для периода 2τ, соответствующего функции $\Phi(s)$, определенной (12_2), выражение

$$2\tau = \frac{2}{\omega}\int_{s_2^*}^{s_1^*}\frac{ds}{\sqrt{(s - s_1^*)(s_2^* - s)[1 + \varepsilon r(\varepsilon, s)]}}.$$

С помощью замены переменной

$$s = \frac{s_1^* - s_2^*}{2} - \frac{s_2^* - s_1^*}{2}\cos\alpha \tag{21}$$

это выражение приводится к

$$2\tau=\frac{2}{\omega}\int\limits_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon r(\varepsilon,s)}}\,d\alpha,$$

но

$$[1+\varepsilon r(\varepsilon,\ s)]^{-1/2}=1-\frac{1}{2}\varepsilon r(\varepsilon,\ s)+\varepsilon^2 O(1),$$

а потому, учитывая (20), получаем, что

$$2\tau=2\tau_0-\frac{\varepsilon}{\omega}\int\limits_0^{\pi}\lambda(s)\,d\alpha+\varepsilon^2\int\limits_0^{\pi}\frac{k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+\varepsilon^2 O(1), \tag{22}$$

где s выражается формулой (21).

Заметим, что

$$\varepsilon\int\limits_0^{\pi}\frac{k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\int\limits_0^{\varepsilon^{1/2}}\frac{\varepsilon k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+$$

$$+\int\limits_{\pi-\varepsilon^{1/2}}^{\pi}\frac{\varepsilon k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha+\varepsilon\int\limits_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha,$$

но

$$\int\limits_0^{\varepsilon^{1/2}}\frac{\varepsilon k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon^{1/2}O(1),$$

$$\int\limits_{\pi-\varepsilon^{1/2}}^{\pi}\frac{\varepsilon k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon^{1/2}O(1),$$

$$\varepsilon\int\limits_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{k(\varepsilon,\ s)}{(s-s_1^*)(s_2^*-s)}\,d\alpha=\varepsilon O(1)\int\limits_{\varepsilon^{1/2}}^{\pi-\varepsilon^{1/2}}\frac{d\alpha}{\sin^2\alpha}=\varepsilon O(1)\operatorname{ctg}\varepsilon^{1/2}=\varepsilon^{1/2}O(1),$$

и потому из формулы (22) следует, что

$$2\tau=2\tau_0-\frac{\varepsilon}{\omega}\int\limits_0^{\pi}\lambda(s)\,d\alpha+\varepsilon^{3/2}O(1).$$

Принимая во внимание, что $\lambda(s)$ имеет ограниченную производную в $[s_1, s_2]$, получаем из (21), (14_1), (14_2), что

$$\lambda(s) = \lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha\right] + \varepsilon O(1),$$

откуда и вытекает формула Леви-Чивита для периода 2τ [1])

$$2\tau = 2\tau_0 - \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^\pi \lambda\left[\frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha\right]d\alpha + \varepsilon^{3/2}O(1). \quad (23)$$

б) Картович (см. Картович [1]) дал полезное преобразование формулы (23).

Положим

$$s = \frac{s_1+s_2}{2} - \frac{s_2-s_1}{2}\cos\alpha.$$

Из (16_2) следует, что

$$H(s, s_1, s_2) = \frac{(s_2-s_1)^3}{4}\sin^2\alpha,$$

а из (16_1), что

$$\frac{d\theta}{ds} = -\varphi_1'(s)(s_2-s_1) + \varphi_1(s_2) - \varphi_1(s_1),$$

а потому

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\theta(s)}{\operatorname{tg}\alpha} = \lim_{\alpha\to 0}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\alpha}\cos^2\alpha = \frac{s_2-s_1}{2}\lim_{\alpha\to 0}\frac{d\theta}{ds}\sin\alpha = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{\alpha\to\pi}\frac{\theta(s)}{\operatorname{tg}\alpha} = 0.$$

Но тогда, принимая во внимание формулу (17), получаем с помощью очевидных преобразований

$$-\int_0^\pi \lambda(s)\,d\alpha = \frac{1}{\omega^2}\int_0^\pi \frac{\theta(s)}{H(s)}\,d\alpha = \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^3}\int_0^\pi \frac{\theta(s)}{\sin^2\alpha}\,d\alpha =$$

$$= \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\Big[-\theta(s)\operatorname{ctg}\alpha\Big]_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} + \frac{4}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{d\alpha}\operatorname{ctg}\alpha\,d\alpha =$$

$$= \frac{2}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\int_0^\pi \frac{d\theta}{ds}\cos\alpha\,d\alpha = -\frac{2}{\omega^2(s_2-s_1)}\int_0^\pi \varphi_1'(s)\,d\sin\alpha =$$

$$= \frac{1}{\omega^2}\int_0^\pi \varphi_1''(s)\sin^2\alpha\,d\alpha.$$

[1]) Уточнение члена $\varepsilon^{3/2}O(1)$ дано автором книги (см. Сансоне [3]).

Замечая, наконец, что

$$\frac{4}{(s_2-s_1)^2}\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}\;ds=\sin^2\alpha\,d\alpha,$$

преобразуем формулу (23) к виду [1])

$$2\tau=2\tau_0+\frac{4\varepsilon}{\omega^2(s_2-s_1)^2}\int\limits_{s_1}^{s_2}\sqrt{(s-s_1)(s_2-s)}\,\varphi_1''(s)\,ds+\varepsilon O(1). \qquad (24)$$

§ 8. Задача о периодических орбитах и вариационное исчисление

1. Задача о периодических орбитах. а) В некоторых вопросах существование периодических решений получается с помощью применения методов теории дифференциальных уравнений, причем приходится накладывать слишком жесткие требования на уравнения. Но иногда (например, в задачах динамики) исследуемые дифференциальные уравнения являются необходимыми условиями существования минимума некоторого заданного интеграла (интеграла действия). Если в этом случае с помощью *прямых методов* можно установить существование минимума, то тем самым одновременно доказывается существование искомых периодических решений.

Мы уже имели случай применения *прямого метода* Тонелли (см. гл. V, § 4, п. 2). Другие приложения прямых методов будут изложены в гл. XI, § 5, п. 3, в частности, для эффективного вычисления решений, соответствующих определенным краевым условиям. Здесь мы остановимся вкратце на упомянутой выше задаче о периодических орбитах и докажем, благодаря силе прямых методов, существование таких орбит при весьма общих предположениях [2]).

