Дж. САНСОНЕ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

II

Дж. САНСОНЕ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ТОМ II

Перевод с итальянского
Н. Я. ВИЛЕНКИНА

И * Л

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1954

G. SANSONE

EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEL CAMPO REALE

Parte Seconda

Seconda edizione

BOLOGNA
1949

Глава VII

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Устойчивые и неустойчивые решения систем дифференциальных уравнений

1. Безусловная устойчивость (устойчивость в смысле Дирихле) и частичная устойчивость (устойчивость в смысле Рауса). Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x;\ y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Зададим n чисел $\bar{y}_1^0, \bar{y}_2^0, \ldots, \bar{y}_n^0$ и число x^0 и предположим, что любой системе начальных значений $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, удовлетворяющих неравенствам

$$|y_i^0 - \bar{y}_i^0| < \rho,$$

соответствует одно и только одно решение этой системы $y_1(x)$, $y_2(x), \ldots, y_n(x)$, определенное в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяющее начальным условиям

$$y_i(x^0) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Пусть $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ — решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\bar{y}_i^0(x^0) = \bar{y}_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{3}$$

Оно называется *безусловно устойчивым, или устойчивым в смысле Дирихле*, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое число ρ', $0 < \rho' \leqslant \rho$, что любой системе начальных значений $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, удовлетворяющих неравенствам

$$|y_i^0 - \bar{y}_i^0| < \rho' \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

соответствуют решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, для которых

$$\max_{-\infty < x < +\infty} |y_i(x) - \bar{y}_i(x)| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)\ ^{1)}. \tag{5}$$

---

[1]) Относительно вопросов, рассматриваемых в этом параграфе, см. Леви-Чивита и Амальди [1], т. II, ч. I, стр. 377—382. Для уравнения $x'' + p(t)x = 0$, где функция $p(t)$ периодична, критерий устойчивости был уже указан в гл. VI, § 2, п. 2, „в".

Если это условие не выполняется, то решение называется *неустойчивым*.

Для некоторых приложений достаточно, чтобы неравенства (5) выполнялись лишь для значений $x \geqslant x^0$; в этом случае говорят о *положительной устойчивости* [1]). Иногда бывает интересно требовать выполнения неравенств (5) лишь для части функций $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, характеризующей некоторые стороны изучаемого явления; в этом случае говорят о *частичной устойчивости*, или об устойчивости в смысле Рауса [1]. Пусть, например, уравнение второго порядка

$$y'' = f(x;\ y,\ y') \tag{6}$$

представляет собой уравнение движения точки, причем $y(x)$ и $y'(x)$ указывают соответственно положение и скорость точки в момент времени x; уравнение (6) эквивалентно нормальной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = f(x;\ y,\ y').$$

Для некоторых задач представляет интерес оценка

$$\max_{-\infty < x < +\infty} |y'(x) - \bar{y}'(x)|$$

различия скоростей, соответствующих одному и тому же моменту времени x (где x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$), в то время как различие положений играет второстепенную роль; в других задачах имеет место обратное положение вещей. Как в том, так и в другом случае мы имеем дело с задачами об устойчивости в смысле Рауса (см. примеры в § 4, п. 8, „в").

2. Уравнения в вариациях. Решение при помощи дифференцирования. а) Пусть система (1) имеет устойчивое [2]) решение

$$\bar{y}_1(x),\ \bar{y}_2(x),\ \ldots,\ \bar{y}_n(x),$$

удовлетворяющее начальным условиям $\bar{y}_i(x^0) = \bar{y}_i^0$. Положим

$$y_i = \bar{y}_i(x) + \xi_i(x) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7}$$

где $\xi_i(x)$ — новые искомые функции. Зададим число $\varepsilon > 0$; тогда можно найти такое число $\rho' > 0$, что из неравенств

$$|\xi_i(x^0)| < \rho' \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

вытекают неравенства

$$|\xi_i(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad x > x^0. \tag{8}$$

---

[1]) Или об устойчивости по Ляпунову; см. В. В. Степанов [1].—*Прим. ред.*

[2]) Начиная с этого пункта и до конца § 1 автор фактически имеет в виду устойчивость по Ляпунову.—*Прим. ред.*

Предположим, что функции f_i обладают непрерывными частными производными второго порядка по переменным $y_1, y_2, \ldots, y_n$, причем эти производные ограничены в совокупности при $x > x^0$, $|y_i - \bar{y}_i^0| < \rho$; тогда

$$\frac{d\bar{y}_i(x)}{dx} + \frac{d\xi_i(x)}{dx} = f_i(x; \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x)) + \\ + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_l} \xi_l(x) + \frac{1}{2} R_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$

где

$$R_i = \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_l} \xi_l\right)^{(2)}_{(\bar{y}_1+\theta\xi_1, \bar{y}_2+\theta\xi_2, \ldots, \bar{y}_n+\theta\xi_n)}, \quad 0 < \theta < 1.$$

Все вторые производные, получающиеся, если выполнить в последнем выражении символическое возведение в квадрат, берутся в точке

$$(\bar{y}_1 + \theta\xi_1, \bar{y}_2 + \theta\xi_2, \ldots, \bar{y}_n + \theta\xi_n).$$

Принимая во внимание, что функции $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ удовлетворяют системе (1), и учитывая неравенства (8), а также ограниченность в совокупности вторых частных производных функций f_i, получаем, что функции $\xi_1(x), \xi_2(x), \ldots, \xi_n(x)$ удовлетворяют, с точностью до членов порядка ξ^2, системе линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\xi_i}{dx} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}_l} \xi_l(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Символ $\partial f_i / \partial \bar{y}_l$ понимается как значение частной производной функции f_i по y_l в точке $(\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x))$.

Пуанкаре назвал уравнения (10) *уравнениями в вариациях системы* (1) *относительно устойчивого решения* $\bar{y}_1(x), \bar{y}_2(x), \ldots, \bar{y}_n(x)$ (Пуанкаре [1], т. I, гл. IV, стр. 162 и след.).

б) Полезно отметить, что если известно общее решение $y_i(x; x^0; y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)$ системы (1), зависящее от начальных значений $y_0^1, y_2^0, \ldots, y_n^0$, то общее решение системы уравнений в вариациях (10) можно получить при помощи одной лишь операции дифференцирования.

В самом деле, в силу сказанного в гл. I, § 5, п. 2, функции

$$V_{ik} = \frac{\partial y_i}{\partial y_k^0} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворяют системе (10), причем из равенства (10_2), установленного в гл. I, § 5, вытекает, что

$$V_{ik}(x^0) = \delta_{ik}, \quad \det \| V_{ik} \| = 1 \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

поэтому функции V_{ik} образуют фундаментальную систему решений системы (10).

в) Пусть функции $\xi_1(x)$, $\xi_2(x)$, ..., $\xi_n(x)$ образуют решение системы (10), соответствующее достаточно малым начальным значениям. Тогда *функции* (7) *можно рассматривать как приближенное решение системы* (1), *определенное в* $[x^0, +\infty)$, *причем все получаемые таким образом решения близки к устойчивому решению* $\bar{y}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$, ..., $\bar{y}_n(x)$. Поэтому такие решения называются *малыми колебаниями около устойчивого решения* $\bar{y}_1(x)$, $\bar{y}_2(x)$, ..., $\bar{y}_n(x)$.

Можно было бы предположить, что устойчивость решений системы (1) может быть установлена путем изучения решений системы (10); однако, как показал А. М. Ляпунов в своей знаменитой работе [1], это невозможно в некоторых особых случаях. А. М. Ляпунов указал также критерии, при выполнении которых изучение первого приближения достаточно для установления устойчивости, а также дал методы, позволяющие в различных случаях решить вопрос об устойчивости, когда изучение системы (10) оказывается недостаточным.

3. Критерии устойчивости А. М. Ляпунова. Приложения. а) Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum P^{(i)}_{m_1,\, m_2 \ldots m_n} y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} \tag{11}$$

$$(m_1 \geqslant 0,\ m_2 \geqslant 0,\ \ldots,\ m_n \geqslant 0;\ m_1 + m_2 + \ldots + m_n \geqslant 1;$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

правые части которых являются степенными рядами относительно переменных y_1, y_2, ..., y_n. Пусть коэффициенты $P^{(i)}_{m_1,\, m_2 \ldots m_n}$ этих рядов являются непрерывными действительными функциями от x, ограниченными в совокупности при $x \geqslant x^0$, и пусть эти ряды сходятся при любых действительных или комплексных значениях переменных y_1, y_2, ..., y_n, не превосходящих по модулю положительного числа H, и при всех значениях $x \geqslant x^0$. Предположим далее, что для любой системы начальных значений y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0, удовлетворяющих неравенствам $|y_i^0| < \rho$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, система (11) обладает одним и только одним решением, определенным в проме-

жутке $[x^0, +\infty)$ и удовлетворяющим начальным условиям $y_i(x^0) = y_i^0$. Рассмотрим, при каких условиях решение

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ \ldots,\ y_n = 0 \tag{12}$$

системы (11) устойчиво.

Если в системе (11) коэффициенты при членах первой степени не зависят от x, то соответствующая система уравнений в вариациях имеет постоянные коэффициенты. Путем изучения этой системы А. М. Ляпунов вывел для многих случаев критерии устойчивости. Мы ограничимся здесь формулировкой некоторых его результатов более общего характера, отсылая читателя за доказательствами к работе А. М. Ляпунова [1] (см. также Гурса [1], т. III, вып. 1, стр. 33—44).

Пусть $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — квадратичная форма с действительными постоянными коэффициентами; заменяя в ней $y_1, y_2, \ldots, y_n$ решением системы (11) и дифференцируя по x, получаем

$$\frac{dV}{dx} = V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

где V_1 — новая квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а Φ — степенной ряд относительно переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, состоящий из членов третьей и высших степеней. *Если коэффициенты формы $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ можно выбрать так, чтобы форма $V_1(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ была положительно определенной, то имеет место следующая теорема:*

1) *Решение $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ \ldots,\ y_n = 0$ устойчиво* [1]*, если квадратичная форма $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ является отрицательно определенной.*

2) *Решение $y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ \ldots,\ y_n = 0$ неустойчиво, если квадратичная форма $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ является положительно определенной или неопределенной.*

б) 1) Рассмотрим, например, систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = \rho_1 y_1,\quad \frac{dy_2}{dx} = \rho_2 y_2,\quad \ldots,\quad \frac{dy_n}{dx} = \rho_n y_n,$$

где числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ действительны, отличны от нуля и попарно различны.

Если положить

$$V = \frac{1}{2}(\rho_1 y_1^2 + \rho_2 y_2^2 + \ldots + \rho_n y_n^2),$$

то

$$V_1 = \rho_1^2 y_1^2 + \rho_2^2 y_2^2 + \ldots + \rho_n^2 y_n^2,$$

[1]) По Ляпунову. — *Прим. ред.*

и потому решение $y_1=0$, $y_2=0$, ..., $y_n=0$ устойчиво, если все числа ρ_1, ρ_2, ..., ρ_n отрицательны; если же хотя бы одно из них положительно, то это решение неустойчиво.

В справедливости этого результата легко убедиться, если заметить, что данная система имеет общее решение вида

$$y_1=y_1^0e^{\rho_1(x-x^0)},\quad y_2=y_2^0e^{\rho_2(x-x^0)},\quad \ldots,\quad y_n=y_n^0e^{\rho_n(x-x^0)}.$$

2) Вообще, пусть дана система линейных дифференциальных уравнений с постоянными действительными коэффициентами

$$\frac{dy_i}{dx}=a_{i1}y_1+a_{i2}y_2+\ldots+a_{in}y_n \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n);$$

рассмотрим ее характеристическое уравнение (гл. II, § 1, п. 6):

$$D(\rho)=\begin{vmatrix} a_{11}-\rho & a_{12} & \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\rho & \ldots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn}-\rho \end{vmatrix}=0.$$

Предположим, что все корни этого уравнения действительны и отличны от нуля. Тогда можно доказать, что *решение* $y_1=0$, $y_2=0$, ..., $y_n=0$ *устойчиво, если все корни характеристического уравнения отрицательны, и неустойчиво, если хотя бы один из этих корней положителен.*

Предположим теперь, что *характеристическое уравнение имеет и комплексные корни, но ни один корень этого уравнения не равен нулю и не является чисто мнимым* (т. е. что действительная часть любого корня отлична от нуля). *Тогда решение* $y_1=0$, $y_2=0$, ..., $y_n=0$ *устойчиво, если действительные части всех корней отрицательны, и неустойчиво, если хотя бы один из корней имеет положительную действительную часть* (см., например, Гурса [1], т. III, вып. 1, стр. 36—40).

§ 2. Асимптотические разложения решений дифференциального уравнения второго порядка с изолированной неправильной особой точкой на бесконечности

а) Изучим поведение при $x\to+\infty$ решений уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0, \tag{1}$$

коэффициенты которого разлагаются при $|x|>R$ в ряды вида

$$p(x)=p_0+\frac{p_1}{x}+\frac{p_2}{x^2}+\ldots,\quad q(x)=q_0+\frac{q_1}{x}+\frac{q_2}{x^2}+\ldots, \tag{2}$$

где $\{p_n\}$ и $\{q_n\}$ — некоторые последовательности действительных чисел [1]).