---

[1]) Читатель может проверить формулу (24) на следующем примере. Пусть $\varphi_1(s)=\varphi_0(s)$; тогда

$$2\tau=\frac{2\pi}{\omega\sqrt{1+\varepsilon}}=\frac{2\pi}{\omega}\left(1-\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\varepsilon^2O(1),\quad \varphi_1''(s)=-2\omega^2,$$

и второй член в правой части принимает вид

$$-\frac{2\varepsilon}{\omega}\int\limits_0^{\pi}\sin^2\alpha\,d\alpha=-\frac{\pi\varepsilon}{\omega}.$$

[2]) О приложениях вариационного исчисления к нахождению периодических решений нелинейных уравнений второго порядка см. Лихтенштейн [1], стр. 24—51. Относительно же применения вариационного исчисления к изучению так называемого обобщенного уравнения Штурма — Лиувилля

$$\frac{1}{2k}\left(F_y-\frac{d}{dx}F_y'\right)=\lambda y^{2k-1},$$

б) Обозначим через t время, через x и y — координаты точки P, движущейся под действием силы, обладающей потенциалом; пусть связи зависят от времени, и пусть x' и y' обозначают производные x и y по t. Уравнения движения в форме Лагранжа являются уравнениями второго порядка

$$\frac{d}{dt} L_{x'} - L_x = 0, \quad \frac{d}{dt} L_{y'} - L_y = 0, \tag{1}$$

где через L обозначено выражение

$$L = \frac{1}{2} [a x'^2 + 2b x' y' + c y'^2] + \alpha x' + \beta y' + \gamma, \tag{2}$$

а L_x, L_y, $L_{x'}$, $L_{y'}$ обозначают частные производные от L по переменным x, y, x', y' [1]).

Предположим, что коэффициенты a, b, c, α, β, γ являются непрерывными функциями от x и y, равно как и их частные производные первого порядка, и что

$$a > 0 \quad (c > 0), \quad ac - b^2 > 0. \tag{3}$$

Рассмотрим, может ли точка P описывать *периодическую орбиту*, т. е. замкнутую кривую без точек самопересечения и самокасания, иными словами, существует ли пара функций $x(t)$, $y(t)$, удовлетворяющих в промежутках (t_0, t_1) системе (1), а на концах — периодическим условиям

$$x(t_0) = x(t_1), \quad y(t_0) = y(t_1); \quad x'(t_0) = x'(t_1), \quad y'(t_0) = y'(t_1),$$

и таких, что $x = x(t)$, $y = y(t)$ являются в (t_0, t_1) уравнениями простой кривой.

Если $x(t)$, $y(t)$ являются решениями системы (1), то

$$\frac{d}{dt} [x' L_{x'} + y' L_{y'} - L] = 0,$$

а потому

$$x' L_{x'} + y' L_{y'} = L + k \text{ [2]}), \tag{4}$$

выражающего обращение в нуль первой вариации интеграла

$$\int_a^b F(x, y, y')\, dx$$

при условиях

$$\int_a^b y^{2k}\, dx = 1, \ y(a) = y(b) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

[см. Люстерник Л. А. [1].

[1]) См. Бухгольц Н. Н. [1], т. II, стр. 53. — *Прим. перев.*

[2]) Говорят, что (4) представляет собой *первый интеграл системы* (1) (см. примечание на стр. 90), называемый в нашем случае *первым интегралом энергии*.

где k — постоянная величина, а так как уравнение (1) остается неизменным при увеличении L на постоянную величину, то можно считать, что $k=0$,

$$x'L_{x'}+y'L_{y'}=L, \tag{5}$$

или, в силу (2), что

$$\frac{1}{2}[ax'^2+2bx'y'+cy'^2]=\gamma. \tag{6}$$

Так как левая часть равенства (6) является положительно определенной формой от переменных x', y', то должно выполняться неравенство $\gamma(x, y)\geqslant 0$, а потому, если $x=x(t)$, $y=y(t)$ является решением системы (1), то оно должно принадлежать области, где $\gamma(x, y)\geqslant 0$.

Пусть даны две непрерывные замкнутые простые жордановы кривые $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, первая из которых лежит целиком внутри второй, причем вдоль этих кривых и в заключенной между ними кольцеобразной области $\mathfrak{A}$ плоскости x, y выполняется неравенство

$$\gamma(x, y)>0.$$

Покажем, что тогда области $\mathfrak{A}$ принадлежит периодическая орбита, окружающая кривую $\mathfrak{L}_1$.

Уравнения (1) траектории точки P являются уравнениями Эйлера для *экстремали* интеграла

$$J=\int_{t_0}^{t_1} L\,dt\,^{1)}, \tag{7}$$

причем, в силу (2) и (6), такой интеграл можно записать в виде

$$J^*=\int_{t_0}^{t_1}[\sqrt{2\gamma}\sqrt{ax'^2+2bx'y'+cy'^2}+\alpha x'+\beta y']\,dt. \tag{8}$$

Имеем тождественно

$$J-J^*\equiv\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}[\sqrt{ax'^2+2bx'y'+cy'^2}-\sqrt{2\gamma}]^2\,dt, \tag{9}$$

а потому, если вдоль некоторой кривой выполняется равенство (6), то $J-J^*$ и $\delta(J-J^*)$ обращаются в нуль, т. е. для первых вариаций J и J^* выполняется равенство

$$\delta J-\delta J^*=0,$$

и δJ^* должно обращаться в нуль при любых вариациях x и y, если исходная кривая в плоскости x, y является орбитой системы (1), (6).

---

1) См. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [1], стр. 15, 185. — *Прим. перев.*

Подинтегральная функция интеграла J^* положительно однородна порядка 1 относительно x' и y'; поэтому значение интеграла J^* вдоль некоторой дуги C зависит только от самой дуги, но не зависит от ее параметрического представления $x = x(t)$, $y = y(t)$. Но тогда можно считать, что параметр вдоль орбиты выбран так, чтобы выполнялось равенство (6) [1]).

Если вдоль кривой $\delta J^* = 0$ и если параметр t выбран так, чтобы выполнялось равенство (6), то вдоль этой кривой $\delta J = \delta J^* = 0$, а потому $x = x(t)$, $y = y(t)$ представляет траекторию системы (1), (6).

Полагая

$$F = \sqrt{2\gamma}\sqrt{ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2} + \alpha x' + \beta y',$$

имеем

$$F_1 = \frac{F_{x', x'}}{y'^2} = \frac{\sqrt{2\gamma}\,(ac - b^2)}{(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

и по терминологии *вариационного исчисления* интеграл *положительно регулярен* (см. Тонелли [4]); поэтому задача о существовании периодических орбит эквивалентна изучению *замкнутых экстремалей* положительно регулярного интеграла

$$\int_C F(x, y, x', y')\,dt,$$

принадлежащих заданной кольцеобразной области $\mathfrak{A}$ и окружающих $\mathfrak{L}_1$. Существование таких замкнутых экстремалей следует из одной теоремы Тонелли, которую мы сформулируем в следующем номере.

2. Теорема Тонелли о существовании периодических экстремалей. а) Впервые существование периодических орбит в так называемом обратимом случае ($\alpha_y - \beta_x \equiv 0$) было указано Уиттекером (см. Уиттекер [2]), но первое строгое доказательство было дано независимо друг от друга Синьорини и Тонелли (см. Синьорини [1], Тонелли [5]).

Позднее Биркгоф (см. Биркгоф [2]) рассмотрел необратимый случай (α, β — любые) и доказал также существование замкнутых орбит. В 1923 г. Тонелли (см. Тонелли [6]) дал простое доказательство этого результата.

Критерий Биркгофа был обобщен Дамкёлером (см. Дамкёлер [1]) и упрощен и расширен Тонелли (см. Тонелли [7]). Изложим теперь формулировки некоторых результатов Тонелли, о которых мы уже упоминали в п. 1, отослав читателя за доказательствами к указанным выше мемуарам.

---

[1]) См. Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А. [2], ч. II, стр. 190.— *Прим. перев.*

б) Обозначим через $\mathfrak{A}$ кольцеобразную область плоскости x, y, ограниченную непрерывными жордановыми замкнутыми кривыми $\mathfrak{L}_1$ и $\mathfrak{L}_2$, не имеющими кратных точек, из которых первая целиком лежит внутри второй. Пусть функция $F(x, y, x', y')$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка для любой точки (x, y) из $\mathfrak{A}$ и любой пары чисел (x', y'), не равных одновременно нулю.

Пусть $F(x, y, x', y')$ является положительно однородной функцией первого порядка относительно x' и y', т. е. пусть для любого $k > 0$

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y').$$

Назовем комплексом $\mathfrak{C}$ совокупность *любого конечного числа* (которое может равняться единице и не обязательно одинаково для всех комплексов) непрерывных замкнутых спрямляемых жордановых кривых без кратных точек, на каждой из которых указано направление, $C_1, C_2, \ldots, C_m$, принадлежащих кольцеобразной области $\mathfrak{A}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1. Любая кривая C_r из $\mathfrak{C}$ не может одновременно иметь как точек, лежащих внутри другой кривой того же комплекса, так и точек, лежащих вне этой кривой.

2. Две кривые C_r и C_s не могут состоять из одних и тех же точек, даже в том случае, когда они ориентированы различным образом.

3. Если кривая C_r из $\mathfrak{C}$ не имеет точек, лежащих внутри какой-либо другой кривой этого комплекса, то она ориентируется положительно (т. е. так, чтобы при обходе внутренняя область оставалась слева); другие кривые C_s из $\mathfrak{C}$ ориентируются *положительно* или *отрицательно*, в зависимости от того, четно или нечетно число кривых из $\mathfrak{C}$, содержащих *внутри себя* точки кривой C_s.

4. Среди кривых C_r из $\mathfrak{C}$ всегда есть *нечетное число* кривых, окружающих полностью кривую $\mathfrak{L}_1$, а потому всегда существует по крайней мере одна кривая, полностью окружающая кривую $\mathfrak{L}_1$ и положительно ориентированная.

Положим

$$\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}} = \sum_{r=1}^{m} \int_{C_r} F(x, y, x', y')\, ds = \sum_{r=1}^{m} J_{C_r},$$

где $x = x(s)$, $y = y(s)$, $x' = dx/ds$, $y' = dy/ds$ и ds обозначает дифференциал длины дуги кривой C_r.

Пусть в области $\mathfrak{A}^*$, для которой все точки кольцеобразной области $\mathfrak{A}$ являются внутренними точками, *интеграл* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *регулярен* (т. е. либо всегда $F_1(x, y, x', y') > 0$, либо всегда $F_1(x, y, x', y') < 0$, где $F_1 = F_{x'x'}/y'^2 \equiv -F_{x'y'}/x'y' \equiv F_{y'y'}/x'^2$) или *нормально квазирегулярен* (т. е. всегда $F_1(x, y, x', y') \geqslant 0$ или $F_1(x, y, x', y') \leqslant 0$, причем значения θ, для которых $F_1(x, y, \cos\theta, \sin\theta) = 0$, не заполняют никакого промежутка, лежащего в $[0, 2\pi]$). *Пусть, далее, область* $\mathfrak{A}$ *выпукла в малом в положительном направлении относительно функции* $F(x, y, x', y')$ (т. е. пусть существует такое число $\rho > 0$, что все экстремали, соединяющие концы любой дуги $\smile P_1P_2$ кривой $\mathfrak{L}_1$ или $\mathfrak{L}_2$ и лежащие вместе с этой дугой в круге с центром в P_1 и радиусом ρ, положительное направление которых совпадает с положительным направлением дуги $\smile P_1P_2$, целиком принадлежат области $\mathfrak{A}$); *тогда существует, по крайней мере, одна периодическая (замкнутая) экстремаль относительно* $F(x, y, x', y')$, *не имеющая кратных точек, окружающая* $\mathfrak{L}_1$ *и имеющая положительное направление.*

Если при тех же предположениях $F_1(x, y, x', y') \geqslant 0$, *то в множестве всех комплексов* $\mathfrak{C}$, *на которых* $\mathfrak{J}_{\mathfrak{C}}$ *достигает абсолютного минимума, существует, по крайней мере, один комплекс, составленный из конечного числа попарно непересекающихся замкнутых экстремалей.*

§ 9. Почти периодические функции и почти периодические решения дифференциальных уравнений

1. Почти периодические функции. Первые свойства. а) В последние десятилетия Бор, Вейль, Валле-Пуссен, Бохнер, Фавар, Винер с большим успехом изучали так называемые *почти периодические функции*, а Биркгоф и Н. М. Крылов указали важные приложения этих функций к динамике и математической физике. Здесь мы не можем изложить доказательства результатов этих ученых, а потому, чтобы ориентировать читателя в этом круге вопросов, изложим здесь лишь формулировки основных свойств этого класса функций и укажем приложения этих функций к изучению одного частного вида неоднородных линейных дифференциальных уравнений [1]).

б) Действительная или комплексная функция $f(x)$ действительной переменной x

$$f(x) = u(x) + iv(x) \quad (i \text{ — мнимая единица; } u(x) \text{ и } v(x) \text{ действительны}),$$

конечная и непрерывная при $-\infty < x < +\infty$, называется *почти периодической*, если для любого положительного числа ε можно найти такое число l

$$l = l(f, \varepsilon) > 0,$$

что каково бы ни было действительное число α, в полуотрезке $[\alpha, \alpha + l)$ существует по крайней мере одно число τ

$$\alpha \leqslant \tau < \alpha + l,$$

---

[1]) Относительно библиографии см. Бор [1], Безикович А. С. [1], Фавар [1]. [См. также Левитан Б. М. [1]; мы будем делать ссылки на эту работу. — *Прим. перев.*]

называемое *почти периодом функции* $f(x)$ *относительно* ε, для которого при любом x выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

Очевидно, что всякая непрерывная периодическая функция почти периодична.

в) Почти периодические функции обладают следующими свойствами:

1. Если функция $f(x)$ почти периодична, а a — некоторое число, то функции $f(x+a)$ и $f(ax)$ почти периодичны.

2. Почти периодические функции ограничены в $(-\infty, +\infty)$.

3. Если функция $f(x)$ почти периодична, а k — некоторое действительное или комплексное число, то и функции $f(x)+k$ и $kf(x)$ почти периодичны.

4. Если функция $f(x)=u(x)+iv(x)$ почти периодична, то и функции $f_0(x)=u(x)-iv(x)$ и $|f(x)|$ почти периодичны.

г) Почти периодические функции равномерно непрерывны в $(-\infty, +\infty)$, т. е. для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для любых двух действительных чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенству $|x_2-x_1|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

д) Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ почти периодичны, то и функция $f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$ почти периодична.

е) Если функции $f_n(x)$, $(n=1, 2, \ldots)$ почти периодичны и последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится в $(-\infty, +\infty)$ к функции $f(x)$, то и функция $f(x)$ почти периодична.

ж) *Если* $\{a_n\}$ — *последовательность действительных или комплексных чисел, а* λ_n — *последовательность действительных чисел и если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ *равномерно сходится в* $(-\infty, +\infty)$, *то его сумма является почти периодической функцией.*

з) Если производная почти периодической функции $f'(x)$ равномерно непрерывна, то она также почти периодична.