Поведение этих решений на бесконечности можно изучать при помощи их разложения в ряд в окрестности точки $x=+\infty$. Мы уже видели в гл. III, § 3, п. 2 и 5, что для этих решений можно построить разложения в ряды, расположенные по степеням $1/x$, причем эти разложения сходятся, если бесконечно удаленная точка является *регулярной* точкой для уравнения (1) или же *правильной особой* точкой для этого уравнения. Напомним, что точка $x=\infty$ называется регулярной, если функции $2x-x^2p(x)$, $x^4q(x)$ регулярны в окрестности точки $x=\infty$ и, следовательно,

$$p_0=0,\quad p_1=2;\quad q_0=q_1=q_2=q_3=0,$$

и *правильной особой точкой*, если функции $xp(x)$, $x^2q(x)$ регулярны в окрестности точки $x=\infty$ и, следовательно,

$$p_0=0,\quad q_0=q_1=0. \tag{3}$$

Если равенства (3) не имеют места, то точка $x=\infty$ называется *неправильной особой точкой*. Пуанкаре заметил, что если построить ряд, который в окрестности неправильной особой точки формально удовлетворяет уравнению, то может получиться всюду расходящийся ряд. Однако во многих случаях получается ряд, аналогичный по своему характеру ряду Стирлинга:

$$\ln\Gamma(x+1)\sim\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+$$
$$+\frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{x^3}+\ldots+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}}+\ldots,$$

который расходится при всех значениях x, но обладает тем свойством, что при $x>0$ имеет место неравенство

$$|\ln\Gamma(x+1)-S_p|<\frac{B_{p+1}}{(2p+1)(2p+2)}\frac{1}{x^{2p+1}},$$

где

$$S_p=\frac{1}{2}\ln(2\pi)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x-x+\frac{B_1}{1\cdot 2}\frac{1}{x}-\frac{B_2}{3\cdot 4}\frac{1}{x^3}+\ldots+$$
$$+(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p-1)2p}\frac{1}{x^{2p-1}}.$$

(См., например, Уиттекер и Ватсон [1], ч. II, стр. 28; $B_1, B_2, \ldots, B_p$ являются числами Бернулли).

---

[1]) Относительно изучения этого уравнения в комплексной области см. например, Шлезингер [1], гл. VIII, стр. 248 и след. См. также Горн [1], стр. 188—194. В этой книге содержатся также и библиографические указания.

Ряды такого вида называются *асимптотическими рядами* (*асимптотическими разложениями*). Построим такие ряды для решений уравнения (1) [1]).

б) Если мы сделаем в уравнении (1) подстановку

$$y = e^{\lambda x} v \tag{4}$$

(λ — постоянная величина), то получим уравнение

$$v'' + [2\lambda + p]\, v' + [\lambda^2 + p\lambda + q]\, v = 0.$$

Поэтому, если λ является корнем уравнения

$$\lambda^2 + p_0\lambda + q_0 = 0, \tag{5}$$

то уравнение (1) примет вид

$$v'' + (\pi_0 + \pi_1 x^{-1} + \ldots)\, v' + (\rho_1 x^{-1} + \rho_2 x^{-2} + \ldots)\, v = 0, \tag{6}$$

где

$$\pi_0 = 2\lambda + p_0; \quad \pi_n = p_n; \quad n \geqslant 1; \quad \rho_n = \lambda p_n + q_n,$$

а коэффициент при v в уравнении (6) не содержит свободного члена.

Предположим теперь, что корни уравнения (5) действительны. Если сделать в уравнении (6) подстановку

$$v = x^{\sigma} u, \tag{7}$$

то оно примет вид

$$u'' + [\pi_0 + (\pi_1 + 2\sigma)\, x^{-1} + \pi_2 x^{-2} + \ldots]\, u' + \tag{8}$$
$$+ [(\pi_0\sigma + \rho_1)\, x^{-1} + (\sigma(\sigma - 1) + \pi_1\sigma + \rho_2)\, x^{-2} + (\pi_2\sigma + \rho_3)\, x^{-3} + \ldots]\, u = 0.$$

Если можно выбрать σ так, чтобы выполнялось равенство

$$\pi_0\sigma + \rho_1 = 0, \tag{9}$$

то уравнение (8) примет вид

$$u'' + [\pi_0 + (\pi_1 + 2\sigma)\, x^{-1} + \pi_2 x^{-2} + \ldots]\, u' +$$
$$+ [(\sigma(\sigma - 1) + \pi_1\sigma + \rho_2)\, x^{-2} + (\pi_2\sigma + \rho_3)\, x^{-3} + \ldots]\, u = 0. \tag{10}$$

Равенство (9) является тождеством, если $\rho_1 = 0$, $\pi_0 = 0$, т. е. если $x = \infty$ является правильной особой точкой для уравнения (6). В этом случае описанный в гл. III, § 3, способ позволяет найти разложения решений уравнения (6) по степеням $1/x$.

---

[1]) Такие ряды и их приложение к изучению решений дифференциальных уравнений в комплексной области в окрестности неправильной особой точки встречаются впервые в работе Пуанкаре [2].

Ограничимся рассмотрением случая $\pi_0 < 0$ [1]).

Если положить в равенстве (7) $\sigma = -\rho_1/\pi_0$, то уравнение (1) примет вид (10). Путем замены независимой переменной $x = -X/\pi_0$ уравнение (10) приводится к виду

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \left[-1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right]\frac{du}{dx} + \left[\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right]u = 0, \quad (11)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ — действительные числа, которые выражаются через $p_0, p_1, p_2, \ldots, q_0, q_1, q_2, \ldots$, причем ряды, являющиеся коэффициентами при du/dx и при u, сходятся, если $|x| > R_1$.

в) Перейдем теперь к изучению поведения решений уравнения (11) при $x \to +\infty$. Мы докажем, что *для любого действительного числа α существует решение $u(x)$ этого уравнения, обладающее тем свойством, что*

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = \alpha, \quad (12)$$

и получим с помощью *метода последовательных приближений* асимптотическое выражение такого решения, весьма полезное с точки зрения численного анализа.

Заметим сначала, что если интеграл $\int\limits_x^\infty (e^{x-t} - 1) f(t)\,dt$ сходится, и если законна операция дифференцирования под знаком интеграла, то функция

$$u(x) = \alpha + \int\limits_x^\infty (e^{x-t} - 1) f(t)\,dt$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{du}{dx} = -f(x)$$

и условию (12). Поэтому, применяя к уравнению (11) процесс последовательных приближений, мы получаем формально последовательность

---

[1]) Относительно поведения решений уравнения (1) в действительной области, равно как и относительно случаев, не рассмотренных в тексте, см. Кнезер [1] „а", „б" и особенно „в", стр. 274—275.

Несколько позже Дини рассмотрел вопрос об определении асимптотических значений для линейных дифференциальных уравнений любого порядка (см. Дини [1]). Эти результаты были опубликованы с небольшими изменениями в книге Дини [2], стр. 745—808.

Другие исследования об асимптотическом интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных см. в работе Штернберга [1], а для систем линейных дифференциальных уравнений см. теорему Хукухара в § 3, п. 2 этой главы, и цитированные там результаты Фаедо.

Относительно разобранных в этом параграфе вопросов см. Айнс [1], стр. 226—230.

функций $\{u_n(x)\}$, определяемых формулами

$$u_1 = \alpha, \tag{13$_1$}$$

$$u_n = \alpha + \int_x^{+\infty} (e^{x-t} - 1)\left[\frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \ldots\right]\frac{du_{n-1}}{dt}\,dt +$$

$$+ \int_x^{+\infty} (e^{x-t} - 1)\left[\frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \ldots\right] u_{n-1}(t)\,dt, \tag{13$_2$}$$

$$\frac{du_n}{dx} = \int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{a_1}{t} + \frac{a_2}{t^2} + \ldots\right]\frac{du_{n-1}}{dt}\,dt + \int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \ldots\right] u_{n-1}(t)\,dt \tag{13$_3$}$$

$$(n = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Пусть $R_2 > R_1$; из формул (13) следует, что при $|x| \geqslant R_2$ имеют место неравенства

$$|u_2(x) - u_1(x)| < \frac{k}{x}, \quad |u_2'(x)| < \frac{k_1}{x},$$

где k и k_1 — постоянные величины [см. (16) и (18)]. По индукции доказывается, что решения, фигурирующие в (13_2) и (13_3), сходятся. Кроме того, при $n > 2$ первые интегралы в правых частях этих формул можно интегрировать по частям, а потому

$$u_n(x) = \alpha + \int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t^2} + \ldots\right] u_{n-1}(t)\,dt +$$

$$+ \int_x^{+\infty} \left[\frac{\beta_2}{t^2} + \frac{\beta_3}{t^3} + \ldots\right] u_{n-1}(t)\,dt, \tag{14$_1$}$$

$$\frac{du_n}{dx} = \int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{\alpha_1}{t} + \frac{\alpha_2}{t^2} + \ldots\right] u_{n-1}(t)\,dt + \left[\frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots\right] u_{n-1}(x), \tag{14$_2$}$$

где числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_2, \beta_3, \ldots, \gamma_1, \gamma_2, \ldots$ выражаются рационально через $a_1, a_2, \ldots, b_2, b_3, \ldots$ и ряды

$$\frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots, \quad \frac{\beta_2}{x^2} + \frac{\beta_3}{x^3} + \ldots, \quad \frac{\gamma_1}{x} + \frac{\gamma_2}{x^2} + \ldots$$

сходятся при $x \geqslant R_2$. При этом

$$\frac{d^2u_n}{dx^2} - \frac{du_n}{dx} = -\left\{\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots\right\}\frac{du_{n-1}}{dx} - \left\{\frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \ldots\right\} u_{n-1}. \tag{15}$$

Имеет место неравенство

$$|u_2(x) - u_1(x)| = |\alpha| \left| \int_x^{\infty} (e^{x-t} - 1)\left(\frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \ldots\right) dt \right| < \frac{k}{x}, \tag{16$_1$}$$

где, как было указано выше, k является постоянной величиной; увеличивая k, можно добиться выполнения неравенства

$$\int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{|\alpha_1|}{t}+\frac{|\alpha_2|}{t^2}+\ldots\right]dt+\int_x^{+\infty}\left[\frac{|\beta_2|}{t^2}+\frac{|\beta_3|}{t^3}+\ldots\right]dt<\frac{k}{x}.$$

Из (14_1) следует, что

$$u_n(x)-u_{n-1}(x)=\int_x^{+\infty} e^{x-t}\left[\frac{\alpha_1}{t}+\frac{\alpha_2}{t^2}+\ldots\right][u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)]\,dt+$$

$$+\int_x^{+\infty}\left[\frac{\beta_2}{t^2}+\frac{\beta_3}{t^3}+\ldots\right][u_{n-1}(t)-u_{n-2}(t)]\,dt. \qquad (16_2)$$

С помощью индукции мы получаем поэтому, что

$$|u_n(x)-u_{n-1}(x)|<\left(\frac{k}{x}\right)^{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots). \qquad (17)$$

Аналогично методом индукции доказываются неравенства

$$\left|\frac{d(u_n-u_{n-1})}{dx}\right|<\left(\frac{k_1}{x}\right)^{n-1}, \qquad (18)$$

где k_1 — постоянная величина. Поэтому ряды

$$u_1+(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\ldots,\ \frac{d(u_2-u_1)}{dx}+\frac{d(u_3-u_2)}{dx}+\ldots$$

равномерно сходятся при $x\geqslant R_3>R_2$. Таким образом, полагая

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=u_1(x)+[u_2(x)-u_1(x)]+[u_3(x)-u_2(x)]+\ldots \qquad (19)$$

и замечая, что в равенстве (15) можно перейти к пределу при $n\to\infty$, получаем, что определенная формулой (19) функция $u(x)$ является искомым решением уравнения (11).

Для определения асимптотического выражения решения $u(x)$ заметим, что

$$\lim_{x\to+\infty} e^x x^p\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-p}\,dt=1 \qquad (p>0),$$

откуда

$$\int_x^{+\infty} e^{-t}t^{-p}\,dt=\frac{e^{-x}}{x^p}(1+\tau),$$

где $\tau \to 0$ при $x \to \infty$. Кроме того, при $p > 0$ имеем

$$\int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-p}\, dt = [-e^{-t} t^{-p}]_{t=x}^{t=+\infty} - p \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(p+1)}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-x}}{x^p} - p \int_x^{+\infty} e^{-t} t^{-(p+1)}\, dt =$$

$$= e^{-x}\left[\frac{1}{x^p} - \frac{p}{x^{p+1}} + \frac{p(p+1)}{x^{p+2}} - \ldots + (-1)^n \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{x^{p+n}}(1+\tau)\right],$$

где $\tau \to 0$ при $x \to \infty$. Поэтому из равенства

$$u_2(x) - u_1(x) = \alpha \int_x^{+\infty} (e^{x-t} - 1)\left[\frac{b_2}{t^2} + \frac{b_3}{t^3} + \ldots\right] dt$$

следует, что

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{A_1^{(1)}}{x} + \frac{A_2^{(1)}}{x^2} + \ldots + \frac{A_{m-1}^{(1)}}{x^{m-1}} + \frac{A_m^{(1)} + \varepsilon_1}{x^m},$$

где $A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \ldots, A_m^{(1)}$ — постоянные величины, а $\varepsilon_1 \to 0$ при $x \to \infty$.

Из (16_2) с помощью рекуррентного процесса можно вывести, что при целом m, $m > n$ имеет место формула

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{A_n^{(n)}}{x^n} + \frac{A_{n+1}^{(n)}}{x^{n+1}} + \ldots + \frac{A_{m-1}^{(n)}}{x^{m-1}} + \frac{A_m^{(n)} + \varepsilon_n}{x^m},$$

где $\varepsilon_n \to 0$, когда $x \to \infty$. Поэтому

$$u_{n+1}(x) = \alpha + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_n}{x^n} + \ldots + \frac{C_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{C_m + \varepsilon}{x^m},$$

где $\varepsilon \to 0$ при $x \to \infty$.

С другой стороны, в силу (17) имеем при $x \geqslant R_3$

$$|[u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x)] + [u_{n+3}(x) - u_{n+2}(x)] + \ldots| <$$
$$< \left(\frac{k}{x}\right)^{n+1}\left[1 + \left(\frac{k}{x}\right) + \left(\frac{k}{x}\right)^2 + \ldots\right] < \frac{H}{x^{n+1}},$$

где H — постоянная величина, так что при $x \geqslant R_3$

$$u(x) = \alpha + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \ldots + \frac{C_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{C_n + \tau_n}{x^n},$$

где $\tau_n \to 0$, когда $x \to \infty$. Следовательно, при сделанных предположениях дифференциальное уравнение (11) обладает решением вида

$$y(x) = e^{\lambda x} x^{\sigma}\left[\alpha + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n + \tau_n}{x^n}\right],$$

где $\tau_n \to 0$, когда $x \to \infty$.