и) Если функции $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ почти периодичны, то и их произведение $f_1(x), f_2(x) \ldots f_n(x)$ почти периодично.

2. Теорема о среднем. Для почти периодических функций справедлива так называемая *теорема о среднем.*

Если функция $f(x)$ почти периодична, то существует конечный предел

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

Этот предел называется *средним значением функции* $f(x)$ и обозначается $M\{f(x)\}$;

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx.$$

3. Ряды Фурье почти периодических функций. а) Справедлива теорема:

Действительные числа Λ_n, *для которых* $M\{f(x)e^{-i\Lambda_n x}\}$ *отлично от нуля, образуют конечное или счетное множество.*

Положим

$$A_n = M\{f(x)e^{-i\Lambda_n x}\} \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots);$$

тогда $\{\Lambda_n\}$ называется *последовательностью показателей Фурье* функции $f(x)$, $\{A_n\}$ — *последовательностью коэффициентов Фурье* этой функции, а ряд $\sum\limits_{n=1} A_n e^{i\Lambda_n x}$ — ее *рядом Фурье*, обозначение:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}. \tag{1}$$

б) Если функция $f(x)$ периодическая, то определенный сейчас ряд совпадает с обычным рядом Фурье функции $f(x)$, т. е. если функция $f(x)$ периодична и имеет период p, то ряд (1) принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{inkx}, \qquad a_n = \frac{1}{p}\int_0^p f(x)\,e^{-inkx}\,dx,$$

где $2\pi/p = k$.

в) Имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}$$

и, вообще,

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |A_n|^2 = M\left\{\left|f(x) - \sum_{n=1}^{N} A_n e^{i\Lambda_n x}\right|^2\right\}.$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{N+1}^{\infty} |A_n|^2 = 0$, то ряд Фурье почти периодической функции $f(x)$ сходится к ней в среднем в $(-\infty, +\infty)$ в смысле Бора.

г) Различным почти периодическим функциям соответствуют различные ряды Фурье.

д) Если функция $f(x)$ почти периодическая, причем для нее имеет место разложение (1), и если интеграл $\int\limits_0^x f(\xi)\,d\xi$ ограничен при

$-\infty < x < +\infty$, то он почти периодичен, причем

$$\int_0^x f(\xi)\,d\xi \sim c + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{i\Lambda_n}\, e^{i\Lambda_n x} \, (c = \text{const}),$$

т. е. ряд Фурье для $\int_0^x f(\xi)\,d\xi$ получается почленным интегрированием ряда (1) (см. Бор [1], стр. 68—73).

е) Пусть почти периодическая функция имеет представление (1), тогда:

1. Если все A_n положительны, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ сходится, и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}.$$

2. Если все показатели $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ линейно независимы, т. е. ни для какой совокупности показателей $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ нельзя найти таких рациональных чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$, не равных одновременно нулю, что $r_1\Lambda_1 + r_2\Lambda_2 + \ldots + r_n\Lambda_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ сходится и

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\Lambda_n x}$$

(см. Бор [1], стр. 104—116).

4. Теорема об аппроксимации. Многочлен вида

$$P_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{i\lambda_n x},$$

где a_n — любые числа, а λ_n — действительные числа, называется *показательным многочленом.*

Показательные многочлены почти периодичны (см. п. 1 „д").

Имеет место следующая теорема об аппроксимации.

Если функция $f(x)$ почти периодична, то можно построить последовательность показательных многочленов

$$P_{N_1}(x),\ P_{N_2}(x),\ \ldots,\ P_{N_k}(x) \ldots;\quad N_1 < N_2 < \ldots < N_k < \ldots,$$

равномерно сходящуюся в $(-\infty, +\infty)$ к $f(x)$.

5. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Теорема Бора и Нейгебауера. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + c_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + c_n y = f(x), \tag{2}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — действительные числа, а $f(x)$ — почти периодическая функция, и докажем теорему Бора и Нейгебауера (см. Бор и Нейгебауер [1]).

Любое ограниченное решение уравнения (2) *является почти периодической функцией.*

Пусть ρ — корень характеристического уравнения для уравнения (2) (см. гл. II, § 1, п. 6 „г")

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \ldots + c_{n-1} r + c_n = 0.$$

Тогда тождественно

$$r^n + c_1 r^{n-1} + \ldots + c_{n-1} r + c_n = (r + \rho)(r^{n-1} + \gamma_1 r^{n-2} + \ldots + \gamma_{n-1}),$$

и потому уравнение (2) можно заменить системой уравнений

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \gamma_1 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + \gamma_{n-1} y = Y, \tag{3}$$

$$Y' + \rho Y = f(x). \tag{4}$$

Если функция $y(x)$ является ограниченным в $(-\infty, +\infty)$ решением уравнения (2), то по теореме Эсклангона (см. Эсклангон [1], стр. 192, а также Ландау [1]) функции $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$ также ограничены в $(-\infty, +\infty)$, а тогда тем же свойством обладает и функция Y [см. формулу (3)]; таким образом, достаточно доказать, что любое ограниченное решение уравнения (4) почти периодично, чтобы можно было вывести по индукции сформулированную выше теорему.

Пусть

$$\rho = r + i\lambda \quad (r, \lambda \text{ действительны}, i \text{ — мнимая единица}).$$

Рассмотрим отдельно случаи $r > 0$, $r < 0$, $r = 0$.

Если $r > 0$, то общее решение уравнения (4) имеет вид

$$Y(x) = e^{-\rho x}\left[\int_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} f(\xi)\, d\xi + c\right] \quad (c = \text{const}),$$

и если $|f(x)| \leqslant B$, то

$$\left| e^{-\rho x} \int_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} f(\xi)\, d\xi \right| \leqslant B \left| e^{-\rho x} \frac{e^{\rho x}}{\rho} \right| = \frac{B}{|\rho|},$$

а потому (4) имеет единственное ограниченное в $(-\infty, +\infty)$ решение

$$Y(x) = e^{-\rho x} \int_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} f(\xi)\, d\xi.$$

Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Пусть τ — почти период функции $f(x)$ относительно ε; тогда

$$\left| Y(x+\tau) - Y(x) \right| = \left| e^{-\rho(x+\tau)} \int\limits_{-\infty}^{x+\tau} e^{\rho\xi} f(\xi)\, d\xi - e^{-\rho x} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} f(\xi)\,(d\xi) \right| =$$

$$= \left| e^{-\rho(x+\tau)} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\rho(\xi+\tau)} f(\xi+\tau)\, d\xi - e^{-\rho x} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} f(\xi)\, d\xi \right| =$$

$$= \left| e^{-\rho x} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{\rho\xi} [f(\xi+\tau) - f(\xi)]\, d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{|\rho|},$$

а потому функция $Y(x)$ почти периодична.

Аналогично рассматривается случай $r < 0$.

Пусть $r = 0$, тогда решения уравнения (4) имеют вид

$$Y(x) = e^{-i\lambda x} \left[\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi + c \right], \tag{5}$$

и потому функция $Y(x)$ ограничена в $(-\infty, +\infty)$ лишь в случае, когда интеграл $\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi$ ограничен при изменении x в $(-\infty, +\infty)$. Но функция $e^{i\lambda x} f(x)$ почти периодична, и потому, если интеграл

$$\int\limits_{0}^{x} e^{i\lambda\xi} f(\xi)\, d\xi$$

ограничен при изменении x в $(-\infty, +\infty)$, то он почти периодичен (п. 3 „д"), чем и доказана почти периодичность $Y(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

Айнс (Ince E. L.)

[1] Обыкновенные дифференциальные уравнения, Харьков, 1939.

[2] A proof of the impossibility of the coexistence of two Mathieu fonctions, Proc. of the Cambr. Phil. Soc., **21** (1922), 117—120.

Арцела (Arzelá C.)

[1] Sull' integralità delle equazioni differenziali ordinarie, Mem. R. Acc. Sc. dell' Ist. di Bologna (5), V (1895), 257—270.

[2] Sull' esistenza degli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Mem. R. Acc. Sc. dell'Inst. di Bologna (5), **VI** (1896), 131—140.

Ахиезер Н. И.

[1] Элементы теории эллиптических функций, М. — Л., 1948.

Безикович (Besicovich A. S.)

[1] Almost periodic functions, Cambridge, 1932, p. 180.

Бекер (Baker H. F.)

[1] On the integration of linear differential equations, Proc. of the London Math. Soc. (1) **35** (1903), 333—378.

[2] Note on the integration of linear differential equations, Proc. of the London Math. Soc. (2) (1905), 293—296.

Бернулли Д. (Bernoulli D.)

[1] Theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaler suspensae, Comm. Acad. Sc. Imp. Petrop., **VI** (1732—1733). Опубликовано в 1738 г.

Бертини (Bertini E.)

[1] Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi, Pisa, 1907.

Бессель (Bessel F. W.)

[1] Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entstehet, Berl. Abh. (1824).

Бианки (Bianchi L.)

[1] Lezioni sulla teoria dei gruppi continui di trasformationi, Pisa, 1918.

Биркгофф (Birkhoff G. D.)

[1] Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans. of the Am. Math. Soc., **9** (1908), 373—395.

[2] Dynamical systems with two degrees of freedom, Trans. of the Am. Math. Soc., **18** (1917), 199—300.

Блисс (Bliss G. A.)

[1] Solutions of differential equations as functions of the constants of integrations, Bull. of the Am. Math. Soc., **XXV** (1918—1919), 15—26.

Блисс и Шенберг (Bliss G. A., Schoenberg I. J.)

[1] On separation, comparison and oscillation theorema for self-adjoint systems of linear second order differential equations, Am. Journ. of Math., **53** (1931), 781—800.

Боль (Bohl P.)

[1] Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie, Journ. für die reine und ang. Math., **131** (1906), 268—321.

Бомпиани (Bompiani E.)

[1] Forme normali delle equazioni differenziali lineari e lora significato

geometrico, Annales Scientifiques de l'Université de Jassy, **XXIII** (1937), 75—105.

Бор (Bohr H.)
[1] Почти периодические функции, М. — Л., 1934.

Бор и Нейгебауер (Bohr H., Neugebauer O.)
[1] Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1926), 8—22.

Борель (Borel E.)
[1] Sur l'équation adjointe et sur certains systèmes d'équations différentielles, Ann. Sc. de l'Éc. Norm. Sup. (3), **IX** (1892), 63—90.
[2] Leçons sur les séries divergentes, Paris, 1928.

Бохер (Bôcher M.)
[1] Boundary problems in one dimension, Proceedings of the fifth. Int Congress of Math. (Cambridge, 1913), **I**, 163—195.
[2] Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris, 1917, p. 118.
[3] Applications and generalizations of the conception of adjoint systems, Trans. of the Am. Math. Soc., **14** (1913), 403—420.
[4] Green's functions in space of one dimension, Bull. of the Am. Math. Soc. (2), **7** (1901), 297—299.
[5] Boundary problems and Green's functions for linear differential and difference equations. Ann. of Math. (2), 13 (1911), 71—78.
[6] Введение в высшую алгебру, М. — Л., 1933.

Брунс (Bruns H.)
[1] Zur Theorie der Kugelfunktionen, Journ. für die reine und angew. Math., **90** (1881), 322—328.

Буницкий (Bounitzky E.)
[1] Sur la fonction de Green des équations differentielles linéaires ordinaires, Journ. de Math. par. et appl. (6), **5** (1909), 65—125.

Буркхардт (Burkhardt H.)
[1] Sur le fonctions de Green relatives à une domaine d'une dimension, Bull. Soc. Math. de France, **XXII** (1894), 71—75.

Бухгольц Н. Н.
[1] Основной курс теоретической механики, ч. II, М. — Л. 1945.

Валле-Пуссен (de la Vallée Poussin Ch. J.)
[1] Курс анализа бесконечных малых, М. — Л., 1933, т. II, 205—217.
[2] Sur l'équation différentielle du second ordre. Détermination d'une intégrale par deux valeurs assignées. Extension aux équations d'ordren, Journ. de Math. pur. et appl. (9), **8** (1929), 125—144.

Ватсон
[1] Теория бесселевых функций, М., 1949.

Вейерштрасс (Weierstrass K.)
[1] Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen, Math. Werke II (Berlin, 1895), 19—44.
[2] Ueber eine Gattung reel periodischer Funktionen, Math. Werke II (Berlin, 1895), 1—18.

Вильчинский (Wilczynski E. J.)
[1] Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leipzig, 1906.

Винтнер (Wintner A.)
[1] On the exact value of the bound for the regularity of solutions of ordinary differential equations, Am. Journ. of Math., **57** (1935), 539—540.

Вольтерра (Volterra V.)
[1] Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenzlali lineari, Memorie della Società Ital. delle Scienze (3), VI (22/VI — 37), 1—107.
[2] Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari, Memorie della Società Ital. delle Scienze (3), **XII** (1902), 1—68.

Галлико (Gallico V.)

[1] Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Giorn. di Mat. di Battaglini, **55** (1917), 165—230.

Галлина (Gallina G.)

[1] Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari omogenee autoaggiunte, Rendiconti. R. Ist. Lombardo Sc. e. Lett. (2) **63** (1930), 272—282.

Гамбургер (Hamburger M.)

[1] Bemerkung über die Form der Integrale der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten, Journ. für die reine und angew. Math., **76** (1873), 113—125.

Гантмахер Ф. Р.

[1] Теория матриц, М. — Л., 1953.

Гаусс (Gauss C. F.)

[1] Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2+\ldots.$$

Comm. Soc. R. Sc. Göttingensis II (1812). См также

[2] Gauss Werke, Bd. 3, Göttingen, 1866.

Гельфонд А. О.

[1] Исчисление конечных разностей, М. — Л., 1952.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1—6 Note, 1904.

Гобсон (Hobson E. W.)

[1] On a general convergence theorem and the theory of the representation of a function by series of normal functions, Proc. of the London Math. Soc. (2), **6** (1908), 349—395.

Голубев В. В.

[1] Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений, 2-е изд., М. — Л., 1950.

Грей и Метьюз

[1] Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, М., 1953.

Гронуолл (Gronwall T. H.)

[1] Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations, Ann. of Math. (2), **20** (1919), 292—296.

Гумберт (Humbert P.)

[1] Fonctions de Lamé et fonctions de Mathieu, Paris, 1926, p. 1—55.

Гурвиц

[1] Теория аналитических и эллиптических функций, М. — Л., 1933.