Важность этой формулы заключается в том, что с ее помощью можно вычислить с большой точностью значение $y(x)$ при весьма больших положительных значениях x, в то время как вообще ряд (*нормальный* ряд Томе, см. Томе [1], стр. 75)

$$y(x) \sim e^{\lambda x} x^{\sigma} \left[a + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots + \frac{c_n}{x^n} + \ldots \right]$$

расходится. Следовательно, этот ряд дает асимптотическое представление решения $y(x)$ уравнения (1).

§ 3. Теоремы Перрона и Хукухара об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений

1. Теоремы Перрона. В этом номере мы изложим некоторые результаты Перрона относительно поведения решений линейных дифференциальных уравнений (см. Перрон [1], [2], [3]).

а) Лемма. *Пусть функции $p(x)$, $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке $[x^\circ, +\infty)$,*

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = \rho > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = b.$$

Тогда для любого решения $\omega(x)$ линейного дифференциального уравнения

$$\omega'(x) + p(x)\,\omega(x) = \varphi(x) \tag{1}$$

имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \omega(x) = \frac{b}{\rho}. \tag{2}$$

С другой стороны, дифференциальное уравнение

$$\omega'(x) - p(x)\,\omega(x) = \varphi(x) \tag{3}$$

обладает частным решением

$$\omega_1(x) = e^{\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} \int\limits_{+\infty}^{x} e^{-\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt} \varphi(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

для которого

$$\lim_{x \to +\infty} \omega_1(x) = -\frac{b}{\rho},$$

в то время как все остальные решения этого уравнения стремятся к $\pm\infty$, когда $x \to +\infty$.

Решая уравнение (1), получаем

$$\omega(x) = c e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} + \omega_2(x), \tag{5}$$

где

$$\omega_2(x) = e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} \int\limits_{x^0}^{x} \varphi(\xi)\, e^{\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt}\, d\xi.$$

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} p(x) = \rho > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} = 0$.

Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\overline{x^0} \geqslant x^0$, что при $x \geqslant \overline{x^0}$ имеем $\varphi(x) = b + \theta\varepsilon$, где $0 < \theta < 1$. Поэтому

$$\omega_2(x) = e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} \int\limits_{x^0}^{\overline{x_0}} \varphi(\xi)\, e^{\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt}\, d\xi +$$

$$+ (b + \theta_1\varepsilon)\, e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} \int\limits_{\overline{x^0}}^{x} e^{\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt}\, d\xi,$$

где $|\theta_1| < 1$. Первый член в правой части этого равенства стремится к нулю, когда $x \to +\infty$. Далее [1]),

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} \int\limits_{\overline{x^0}}^{x} e^{\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt}\, d\xi = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{p(x)} = \frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega_2(x) = b/\rho$, и потому из равенства (5) вытекает справедливость первой половины утверждения леммы.

Рассмотрим теперь уравнение (3). Заметим сначала, что интеграл $\int\limits_{+\infty}^{x} e^{-\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt} \varphi(\xi)\, d\xi$ сходится и что решение уравнения (3) имеет вид

$$\omega(x) = \omega_1(x) + c e^{\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt}. \tag{6}$$

Выражая $\omega_1(x)$ в виде отношения двух величин, стремящихся к нулю, и находя предел отношения по правилу Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} \omega_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \int\limits_{\infty}^{x} e^{-\int\limits_{x^0}^{\xi} p(t)\,dt} \varphi(\xi)\, d\xi \Big/ e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(t)\,dt} =$$

$$= -\lim_{x\to+\infty} \varphi(x)/p(x) = -b/\rho.$$

---

[1]) Здесь используется правило Лопиталя. — *Прим. ред.*

Из равенства (6) следует, что при $c \neq 0$ предел $\omega(x)$ равен $\pm\infty$ в зависимости от того, положительно или отрицательно число c.

б) Теорема. *Пусть дано линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = \varphi(x), \qquad (7)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — действительные числа, $a_n \neq 0$, функция $\varphi(x)$ непрерывна в промежутке $[x^0, +\infty)$ и имеет конечный предел b при $x \to +\infty$.

Докажем, что *если все корни характеристического уравнения*

$$\rho^n + a_1 \rho^{n-1} + a_2 \rho^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0 \qquad (8)$$

действительны, то существует хотя бы одно решение уравнения (7), стремящееся к b/a_n при $x \to +\infty$, в то время как все производные $y', y'', \ldots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$ этого решения стремятся к нулю. Если при этом все корни уравнения (8) отрицательны, то все решения уравнения (7) обладают указанным свойством.

Обозначим через $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ корни уравнения (8) (все эти корни действительны и отличны от нуля). Тогда уравнение (7) можно заменить системой (см. гл. X, § 1, п. 2):

$$y_1' - \rho_1 y_1 = y_2 \quad [y = y_1], \qquad (9_1)$$

$$y_2' - \rho_2 y_2 = y_3, \qquad (9_2)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n-1}' - \rho_{n-1} y_{n-1} = y_n, \qquad (9_{n-1})$$

$$y_n' - \rho_n y_n = \varphi(x). \qquad (9_n)$$

По доказанной в „а“ лемме уравнение (9_n) имеет по крайней мере одно такое решение y_n, что

$$\lim_{x \to +\infty} y_n = -b/\rho_n, \qquad \lim_{x \to +\infty} y_n' = 0$$

(независимо от того, положительно или отрицательно ρ_n). Если же $\rho_n < 0$, то это свойство справедливо для всех частных решений этого уравнения. Такому решению y_n соответствует частное решение y_{n-1} уравнения (9_{n-1}), обладающее тем свойством, что

$$\lim_{x \to +\infty} y_{n-1} = b/\rho_n \rho_{n-1}, \qquad \lim_{x \to +\infty} y_{n-1}' = 0.$$

Так как $y_{n-1}'' - \rho_{n-1} y_{n-1}' = y_n'$, то отсюда следует, что

$$\lim_{x \to +\infty} y_{n-1}'' = 0.$$

Продолжая это рассуждение далее, мы получаем, что существует решение y_1 данного уравнения, удовлетворяющее соотношениям

$$\lim_{x\to+\infty} y_1 = b/(-1)^n \rho_n\rho_{n-1}\ldots\rho_1 = b/a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} y_1' = 0, \ldots, \lim_{x\to+\infty} y_1^{(n)} = 0.$$

Если все корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ отрицательны, то указанным свойством обладает любое решение уравнения (7). Это утверждение легко доказать непосредственно, заметив, что любое решение уравнения (7) получается путем прибавления к одному из частных решений выражения вида $\sum c_{kl} e^{\rho_k x} x^l$ (c_{kl} — постоянные величины).

в) Теорема. *Пусть все коэффициенты линейного однородного дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \qquad (10)$$

непрерывны в промежутке $[x_0, +\infty)$ *и удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{x\to+\infty} p_\nu(x) = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Если все корни характеристического уравнения

$$F(\rho) = \rho^n + a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0$$

действительны и попарно различны, то уравнение (10) *имеет* n *линейно независимых решений, удовлетворяющих соотношениям*

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu'/y_\nu = \rho_\nu, \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu''/y_\nu = \rho_\nu^2, \ldots, \lim_{x\to+\infty} y_\nu^{(n)}/y_\nu = \rho_\nu^n$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Эта теорема легко доказывается для $n = 1$, так как в этом случае уравнение (10) имеет вид $y' + p_1(x) y = 0$ и

$$\lim_{x\to+\infty} y'(x)/y(x) = -\lim_{x\to+\infty} p_1(x) = -a_1 = \rho_1.$$

Относительно доказательства этой теоремы в общем случае см. теорему 5 в цитированной выше работе Перрона [1], стр. 267.

г) Теорема. *Пусть коэффициенты* $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_n(x)$ *линейного неоднородного дифференциального уравнения*

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_2(x) y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x) y'(x) + p_n(x) y(x) = \varphi(x) \qquad (11)$$

непрерывны в промежутке $[x^0, +\infty)$ *и удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{x\to+\infty} p_\nu(x) = a_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \; a_n \neq 0. \qquad (12)$$

Пусть, кроме того, функция $\varphi(x)$ *непрерывна в* $[x^0, +\infty)$ *и удовлетворяет соотношению*

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = b \tag{13}$$

(b конечно).

Тогда, если корни характеристического уравнения

$$\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n = 0 \tag{14}$$

попарно различны и действительны, то уравнение (11) *имеет по крайней мере одно решение* y_0, *удовлетворяющее соотношениям*

$$\lim_{x\to+\infty} y_0 = b/a_n, \quad \lim_{x\to+\infty} y_0' = 0, \ \ldots, \ \lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)} = 0. \tag{15}$$

Если, кроме того, все корни уравнения (14) *отрицательные, то все решения уравнения* (11) *удовлетворяют этим соотношениям.*

Пусть, в самом деле, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — фундаментальная система решений однородного уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y = 0,$$

удовлетворяющих условиям (см. „в“)

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu'/y_\nu = \rho_\nu, \quad \lim_{x\to+\infty} y_\nu''/y_\nu = \rho_\nu^2, \ \ldots, \ \lim_{x\to+\infty} y_\nu^{(n)}/y_\nu = \rho_\nu^n \tag{16}$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

С помощью метода вариации произвольных постоянных (см. гл. II, § 1, п. 5, „в“) мы получаем решение уравнения (11) в виде

$$y_0(x) = \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x) y_\nu(x),$$

где функции $u_\nu(x)$ выбраны так, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu(x) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu'(x) = 0, \ \ldots, \ \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu' y_\nu^{(n-1)}(x) = \varphi(x). \tag{17}$$

Отсюда вытекает, что

$$y_\nu(x)\, u_\nu'(x) =$$

$$= (-1)^{n+\nu} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{y_1'}{y_1} & \ldots & \frac{y_{\nu-1}'}{y_{\nu-1}} & \frac{y_{\nu+1}'}{y_{\nu+1}} & \ldots & \frac{y_n'}{y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_1^{(n-2)}}{y_1} & \ldots & \frac{y_{\nu-1}^{(n-2)}}{y_{\nu-1}} & \frac{y_{\nu+1}^{(n-2)}}{y_{\nu+1}} & \ldots & \frac{y_n^{(n-2)}}{y_n} \end{vmatrix} \varphi(x) \Bigg/ \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{y_1'}{y_1} & \ldots & \frac{y_\nu'}{y_\nu} & \ldots & \frac{y_n'}{y_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{y_1^{(n-1)}}{y_1} & \ldots & \frac{y_\nu^{(n-1)}}{y_\nu} & \ldots & \frac{y_n^{(n-1)}}{y_n} \end{vmatrix}.$$

Положим

$$\gamma_\nu = \lim_{x\to+\infty} y_\nu u'_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Из (16) следует, что

$$\gamma_\nu = (-1)^{n+\nu} b \frac{H(\rho_1, \ldots, \rho_{\nu-1}, \rho_{\nu+1}, \ldots, \rho_n)}{H(\rho_1, \ldots, \rho_{\nu-1}, \rho_\nu, \rho_{\nu+1}, \ldots, \rho_n)}\ ^{1)} = (-1)^{n+\nu} b/(\rho_\nu - \rho_1)\ldots$$

$$\ldots(\rho_\nu - \rho_{\nu-1})(\rho_\nu - \rho_{\nu+1})\ldots(\rho_\nu - \rho_n),$$

$$\gamma_\nu = b/F'(\rho_\nu).$$

Имеет место равенство

$$(y_\nu u_\nu)' - \frac{y'_\nu}{y_\nu}(y_\nu u_\nu) = (y_\nu u'_\nu).$$

В силу соотношений $\lim\limits_{x\to+\infty} y'_\nu/y_\nu = \rho_\nu$, $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\nu u'_\nu = \gamma_\nu$ мы можем, согласно лемме, доказанной в „a", поставить в соответствие каждому y_ν такое u_ν, что

$$\lim_{x\to+\infty} y_\nu u_\nu = -\gamma_\nu/\rho_\nu = -b/\rho_\nu F'(\rho_\nu).$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} y_0 = \lim_{x\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} u_\nu(x) y_\nu(x) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^{-1}}{F'(\rho_\nu)}. \tag{19$_1$}$$

Из соотношений (17) следует, что

$$y_0^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(\lambda)} u_\nu \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$y_0^{(n)} = \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu^{(n)} u_\nu + \varphi(x).$$

Поэтому

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} y_0^{(\lambda)}(x) = \lim_{x\to+\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{y_\nu^{(\lambda)}}{y_\nu}(y_\nu u_\nu) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^{\lambda-1}}{F'(\rho_\nu)} \\ &\qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n-1), \end{aligned}\right\} \tag{19$_2$}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)}(x) = -b \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^{n-1}}{F'(\rho_\nu)} + b. \tag{19$_3$}$$

---

[1]) Через $H(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$ мы обозначаем определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \rho_1 & \ldots & \rho_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_1^{n-1} & \ldots & \rho_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через c окружность с центром в начале координат и настолько большого радиуса R, что все корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ уравнения $F(\rho)=0$ лежат внутри этой окружности. Тогда при любом целом значении λ, $\lambda > -1$ справедливо соотношение[1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^\lambda\,dx}{F(x)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^\lambda}{F'(\rho_\nu)}.$$

Но при $n-1>\lambda>-1$ имеем

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{x^\lambda\,dx}{F(x)} = 0$$

(для доказательства достаточно заметить, что вычет функции $x^\lambda/F(x)$ при $x=\infty$ равен нулю[2])).