Гурса (Goursat E.)

[1] Курс математического анализа, 3-е изд., М. — Л., 1936.

Дамкелер (Damköhler W.)

[1] Periodische Extremalen vom minimum Typ in Ringbereichen, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), V (1936), 127—140.

Дарбу (Darboux G.)

[1] Leçons sur la Théorie Généralle des Surfaces, vol. I, II, 2-éme éd., Paris, 1914—1915.

[2] Mémoire sur l'approximation des fonctions de trés grands nombres, et sur une classe étendue de développements en série, Journ. de Math. pur. et appl. (3), **4**, (1878), 5—56, 377—416.

Джексон (Jackson D.)

[1] Ряды Фурье и ортогональные полиномы, М., 1948.

[2] Algebraic properties of self-adjoint system, Trans. of the Am. Math. Soc., **17** (1916), 418—424.

Джулиано (Guiliano L.)

[1] Generalizzazione di un lemma di Gronwall e di una diseguaglianza di Peano, Rend. Acc. Naz. Lincei (8), 1 (1946), 1264—1271.

Дини (Dini U.)

[1] Studi sulle equazioni differenziali lineari, Ann. di Mat. pura e appl. (3), **II** (1898), 297—324; **III** (1899), 125—183.

[2] Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale, Pisa, 1880.

[3] Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo, Pisa, 1911, p. 377.

Дюбуа-Реймон (du Bois-Reymond P.)

[1] Bemerkungen über $\Delta z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$, Journ. für die reine und angew. Math. v. Crelle, **103** (1888), 204—229.

Жюлиа (Julia G.)

[1] Introduction mathématique aux théories quantique, t. I, Paris, 1936.

Зигмунд

[1] Тригонометрические ряды, М. — Л., 1939.

Иглиш (Iglisch R.)

[1] Ueber den Resonanzbegriff bei nichtlinearen Schwingungen, Zeitschr. für angew. Math. und Mech., **17** (1937), 249—258.

Казорати (Casorati F.)

[1] Sur la distinction des intégrales des équations différentielles linéares en sous-groupes, C. Rendus, Ac. Sci., **XCII** (1881), 175—178, 238—241.

Камке (Kamke E.)

[1] Differentialgleichungen Reeler Funktionen, Leipzig, 1930.

[2] Ueber die Existenz von Eigenwerten bei Randwertaufgaben zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., **44** (1938), 619—634.

[3] Neue Herleitung der Oszillationssätze für die linearen selbstadjungierten Randwertaufgaben zweiter Ordnung, Math. Zeitschr., **44** (1938), 635—658.

Кампе де Ферье (Kampé de Fériet J.)

[1] La fonction hypergéométrique, Mèmorial des Sciences Mathém., **85** (1937), Paris.

ван Кампен и Винтнер (van Kampen E. R., Wintner A.)

[1] On an absolute constant in the theory of variational stability, Am. Journ. of Math., **59** (1937), 270—274.

Каратеодори (Carathéodory C.)

[1] Vorlesungen über Reeler Funktionen, 2-e Aufl., Leipzig.

Картович (Cartovitsh N.)

[1] Sul calcolo effettico del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei (6), **27** (1938), 65—70

Кели (Cayley A.)

[1] On linear differential equations (The Theory of Decomposition), Quarterly Journ. of Math., **21** (1886), 331—335.

Керубино (Cherubino S.)

[1] Applicazioni delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6), **25** (1937), 541—547, 686—690.

Кнезер (Kneser A.)

[1] Die Integralgleichungen und ihre Anwendungen in der mathematischen Physik, Braunschweig, 1911, S. 243.

[2] Untersuchungen über die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik, Math. Ann., **58** (1904), 81—147.

[3] Beiträge zur Theorie der Sturm — Liouvillischen Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Ann., **60** (1905), 402—423.

Коттон (Cotton É.)

[1] Approximation successives et équations différentielles, Memorial des Sciences Math., **28** (1928), Paris.

Коши (Cauchy A. L.)
[1] Oeuvres Complètes, 1897—1898.
Кузьмин Р. О.
[1] Бесселевы функции, М. — Л., 1935.
Куммер (Kummer E.)
[1] Ueber die hypergeometrische Reihe, Journ. für die reine und angew. Math., **15** (1836), 39—83, 127—172.
Курант и Гильберт
[1] Методы математической физики, М. — Л., т. 1 и 2, 1951.
Курош А. Г.
[1] Курс высшей алгебры, М. — Л., 1952.
Лаврентьев М. А. и Люстерник Л. А.
[1] Курс вариационного исчисления, М. — Л., 1950.
[2] Основы вариационного исчисления, т. I, ч. II, М. — Л., 1935.
Лагранж (Lagrange G.)
[1] Oeuvres, Paris, 1869.
Ландау (Landau E.)
[1] Ueber einen Satz von Herrn Esclangon, Math. Ann., **102** (1929), 177—188.
Лаппо-Данилевский И. А.
[1] Теория функций от матриц и систем линейных дифференциальных уравнений, М. — Л., 1934.
[2] Mémoires sur la théorie des systemes des équations différentielles linéares, I, II, III, Труды Физико-матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **VI—VIII**, 1934—1936.
Леви-Чивита (Levi-Civita T.)
[1] Sul calcolo effettivo del periode in un caso tipico di prima approssimazione, Revista de Ciencias (Lima, Peru), **38**, № 421 (1937), 71—78.
Леви-Чивита и Амальди
[1] Курс теоретической механики, М., 1951.
Левитан Б. М.
[1] Некоторые вопросы теории почти периодических функций. I. Успехи матем. наук, **II**, вып. 5 (1947), 132—192. II. Успехи матем. наук, **II**, вып. 6 (1947), 174—214.
Лейбниц (Leibniz G. W.)
[1] Die Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern, Berlin, 1899.
Летшоу (Latshaw V. B.)
[1] The algebra of self-adjoint boundary-value problems, Bull. of the Am. Math. Soc., **39** (1933), 969—978.
Ли (Lie S.)
[1] Geometrie der Berührungstransformationen, Leipzig, 1896.
Линделёф (Lindelöf E.)
[1] Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles, Journ. de Math. pur. et appl., (5), **6** (1900), 423 — 441.
Липшиц (Lipschitz R.)
[1] Disamina della possibilità di integrare completamente un dato sistema di equazioni differenziali ordinarie, Ann. di Mat. pura et appl. (2), **2** (1868 — 69), 288—302. Перепечатано в Bull. des Sciences Mathém. et Astronomiques, **X** (1876), 149—159.
Лиувилль (Liouville J.)
[1] Note sur la Théorie de la Variation des constantes arbitraires, Journal de math. pur. et appl. (1), **3** (1838), 342—349.
[2] Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujétis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable, Journal de math. pur. et appl., **I** (1836), 253—265; **II** (1837), 16—35, 418—436.

[3] Sur la Théorie des Équations différentielles linéaires et sur le développment de Fonctions en séries, Journ. de Math. pur. et appl., **3** (1838), 561—614.

Лихтенштейн (Lichtenstein L.)

[1] Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Lösungen als Funktionen der Randwerte und der Parameter, Rend. Circ. Mat. Palermo, **28** (1909), 267—306.

[2] Ueber einige Existenzprobleme der Variationsrechnung, Journ. für die reine und angew. Math., **145** (1914), 24—85.

Люстерник Л. А.

[1] Обобщение уравнения типа Штурма — Лиувилля, ДАН СССР, **XV** (1937), 235—238.

Ляпунов А. М.

[1] Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, C. Rend. Ac. Sci., **123** (1896), 1248—1252.

[2] Sur une équation différentielle linéaire du second ordre, C. Rend. Ac. Sci., **128** (1899), 910—923.

[3] Sur une équation transcendente et les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients périodiques, C. Rend. Ac. Sci., **128** (1899), 1085—1088.

[4] Общая задача об устойчивости движения, М. —Л., 1935.

Маммана (Mammana G.)

[1] L'equazione del terzo ordine lineare omogenea, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. et Lett. (2), **63** (1930), 272—289.

[2] Sopra un nuovo metodo di studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschr., **25** (1926), 734—748.

[3] Sistemi differenziali. Autovalori e Autofunzioni, Napoli, 1938, p. 1—207.

Маркушевич А. И.

[1] Теория аналитических функций, М. — Л., 1950.

Матье (Mathieu E.)

[1] Théorie de l'elasticité des corps solides, pt. I, Paris, 1890.

Маультон (Moulton F. R.)

[1] Differential equations, New York, 1930.

Мезон (Mason M.)

[1] On the boundary value problems of linear ordinary differential equations of second order, Trans. of the Am. Math. Soc., **7** (1906), 337—366.

Милн Томсон (Milne Thomson L. M.)

[1] Die elliptischen Funktionen von Jacobi, Berlin, 1931, S. 69.

Муаньо (Moigno F. N. M.)

[1] Leçons de calcul différential et de calcul intégral, Paris, 1844.

Натансон И. П.

[1] Конструктивная теория функций, М. — Л., 1949.

[2] Теория функций вещественной переменной, М. — Л., 1950.

Николетти (Nicoletti O.)

[1] Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (5), **IV$_2$** (1895), 316—324.

[2] Sulle condizioni iniziali che determiniano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie, Atti della R. Acc. Sc. Torino, **33** (1897—1898), 746—759.

Паперитц (Papperitz E.)

[1] Ueber verwandte s-Funktionen, Math. Ann., **25** (1885), 212—221.

Пеано (Peano G.)

[1] Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari, Atti della R. Acc. Sc. Torino, **22** (1887), 293—302. Перепечатана с небольшими изменениями в Math. Ann., **32** (1888), 450—456.

[2] Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires, Nouvelles Annalles de Math., **XI** (1892), 79—82.

[3] Sull' integralità delle equazioni differenziali del primo ordine, Atti della R. Acc. Sc. Torino, XXI (1885—1886), 437—445.
[4] Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Ann., 37 (1890), 182—228.
Петровский И. Г.
[1] Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М. — Л., 1952.
[2] Лекции по теории интегральных уравнений, М. — Л., 1948.
Пикар (Picard E.)
[1] Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives, Journ. de Math. pur. et appl., (4), 6 (1890), 145—210.
[2] Leçons sur quelques problémes aux limites de la Théorie des équations différentielles, Paris, 1930.
[3] Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de physique mathématique, Rend. Circ. Mat. Palermo, 29 (1910), 79—97.
[4] Traité d'Analyse, t. III, 3-ème éd., Paris, 1928.
Пиконе (Picone M.)
[1] Corso di Analisi Superiore. Equazioni differenziali, Catania, 1923.
[2] Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare del seconde ordine Annali della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (1), XI, 1—141.
[3] Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine, Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei, (6), XV (1932), 942—948.
[4] Sulle autosoluzioni e sulle formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie autoaggiuunte, Math. Zeitschr., 28 (1928), 519—555.
Привалов И. И.
[1] Введение в теорию функций комплексного переменного, М. — Л., 1945.
[2] Интегральные уравнения, М. — Л., 1935.
Пуанкаре (Poincaré H.)
[1] Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste, Paris, 1892.
[2] Sur les Équations Linéaires aux Différentielles ordinaires et aux Differences finies, Am. Journ. of Math., VII (1885), 203—258.
[3] Sur les groupes des équations linéaires, Acta Math., IV (1884), 201—311.
Пуассон (Poisson S. D.)
[1] Théorie de la Chaleur, Paris 1835.
Пуль (Poole E. G. C.)
[1] On certain classes of Mathieu functions, Proc. of the London Math. Soc., (2), 20 (1921), 374—388.
Рид (Reid W. T.)
[1] Boundary value problems of the calculus of variations, Bull. of the Am. Math. Soc., 43 (1937), 633—666.
Риккати (Riccati J. F.)
[1] Acta Eruditorum, t. 8, fasc. 2, 1723.
Риман
[1] Сочинения, М. — Л., 1948.
Рисс (Riesz F.)
[1] Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues, Paris, 1913
Ритт (Ritt J. F.)
[1] On the differentiality of the solution of a differential equation with respect to a parameter, Ann. of Math. (2), 20 (1919), 289—291.
Сансоне (Sansone G.)
[1] Sviluppo in serie e valutazione asintotica del rapporto tra due polinomi consecutivi di Jacobi, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), 16 (1937), 39—48.

[2] Esistenza di infiniti autovalori per le equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti, Rend. Circ. Mat. Palermo, LV (1931), 168—176.
[3] Valutazione dell' errore nel calcolo effettivo del periodo dei moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione, Boll. Un. Mat. It., (2), **1** (1939), 422—426.
[4] Sviluppi in serie di funzioni ortogonali, Bologna (1935), 36.
Северини (Severini G.)
[1] Sull' integrazione delle equazioni differenziali ordinarie del primo ordine, Rend. R. Ist. Lombardo, Sc. e Lett., **31** (1898), 657—667.
[2] Sull' integrazione approssimata delle equazioni differenziali ordinarie del prima ordine, Rend. R. Ist. Lombardo Sc. et Lett., **31** (1898), 950—959.
Сеге (Szegö G.)
[1] Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynomen, Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, **10** (1933), 35—112.
[2] Orthogonal Polynomials, Am. Math. Soc. Coll., 23, New York, 1939.
[3] Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions, Trans. of the Am. Math. Soc., **39** (1936), 1—17.
Синьорини (Signorini A.)
[1] Sul teorema di Wittaker, Rend. della R. Accad. Naz. dei Lincei, (5), **21** (1912), 36—39.
[2] Esistenza di un estremale chiusa dentro un controno di Wittaker, Rend. Circ. Mat. Palermo, **XXXIII** (1912), 187—193.
Скорца (Scorza G.)
[1] Corpi numerici e algebre, Messina,1921.
Соболев С. Л.
[1] Уравнения математической функции, М. — Л., 1950.
Соваж (Sauvage L.)
[1] Théorie des diviseurs élémentaires et applications, Ann. Sci. de l'Éc. Norm. Sup., (3), **VIII** (1891), 285—350.
Сонин Н. Я.
[1] Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries, Math. Ann., **16** (1880), 1—80.
Стеклов В. А.
[1] Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня, Сообщ. Харьк. Матем. Об-ва, (1896), 136—181.
[2] Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes Tshébycheff et, en particulier, suivant les polynomes de Jacobi, Journ. für reine und angew. Math., **125** (1903), 207—236.
Степанов В. В.
[1] Курс дифференциальных уравнений, М. — Л., 1950.
Стретт
[1] Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, Харьков, 1935.
Сушкевич А. К.
[1] Основы высшей алгебры, М. — Л., 1937.
Тамм И. Е.
[1] Основы теории электричества, М. — Л., 1949.
Толстов Г. П.
[1] Ряды Фурье, М. — Л., 1951.
Тонелли (Tonelli L.)
[1] Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra, Bull. of the Calcutta Math. Soc., **20** (1928), 31—48.
[2] Su alcuni funzionali, Ann. di Mat. pura ed appl., (4), **18** (1939), 1—21.
[3] Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di piu variabili reali, Rend. Circ. Mat. di Palermo, **XXIX** (1910), 1—36.
[4] Fondamenti di Calcolo delle Variationi, vol. 2, Bologna, 1923.
[5] Sulle orbite periodiche, Rend. della R. Acc. Naz. dei Lincei, **XXI** (1912), 251—258, 332—334.