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^\lambda}{F'(\rho_\nu)} = 0 \text{ при } \lambda = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-2.$$

Принимая во внимание равенство (19_2), получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} y_0^{(\lambda)}(x) = 0 \text{ при } \lambda = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \qquad (20_1)$$

Обозначим через c_1 окружность радиуса r с центром в начале координат, вне которой лежат все корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ уравнения $F(\rho)=0$. Тогда имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{dx}{xF(x)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dx}{xF(x)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^{-1}}{F'(\rho_\nu)}. \qquad (21)$$

Но

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dx}{xF(x)} = \frac{1}{F(0)} = \frac{1}{a_n}$$

($1/a_n$ является вычетом функции $1/xF(x)$ в точке 0). Так как первый интеграл в формуле (21) стремится к нулю при $R\to\infty$, то отсюда следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\rho_\nu^{-1}}{F'(\rho_\nu)} = -\frac{1}{a_n}.$$

В силу (19_1) имеем

$$\lim_{x\to+\infty} y_0 = b_1' a_n. \qquad (20_2)$$

---

[1]) См. И. И. Привалов [1], стр. 245, 247. — *Прим перев.*

[2]) Там же [1], стр. 254. — *Прим. перев.*

Из (11), (20_1), (20_2) мы получаем, наконец, что

$$\lim_{x\to+\infty} y_0^{(n)} = 0, \tag{20_3}$$

и потому решение y_0 удовлетворяет всем сформулированным в теореме требованиям.

Если при этом все корни ρ_k отрицательны, то для того, чтобы доказать выполнение этих требований для любого решения уравнения (11), достаточно заметить, что общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = y_0 + \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{\rho_\nu x},$$

где c_ν — постоянные величины [1]).

2. Теорема Хукухара. Рассмотрим теперь системы уравнений вида

$$\frac{dy_i}{dx} = x^\alpha \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) y_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

где α — целое положительное число или нуль, а $a_{ik}(x)$ — непрерывные действительные функции от x, каждая из которых стремится к пределу a_{ik} ($a_{ik} \neq \infty$), когда $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} a_{ik}(x) = a_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Для таких систем мы ограничимся лишь формулировкой важной теоремы Хукухара (см. Хукухара [1], теорема 20, стр. 71—72).

Предположим, что *коэффициенты* $a_{ik}(x)$ *системы* (22) *имеют асимптотические разложения*:

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}(x) \sim a_{ik} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \ldots + \frac{a_{ik}^{(l)}}{x^l} + \ldots \\ (i, k = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

иными словами, что

$$a_{ik}(x) = a_{ik} + \frac{a_{ik}^{(1)}}{x} + \frac{a_{ik}^{(2)}}{x^2} + \ldots + \frac{a_{ik}^{(l)}}{x^l} + O\left(\frac{1}{x^{l+1}}\right)^{2)}. \tag{24}$$

---

[1]) Относительно некоторых весьма общих теорем об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений и относительно библиографии см. Чезари [1], стр. 173—186.

[2]) Напомним, что по обозначениям Бахмана [1], стр. 401 и Ландау [1], стр. 61, запись $f(x) = O(g(x))$ означает существование такого числа L, что при $x > x^0$ выполняется неравенство $|f(x)/g(x)| < L$. В этом случае говорят, что порядок роста $g(x)$ не превышает порядка роста $f(x)$.

Пусть, далее, корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

попарно различны. Тогда любое решение системы (22) *разлагается в асимптотический ряд вида*

$$y \sim x^{\sigma} e^{\lambda(x)} \left\{ \beta + \frac{a^{(1)}}{x} + \frac{a^{(2)}}{x^2} + \dots + \frac{a^{(l)}}{x^l} + \dots \right\}, \tag{25}$$

где σ — *постоянная величина, а* $\lambda(x)$ — *многочлен степени* $\alpha+1$. *Если, кроме того, подставить в систему* (22) *формальные разложения* (24) *и* (25), *то уравнения этой системы будут формально удовлетворены* [1]).

§ 4. Изучение асимптотического поведения решений уравнения $y''+A(x)y=0$

1. Общие замечания. Рассмотрим уравнение

$$y''+A(x)y=0, \tag{1}$$

где $A(x)$ — непрерывная функция, определенная в промежутке $[q, +\infty)$, $q>0$.

---

[1]) Результаты § 2 являются весьма частными случаями этой теоремы. Фаедо [1] и Гиццетти [1] изучили асимптотическое поведение решений линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n-1}\left[\frac{\mu_i}{x^{n-i}}+q_i(x)\right]y^{(i)}+y^{(n)}=0, \qquad \sum_{i=0}^{n-1}[a_i-\varphi_i(x)]\,y^{(i)}(x)+y^{(n)}(x)=0.$$

Фаедо распространил полученные им результаты на системы линейных однородных уравнений

$$y'_k=\sum_{s=1}^{n}(a_{ks}+\varphi_{ks}(x))\,y_s \qquad (k=1, 2, \dots, n),$$

где $\varphi_{ks}(x)$ — измеримые функции, принимающие действительные или комплексные значения, а x — действительное переменное, $0<x<+\infty$. Функции $\varphi_{ks}(x)$ должны быть такими, чтобы сходились интегралы вида $\int\limits_0^{+\infty} x^{\nu-1}\,|\varphi_{ks}(x)|\,dx$, где ν — соответствующее целое число, не превосходящее n (см. Фаедо [2]).

Кроме того, рассматривались системы линейных интегральных уравнений; см., например, Калиго [1].

Если сделать замену переменной $x=1/t$, то уравнение (1) примет вид

$$t^4\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+A\left(\frac{1}{t}\right)y=0. \qquad (1')$$

Для получившегося уравнения точка $t=0$ является особой, а потому для уравнения (1) точка $x=+\infty$ — также особая [1]).

Мы изучим в этом параграфе асимптотическое поведение решений уравнения (1) при $x\to+\infty$. Рассмотрим отдельно следующие случаи: функция $A(x)>0$ и ограничена, в частности $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=\alpha^2$, где $\alpha\neq0$; функция $A(x)<0$, в частности $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=-\alpha^2$, где $\alpha\neq0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}A(x)=+\infty$.

2. Случай, когда $0<a^2\leqslant A(x)\leqslant b^2$. Исследования Кнезера — Асколи. а) Пусть в уравнении (1) функция $A(x)$ *непрерывна при* $q\leqslant x<K$ [2]) *и удовлетворяет условию*

$$A(x)>0, \qquad x\geqslant q \text{ [3])}.$$

Пусть $y(x)$ — решение уравнения (1). Пусть это решение обращается в нуль в точке x_0, впервые после этого достигает экстремального значения в точке x_1 и обращается снова в нуль в точке x_2, иными словами, пусть

$$y(x_0)=0, \quad y'(x_1)=0, \quad y(x_2)=0, \quad x_0<x_1<x_2.$$

Умножая уравнение (1) на $2y'$ и интегрируя его от x_0 до x_1, получаем, что

$$-y'^2(x_0)+2\int_{x_0}^{x_1}A(x)y(x)y'(x)\,dx=0.$$

Но между точками x_0 и x_1 произведение yy' не меняет знака, а поэтому

$$y'^2(x_0)=m_1^2\int_{x_0}^{x_1}2yy'\,dx=m_1^2y^2(x_1),$$

где m_1 — *некоторое число, заключенное между наименьшим и наибольшим значениями функции* $A(x)^{1/2}$ *на отрезке* $[x_0, x_1]$. Так как функции $y(x)$ и $y'(x)$ имеют на этом отрезке одинаковые знаки, то

$$y'(x_0)=m_1y(x_1). \qquad (2)$$

---

[1]) Если функция $A(x)$ голоморфна в окрестности точки $x=\infty$, то, как было указано в § 2, точка $x=\infty$ является *правильной* особой точкой, если $A(x)=a_2x^{-2}+a_3x^{-3}+\ldots$

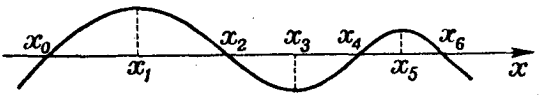
[2]) Не исключается случай, когда $K=+\infty$.

[3]) См. Кнезер [1], Асколи [1]. При изложении п. 2 мы использовали работу Асколи.

Аналогично доказывается, что

$$y'(x_2) = -m_2 y(x_1), \tag{3}$$

где m_2 — *некоторое число, заключенное между наименьшим и наибольшим значениями* $A(x)^{1/2}$ *на отрезке* $[x_1, x_2]$.



Фиг. 1.

Предположим, что функция $y(x)$ обращается в нуль последовательно в точках $x_0, x_2, x_4, \ldots$ и достигает экстремума последовательно в точках $x_1, x_3, \ldots$

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \ldots$$

(фиг. 1). Повторяя проведенные выше рассуждения, получаем, что

$$y'(x_{2r}) = m_{2r+1} y(x_{2r+1}) = -m_{2r} y(x_{2r-1}) \quad (r = 1, 2, \ldots), \tag{4}$$

а потому

$$\left.\begin{aligned} y'(x_{2r+2})/y'(x_{2r}) &= -m_{2r+2}/m_{2r+1} \quad (r = 0, 1, 2, \ldots), \\ y(x_{2r+1})/y(x_{2r-1}) &= -m_{2r}/m_{2r+1} \quad (r = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда вытекает, что

$$\left.\begin{aligned} \frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)} &= (-1)^n \frac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_1 m_3 \ldots m_{2n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \\ \frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)} &= (-1)^n \frac{m_2 m_4 \ldots m_{2n}}{m_3 m_5 \ldots m_{2n+1}} \quad (n = 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где m_i является *одним из значений функции* $A(x)^{1/2}$ *на отрезке* $[x_{i-1}, x_i]$.

Нетрудно показать, что *точки* $x_2, x_4, \ldots$ *являются точками экстремума для функции* $y'(x)$. Для точки x_2 это вытекает из того, что $y'(x_1) = y'(x_3) = 0$, а $y''(x) = -A(x)y(x)$ обращается в нуль на отрезке $[x_1, x_3]$ лишь в точке x_2. Аналогично проводится доказательство для других точек.

б) Предположим теперь, что *верхняя и нижняя грани функции* $\sqrt{A(x)}$ *в промежутке* $[x_0, +\infty)$ $(K = +\infty)$ *конечны и положительны*, т. е. что существуют числа a и b, для которых выполняются неравенства

$$0 < a \leqslant \sqrt{A(x)} \leqslant b.$$

В этом случае *функция* $y(x)$ *имеет бесконечное множество нулей в промежутке* $[x_0, +\infty)$. В самом деле, сравнивая по теореме Штурма (гл. IV, § 2, п. 6, „а") уравнения

$$y'' + A(x)y = 0 \quad \text{и} \quad z'' + a^2 z = 0,$$

убеждаемся в том, что функция $y(x)$ имеет по крайней мере один нуль в каждом отрезке длины π/a.

С другой стороны, на каждом отрезке, длина которого меньше чем π/b, лежит не более одного нуля функции $y(x)$. *Отсюда следует, что* $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = +\infty$, *где* $x_0, x_2, x_4, \ldots$ — *нули функции* $y(x)$.

Из формул (6) вытекают следующие *неравенства для максимумов функций* $|y(x)|$ *и* $|y'(x)|$:

$$\frac{a^n}{b^n} \leqslant \left|\frac{y'(x_{2n})}{y'(x_0)}\right| \leqslant \frac{b^n}{a^n}, \quad \frac{a^n}{b^n} \leqslant \left|\frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)}\right| \leqslant \frac{b^n}{a^n} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,^{1)}.$$

в) *Предположим теперь, что функция* $A(x)$ *непрерывна, положительна и не убывает в промежутке* $[x_0, +\infty)$. Повторяя проведенные в „б" рассуждения, мы убеждаемся, что функция $y(x)$ имеет в этом промежутке бесконечно много нулей. Так как в рассматриваемом случае $m_{2r} \leqslant m_{2r+1}$, то из второго равенства (5) следует, что [2])

$$|y(x_{2r+1})| \leqslant |y(x_{2r-1})|,$$

т. е. что *максимумы функции* $|y(x)|$ *не возрастают*. Отсюда вытекает, что *последовательность максимумов функции* $|y(x)|$ *имеет конечный предел*. Аналогично, используя неравенство $m_{2r+1} \leqslant m_{2r+2}$, убеждаемся, что $|y'(x_{2r+2})| \geqslant |y'(x_{2r})|$, а потому *максимумы функции* $|y'(x)|$ *не убывают*. Отсюда вытекает, что *максимумы функции* $|y'(x)|$ *либо имеют конечный предел, либо стремятся к бесконечности*.

Рассмотрим теперь случай, когда функция $A(x)$ *непрерывна в промежутке* $[x_0, +\infty)$, *положительна и не возрастает*. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = a^2 > 0$, то функция $y(x)$ имеет бесконечно много нулей. Если же $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$, то нельзя утверждать ни существования бесконечного множества нулей функции $y(x)$, ни, тем более, существования максимумов функций $|y|$ и $|y'|$ (см. п. 5). Тем не менее если функции $|y|$ и $|y'|$ имеют максимумы, то из (5) вытекает, что

---

[1]) Относительно неравенств для решений уравнений второго порядка см. Гамбье [1], стр. 5. Отметим, что решение такого уравнения можно представить в виде $x = c\rho\cos(\varphi + h)$, где c и h — произвольные постоянные, ρ удовлетворяет уравнению $\rho'' - c^2\rho^{-3} + \rho A(t) = 0$, $\varphi = \int c\rho^{-2}\,dt$.

Относительно полных уравнений второго порядка см. Сато [1] и Иосида [1].

[2]) См. предыдущую сноску.

максимумы функции $|y(x)|$ *не убывают, а максимумы функции* $|y'(x)|$ *не возрастают.* Кроме того, если $y(\alpha) = 0$, в то время как *справа от точки* α $y(x)$ *не обращается в нуль, то справа от точки* α *функция* $|y'(x)|$ *убывает.* В самом деле, если при $x > \alpha$ выполняется неравенство $y(x) > 0$, то при этих значениях x имеем $y''(x) < 0$, а следовательно, $y'(x)$ убывает при $x > \alpha$; но $y'(\alpha) > 0$, а $y'(x)$ не может обратиться в нуль справа от α [1]), а потому $y'(x) > 0$ и убывает. Аналогично проводится рассуждение и в случае, когда при $x > \alpha$ имеем $y(x) < 0$.

г) Покажем теперь, что если *функция* $A(x)$ *непрерывна, положительна и монотонна в промежутке* $[q, +\infty)$, *причем* $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = \alpha^2$, $\alpha > 0$, *то оба предела*

$$\lim_{n \to \infty} |y(x_{2n+1})| = l, \qquad \lim_{n \to \infty} |y'(x_{2n})| = l'$$

конечны, отличны от нуля и удовлетворяют соотношению

$$l' = \alpha l. \tag{7}$$

Так как функция $\sqrt{A(x)}$ ограничена в промежутке $[x_0, +\infty)$, то в силу „б“ верхние и нижние грани последовательностей $\{|y(x_{2n+1})|\}$, $\{|y'(x_{2n})|\}$ являются положительными числами. В силу „в“ эти последовательности монотонны, а следовательно, указанные в формулировке утверждения пределы l и l' существуют и положительны. Наконец, из того, что $\lim\limits_{r \to \infty} m_r = \alpha$, и из формулы (4) вытекает справедливость формулы (7).

Легко дать *оценку для числа* l.

Если функция $A(x)$ не убывает, то из (6) следует, что

$$1 \geqslant \left|\frac{y(x_{2n+1})}{y(x_1)}\right| = \frac{m_2}{m_{2n+1}} \frac{m_4}{m_3} \cdots \frac{m_{2n}}{m_{2n-1}} \geqslant \frac{m_2}{m_{2n+1}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{A(x_1)}{A(x_{2n+1})}} \geqslant \frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha},$$

$$|y(x_1)| \geqslant |y(x_{2n+1})| \geqslant \frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha} |y(x_1)|,$$

$$|y(x_1)| \geqslant \lim_{n \to \infty} |y(x_{2n+1})| = l \geqslant \frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha} |y(x_1)|,$$

$$|y(x_1)| \geqslant l \geqslant \frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha} |y(x_1)|, \tag{8$_1$}$$

---

[1]) Если бы в точке $\beta > \alpha$ функция $y'(x)$ обратилась в нуль, то при $x > \beta$ эта функция была бы отрицательной и возрастающей по абсолютной величине. Но тогда мы имели бы $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$ и функция $y(x)$ обращалась бы по крайней мере один раз в нуль справа от точки α, вопреки предположению.

Если же функция $A(x)$ не возрастает, то аналогичные рассуждения показывают, что

$$|y(x_1)| \leqslant l \leqslant \frac{\sqrt{A(x_1)}}{\alpha} |y(x_1)|. \tag{8_2}$$

д) Доказанная в „г" теорема является частным случаем следующей теоремы:

Если функция $A(x)$ непрерывна, положительна и имеет ограниченное изменение[1]) *в промежутке* $[q, +\infty)$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=\alpha^2$, $\alpha > 0$, *то обе последовательности* $\{|y(x_{2n+1})|\}$, $\{|y'(x_{2n})|\}$ *имеют конечные, отличные от нуля пределы, удовлетворяющие соотношению*

$$\lim_{n\to\infty} |y'(x_{2n})| = \alpha \lim_{n\to\infty} |y(x_{2n-1})|^{2)}. \tag{9}$$

Функция $A(x)$ в $[q, +\infty)$ заключена между положительными числами a и b $(0 < a < b)$. Следовательно, в силу „б" последовательность $\{x_n\}$ содержит бесконечно много точек и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Функция $\ln A(x)$ также имеет ограниченное изменение в $[q, +\infty)$. В самом деле, если x' и x'' — любые точки из $[q, +\infty)$, то

$$\ln A(x'') - \ln A(x') = [A(x'') - A(x')]/A(\xi),$$

где точка ξ лежит между x' и x''. Отсюда следует, что

$$|\ln A(x'') - \ln A(x')| \leqslant |A(x'') - A(x')|/a,$$

а потому функция $\ln A(x)$ имеет ограниченное изменение.

Нетрудно видеть, что бесконечные произведения

$$\frac{m_2}{m_1}\cdot\frac{m_4}{m_3}\cdot\frac{m_6}{m_5}\ \ldots,\quad \frac{m_2}{m_3}\cdot\frac{m_4}{m_5}\cdot\frac{m_6}{m_7}\ \ldots \tag{10}$$

сходятся. В самом деле, члены рядов

$$\sum |\ln m_{2n} - \ln m_{2n-1}|,\quad \sum |\ln m_{2n} - \ln m_{2n+1}|$$

не превосходят соответственно изменений функции $2^{-1}\ln A(x)$ на отрезках $[x_{2n-2}, x_{2n}]$ и $[x_{2n-1}, x_{2n+1}]$. Но сумма этих изменений ограничена, а потому бесконечные произведения (10) сходятся и имеют положительные пределы.

Но тогда из (6) вытекает, что существуют и пределы $\lim\limits_{n\to\infty} |y'(x_{2n})|$, $\lim\limits_{n\to\infty} |y(x_{2n+1})|$, причем оба эти предела отличны от нуля. Выполнение соотношения (9) вытекает из формулы (4).

---

[1]) Другие исследования случая, когда $A(x)$ имеет ограниченное изменение, см. в работах Каччиополи [1], В. М. Шепелева [1].

[2]) Относительно асимптотического поведения решений (1) при $x \to +\infty$ см. Л. А. Гусаров [1], И. М. Соболь [1]. — *Прим. ред.*

Заметим, что доказанную теорему можно сформулировать следующим образом: *если функция $A(x)$ непрерывна и положительна в промежутке $[q, +\infty)$, а $\ln A(x)$ имеет в этом промежутке ограниченное изменение, то обе последовательности $\{|y(x_{2n+1})|\}$, $\{|y'(x_{2n})|\}$ сходятся, причем их пределы отличны от нуля и удовлетворяют соотношению* (9).

В самом деле, из сделанных предположений вытекает, что существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln A(x)$ [1]). Следовательно, функция $A(x)$ ограничена в $[q, +\infty)$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) \leqslant \alpha^2 \neq 0$. По сделанному выше замечанию

$$|A(x'') - A(x')| \leqslant b\,|\ln A(x'') - \ln A(x')|,$$

и, следовательно, функция $A(x)$ имеет в $[q, +\infty)$ ограниченное изменение.

Заметим, что из доказанной теоремы вытекает следующее утверждение: *пусть функция $A(x)$ удовлетзоряет сделанным выше предположениям, а $y(x)$ — любое решение уравнения* (1); *тогда $y(x)$ и $y'(x)$ ограничены в промежутке $[q, +\infty)$ и имеют там бесконечно много нулей, причем последовательность $\{|y(x_{2n+1})|\}$ максимумов функции $|y(x)|$ и последозательность $\{|y'(x_{2n})|\}$ максимумов функции $|y'(x)|$ удовлетворяют соотношению* (9).

е) Из доказанной в „д" теоремы вытекает следствие:

Если функция $A(x)$ непрерывна, положительна и дифференцируема в промежутке $[q, +\infty)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = \alpha^2 > 0$ и $\int\limits_q^{+\infty} |A'(x)|\,dx$ сходится, то последовательности $\{|y(x_{2n+1})|\}$, $\{|y'(x_{2n})|\}$ имеют конечные, отличные от нуля пределы, для которых выполняется соотношение (9).

Пусть, в самом деле, $q = q_0 < q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. Тогда

$$\sum_{r=1}^{n} |A(q_r) - A(q_{r-1})| = \sum_{r=1}^{n} \left| \int\limits_{q_{r-1}}^{q_r} A'(x)\,dx \right| \leqslant \int\limits_q^{+\infty} |A'(x)|\,dx < +\infty,$$

и, следовательно, функция $A(x)$ имеет ограниченное изменение в $[q, +\infty)$. Поэтому сделанные в „д" выводы сохраняют свою силу и в этом случае.

Доказанная теорема справедлива, например, если $|A'(x)| < hx^{-s}$, где h и s — постоянные величины, $s > 1$; в частности, она справедлива для функции $A(x) = \alpha^2 + a/x$, где a — постоянная величина, $\alpha > 0$.

---

[1]) См. Сансоне [1], стр. 127.

ж) Область приложимости полученных выше результатов может быть расширена при помощи следующей теоремы:

Пусть функция $A(x)$ непрерывна и положительна в промежутке $[q, +\infty)$, и пусть все решения уравнения

$$y'' + A(x)\,y = 0 \tag{1}$$

ограничены в этом промежутке. Если функция $\eta(x)$ непрерывна в $[q, +\infty)$, а интеграл $\int\limits_q^{+\infty} |\eta(\xi)|\,d\xi$ сходится, то все решения уравнения

$$y'' + [A(x) + \eta(x)]\,y = 0 \tag{11}$$

также ограничены в $[q, +\infty)$.

Пусть, в самом деле, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — частные решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$y_1(c) = 0,\ y_1'(c) = 1,\ y_2(c) = 1,\ y_2'(c) = 0.$$

Запишем уравнение (11) в виде

$$y'' + A(x)\,y = -\eta(x)\,y$$

и применим для его решения метод вариации произвольных постоянных, считая правую часть известной (см. гл. II, § 1, п. 5, „в“). Мы получаем тогда, что

$$y(x) = y'(c)\,y_1(x) + y(c)\,y_2(x) - y_1(x)\int\limits_c^x \eta(\xi)\,y(\xi)\,y_2(\xi)\,d\xi +$$
$$+ y_2(x)\int\limits_c^x \eta(\xi)\,y(\xi)\,y_1(\xi)\,d\xi.$$

Пусть при $x > \bar{x}$ выполняются неравенства $|y_1(x)| < g$, $|y_2(x)| < g$. Выбирая c настолько большим, что

$$\int\limits_c^{+\infty} |\eta(\xi)|\,d\xi < \frac{1}{4g^2};\ c > \bar{x},$$

и обозначая через $\mu(x)$ наибольшее значение $|y(x)|$ на отрезке $[c, x]$, получаем при $x > c$:

$$|y(x)| < g\,|y'(c)| + g\,|y(c)| + 2g^2\mu(x)\int\limits_c^x |\eta(\xi)|\,d\xi,$$

$$|y(x)| \leqslant g\,[\,|y'(c)| + |y(c)|\,] + \frac{1}{2}\mu(x).$$

Отсюда следует, что

$$\mu(x)\leqslant 2g[|y'(c)|+|y(c)|].$$

Теорема доказана.

Например, если положить $A(x)=\alpha^2+ax^{-1}$, *где* α *и* a — *постоянные величины,* $\alpha>0$, *а* $\eta(x)=\omega(x)x^{-2}$, *где функция* $\omega(x)$ *непрерывна и ограничена в промежутке* $[q, +\infty)$, *то из доказанной теоремы вытекает, что все решения уравнения*

$$y''+\left[\alpha^2+\frac{a}{x}+\frac{\omega(x)}{x^2}\right]y=0$$

ограничены в $[q, +\infty)$.

3. Уравнение $y''+[1-Q(x)]y=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)=0$; способ Фубини для асимптотического разложения решений. а) Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''+A(x)y=0$$

и предположим, что $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=\pm\alpha^2$, $\alpha>0$. Мы можем считать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=\pm 1$, так как общий случай сводится к этому с помощью замены переменной $x=t/\alpha$. Таким образом, данное уравнение можно записать либо в виде $y''+[1-Q(x)]y=0$, либо в виде $y''-[1+Q(x)]y=0$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x)=0$.

В этом пункте мы рассмотрим первое из этих уравнений, второе уравнение будет рассмотрено в п. 7 [1]).

б) Итак, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''+[1-Q(x)]y=0, \tag{12}$$

где $Q(x)$ — *непрерывная функция от* x, *определенная в промежутке* $[q, +\infty)$, *такая, что*

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x)=0, \tag{13_1}$$

$$\int_q^{+\infty} |Q(x)|\,dx<+\infty. \tag{13_2}$$

Так как общее решение уравнения $y''+y=0$ имеет вид $y=a\cos(x+b)$, т. е. все решения этого уравнения ограничены в $[q, +\infty)$, то из (13_2) и из доказанного в п. 2, „ж" вытекает, что

[1]) Результаты этого пункта, равно как и результаты п. 7, могут быть выведены из общей теоремы Дини [1]. Однако для уравнений второго порядка предпочтительнее использовать метод, предложенный Фубини [1], так как он быстрее приводит в этом случае к цели.

все решения уравнения (12) ограничены в $[q, +\infty)$; мы выведем полезные для приложений асимптотические разложения этих решений[1]).

Легко проверить, что если функции z_1 и z_2 удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$z_1' = \frac{1}{2i}(z_1 + e^{-2ix} z_2) Q, \quad z_2' = -\frac{1}{2i}(z_1 e^{2ix} + z_2) Q, \tag{14}$$

то функция

$$y = e^{ix} z_1(x) + e^{-ix} z_2(x) \tag{15}$$

удовлетворяет уравнению (12)[2]).

Нетрудно видеть, что при этих предположениях

$$z_1' = -\frac{i}{2} e^{-ix} yQ, \quad z_2' = \frac{i}{2} e^{ix} yQ. \tag{16}$$

Для того чтобы не выходить за пределы области действительных чисел, предположим, что функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ сопряжены. Докажем, что, *каковы бы ни были сопряженные комплексные числа* α_1 *и* α_2, *существуют функции* $z_1(x)$ *и* $z_2(x)$ (*комплексные и сопряженные*), *которые удовлетворяют системе* (14) *и условиям*

$$\lim_{x \to +\infty} z_1(x) = \alpha_1, \quad \lim_{x \to +\infty} z_2(x) = \alpha_2. \tag{17}$$

Из (14) и (17) мы получаем систему сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра

$$\left.\begin{aligned} z_1(x) &= \alpha_1 + \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [z_1(\xi) + e^{-2i\xi} z_2(\xi)] Q(\xi)\, d\xi, \\ z_2(x) &= \alpha_2 - \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [e^{2i\xi} z_1(\xi) + z_2(\xi)] Q(\xi)\, d\xi, \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

которую мы будем решать *методом последовательных подстановок*.