[6] Sulle orbite periodiche irreversibili, Mem. R. Acc. Sc. dell' Inst. di Bologna (Classe di Sc. Fis.) (VIII), I (1923—24), 21—25.
[7] Sulle estremali complete, Ann. della R. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), V (1936), 159—168.
Трикоми (Tricomi F.)
[1] Sulla funzione di Green di un'equazione differenziale decomposta in fattori simbolici, Atti Acc. delle Sc. di Torino, **80** (1944—45), 159—183.
Уиттекер (Whittaker E. T.)
[1] On the functions associated with the elliptic cylinder in harmonic analysis, Intern, Congr. of Math. (Cambridge, 1912), I (1912), 366—371.
[2] On periodic orbits, Monthly Notices of the Royal Astronomic Soc. (London), LXII (1902), 186—196.
Уиттекер и Ватсон
[1] Курс современного анализа, т. I, II, М. — Л., 1933.
Ундервуд (Underwood F.)
[1] Note on the periodic solutions of linear differential equations, Ann. of Math., (2), **31** (1930), 655—656.
[2] An integral condition associated with linear differential equations having simply-periodic coefficients, Tôhoku Math. Journ., **36** (1933), 269—274.
[3] A classification of certain ordinairy linear differential equations having simply periodic coefficients, Tôhoku Math. Journ., **36** (1933), 275—302.
Уолш (Walsh J. L.)
[1] On the convergence of the Sturm — Liouville Series, Ann. of Math. (2), **24** (1923), 109—120.
Фавар (Favard J.)
[1] Leçons sur les fonctions presque-périodiques, Paris, 1933, p. 181.
Файт (Fite W. B.)
[1] Periodic solutions of linear differential equations, Ann. of Math. (2), **281** (1927), 59—64.
Фихтенгольц Г. М.
[1] Курс дифференциального и интегрального исчислений, М. — Л., 1948—1949.
Флоке (Floquet G.)
[1] Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques, Ann. Sc. de l'Ec. Norm. Sup. (2), **XII** (1883), 47—89.
Форсайт (Forsyth R.)
[1] Theory of differential equations, Cambridge, 1902.
Фрезер, Дункан, Келлар
[1] Теория матриц и ее приложения, М., 1950.
Фробениус (Frobenius G.)
[1] Ueber der Rang einer Matrix, Sitzungber. der Kgl. Preuss. Ak. der Wiss. zu Berlin (1911), S. 20—29, 128—129.
Фукс Б. А.
[1] Теория аналитических функций многих комплексных переменных, М. — Л., 1948.
Фукс (Fuchs L.)
[1] Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koefficienten, Journ. für die reine und angew. Math., **66** (1866), 121—160.
[2] Ueber Relationen, welche für die zwishen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden, Journ. für die reine und angew. Math., **76** (1873), 177—213.
Фурье (Fourier J. B.)
[1] Théorie Analytique de la Chaleur, Paris, 1822.
Хаар (Haar A.)
[1] Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann., **69** (1910), 331—371; **71** (1912), 38—62.

Харди
[1] Расходящиеся ряды, М., 1951.
Харди, Литтльвуд, Полиа
[1] Неравенства, М., 1948.
Хаупт (Haupt O.)
[1] Ueber eine Methode zum Beweise von Oszillationstheoremen, Math. Ann., **76** (1915), 67—104.
Хилл (Hill G. H.)
[1] On the part of the motion of the lunar perigee which is a function of the mean motions of the sun and moon, Cambridge. Ms. U. S. A., 1877. Опубликовано с добавлениями в Acta Math., VIII (1888), 1—36.
Цвирнер (Zwirner G.)
[1] La teoria delle matrici applicata ai sistemi di equazioni differenziali lineari, Rend. Sem. Padowa, **7** (1936), 55—109.
Чеботарев Н. Г.
[1] Теория групп Ли, М.—Л., 1940.
Чебышев П. Л.
[1] Полное собрание сочинений, М., 1947.
Чезари (Cesari L.)
[1] Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali a coefficienti periodici, Mem. della R. Acc. d'Italia (6), **11** (1940), 633—695.
Чиммино (Cimmino G.)
[1] Autosoluzioni e autovalori nelle equazioni differenziali lineari ordinarie autoaggiunte di ordine superiore, Math. Zeitschr, **32** (1930), 1—58.
Чинквини (Cinquini S.)
[1] Sulle equazioni funzionali del tipo di Volterra, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6), **XVII** (1933), 616—621.
[2] Problemi di valori al contorno per equazioni differenziali di ordine *n*, Annali della R. Sc. Norm. Sup. un di Pisa (2), **9** (1940), 61—77.
Шлезингер (Schlesinger L.)
[1] Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differenzialgleichungen, Berlin, 1922
Штекель (Stäckel P.)
[1] Sur la convergence des séries représentant les intégrales des équations différentielles, C. Rend. Ac. Sci. Paris, **126** (1898), 203—205.
Штурм (Sturm C.)
[1] Sur les équations différentilelles linéaires du second ordre, Journ. de Math. pur. et appl., **1** (1836), 106—186.
Эйлер (Euler L.)
[1] Institutiones Calculi Integralis, Petropoli, 1769.
[2] Specimen Transformationis Singularis Serierum, Nova Acta Ac. Sc. Petr., **12** (1794), опубликовано в 1801, см. также Opera, Ser. I, XVI, 41—55.
Эльсгольц Л. Э.
[1] Вариационное исчисление, М. —Л., 1952.
Эсклангон (Esclangon E.)
[1] Nouvelle recherches sur les fonctions quasi-périodiques, Ann. Obs. Bordeaux, **16** (1917), 51—226.
Эттлингер (Ettlinger H. J.)
[1] Existence theorems for the general real, self-adjoint linear system o the second order, Trans. of the Am. Math. Soc., **19** (1918), 79—96.
[2] Oscillation theorems for the real, self-adjoint linear system of the second order, Trans. of the Am. Math. Soc., **22** (1921), 136—143.
Якоби (Jacobi C. G.)
[1] Gesammelte Werke, Berlin, 1886.
Янчевский С. А.
[1] Oscillation theorems for the differential boundary value problems of the fourth order, Ann. of Math., **29** (1927), 521—542.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава II

НОРМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Глава III

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕКОТОРЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Глава IV

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Глава V

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА ($n>2$)

Глава VI

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