Положим

$$u_0(x) = \alpha_1, \quad v_0(x) = \alpha_2, \tag{19_1}$$

$$\left.\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [u_{n-1}(\xi) + e^{-2i\xi} v_{n-1}(\xi)] Q(\xi)\, d\xi, \\ v_n(x) &= -\frac{1}{2i} \int_{+\infty}^{x} [e^{2i\xi} u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)] Q(\xi)\, d\xi \\ &\qquad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}\right\} \tag{19_2}$$

---

[1]) Относительно условия (13_2) см. Хукухара и Нагумо [1].

[2]) Для доказательства достаточно дважды продифференцировать равенство (15), принимая во внимание равенства (14).

и докажем, что ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x) \tag{20}$$

сходятся абсолютно и равномерно в промежутке $[q_1, +\infty)$, содержащемся в $[q, +\infty)$, причем функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ разлагаются в ряды вида

$$z_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x). \tag{21}$$

Пусть $\alpha = |\alpha_1| = |\alpha_2|$. Тогда

$$|u_0(x)| = \alpha, \quad |v_0(x)| = \alpha,$$

$$|u_0(\xi) + e^{-2i\xi} v_0(\xi)| \leqslant 2\alpha, \quad |u_0(\xi) e^{2i\xi} + v_0(\xi)| \leqslant 2\alpha,$$

$$|u_1(x)| \leqslant \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi)|\, d\xi, \quad |v_1(x)| \leqslant \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi)|\, d\xi$$

и, аналогично,

$$|u_2(x)|, \quad |v_2(x)| \leqslant \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi_2)|\, d\xi_2 \int_{\xi_2}^{+\infty} |Q(\xi_1)|\, d\xi_1.$$

По индукции получаем, что

$$\left.\begin{matrix} u_n(x) \\ v_n(x) \end{matrix}\right\} \leqslant \alpha \int_x^{+\infty} |Q(\xi_n)|\, d\xi_n \int_{\xi_n}^{+\infty} |Q(\xi_{n-1})|\, d\xi_{n-1} \ldots \int_{\xi_2}^{\infty} |Q(\xi_1)|\, d\xi_1. \tag{22}$$

Пусть теперь ε — любое положительное число, меньшее единицы; в силу (13_2) можно найти такое число $q_1 > q$, что при $x \geqslant q_1$ имеем

$$\int_x^{+\infty} |Q(\xi)|\, d\xi < \varepsilon.$$

Из (22) вытекает, что при $x \geqslant q_1$

$$|u_n(x)| \leqslant \alpha\varepsilon^n, \quad |v_n(x)| \leqslant \alpha\varepsilon^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

а, следовательно, ряды (20) мажорируются геометрической прогрессией $\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n$ и потому абсолютно и равномерно сходятся в проме-

жутке $[q_1, +\infty)$. Отсюда вытекает, что в равенствах

$$u_0(x)+u_1(x)+\ldots+u_n(x)=$$
$$=\alpha_1+\frac{1}{2i}\int\limits_{+\infty}^{x}\sum_{k=1}^{n}\{u_{k-1}(\xi)+e^{-2i\xi}v_{k-1}(\xi)\}Q(\xi)\,d\xi,$$
$$v_0(x)+v_1(x)+\ldots+v_n(x)=$$
$$=\alpha_2-\frac{1}{2i}\int\limits_{+\infty}^{x}\sum_{k=1}^{n}\{v_{k-1}(\xi)+e^{2i\xi}u_{k-1}(\xi)\}Q(\xi)\,d\xi$$

можно перейти к пределу под знаком интеграла, когда $n\to\infty$, и, следовательно, функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$, определенные равенствами (21), удовлетворяют системе уравнений (18), а *функция* $y(x)$ *разлагается в промежутке* $[q_1, +\infty)$ *в ряд вида*

$$y(x)=\alpha_1e^{ix}+\alpha_2e^{-ix}+e^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)+e^{-ix}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x). \qquad (23_1)$$

Так как α_1 зависит от двух произвольных постоянных (действительной части и коэффициента при мнимой части), то *формула* (23_1) *дает асимптотическое разложение общего решения уравнения* (12) *в* $[q_1, +\infty)$.

Полезно отметить асимптотическое разложение функции $y'(x)$. Так как $y'(x)=i[e^{ix}z_1(x)-e^{-ix}z_2(x)]$, то оно имеет вид

$$y'(x)=i[\alpha_1e^{ix}-\alpha_2e^{-ix}]+ie^{ix}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)-ie^{-ix}\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x). \qquad (23_2)$$

в) Наложим теперь на функцию $Q(x)$ более ограничительное требование:

$$|Q(x)|\leqslant\frac{k}{x^{1+\rho}}, \qquad (24)$$

где k и ρ — постоянные величины, $k>0$, $\rho>0$.

Из (22) вытекает тогда, что

$$|u_n(x)|,\quad |v_n(x)|<\alpha\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|^n\frac{1}{n!},$$

и, следовательно, ряды (20) мажорируются рядом

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|^n\frac{1}{n!},$$

сходящимся к функции $\alpha e^{\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|}$.

Поэтому, если положить

$$y(x) = \alpha_1 e^{ix} + \alpha_2 e^{-ix} + e^{ix}\sum_{l=1}^{n} u_l(x) + e^{-ix}\sum_{l=1}^{n} v_l(x) + \eta_n(x), \qquad (25_1)$$

то в промежутке $[q, +\infty)$

$$|\eta_n(x)| < 2\alpha\left[e^{\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|} - 1 - \frac{1}{1!}\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right| - \ldots - \frac{1}{n!}\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|^n\right],$$

а потому для значений x, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right| \leqslant 1$, имеет место неравенство

$$|\eta_n(x)| < 2\alpha\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\left[1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right].$$

Из этого неравенства следует, что при указанных значениях x имеем

$$|\eta_n(x)| < 2\alpha\left|\frac{k}{\rho}\frac{1}{x^\rho}\right|^{n+1}\frac{1}{n!\,n}, \qquad (26)$$

где при $n = 0$ следует заменить множитель $1/n!\,n$ множителем 2.

Аналогично получается, что

$$y'(x) = i[\alpha_1 e^{ix} - \alpha_2 e^{-ix}] + ie^{ix}\sum_{l=1}^{n} u_l(x) - ie^{-ix}\sum_{l=1}^{n} v_l(x) + \bar{\eta}_n(x), \qquad (25_2)$$

где $|\bar{\eta}_n(x)|$ удовлетворяет тому же неравенству (26).

4. Асимптотические формулы для функций Бесселя. а) Применим полученные в предыдущем пункте результаты для вывода асимптотического разложения бесселевых функций *целого индекса* при $x \to +\infty$.

Бесселева функция

$$u = J_n(x)$$

является решением уравнения (см. гл. III, § 6, п. 1)

$$u'' + \frac{1}{x}u' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)u = 0.$$

Если положить

$$J_n(x) = yx^{-1/2}\,(x > 0),$$

то функция y удовлетворяет уравнению (гл. IV, § 3, п. 2, „б“)

$$y'' + [1 - Q(x)]\,y = 0,$$

где

$$Q(x) = (4n^2 - 1)/4x^2.$$

Но тогда

$$k = |(4n^2 - 1)/4|, \quad \rho = 1$$

(относительно обозначений см. п. 3, „в"), и если положить

$$\alpha_1 = 2^{-1}ae^{ib}, \quad \alpha_2 = 2^{-1}ae^{-ib} \, (a > 0),$$

то из (25_1) и (26) вытекает, что

$$J_n(x) = \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = \frac{a\cos(x+b)}{\sqrt{x}} + \frac{\eta(x)}{\sqrt{x}}, \tag{27_1}$$

где

$$|\eta(x)| < a\left|\frac{4n^2-1}{2}\right|\frac{1}{x} \tag{28_1}$$

при $(4n^2-1)/4x \leqslant 1$. Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} J_n(x) = 0. \tag{29}$$

Из (25_2) следует, что

$$[x^{1/2}J_n(x)]' = \frac{1}{2}iae^{i(b+x)} - \frac{1}{2}iae^{-i(b+x)} + \bar{\eta}(x),$$

где функция $\bar{\eta}(x)$ удовлетворяет неравенству (28_1). Отсюда вытекает, что

$$x^{1/2}J_n'(x) + \frac{1}{2\sqrt{x}}J_n(x) = -\frac{1}{2i}a\,[e^{i(b+x)} - e^{-i(b+x)}] + \bar{\eta}(x).$$

Принимая во внимание соотношения (27_1) и (28_1), получаем таким образом, что

$$x^{1/2}J_n'(x) = -a\sin(x+b) + \eta_1(x), \tag{27_2}$$

где

$$|\eta_1(x)| < a\left[\left|\frac{4n^2-1}{2}\right| + \frac{3}{2}\right]\frac{1}{x}. \tag{28_2}$$

Нам осталось определить значения постоянных a и b, входящих в формулы (27_1) и (27_2). Из этих соотношений вытекает, что

$$(a\cos b)\cos x - (a\sin b)\sin x = \sqrt{x}\,J_n(x) - \eta(x),$$
$$(a\cos b)\sin x + (a\sin b)\cos x = -\sqrt{x}J_n'(x) + \eta_1(x).$$

Но тогда

$$\left.\begin{aligned} a\cos b &= \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_n(x)\cos x - J_n'(x)\sin x], \\ a\sin b &= -\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_n(x)\sin x + J_n'(x)\cos x]. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Равенства (30) позволяют определить значения постоянных a и b.

Как показано в гл. III, § 6, п. 6, „б", имеет место равенство

$$J_n'(x) = J_{n-1}(x) - \frac{n}{x}J_n(x).$$

Из (29) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\frac{n\sin x}{x}J_n(x) = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}\frac{n\cos x}{x}J_n(x) = 0.$$

Поэтому равенства (30) можно записать в виде

$$a\cos b = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_n(x)\cos x - J_{n-1}(x)\sin x],$$

$$a\sin b = -\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_n(x)\sin x + J_{n-1}(x)\cos x].$$

Но [см. гл. III, § 6, п. 6, (22_1)]

$$J_n = \frac{2(n-1)}{x}J_{n-1} - J_{n-2},$$

$$J_{n-1} = \frac{2(n-2)}{x}J_{n-2} - J_{n-3}.$$

Поэтому, принимая во внимание (29), получаем, что

$$a\cos b = -\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_{n-2}(x)\cos x - J_{n-3}(x)\sin x]$$

$$a\sin b = \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_{n-2}(x)\sin x + J_{n-3}(x)\cos x].$$

По индукции выводим, что при $n = 2m+1$ имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} a\cos b &= (-1)^m \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\cos x - J_0(x)\sin x],\\ a\sin b &= (-1)^{m-1} \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\sin x + J_0(x)\cos x],\end{aligned}\right\} \quad (31_1)$$

а при $n = 2m$ — равенства

$$\left.\begin{aligned} a\cos b &= (-1)^m \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\sin x + J_0(x)\cos x],\\ a\sin b &= (-1)^m \lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\cos x - J_0(x)\sin x].\end{aligned}\right\} \quad (31_2)$$

Из формулы (18_2), гл. III, § 6, п. 4, следует, что

$$x^{1/2}(J_1(x)\cos x - J_0(x)\sin x) =$$

$$= \frac{2x^{1/2}}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x\cos t)\cos t\cos x - \cos(x\cos t)\sin x]\,dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi}x^{1/2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\sin\left[2x\cos^2\frac{t}{2}\right]\sin^2\frac{t}{2} + \sin\left[2x\sin^2\frac{t}{2}\right]\cos^2\frac{t}{2}\right\}dt.$$

Разобьем интеграл, стоящий в правой части этого соотношения, на два слагаемых и сделаем в них соответственно подстановки $2x\cos^2\frac{t}{2}=u^2$, $2x\sin^2\frac{t}{2}=u^2$. Тогда получаем, что

$$x^{1/2}[J_1(x)\cos x-J_0(x)\sin x]=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2x}}\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\sin u^2\,du=$$

$$=-\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2x}}\sin u^2\,du+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{\sqrt[4]{x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\sin u^2\,du+\right.$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right]\sin u^2\,du. \qquad (32)$$

Но хорошо известно, что[1])

$$-\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\int^{\sqrt{2x}}\sin u^2\,du=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Далее, мы можем считать, что $x>1/4$, а тогда при $0\leqslant u\leqslant x^{1/4}$ имеем

$$0\leqslant 1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\leqslant 1-\left(1-\frac{u^2}{4x}\right)=\frac{u^2}{4x}\leqslant\frac{\sqrt{x}}{4x}=\frac{1}{4\sqrt{x}}.$$

Но тогда

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left|\int\limits_0^{\sqrt[4]{x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right]\sin u^2\,du\right|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2\pi\sqrt[4]{x}}\to 0 \text{ при } x\to+\infty.$$

Наконец, когда u изменяется от $\sqrt[4]{x}$ до $\sqrt{2x}$, разность $1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}$ изменяется, монотонно возрастая, от $1-\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{1/2}$ до 1. Поэтому в силу второй теоремы о среднем значении[2]) получаем, что

$$\left|\int\limits_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}}\left[1-\left(1-\frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right]\sin u^2\,du\right|=\left|\int\limits_{\xi}^{\sqrt{2x}}\sin u^2\,du\right|,$$

[1]) Г. М. Фихтенгольц [1], т. II, стр. 743. — *Прим. перев.*
[2]) См. там же, стр. 137. — *Прим. перев.*

где $\sqrt[4]{x} < \xi < \sqrt{2x}$. Из сходимости интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \sin u^2\,du$ получаем, что

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_{\sqrt[4]{x}}^{\sqrt{2x}} \left[1 - \left(1 - \frac{u^2}{2x}\right)^{1/2}\right] \sin u^2\,du = 0.$$

Но тогда из (32) следует, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\cos x - J_0(x)\sin x] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{33_1}$$

Аналогично доказывается, что

$$\lim_{x\to+\infty} x^{1/2}[J_1(x)\sin x + J_0(x)\cos x] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \tag{33_2}$$

Из (31_1) и (31_2) вытекает, в силу доказанных сейчас формул, что

$$a\cos b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(-\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),\quad a\sin b = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(-\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Поэтому

$$a = \sqrt{\frac{2}{\pi}},\quad b = -\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$$

и соотношения (27_1), (27_2), (28_1), (28_2) дают *асимптотические формулы* для $J_n(x)$ и $J_n'(x)$:

$$\left.\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \gamma(x),\\ J_n'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{x}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \delta(x), \end{aligned}\right\} \tag{34_1}$$

где при $x \geqslant |(4n^2 - 1)/4|$

$$|\gamma(x)| < \left|\frac{4n^2-1}{2}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x\sqrt{x}},\quad |\delta(x)| < \left[\left|\frac{4n^2-1}{2}\right| + \frac{3}{2}\right]\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x\sqrt{x}}. \tag{34_2}$$

б) Для приложений полезно найти *второй член асимптотического разложения функции* $J_n(x)$. Полагая в формуле (25_1) $n = 1$,

получаем для $x^{1/2}J_n(x)$ выражение

$$x^{1/2}J_n(x)=\alpha_1 e^{ix}+\alpha_2 e^{-ix}+$$

$$+\frac{4n^2-1}{4}\int\limits_{+\infty}^{x}(\alpha_1 e^{i\xi}+\alpha_2 e^{-i\xi})\frac{e^{i(x-\xi)}-e^{-i(x-\xi)}}{2i}\frac{1}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x)=$$

$$=a\cos(x+b)+\frac{4n^2-1}{4}a\int\limits_{+\infty}^{x}\frac{\sin(x-\xi)\cos(\xi+b)}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x)=$$

$$=a\cos(x+b)-\frac{4n^2-1}{8}\frac{a\sin(x+b)}{x}+$$

$$+\frac{4n^2-1}{8}a\int\limits_{+\infty}^{x}\frac{\sin(x-2\xi-b)}{\xi^2}d\xi+\eta_1(x).$$

Но по второй теореме о среднем значении имеем ($k>x$, $k>k_1$)

$$\left|\int\limits_{x}^{k}\frac{\sin(x-2\xi-b)}{\xi^2}d\xi\right|=\frac{1}{x^2}\left|\int\limits_{x}^{k_1}\sin(x-2\xi-b)\,d\xi\right|\leqslant\frac{1}{x^2},$$

а в силу формулы (26)

$$|\eta_1(x)|<2a\left|\frac{4n^2-1}{4}\right|^2\frac{1}{x^2}.$$

Отсюда получаем для $J_n(x)$ *асимптотическую формулу*

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{4n^2-1}{8}\frac{1}{x}\sin\left(x-n\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\gamma_1(x)\,^{1)},\qquad(35_1)$$

---

[1]) При достаточно больших положительных значениях x имеет место асимптотическое разложение Якоби ([1] т. VII, стр. 174):

$$J_n(x)\sim\left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left[\cos\left(x-\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(n,\,2m)}{(2x)^{2m}}-\right.$$

$$\left.-\sin\left(x-\frac{1}{2}n\pi-\frac{\pi}{4}\right)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(n,\,2m+1)}{(2x)^{2m+1}}\right],$$

где положено, согласно Ганкелю, $(n,\,0)=1$,

$$(n,\,m)=(-1)^m\frac{[4n^2-1^2][4n^2-3^2]\ldots[4n^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}m!}\quad(m=1,\,2,\,\ldots)$$

(см. Ватсон [1], гл. VII, стр. 217—251).

где

$$|\gamma_1(x)|<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{(4n^2-1)\,n^2}{2x^2\sqrt{x}}. \tag{35$_2$}$$

5. Случай, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$. а) В этом пункте мы *изучим решения уравнения*

$$y''+A(x)\,y=0 \tag{1}$$

при предположении, что $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$. Естественно принять гипотезу, что решения этого уравнения асимптотически ведут себя так же, как и решения уравнения $y''=0$. Однако в общем случае это предположение неверно. Например, общее решение уравнения

$$y''+\left(\frac{1}{4x}+\frac{3}{16x^2}\right)y=0$$

имеет вид $y=c_1x^{1/2}\sin(x^{1/2}+c_2)$ (c_1 и c_2 — произвольные постоянные). Но, за исключением случая, когда $c_1=0$, это решение является колеблющимся.

б) Изучим теперь случай, когда решения уравнения (1) асимптотически линейны, а именно, *предположим, что*

$$|A(x)|<\frac{k}{x^{3+\rho}}, \tag{36}$$

где k и ρ — постоянные величины, $\rho>0$ [1]).

Если положить

$$y(x)=xz_1(x)+z_2(x), \tag{37$_1$}$$

$$y'(x)=z_1(x) \tag{37$_2$}$$

и продифференцировать равенство (37_1), принимая во внимание равенство (37_2), то получится, что

$$xz_1'(x)+z_2'(x)=0.$$

Из уравнения (1) вытекает соотношение

$$z_1'(x)+A(x)\,[xz_1(x)+z_2(x)]=0.$$

Поэтому, если функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$z_1'(x)=-A(x)\,[xz_1(x)+z_2(x)],$$
$$z_2'(x)=xA(x)\,[xz_1(x)+z_2(x)],$$

то выражение (37_1) является решением уравнения (1).

---

[1]) При этих предположениях функция $A(x)$ голоморфна в окрестности точки $x=\infty$, а уравнение (1) имеет при $x=\infty$ правильную особую точку (гл. III, § 3, п. 1 и 5).

Докажем теперь, что *если α_1 и α_2 — любые заданные постоянные величины, то существует решение $y(x)$ уравнения* (1), *для которого соответствующие функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют соотношениям*

$$\lim_{x\to+\infty} z_1(x) = \alpha_1,$$

$$\lim_{x\to+\infty} z_2(x) = \alpha_2.$$

Чтобы доказать это, достаточно показать существование решения следующей системы сингулярных интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$\left.\begin{aligned} z_1(x) &= \alpha_1 - \int_{+\infty}^{x} [\xi z_1(\xi) + z_2(\xi)]\, A(\xi)\, d\xi, \\ z_2(x) &= \alpha_2 + \int_{+\infty}^{x} [\xi^2 z_1(\xi) + \xi z_2(\xi)]\, A(\xi)\, d\xi. \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Применим снова метод последовательных подстановок. Положим

$$u_0 = \alpha_1, \quad v_0 = \alpha_2,$$

$$\left.\begin{aligned} u_n &= -\int_{+\infty}^{x} [\xi u_{n-1}(\xi) + v_{n-1}(\xi)]\, A(\xi)\, d\xi, \\ v_n &= \int_{+\infty}^{x} [\xi^2 u_{n-1}(\xi) + \xi v_{n-1}(\xi)]\, A(\xi)\, d\xi \end{aligned}\right. \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и докажем, что

$$z_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x). \tag{39}$$

В самом деле, если α равно наибольшему из чисел $|\alpha_1|$, $|\alpha_2|$, то

$$|u_0| \leqslant \alpha, \qquad |v_0| \leqslant \alpha.$$

В силу (36) получаем, что при $x > 1$

$$|u_1(x)| < k\alpha \int_{x}^{+\infty} \left[\frac{1}{\xi^{2+\rho}} + \frac{1}{\xi^{3+\rho}}\right] d\xi =$$

$$= k\alpha \left[\frac{1}{(1+\rho)\, x^{1+\rho}} + \frac{1}{(2+\rho)\, x^{2+\rho}}\right] < \alpha\, \frac{2k}{\rho x^{1+\rho}},$$

и аналогично

$$|v_1(x)| < \alpha\, \frac{2k}{\rho x^{\rho}}.$$

Вообще

$$|u_n(x)|<\alpha\frac{(2k)^n}{\rho(1+2\rho)(2+3\rho)\ldots[(n-1)+n\rho]}\frac{1}{x^{n(1+\rho)}},$$

$$|v_n(x)|<\alpha\frac{(2k)^n}{\rho(1+2\rho)(2+3\rho)\ldots[(n-1)+n\rho]}\frac{1}{x^{n(1+\rho)-1}}.$$

Отсюда следует, что при $x>1$ ряды (39) равномерно сходятся.

Повторяя рассуждения из п. 3, получаем, что функции $z_1(x)$ и $z_2(x)$ удовлетворяют системе уравнений (38), а из (37_1) и (38) следует тогда, что

$$y=\alpha_1x+\alpha_2+\eta(x), \tag{40_1}$$

где

$$\eta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[xu_n(x)+v_n(x)] \tag{40_2}$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\eta(x)=0. \tag{40_3}$$

Из формулы (40) виден характер *асимптотического поведения решений уравнения* (1) *при выполнении условия* (36).

6. Случай, когда $A(x)<0$, $\int\limits_q^{\infty}|A(x)|dx=+\infty$. В этом пункте мы изучим асимптотическое поведение решений уравнения $y''+A(x)y=0$, где $A(x)<0$. Для удобства рассуждений запишем это уравнение в виде

$$y''=A(x)y \tag{41}$$

и предположим, что функция $A(x)$ *непрерывна и положительна в промежутке* $[q, +\infty)$ причем $\int\limits_q^{+\infty}A(x)\,dx=+\infty$.

Из (41) вытекает, что

$$d(yy')/dx=yy''+y'^2=Ay^2+y'^2>0,$$

и, следовательно, произведение yy' возрастает.

Кроме того,

$$y(\xi)y'(\xi)=\int\limits_{\alpha}^{\xi}[A(\xi_1)y^2(\xi_1)+y'^2(\xi_1)]\,d\xi_1+y(\alpha)y'(\alpha), \tag{42}$$

$$y^2(x)=2\int\limits_{\alpha}^{x}d\xi\int\limits_{\alpha}^{\xi}[A(\xi_1)y^2(\xi_1)+y'^2(\xi_1)]\,d\xi_1+$$
$$+2y(\alpha)y'(\alpha)(x-\alpha)+y^2(\alpha). \tag{43}$$

Поэтому, если в некоторой точке α выполняется неравенство $y(\alpha)y'(\alpha)>0$, то из (42) следует, что произведение $y(x)y'(x)$ не обращается в нуль при $x>\alpha$, а функции $y(x)$ и $y'(x)$ имеют одинаковые знаки. Но в силу (43) имеем

$$y^2(x)>2y(\alpha)y'(\alpha)(x-\alpha).$$

Отсюда следует, что если $y(\alpha)>0$, то функция $y(x)$ возрастает, когда $x\to+\infty$, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$; если же $y(\alpha)<0$, то функция $y(x)$ убывает и стремится к $-\infty$.

Если в некоторой точке α имеем $y(\alpha)y'(\alpha)=0$, то при $\alpha_1>\alpha$ выполняется неравенство $y(\alpha_1)y'(\alpha_1)>0$, и поэтому сделанные выше выводы сохраняют силу.

Заметим еще, что, умножая уравнение (41) на $2y'$ и интегрируя его от α до x, получаем равенство (см. п. 2, „а“)

$$y'^2(x)-y'^2(\alpha)=2\int_\alpha^x A(\xi)y(\xi)y'(\xi)\,d\xi. \tag{44}$$

Следовательно, если при $x\geqslant\alpha$ имеет место неравенство $y(x)y'(x)>0$, то $y'^2(x)\geqslant y'^2(\alpha)>0$, причем[1]) из (44) вытекает, что в этом случае $\lim\limits_{x\to+\infty} y'^2(x)=+\infty$.

Итак, мы доказали, что *если в некоторой точке α из промежутка $[q,+\infty)$ выполнено неравенство $y(\alpha)y'(\alpha)\geqslant 0$, то либо при $x\geqslant\alpha$ решение $y(x)$ уравнения* (1) *и его производная $y'(x)$ положительны и возрастают, либо они отрицательны и убывают. При этом соответственно выполняются соотношения*

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} y'(x)=+\infty, \tag{45$_1$}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty} y'(x)=-\infty. \tag{45$_2$}$$

Нетрудно найти решения уравнения (41), для которых выполняются соотношения (45_1) или (45_2); для этого достаточно задать для некоторой точки α такие два числа (не равные одновременно нулю) $y(\alpha)$ и $y'(\alpha)$, что $y(\alpha)y'(\alpha)\geqslant 0$, и рассмотреть решения уравнения (61), соответствующие этим начальным условиям.

Изучим теперь случай, когда существует такое решение $y(x)$ уравнения (41), что при всех $x\geqslant\alpha$ выполняется неравенство

$$y(x)y'(x)<0\qquad (x\geqslant\alpha).$$

---

[1]) Если $y(\alpha)y'(\alpha)>0$, то из (42) следует, что $y(\xi)y'(\xi)>y(\alpha)y'(\alpha)$. — *Прим. ред.*

Тогда $y(x) \neq 0$, $y'(x) \neq 0$ и, так как функции $y(x)$ и $y'(x)$ непрерывны, то мы можем предположить, что при $x \geqslant \alpha$

$$y(x) > 0, \quad y'(x) < 0.$$

Отсюда следует, что функция $y(x)$ положительна и убывает, а из (44) вытекает, что $y'^2(x) < y'^2(\alpha)$. Поэтому функция $y'(x)$ отрицательна и возрастает, а, следовательно, функции $|y(x)|$, $|y'(x)|$ ограничены в $[q, +\infty)$.

Из (42) следует, что при $\xi > \alpha$

$$|y(\alpha)y'(\alpha)| > -y(\alpha)y'(\alpha) + y(\xi)y'(\xi) =$$

$$= \int_\alpha^\xi [A(\xi_1)y^2(\xi_1) + y'^2(\xi_1)]\,d\xi_1 > y^2(\xi)\int_\alpha^\xi A(\xi_1)\,d\xi_1 + y'^2(\xi)(\xi - \alpha),$$

откуда

$$y^2(\xi) < \frac{|y(\alpha)y'(\alpha)|}{\int_\alpha^\xi A(\xi_1)\,d\xi_1}, \quad y'^2(\xi) < \frac{|y(\alpha)y'(\alpha)|}{\xi - \alpha},$$

и, следовательно,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} y'(x) = 0. \tag{46}$$

Докажем, что *через любую точку плоскости с координатами* (α, β), $\beta \neq 0$ $(q \leqslant \alpha)$, *проходит одно и только одно решение уравнения* (41), *удовлетворяющее условиям* (46), *в то время как для всех остальных решений, проходящих через эту точку, выполняются либо условия* (45_1), *либо условия* (45_2)[1].

Без потери общности мы можем считать, что $\beta > 0$. Рассмотрим решение $y_1(x)$ уравнения (41), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(\alpha) = \beta, \quad y_1'(\alpha) = 1.$$

В силу доказанного выше при любом $x > \alpha$ имеем $y_1(x) > 0$,

$$y_1'(x) > 0, \quad \lim_{x \to +\infty} y_1(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} y_1'(x) = +\infty.$$

Общее решение уравнения (41) имеет вид

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_1(x) \int_\alpha^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\,d\xi.$$

---

[1]) Существование решения уравнения (41), удовлетворяющего условиям $y(\alpha) = \beta$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$, может быть получено как частный случай одной общей теоремы, доказанной Мамбриани [1] (см. гл. XII, § 5).

Поэтому решение, проходящее через точку (α, β), выражается формулой

$$y(x) = y_1(x)\left[1 + c_2 \int_\alpha^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi\right]. \tag{47}$$

Если $b > \alpha$, то решение $y(x)$, обращающееся в нуль в точке b, имеет вид

$$y(x) = y_1(x)\left[1 - \int_\alpha^x \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi \Big/ \int_\alpha^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi\right]. \tag{48}$$

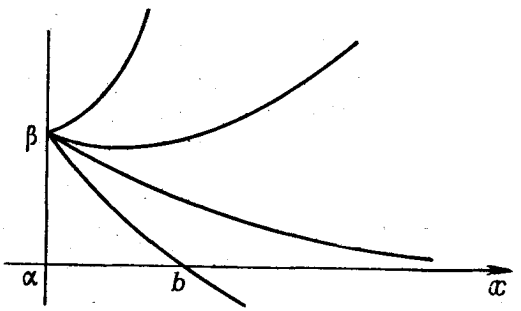
Легко убедиться в том, что решение $y(x)$, данное формулой (48), убывает и стремится к $-\infty$, когда $x \to +\infty$ (см. фиг. 2).

Так как $y(b) = 0$ и при $x > b$ имеем $y(x) < 0$, то при $x \geqslant b$ функция $y(x)$ убывает и стремится к $-\infty$[1]). Достаточно доказать, что $y(x)$ убывает и на отрезке (α, b).

Из (48) следует, что

$$y'(x) = \left[y_1'(x)\, y_1(x) \int_x^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi - 1\right] \Big/ y_1(x) \int_a^b \frac{1}{y_1^2(\xi)}\, d\xi. \tag{49}$$

С другой стороны, так как $y_1''(x) = A(x)\, y_1(x) > 0$, то кривая $y = y_1(x)$



Фиг. 2.

обращена вогнутостью вверх. (фиг. 2). Следовательно,

$$y_1(\xi) > y_1'(x)(\xi - x) + y_1(x) > 0 \quad (\xi > x),$$

и потому

$$\int_x^b \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)} < \int_x^{+\infty} \frac{d\xi}{y_1^2(\xi)} < \int_x^{+\infty} \frac{d\xi}{[y_1'(x)(\xi - x) + y_1(x)]^2} = \frac{1}{y_1(x)\, y_1'(x)},$$

но тогда из (49) вытекает, что $y'(x) < 0$.

---

[1]) Так как $\lim\limits_{x \to \infty} y_1(x) = +\infty$. — *Прим. ред.*

Из доказанного следует, что (см. фиг. 2) *если в формуле* (47) $c_2 < -1\Big/\int\limits_{\alpha}^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\,d\xi$, *то соответствующее решение* $y(x)$ *уравнения* (41) *убывает от* β *до* $-\infty$, *а если* $c_2 > -1\Big/\int\limits_{\alpha}^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\,d\xi$, *то соответствующее решение стремится к* $+\infty$; *наконец, если*

$$c_2 = -1\Big/\int\limits_{\alpha}^{+\infty} y_1^{-2}(\xi)\,d\xi,$$

то соответствующее решение положительно в промежутке $[\alpha, +\infty)$, *убывает и удовлетворяет соотношениям* (46) $(\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0)$.

7. Уравнение $y'' - [1 + Q(x)]\,y = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} Q(x) = 0$; асимптотическое разложение решений. а) Этот пункт посвящен *асимптотическому разложению решений уравнения*

$$y'' - [1 + Q(x)]\,y = 0 \tag{50}$$

при условии, что функция $Q(x)$ *непрерывна в промежутке* $[q, +\infty)$, *причем*

$$\lim_{x\to+\infty} Q(x) = 0, \tag{51_1}$$

$$\int\limits_{q}^{+\infty} |Q(x)|\,e^{2x}\,dx < +\infty. \tag{51_2}$$

Положим

$$y = z_1 e^{x} + z_2 e^{-x}, \tag{52_1}$$

$$y' = z_1 e^{x} - z_2 e^{-x}. \tag{52_2}$$

Дифференцируя первое из равенств, получаем, что $z_1' e^{x} + z_2' e^{-x} = 0$, а дифференцируя второе и подставляя в уравнение (50), получаем, что

$$z_1' e^{x} - z_2' e^{-x} = Q(x)\,[z_1 e^{x} + z_2 e^{-x}].$$

Таким образом, решение уравнения (50) сводится к нахождению функций z_1 и z_2, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} z_1' &= \frac{1}{2}\,Q(x)\,[z_1 + z_2 e^{-2x}], \\ z_2' &= -\frac{1}{2}\,Q(x)\,[z_1 e^{2x} + z_2]. \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Докажем, что для *любых чисел* α_1 *и* α_2 *существует одно и только одно решение системы* (53), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x\to+\infty} z_1(x)=\alpha_1, \quad \lim_{x\to+\infty} z_2(x)=\alpha_2. \tag{54}$$

Система (53) и условия (54) эквивалентны в совокупности системе интегральных уравнений:

$$z_1(x)=\alpha_1+\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\,[z_1(\xi)+z_2(\xi)\,e^{-2\xi}]\,d\xi,$$

$$z_2(x)=\alpha_2-\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\,[z_1(\xi)\,e^{2\xi}+z_2(\xi)]\,d\xi.$$

Повторяя рассуждения из п. 3, „б“, получаем для $z_1(x)$ и $z_2(x)$ равномерно и абсолютно сходящиеся в промежутке $[q_1, +\infty)$ ряды

$$z_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \quad z_2(x)=\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x),$$

где

$$u_0(x)=\alpha_1, \quad v_0(x)=\alpha_2,$$

$$u_n=\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\,[u_{n-1}(\xi)+e^{-2\xi}v_{n-1}(\xi)]\,d\xi,$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

$$v_n=-\frac{1}{2}\int_{+\infty}^{x} Q(\xi)\,[u_{n-1}(\xi)\,e^{2\xi}+v_{n-1}(\xi)]\,d\xi.$$

Поэтому общее решение уравнения (50) имеет вид

$$y(x)=e^{x}\,[\alpha_1+\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)]+e^{-x}\,[\alpha_2+\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x)].$$

б) Потребуем теперь от $Q(x)$ лишь выполнения условия (51_1). В этом случае предельное характеристическое уравнение для (50) имеет вид $\rho^2-1=0$, а потому корни его равны ± 1. Но тогда по теореме Перрона (§ 3, п. 1, „г“) существует решение уравнения (50), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{x\to+\infty} y=0, \quad \lim_{x\to+\infty} y'=0, \quad \lim_{x\to+\infty} y''=0.$$

Для изученного в „а“ случая такое решение получается при $\alpha_1=0$. В самом деле, если $\alpha_1=0$, то, в силу (51_2), $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}z_1(x)=0$.

8. Случаи, когда $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$; асимптотические выражения для максимумов и минимумов функций $|y(x)|$, $|y'(x)|$. В этом пункте мы изучим уравнение

$$y''+A(x)\,y=0, \tag{1}$$

где $A(x)>0$, причем либо $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=+\infty$, либо $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x)=0$. Мы дадим, при некоторых дополнительных предположениях о функции $A(x)$, *асимптотические выражения для максимумов функций $|y(x)|$ и $|y'(x)|$, когда $x\to+\infty$* [1].

а) *Пусть в уравнении* (1) *функция $A(x)$ непрерывна в промежутке $[q, +\infty)$ и удовлетворяет условию*

$$A(x)>0 \quad (x\geqslant q). \tag{55}$$

Пусть, кроме того, каковы бы ни были положительные числа k и τ, найдется такое значение x^0, что при $x\geqslant x^0$, $0\leqslant h\leqslant k/\sqrt{A(x)}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{A(x\pm h)}{A(x)}-1\right|<\tau \text{ [2]}. \tag{56}$$

При этих предположениях любое решение $y(x)$ уравнения (1) *имеет бесконечно много нулей*

$$x_0,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n},\ \ldots \tag{57}$$

и каждому значению τ, $0<\tau<1$ соответствует такой индекс n_0, что при $n>n_0$ имеем

$$\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})}\,(1+\tau)}<x_{2n+2}-x_{2n}<\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})}\,(1-\tau)} \tag{58}$$
$$(n=n_0+1,\ n_0+2,\ \ldots).$$

Пусть, в самом деле, k — некоторое положительное число, большее, чем π, и пусть M и m соответственно наибольшее и наименьшее значения функции $A(x)$ на отрезке $[x-k/\sqrt{A(x)},\ x+k/\sqrt{A(x)}]$. Выберем положительное число τ таким образом, чтобы выполнялось

---

[1]) См. Бирнацкий [1], Миллу [1], Виман [1], [2], Бутлевский [1]. Относительно обобщения результатов Вимана см. Мателль [1], стр. 67.

[2]) Указанное условие выполняется, например, для функции $A(x)=cx^n$ при $x>0$, $c>0$, $n>-2$. В самом деле,

$$\left|\frac{c(x\pm h)^n}{cx^n}-1\right|=\left|\left(1\pm\frac{h}{x}\right)^n-1\right|=\frac{h}{x}\,n\left(1\pm\theta\frac{h}{x}\right)^{n-1},\quad 0<\theta<1.$$

Но при $0\leqslant h\leqslant k/\sqrt{c}\,x^{n/2}$ имеем $h/x<k/\sqrt{c}\,x^{n/2+1}$, следовательно, $h/x\to 0$ при $x\to+\infty$, а множитель $n\left(1\pm\theta\frac{h}{x}\right)^{n-1}$ ограничен.

неравенство $\pi/k < 1 - \tau$. В силу (56) можно найти настолько большое значение x^0, что при $x \geqslant x^0$ имеем

$$(1-\tau)^2 \leqslant \frac{m}{A(x)} \leqslant \frac{M}{A(x)} \leqslant (1+\tau)^2. \tag{59}$$

Каково бы ни было $x > x^0$, отрезки $[x, x+\pi/\sqrt{M}]$ и $[x, x+\pi/\sqrt{m}]$ содержатся в отрезке $[x, x+k/\sqrt{A(x)}]$. Сравним на этих отрезках уравнение (1) соответственно с уравнениями

$$z''+Mz=0, \quad z''+mz=0.$$

Первое из этих уравнений имеет решение, обращающееся в нуль в точках x, $x+\pi/\sqrt{M}$, а второе — в точках x, $x+\pi/\sqrt{m}$. Поэтому, по теореме Штурма (см. гл. IV, § 2, п. 6, „а“), любое решение $y(x)$ уравнения (1) имеет в любом отрезке $[x, x+\pi/\sqrt{m}]$ по крайней мере один нуль. При этом функция $y(x)$ имеет бесконечно много нулей. Согласно доказанному в гл. IV, § 2, п. 2, „а“, совокупность нулей функции $y(x)$ не имеет предельной точки, а потому эту совокупность можно представить в виде возрастающей последовательности (57). Кроме того, начиная с достаточно большого номера n_0, имеют место неравенства

$$x_{2n}+\pi/\sqrt{M} < x_{2n+2} < x_{2n}+\pi/\sqrt{m}.$$

Принимая во внимание, что в силу (59) имеют место неравенства

$$\frac{1}{(1+\tau)\sqrt{A(x_{2n})}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{M}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{m}} \leqslant \frac{1}{(1-\tau)\sqrt{A(x_{2n})}}, \tag{59'}$$

убеждаемся в справедливости оценки (58).

б) Наложим теперь на функцию $A(x)$ более жесткие требования. *Пусть в промежутке* $[q, +\infty]$ *эта функция непрерывна и возрастает, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = +\infty$, *либо пусть она непрерывна и убывает, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} A(x) = 0$. *Пусть, далее, существует* $A'(x)$, *причем* $A'(x) \neq 0$. *Наконец, пусть для любых двух чисел* k *и* τ *найдется такое значение* x^0, *что при* $x > x^0$, $|h| \leqslant k/\sqrt{A(x)}$ *одновременно выполняются неравенства*

$$\left|\frac{A(x\pm h)}{A(x)} - 1\right| < \tau, \quad \left|\frac{A'(x\pm h)}{A'(x)} - 1\right| < \tau\ ^{1)}. \tag{60}$$

Рассмотрим последовательности точек

$$x_0, x_2, x_4, \ldots; \quad x_1, x_3, x_5, \ldots,$$

являющиеся соответственно последовательностью нулей некоторого решения $y(x)$ *уравнения* (1) (последовательностью точек макси-

---

[1]) Соотношения (60) выполняются, например, если $A(x) = cx^n$, $c > 0$, $n > -1$.